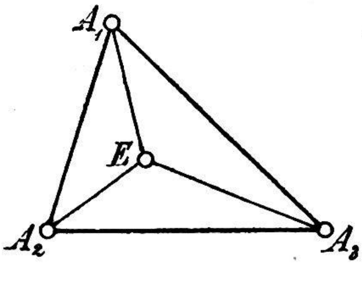
Dr. Albert Leuch.

Erzeugung und Untersuchung
einiger
ebenen Curven höherer Ordnung.

(Vorgetragen in der Sitzung vom 14. Januar 1888.)

Ein in Bezug auf das Fundamentaldreieck $A_1 A_2 A_3$ *) in dessen Ebene beliebig gelegener Kegelschnitt p wird durch Anwendung der allgemeinsten birationalen quadratischen Transformation (Inversion, im weitern Sinne aufgefasst) **) zu einer Curve vierter Ordnung p' mit drei Doppelpunkten in den Fundamentalpunkten. Den Tangenten von p entsprechen Kegelschnitte, welche dem Fundamentaldreieck umschrieben sind und die Curve p' berühren. Bringt man nun alle diese Kegelschnitte mit ihren zugehörigen, den Kegelschnitt p umhüllenden Geraden zum Schnitt, so wird eine höhere ebene Curve erzeugt als Ort der Schnittpunkte der Tangenten von p mit ihren correspondirenden Kegelschnitten.

Die vorliegende Arbeit soll sich mit der Untersuchung dieser Curve beschäftigen. †)



Jede Tangente des Kegelschnittes p liefert zwei Curvenpunkte, die zu einander invers sind oder einander entsprechen; daraus geht hervor, dass einem beliebigen Punkte der Curve stets wieder ein Punkt derselben entspricht. Die Curve muss sich daher selbst

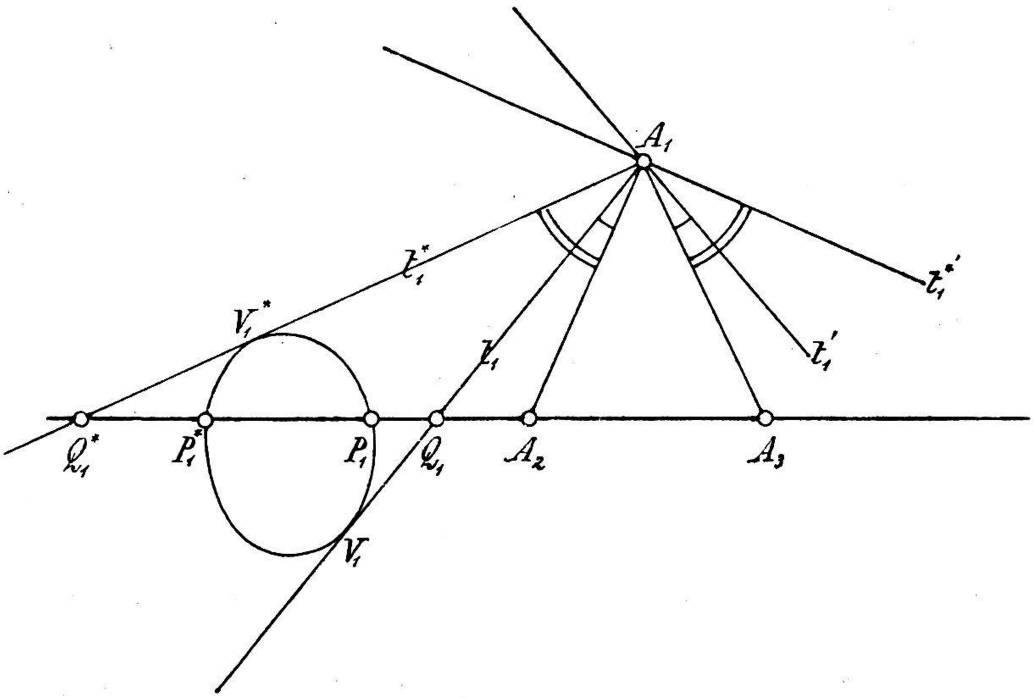
---

*) A_1, A_2, A_3 sind die Fundamentalpunkte, A_1A_2, A_1A_3, A_2A_3 die Fundamentallinien oder Axen eines ebenen Coordinatensystems; sein Einheitpunkt E werde in den Mittelpunkt des dem Fundamentaldreieck $A_1 A_2 A_3$ eingeschriebenen Kreises gelegt, so dass unter den trimetrischen Coordinaten x_1, x_2, x_3 eines Punktes der Ebene speziell Dreilinien-Coordinaten zu verstehen sind.

**) Vergl. Salmon-Fiedler, Höhere ebene Curven. Art. 284.

†) In anderer Ausdrucksform lautet das zu behandelnde Problem: Eine bewegliche Gerade g berühre einen festen Kegelschnitt p, man bestimme und untersuche den Ort der Schnittpunkte der beweglichen Geraden mit ihrem entsprechenden (inversen) Kegelschnitt g'.

entsprechen und zwar in der Weise, dass je zwei entsprechende Punkte auf einer Tangente des Kegelschnittes p liegen; die Inverse oder Transformirte unserer Curve ist also identisch mit der Original-Curve. — Die durch die Fundamentalpunkte gehenden Tangenten von p, denen Kegelschnitte entsprechen, welche in Linienpaare zerfallen, liefern ebenfalls je zwei Curvenpunkte. Von A_1 aus gehen an den Kegelschnitt p die beiden Tangenten t_1 und t_1^*; der Geraden t_1 entspricht ein Kegelschnitt, welcher in das Linienpaar $A_2 A_3$, t_1' zerfällt, wobei t_1' denjenigen durch A_1 gehenden Strahl bedeutet, der mit $A_1 A_3$ denselben Winkel bildet wie t_1 mit $A_1 A_2$, oder es ist t_1' der sogenannte inverse Strahl zu t_1. Die Schnittpunkte A_1 und Q_1 von t_1 mit



t_1' respective $A_2 A_3$ gehören daher der Curve an. Die Tangente t_1^* gibt die Curvenpunkte A_1 und Q_1^* als Schnittpunkte von t_1^* mit seinem inversen Strahle $t_1^{*\prime}$ und der Fundamentallinie $A_2 A_3$ oder $x_1 = 0$. Der Fundamentalpunkt A_1 zählt also für zwei Punkte, die Curve geht zwei Mal durch ihn hindurch oder A_1 ist ein Doppelpunkt der Curve. Analog verhält es sich mit den Fundamentalpunkten A_2 und A_3.

Die Fundamentallinie $A_2 A_3$ oder $x_1 = 0$ kann nur die Doppelpunkte A_2, A_3, welche vier Punkte repräsentiren und die beiden Punkte Q_1 und Q_1^* mit der Curve gemein haben; denn angenommen, es existirte ein weiterer Schnittpunkt R, so müsste sein entsprechender Punkt R′ auf einer p-Tangente aus R liegen, auf t_R oder t_R^*, welche reell wären, da R, wie alle Curvenpunkte, nicht im Innern von p sich befinden könnte. Nun entspricht aber dem Punkte R, wie jedem Punkte der Fundamentallinie $x_1 = 0$, der Fundamentalpunkt A_1, folglich kann RR' keine p-Tangente sein und somit R unmöglich der Curve angehören. Die Curve lässt also mit $x_1 = 0$ höchstens sechs Schnittpunkte zu; ebenso schneidet jede der Fundamentallinien $x_2 = 0$, $x_3 = 0$ die Curve in sechs Punkten, worin allfällige imaginäre Schnittpunkte inbegriffen sind. Unsere Curve wird daher von der sechsten Ordnung sein müssen, was auch durch die folgende Betrachtung bestätigt wird.

Wenn μ die Ordnungszahl einer Original-Curve ist, dann ist die Ordnungszahl ihrer Transformirten im Allgemeinen $2\,\mu$. Geht aber die Original-Curve, wie unsere zu untersuchende Curve, zwei Mal durch jeden der Fundamentalpunkte, so wird die Transformirte oder Inverse von der Ordnung $2\,\mu - 6$, weil sich die Fundamentallinien, jede doppelt gezählt, absondern und daher nicht zur Inversen gerechnet werden können. Nun soll die Inverse identisch sein mit der Original Curve, somit ist

$$2\,\mu - 6 = \mu, \quad \text{woraus folgt:}$$
$$\mu = 6.$$

Die Tangenten der Curve sechster Ordnung C_6 (wie sie im Folgenden stets bezeichnet werden soll) im Doppelpunkt A_1 sind die Inversen von t_1 und t_1^*, also t_1' und $t_1^{*\prime}$. Dem Schnittpunkt Q_1 der C_6 mit $A_2\,A_3$ entspricht nämlich ein dem Punkte A_1 unendlich naher Punkt Q_1' in bestimmter Richtung von A_1 aus, nämlich so, dass wie im Allgemeinen die Strahlen $A_1\,Q_1$, $A_1\,Q_1'$ mit $A_1\,A_2$ resp. $A_1\,A_3$ gleiche Winkel einschliessen, d. h. einander entsprechen; es ist somit $A_1\,Q_1'$ oder t_1' eine Tangente der C_6 in A_1. Analog ist $t_1^{*\prime}$ die Tangente eines zweiten durch A_1 gehenden Astes der C_6 in A_1.

Die Tangenten im Doppelpunkt A_1 sind gleichzeitig Tangenten der Curve vierter Ordnung p' und zwar ausser den Tangenten in A_1 die einzigen, welche von A_1 aus an p' gehen; sie berühren die C_4 in den Punkten V_1' und $V_1^{*\prime}$, welche beziehungsweise den Berührungspunkten V_1 und V_1^* von t_1 und t_1^* mit p entsprechen.

Die Tangenten von p' im Doppelpunkt A_1 sind bekanntlich die Inversen der Geraden, welche von A_1 nach den Schnittpunkten P_1, P_1^* der Curve p mit $A_2\,A_3$ gehen; würden P_1 und P_1^* beziehungsweise mit Q_1 und Q_1^* zusammenfallen, so hätten p' und C_6 im gemeinschaftlichen Doppelpunkt A_1 die nämlichen Tangenten. In diesem Falle fielen aber auch die Berührungspunkte V_1 und V_1^* resp. mit Q_1 und

Q_1^* und daher V_1' und $V_1^{*\prime}$ mit A_1 zusammen, so dass die Tangenten der C_6 in A_1 die einzigen von A_1 aus an p' gehenden Tangenten wären.*)

Im Falle der Realität der Tangenten t_1 und t_1^*, also wenn A_1 ausserhalb des Kegelschnittes p liegt, ist A_1 ein Knotenpunkt der C_6. Liegt A_1 im Innern von p, so sind die Tangenten im Doppelpunkt A_1 imaginär, d. h. A_1 ist ein isolirter Punkt. Befindet sich A_1 auf dem Kegelschnitt p, dann fallen die Tangenten in A_1 zusammen, d. h. A_1 wird zur Spitze; die zugehörige Rückkehrtangente t_1' ist die Inverse der Tangente t_1 des Kegelschnittes p in A_1. Im Schnittpunkte der letztern mit $x_1 = 0$ fallen Q_1 und Q_1^* zusammen und in diesem Punkte wird daher die C_6 von der Fundamentallinie $x_1 = 0$ berührt. — Analoges gilt für die übrigen Doppelpunkte A_2 und A_3; die Tangenten der C_6 in denselben sind die Inversen der respectiven Tangenten, welche von A_2 und A_3 aus an den Kegelschnitt p gelegt werden können.

Da die C_6 sich selbst entspricht, so muss sie auch durch die vier sich selbst entsprechenden Punkte der Ebene, die Centra E, E_1, E_2, E_3 der dem Fundamentaldreiseit eingeschriebenen Kreise, hindurchgehen. Es seien t_E und t_E^* die beiden von E aus an p gehenden Tangenten, dann entspricht der Geraden t_E ein durch A_1, A_2, A_3 gehender Kegelschnitt, welcher t_E in E berührt; die beiden Punkte der C_6, welche t_E liefert, fallen also in E zusammen, woraus folgt, dass t_E eine Tangente der C_6 in E ist. Ebenso ist t_E^* eine Tangente der C_6 im sich selbst entsprechenden Punkte E; letzterer ist daher ein Punkt, durch welchen zwei verschiedene Aeste der Curve gehen, d. h. ein Doppelpunkt der C_6, und die Tangenten in demselben sind die von E aus an den Kegelschnitt p gehenden Tangenten t_E und t_E^*. E ist ein Knotenpunkt oder ein isolirter Punkt der C_6, je nachdem er ausserhalb oder innerhalb des Kegelschnittes p liegt. Geht p durch E, dann wird E ein Berührungsknoten der C_6, d. h. durch E gehen zwei Aeste der Curve, welche sich in E berühren; die gemeinschaftliche Tangente hat, wie später für einige spezielle Curven auch analytisch nachgewiesen wird, in E vier zusammenfallende Punkte mit der C_6 gemein. Der Punkt E vertritt die Stelle von zwei Durchschnittspunkten der beiden sich in ihm berührenden Aeste, d. h. von zwei Doppelpunkten der C_6; derselbe kann als Vereinigung zweier Knotenpunkte angesehen werden. Im Berührungsknoten berühren sich die vier Curven p, p', C_6 und der Kegelschnitt t_E'.

*) Weiteres hierüber folgt im zweiten, spezielleren Theile dieser Schrift.

Dasselbe gilt für die Punkte E_1, E_2 und E_3. — Die C_6 kann nicht mehr als die sieben Doppelpunkte A_1, A_2, A_3, E, E_1, E_2, E_3 besitzen, denn gesetzt, es würde noch irgend ein Doppelpunkt D existiren, so müsste sein inverser Punkt D' ebenfalls ein Doppelpunkt der C_6 sein und die Gerade DD' hätte alsdann mehr als sechs Punkte mit der C_6 gemein.

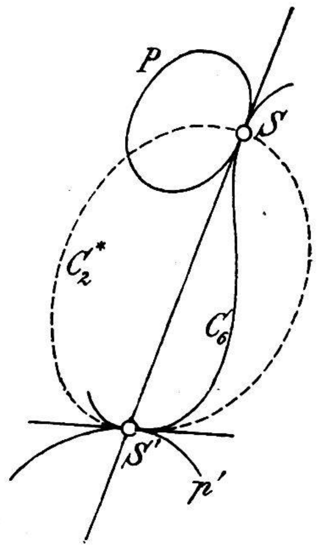
Im allgemeinsten Falle (bei der allgemeinsten Lage von p gegenüber dem Fundamentaldreieck) besitzt daher die C_6 sieben Doppelpunkte und keine Spitzen und hat somit die folgenden Plücker'schen Charaktere:

Ordnungszahl $\mu = 6$, Zahl der Doppelpunkte $\delta = 7$,
Zahl der Spitzen $\varkappa = 0$,
Klassenzahl $\nu = \mu\,(\mu - 1) - 2\,\delta - 3\,\varkappa = 16$,
Zahl der Inflexionstangenten $\iota = 3\,\mu\,(\mu - 2) - 6\,\delta - 8\,\varkappa = 30$,
« « Doppeltangenten $\tau = \frac{1}{2} \cdot \left[(\nu - \mu)(\nu + \mu - 9) + 2\,\delta\right] = 72$.

Enthält p	einen der	Punkte E, dann ist für die C_6	$\delta = 8$.
« «	zwei «	« « « « « « «	$\delta = 9$.
« «	drei «	« « « « « « «	$\delta = 10$.
« «	sämmtliche vier	« « « « « « «	$\delta = 11$.

Da 10 die Maximalzahl der Doppelpunkte einer Curve sechster Ordnung ist, so müsste letztere nothwendigerweise zerfallen, wenn p durch alle vier Punkte E ginge.

Da die C_6 zu sich selbst invers ist, so entspricht einem gemeinsamen Punkte von p und C_6 ein gemeinsamer Punkt von p' und C_6. p' und C_6 schneiden sich in $4 \times 6 = 24$ Punkten, unter denen sich die Fundamentalpunkte, und zwar jeder vierfach gezählt, befinden. Sieht man daher von den zwölf letzteren ab, so bleiben zwölf gemeinsame Punkte von p' und C_6 übrig, welche die Inversen zu den zwölf gemeinsamen Punkten von p und C_6 repräsentiren. Nun können niemals Punkte der C_6 innerhalb p liegen; ist daher S ein gemeinsamer Punkt von p und C_6, so kann in S die C_6 den Kegelschnitt p nicht schneiden, muss ihn also berühren und in Folge dessen berührt C_6 die Curve p' in S', dem Inversen zu S. Von den zwölf gemeinsamen Punkten der C_6 und p müssen also je zwei zusammenfallen, so dass demnach p von der C_6 sechs Mal und ebenso oft p' von der C_6 berührt wird. Die Gerade SS' ist die Tangente an p in S, ihr correspondirender Kegelschnitt C_2^* geht durch S und S' und berührt die Curve p' in S'; C_2^*



und p' haben also in S' die nämliche Tangente, welche im Allgemeinen nicht mit SS' zusammenfallen wird. Da eine Gerade g nur dann ihren entsprechenden Kegelschnitt g' berühren kann, wenn g und folglich auch g' durch E_i $(i = 0, 1, 2, 3)$ gehen, so wird auch SS' nur dann ihren entsprechenden Kegelschnitt C_2^* berühren, wenn S und mithin auch S' mit E_i zusammenfallen; in letzterem Falle ist dann SS' eine gemeinschaftliche Tangente von p und p' (auch von C_2^* und C_6) mit dem gemeinschaftlichen Berührungspunkt E_i. Im Allgemeinen wird demnach SS' keine gemeinschaftliche Tangente sein.

Es gibt nun sechs Punkte S und, da jeder einen einzigen entsprechenden S' auf C_6 hat, auch sechs Linien SS'. Diese Linien sind solche Tangenten von p, deren entsprechende Kegelschnitte sie in ihren Berührungspunkten S schneiden und gleichzeitig p' und C_6 in den Punkten S' berühren.

Den zwölf gemeinschaftlichen Tangenten von p und p' †) entsprechen Kegelschnitte, welche p' und p gleichzeitig berühren.

Die C_6 schneidet den dem Fundamentaldreieck umschriebenen Kreis K in zwölf Punkten, unter denen die Fundamentalpunkte sich befinden, und zwar jeder zwei Schnittpunkte repräsentirend. Ausser A_1, A_2, A_3 existiren also noch sechs Schnittpunkte von K und C_6; ihre Inversen, welche auch der C_6 angehören, sind unendlich fern, sie stellen daher die sechs unendlich fernen Punkte der C_6 vor. Ist X ein solcher Schnittpunkt von C_6 und K, so gibt diejenige von X aus an p gehende Tangente, welche parallel zur Inversen von A_1X *) ist, die Richtung XX'_∞ nach dem unendlich fernen Punkt X'_∞ an. XX'_∞ ist eine p-Tangente, welche ihren entsprechenden Kegelschnitt in X u. X'_∞ schneidet; der Kegelschnitt wird also eine Hyperbel und die Gerade XX'_∞ eine Parallele zu einer ihrer Asymptoten sein, oder er ist eine Parabel und XX'_∞ eine Parallele zu ihrer Axe; dieser letztere Fall tritt nur dann ein, wenn XX' zugleich eine Tangente des Kreises K und zwar diejenige im Punkte X ist. Der unendlich ferne Punkt X' der C_6 ist

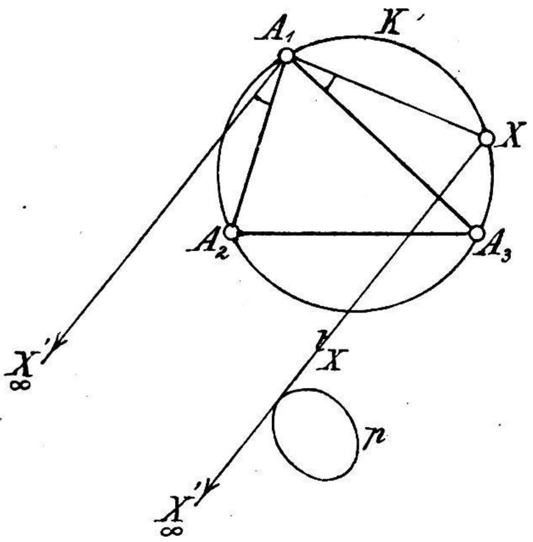
---

†) p ist von der zweiten, p' von der sechsten Klasse.

*) oder A_2X, oder A_3X.

ein unendlich ferner Punkt der Hyperbel, respective der unendlich ferne Punkt der Parabel, welche der Geraden XX' entspricht. Die Tangente der C_6 in X'_∞, also eine Asymptote der C_6, ist parallel XX'_∞, also parallel der zu X' gehörigen Asymptote der Hyperbel, respective parallel zur Axe der Parabel, welche XX' entspricht. Würde XX' zugleich die C_6 in X berühren, so hätten die Hyperbel und C_6 eine gemeinschaftliche Asymptote; im andern Falle, in welchem die Inverse von XX' eine Parabel ist, würden die Parabel und die C_6 sich im gemeinschaftlichen unendlich fernen Punkt X'_∞ berühren, d. h. die unendlich ferne Gerade wäre die Tangente der C_6 in X'_∞.

Wenn der Inverse X'_∞ eines Schnittpunktes X einer p-Tangente t_X mit dem Kreise K auf t_X liegt, dann ist X'_∞ ein unendlich ferner Punkt der C_6 und t_X gibt die Richtung nach demselben an. Es gibt sechs solche Tangenten t_X, von denen je zwei imaginär sein können.



Jedes Mal, wenn der Kegelschnitt p eine der sechs Seiten des vollständigen Vierecks $E\ E_1\ E_2\ E_3$ berührt, vermindert sich die Ordnungszahl der C_6 um eine Einheit; denn ist z. B. die Linie $E_2\ E_3$ oder $x_2 + x_3 = 0$ eine Tangente von p, dann gehören alle Punkte dieser Linie, da sie sich selbst entspricht, der C_6 an, es sondert sich daher $x_2 + x_3 = 0$ als Theil ab und der Rest ist eine Curve fünfter Ordnung. Es können höchstens vier der Linien $E_i\,E_k$, von denen keine drei durch einen Punkt gehen, von p berührt werden; tritt dieser Fall ein, so reduzirt sich die C_6 auf eine C_2, welche in ein Linienpaar zerfällt. Ist beispielsweise p eine Ellipse, welche die Linien $x_2 \pm x_3 = 0$ und $x_1 \pm x_3 = 0$ zu Tangenten hat, dann zerfällt C_6 in diese vier Linien und eine C_2 mit dem Doppelpunkt A_3, also ein Linienpaar durch A_3 und zwar ist es das Paar der von A_3 aus an die Ellipse p gehenden Tangenten; letztere sind zu einander invers. Bezeichnen t_3 und t_3' diese beiden Tangenten, so bilden die übrigen Tangenten des Kegelschnittes p auf t_3 und t_3' zwei projektivische Punktreihen, deren Erzeugniss, d. h. die Enveloppe der Verbindungslinien entsprechender Punkte beider Reihen, der Kegelschnitt p ist.

Die Konstruktion der C_6 ist sehr einfach, man hat nur mehrmals die Schnittpunkte einer Geraden mit einem durch fünf Elemente bestimmten Kegelschnitt zu bestimmen. Von jedem einer p-Tangente entsprechenden Kegelschnitt kennt man die Tangenten in den Fundamentalpunkten. Bezeichnen nämlich B_1, B_2, B_3 die Schnittpunkte irgend einer p-Tangente t mit den Fundamentallinien $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$, so sind die Inversen zu $A_1 B_1$, $A_2 B_2$, $A_3 B_3$ die respectiven Tangenten des Kegelschnittes t' in den Fundamentalpunkten A_1, A_2, A_3. Zur Konstruktion der gemeinsamen Punkte von t und t' genügen für t' die Punkte A_1, A_2, A_3 und die Tangenten in zwei derselben.

Unter den den p-Tangenten entsprechenden Kegelschnitten gibt es im Allgemeinen sechs Linienpaare, dieselben sind reell, wenn p die Fundamentalpunkte ausschliesst, — Ellipsen und Hyperbeln, erstere entsprechen den p-Tangenten, welche den Kreis K nicht schneiden, letztere sind die Inversen der den Kreis K schneidenden p-Tangenten, — vier Parabeln, dieselben entsprechen den gemeinschaftlichen Tangenten von p und K, — zwei gleichseitige Hyperbeln, wenn der Mittelpunkt M des Kreises K ausserhalb p liegt*) — endlich auch einen Kreis, wenn p eine Parabel ist; in diesem Falle ist die unendlich ferne Gerade eine p-Tangente, ihr entsprechender Kegelschnitt der Kreis K und die C_6 enthält in Folge dessen die unendlich fernen imaginären Kreispunkte. Es ergibt sich hieraus, dass die Zahl der reellen unendlich fernen Punkte der C_6 von der Lage des Kegelschnittes p in Bezug auf den Kreis K abhängig ist. So wird z. B. die C_6 keine reellen unendlich fernen Punkte haben, wenn p den Kreis K einschliesst, weil in diesem Falle den p-Tangenten nur Ellipsen**) entsprechen können.

Um zur Gleichung der Curve sechster Ordnung in Punktcoordinaten zu gelangen, ermitteln wir zunächst die Coordinaten (besser gesagt: die Verhältnisse der Coordinaten) eines beliebigen Punktes P_λ, welcher dem Kegelschnitt p angehört; dieselben werden Funktionen

---

*) Dem Strahlenbüschel mit dem Scheitel M entspricht das Kegelschnittbüschel mit den Grundpunkten A_1, A_2, A_3, H, wo H den Höhenschnittpunkt des Dreiecks $A_1 A_2 A_3$ bezeichnet. Die Kegelschnitte dieses Büschels sind sämmtlich gleichseitige Hyperbeln. Durch Anwendung der Inversion (im weiteren Sinne) ist daher der Beweis des Satzes, dass jede einem Dreieck umschriebene gleichseitige Hyperbel durch den Höhenpunkt desselben geht, ausserordentlich einfach.

**) Unter diesen befindet sich auch der Kreis K, wenn p eine Parabel ist.

eines variablen Parameters λ sein. Alsdann stellt man die Gleichung der p-Tangente t_λ im Punkte P_λ auf und ersetzt hierin die Variablen x_1, x_2, x_3 durch ihre reciproken Werthe, um die Gleichung des Kegelschnittes t_λ' zu erhalten, welcher der Tangente t_λ entspricht. Eliminirt man nun zwischen den beiden Gleichungen für t_λ und t_λ' den in den Coëfficienten derselben auftretenden Parameter λ, so ergibt sich eine Gleichung, welcher die Coordinaten der Schnittpunkte sämmtlicher p-Tangenten mit ihren entsprechenden Kegelschnitten genügen, also die Gleichung unserer C_6. *)

Nach diesen allgemeinen Betrachtungen gehen wir nun über zur Untersuchung einiger Curven sechster Ordnung, die sich ergeben, wenn der Kegelschnitt p spezielle Lagen gegenüber dem Fundamentaldreieck annimmt.

I. Der feste Kegelschnitt p sei ein Kegelschnitt, für welchen das Fundamentaldreieck ein Tripel harmonischer Pole ist.

Ein Kegelschnitt, bezogen auf ein Tripel harmonischer Pole, hat die Gleichung

p) . . . . . $a_1 x_1^2 + a_2 x_2^2 - a_3 x_3^2 = 0.$

Bezeichnen a_1, a_2, a_3 positive Zahlen, dann liegt der Fundamentalpunkt A_3 innerhalb, A_1 und A_2 dagegen liegen ausserhalb des Kegelschnittes p. Die Fundamentallinien sind die Polaren der Gegenecken in Bezug auf p.

Die Inverse p′ von p hat die Gleichung

p′) . . . $a_1 x_2^2 x_3^2 + a_2 x_1^2 x_3^2 - a_3 x_1^2 x_2^2 = 0$;

sie ist eine Curve vierter Ordnung und sechster Klasse, welche in A_1 und A_2 doppelte Inflexionsknoten besitzt und für welche A_3 ein isolirter Punkt ist. Da die von A_1 aus an den Kegelschnitt p gehenden Tan-

*) Da zwei zu einander inverse Punkte der Ebene die Brennpunkte eines Kegelschnittes sind, welcher die Fundamentallinien berührt, so kann die nachgewiesene Curve sechster Ordnung auch betrachtet werden als Ort der Brennpunkte derjenigen die Fundamentallinien berührenden Kegelschnitte, deren Axen eine feste Curve zweiten Grades umhüllen.