

**Zeitschrift:** Mitteilungen der Naturforschenden Gesellschaft Bern  
**Herausgeber:** Naturforschende Gesellschaft Bern  
**Band:** - (1889)  
**Heft:** 1215-1243

**Artikel:** Erzeugung und Untersuchung einiger ebenen Curven höherer Ordnung  
**Autor:** Leuch, Albert  
**Vorwort**  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-319023>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 01.05.2026

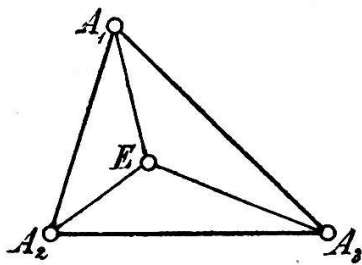
**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# Erzeugung und Untersuchung einiger ebenen Curven höherer Ordnung.

(Vorgetragen in der Sitzung vom 14. Januar 1888.)

Ein in Bezug auf das Fundamentaldreieck  $A_1 A_2 A_3$  \*) in dessen Ebene beliebig gelegener Kegelschnitt  $p$  wird durch Anwendung der allgemeinsten birationalen quadratischen Transformation (Inversion, im weitern Sinne aufgefasst) \*\*) zu einer Curve vierter Ordnung  $p'$  mit drei Doppelpunkten in den Fundamentalpunkten. Den Tangenten von  $p$  entsprechen Kegelschnitte, welche dem Fundamentaldreieck umschrieben sind und die Curve  $p'$  berühren. Bringt man nun alle diese Kegelschnitte mit ihren zugehörigen, den Kegelschnitt  $p$  umhüllenden Geraden zum Schnitt, so wird eine höhere ebene Curve erzeugt als Ort der Schnittpunkte der Tangenten von  $p$  mit ihren correspondirenden Kegelschnitten.

Die vorliegende Arbeit soll sich mit der Untersuchung dieser Curve beschäftigen. †)



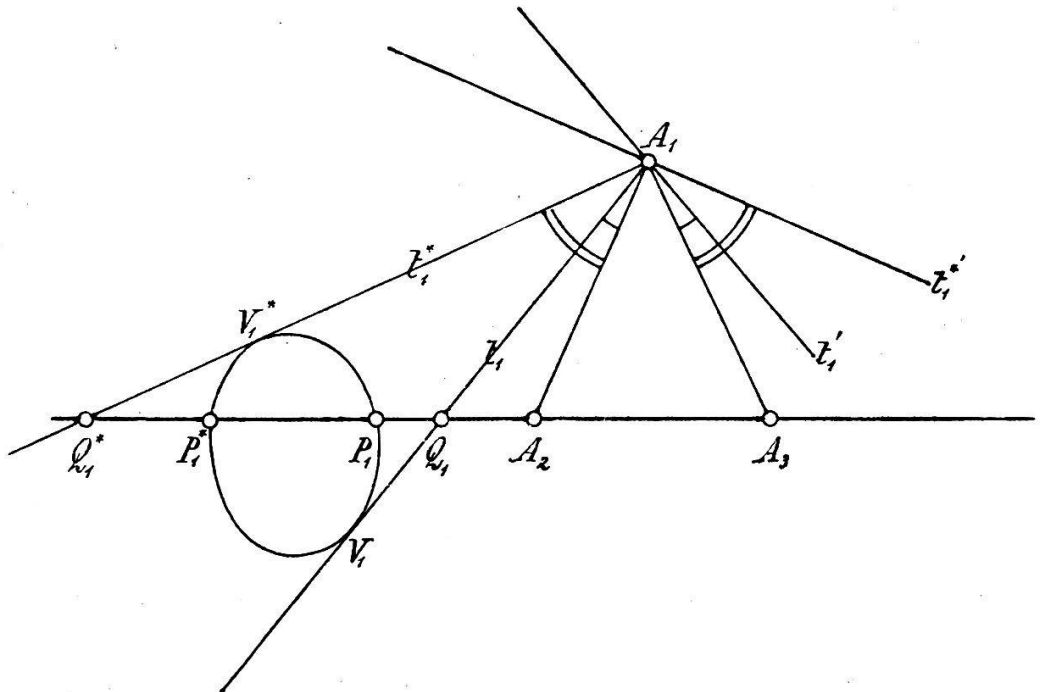
Jede Tangente des Kegelschnittes  $p$  liefert zwei Curvenpunkte, die zu einander invers sind oder einander entsprechen; daraus geht hervor, dass einem beliebigen Punkte der Curve stets wieder ein Punkt derselben entspricht. Die Curve muss sich daher selbst

\*)  $A_1, A_2, A_3$  sind die Fundamentalpunkte,  $A_1A_2, A_1A_3, A_2A_3$  die Fundamentallinien oder Axen eines ebenen Coordinatensystems; sein Einheitpunkt  $E$  werde in den Mittelpunkt des dem Fundamentaldreieck  $A_1 A_2 A_3$  eingeschriebenen Kreises gelegt, so dass unter den trimetrischen Coordinaten  $x_1, x_2, x_3$  eines Punktes der Ebene speziell Dreiliniencoordinaten zu verstehen sind.

\*\*) Vergl. Salmon-Fiedler, Höhere ebene Curven. Art. 284.

†) In anderer Ausdrucksform lautet das zu behandelnde Problem: Eine bewegliche Gerade  $g$  berühre einen festen Kegelschnitt  $p$ , man bestimme und untersuche den Ort der Schnittpunkte der beweglichen Geraden mit ihrem entsprechenden (inversen) Kegelschnitt  $g'$ .

entsprechen und zwar in der Weise, dass je zwei entsprechende Punkte auf einer Tangente des Kegelschnittes  $p$  liegen; die Inverse oder Transformirte unserer Curve ist also identisch mit der Original-Curve. — Die durch die Fundamentalpunkte gehenden Tangenten von  $p$ , denen Kegelschnitte entsprechen, welche in Linienpaare zerfallen, liefern ebenfalls je zwei Curvenpunkte. Von  $A_1$  aus gehen an den Kegelschnitt  $p$  die beiden Tangenten  $t_1$  und  $t_1^*$ ; der Geraden  $t_1$  entspricht ein Kegelschnitt, welcher in das Linienpaar  $A_2 A_3$ ,  $t_1'$  zerfällt, wobei  $t_1'$  denjenigen durch  $A_1$  gehenden Strahl bedeutet, der mit  $A_1 A_3$  denselben Winkel bildet wie  $t_1$  mit  $A_1 A_2$ , oder es ist  $t_1'$  der sogenannte inverse Strahl zu  $t_1$ . Die Schnittpunkte  $A_1$  und  $Q_1$  von  $t_1$  mit



$t_1'$  respective  $A_2 A_3$  gehören daher der Curve an. Die Tangente  $t_1^*$  gibt die Curvenpunkte  $A_1$  und  $Q_1^*$  als Schnittpunkte von  $t_1^*$  mit seinem inversen Strahle  $t_1''$  und der Fundamentallinie  $A_2 A_3$  oder  $x_1 = 0$ . Der Fundamentalpunkt  $A_1$  zählt also für zwei Punkte, die Curve geht zwei Mal durch ihn hindurch oder  $A_1$  ist ein Doppelpunkt der Curve. Analog verhält es sich mit den Fundamentalpunkten  $A_2$  und  $A_3$ .

Die Fundamentallinie  $A_2 A_3$  oder  $x_1 = 0$  kann nur die Doppelpunkte  $A_2, A_3$ , welche vier Punkte repräsentiren und die beiden Punkte  $Q_1$  und  $Q_1^*$  mit der Curve gemein haben; denn angenommen, es existirte ein weiterer Schnittpunkt  $R$ , so müsste sein entsprechender Punkt  $R'$  auf einer  $p$ -Tangente aus  $R$  liegen, auf  $t_R$  oder  $t_R^*$ , welche reell wären, da  $R$ , wie alle Curvenpunkte, nicht im Innern von  $p$  sich

befinden könnte. Nun entspricht aber dem Punkte R, wie jedem Punkte der Fundamentallinie  $x_1 = 0$ , der Fundamentalpunkt  $A_1$ , folglich kann  $RR'$  keine  $p$ -Tangente sein und somit R unmöglich der Curve angehören. Die Curve lässt also mit  $x_1 = 0$  höchstens sechs Schnittpunkte zu; ebenso schneidet jede der Fundamentallinien  $x_2 = 0$ ,  $x_3 = 0$  die Curve in sechs Punkten, worin allfällige imaginäre Schnittpunkte inbegriffen sind. Unsere Curve wird daher von der sechsten Ordnung sein müssen, was auch durch die folgende Betrachtung bestätigt wird.

Wenn  $\mu$  die Ordnungszahl einer Original-Curve ist, dann ist die Ordnungszahl ihrer Transformirten im Allgemeinen  $2\mu$ . Geht aber die Original-Curve, wie unsere zu untersuchende Curve, zwei Mal durch jeden der Fundamentalpunkte, so wird die Transformirte oder Inverse von der Ordnung  $2\mu - 6$ , weil sich die Fundamentallinien, jede doppelt gezählt, absondern und daher nicht zur Inversen gerechnet werden können. Nun soll die Inverse identisch sein mit der Original Curve, somit ist

$$\begin{aligned} 2\mu - 6 &= \mu, \text{ woraus folgt:} \\ \mu &= 6. \end{aligned}$$

Die Tangenten der Curve sechster Ordnung  $C_6$  (wie sie im Folgenden stets bezeichnet werden soll) im Doppelpunkt  $A_1$  sind die Inversen von  $t_1$  und  $t_1^*$ , also  $t_1'$  und  $t_1^{*'}$ . Dem Schnittpunkt  $Q_1$  der  $C_6$  mit  $A_2 A_3$  entspricht nämlich ein dem Punkte  $A_1$  unendlich naher Punkt  $Q_1'$  in bestimmter Richtung von  $A_1$  aus, nämlich so, dass wie im Allgemeinen die Strahlen  $A_1 Q_1$ ,  $A_1 Q_1'$  mit  $A_1 A_2$  resp.  $A_1 A_3$  gleiche Winkel einschliessen, d. h. einander entsprechen; es ist somit  $A_1 Q_1'$  oder  $t_1'$  eine Tangente der  $C_6$  in  $A_1$ . Analog ist  $t_1^{*'}$  die Tangente eines zweiten durch  $A_1$  gehenden Astes der  $C_6$  in  $A_1$ .

Die Tangenten im Doppelpunkt  $A_1$  sind gleichzeitig Tangenten der Curve vierter Ordnung  $p'$  und zwar ausser den Tangenten in  $A_1$  die einzigen, welche von  $A_1$  aus an  $p'$  gehen; sie berühren die  $C_4$  in den Punkten  $V_1'$  und  $V_1^{*'}$ , welche beziehungsweise den Berührungspunkten  $V_1$  und  $V_1^*$  von  $t_1$  und  $t_1^*$  mit  $p$  entsprechen.

Die Tangenten von  $p'$  im Doppelpunkt  $A_1$  sind bekanntlich die Inversen der Geraden, welche von  $A_1$  nach den Schnittpunkten  $P_1$ ,  $P_1^*$  der Curve  $p$  mit  $A_2 A_3$  gehen; würden  $P_1$  und  $P_1^*$  beziehungsweise mit  $Q_1$  und  $Q_1^*$  zusammenfallen, so hätten  $p'$  und  $C_6$  im gemeinschaftlichen Doppelpunkt  $A_1$  die nämlichen Tangenten. In diesem Falle fielen aber auch die Berührungspunkte  $V_1$  und  $V_1^*$  resp. mit  $Q_1$  und

$Q_1^*$  und daher  $V_1'$  und  $V_1^*$  mit  $A_1$  zusammen, so dass die Tangenten der  $C_6$  in  $A_1$  die einzigen von  $A_1$  aus an  $p'$  gehenden Tangenten wären.)\*

Im Falle der Realität der Tangenten  $t_1$  und  $t_1^*$ , also wenn  $A_1$  ausserhalb des Kegelschnittes  $p$  liegt, ist  $A_1$  ein Knotenpunkt der  $C_6$ . Liegt  $A_1$  im Innern von  $p$ , so sind die Tangenten im Doppelpunkt  $A_1$  imaginär, d. h.  $A_1$  ist ein isolirter Punkt. Befindet sich  $A_1$  auf dem Kegelschnitt  $p$ , dann fallen die Tangenten in  $A_1$  zusammen, d. h.  $A_1$  wird zur Spitze; die zugehörige Rückkehrtangente  $t_1'$  ist die Inverse der Tangente  $t_1$  des Kegelschnittes  $p$  in  $A_1$ . Im Schnittpunkte der letztern mit  $x_1 = 0$  fallen  $Q_1$  und  $Q_1^*$  zusammen und in diesem Punkte wird daher die  $C_6$  von der Fundamentallinie  $x_1 = 0$  berührt. — Analoges gilt für die übrigen Doppelpunkte  $A_2$  und  $A_3$ ; die Tangenten der  $C_6$  in denselben sind die Inversen der respectiven Tangenten, welche von  $A_2$  und  $A_3$  aus an den Kegelschnitt  $p$  gelegt werden können.

Da die  $C_6$  sich selbst entspricht, so muss sie auch durch die vier sich selbst entsprechenden Punkte der Ebene, die Centra  $E, E_1, E_2, E_3$  der dem Fundamentaldreieck eingeschriebenen Kreise, hindurchgehen. Es seien  $t_E$  und  $t_E^*$  die beiden von  $E$  aus an  $p$  gehenden Tangenten, dann entspricht der Geraden  $t_E$  ein durch  $A_1, A_2, A_3$  gehender Kegelschnitt, welcher  $t_E$  in  $E$  berührt; die beiden Punkte der  $C_6$ , welche  $t_E$  liefert, fallen also in  $E$  zusammen, woraus folgt, dass  $t_E$  eine Tangente der  $C_6$  in  $E$  ist. Ebenso ist  $t_E^*$  eine Tangente der  $C_6$  im sich selbst entsprechenden Punkte  $E$ ; letzterer ist daher ein Punkt, durch welchen zwei verschiedene Aeste der Curve gehen, d. h. ein Doppelpunkt der  $C_6$ , und die Tangenten in demselben sind die von  $E$  aus an den Kegelschnitt  $p$  gehenden Tangenten  $t_E$  und  $t_E^*$ .  $E$  ist ein Knotenpunkt oder ein isolirter Punkt der  $C_6$ , je nachdem er ausserhalb oder innerhalb des Kegelschnittes  $p$  liegt. Geht  $p$  durch  $E$ , dann wird  $E$  ein Berührungsknoten der  $C_6$ , d. h. durch  $E$  gehen zwei Aeste der Curve, welche sich in  $E$  berühren; die gemeinschaftliche Tangente hat, wie später für einige spezielle Curven auch analytisch nachgewiesen wird, in  $E$  vier zusammenfallende Punkte mit der  $C_6$  gemein. Der Punkt  $E$  vertritt die Stelle von zwei Durchschnittspunkten der beiden sich in ihm berührenden Aeste, d. h. von zwei Doppelpunkten der  $C_6$ ; derselbe kann als Vereinigung zweier Knotenpunkte angesehen werden. Im Berührungsknoten berühren sich die vier Curven  $p, p', C_6$  und der Kegelschnitt  $t_E'$ .

---

\*) Weiteres hierüber folgt im zweiten, spezielleren Theile dieser Schrift.

Dasselbe gilt für die Punkte  $E_1, E_2$  und  $E_3$ . — Die  $C_6$  kann nicht mehr als die sieben Doppelpunkte  $A_1, A_2, A_3, E, E_1, E_2, E_3$  besitzen, denn gesetzt, es würde noch irgend ein Doppelpunkt  $D$  existiren, so müsste sein inverser Punkt  $D'$  ebenfalls ein Doppelpunkt der  $C_6$  sein und die Gerade  $DD'$  hätte alsdann mehr als sechs Punkte mit der  $C_6$  gemein.

Im allgemeinsten Falle (bei der allgemeinsten Lage von  $p$  gegenüber dem Fundamentaldreieck) besitzt daher die  $C_6$  sieben Doppelpunkte und keine Spitzen und hat somit die folgenden Plücker'schen Charaktere:

Ordnungszahl  $\mu = 6$ , Zahl der Doppelpunkte  $\delta = 7$ ,

Zahl der Spitzen  $\alpha = 0$ ,

Klassenzahl  $\nu = \mu (\mu - 1) - 2 \delta - 3 \alpha = 16$ ,

Zahl der Inflexionstangenten  $\iota = 3 \mu (\mu - 2) - 6 \delta - 8 \alpha = 30$ ,

« « Doppeltangenten  $\tau = \frac{1}{2} \cdot \left[ (\nu - \mu) (\nu + \mu - 9) + 2 \delta \right] = 72$ .

Enthält  $p$  einen der Punkte  $E$ , dann ist für die  $C_6$   $\delta = 8$ .

« « zwei « « « « « « «  $\delta = 9$ .

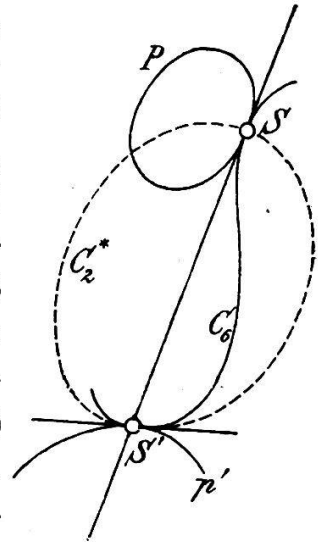
« « drei « « « « « « «  $\delta = 10$ .

« « sämtliche vier « « « « « « «  $\delta = 11$ .

Da 10 die Maximalzahl der Doppelpunkte einer Curve sechster Ordnung ist, so müsste letztere nothwendigerweise zerfallen, wenn  $p$  durch alle vier Punkte  $E$  ginge.

Da die  $C_6$  zu sich selbst invers ist, so entspricht einem gemeinsamen Punkte von  $p$  und  $C_6$  ein gemeinsamer Punkt von  $p'$  und  $C_6$ .  $p'$  und  $C_6$  schneiden sich in  $4 \times 6 = 24$  Punkten, unter denen sich die Fundamentalpunkte, und zwar jeder vierfach gezählt, befinden. Sieht man daher von den zwölf letzteren ab, so bleiben zwölf gemeinsame Punkte von  $p'$  und  $C_6$  übrig, welche die Inversen zu den zwölf gemeinsamen Punkten von  $p$  und  $C_6$  repräsentiren. Nun können niemals Punkte der  $C_6$  innerhalb  $p$  liegen; ist daher  $S$  ein gemeinsamer Punkt von  $p$  und  $C_6$ , so kann in  $S$  die  $C_6$  den Kegelschnitt  $p$  nicht schneiden, muss ihn also berühren und in Folge dessen berührt  $C_6$  die Curve  $p'$  in  $S'$ , dem Inversen zu  $S$ . Von den zwölf gemeinsamen Punkten der  $C_6$  und  $p$  müssen also je zwei zusammenfallen, so dass demnach  $p$  von der  $C_6$  sechs Mal und ebenso oft  $p'$  von der  $C_6$  berührt wird. Die Gerade  $SS'$  ist die Tangente an  $p$  in  $S$ , ihr correspondirender Kegelschnitt  $C_2^*$  geht durch  $S$  und  $S'$  und berührt die Curve  $p'$  in  $S'$ ;  $C_2^*$

und  $p'$  haben also in  $S'$  die nämliche Tangente, welche im Allgemeinen nicht mit  $SS'$  zusammenfallen wird. Da eine Gerade  $g$  nur dann ihren entsprechenden Kegelschnitt  $g'$  berühren kann, wenn  $g$  und folglich auch  $g'$  durch  $E_i$  ( $i=0, 1, 2, 3$ ) gehen, so wird auch  $SS'$  nur dann ihren entsprechenden Kegelschnitt  $C_2^*$  berühren, wenn  $S$  und mithin auch  $S'$  mit  $E_i$  zusammenfallen; in letzterem Falle ist dann  $SS'$  eine gemeinschaftliche Tangente von  $p$  und  $p'$  (auch von  $C_2^*$  und  $C_6$ ) mit dem gemeinschaftlichen Berührungspunkt  $E_i$ . Im Allgemeinen wird demnach  $SS'$  keine gemeinschaftliche Tangente sein.



Es gibt nun sechs Punkte  $S$  und, da jeder einen einzigen entsprechenden  $S'$  auf  $C_6$  hat, auch sechs Linien  $SS'$ . Diese Linien sind solche Tangenten von  $p$ , deren entsprechende Kegelschnitte sie in ihren Berührungspunkten  $S$  schneiden und gleichzeitig  $p'$  und  $C_6$  in den Punkten  $S'$  berühren.

Den zwölf gemeinschaftlichen Tangenten von  $p$  und  $p'$  †) entsprechen Kegelschnitte, welche  $p'$  und  $p$  gleichzeitig berühren.

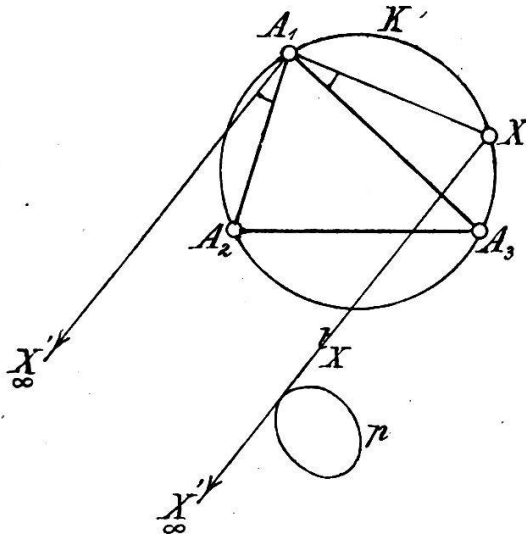
Die  $C_6$  schneidet den dem Fundamentaldreieck umschriebenen Kreis  $K$  in zwölf Punkten, unter denen die Fundamentalpunkte sich befinden, und zwar jeder zwei Schnittpunkte repräsentirend. Ausser  $A_1, A_2, A_3$  existiren also noch sechs Schnittpunkte von  $K$  und  $C_6$ ; ihre Inversen, welche auch der  $C_6$  angehören, sind unendlich fern, sie stellen daher die sechs unendlich fernen Punkte der  $C_6$  vor. Ist  $X$  ein solcher Schnittpunkt von  $C_6$  und  $K$ , so gibt diejenige von  $X$  aus an  $p$  gehende Tangente, welche parallel zur Inversen von  $A_1X$  \*) ist, die Richtung  $XX'$  nach dem unendlich fernen Punkt  $X'$  an.  $XX'$  ist eine  $p$ -Tangente, welche ihren entsprechenden Kegelschnitt in  $X$  u.  $X'$  schneidet; der Kegelschnitt wird also eine Hyperbel und die Gerade  $XX'$  eine Parallele zu einer ihrer Asymptoten sein, oder er ist eine Parabel und  $XX'$  eine Parallele zu ihrer Axe; dieser letztere Fall tritt nur dann ein, wenn  $XX'$  zugleich eine Tangente des Kreises  $K$  und zwar diejenige im Punkte  $X$  ist. Der unendlich ferne Punkt  $X'$  der  $C_6$  ist

†)  $p$  ist von der zweiten,  $p'$  von der sechsten Klasse.

\*) oder  $A_2X$ , oder  $A_3X$ .

ein unendlich ferner Punkt der Hyperbel, respective der unendlich ferne Punkt der Parabel, welche der Geraden  $XX'$  entspricht. Die Tangente der  $C_6$  in  $X'_\infty$ , also eine Asymptote der  $C_6$ , ist parallel  $XX'$ , also parallel der zu  $X'$  gehörigen Asymptote der Hyperbel, respective parallel zur Axe der Parabel, welche  $XX'$  entspricht. Würde  $XX'$  zugleich die  $C_6$  in  $X$  berühren, so hätten die Hyperbel und  $C_6$  eine gemeinschaftliche Asymptote; im andern Falle, in welchem die Inverse von  $XX'$  eine Parabel ist, würden die Parabel und die  $C_6$  sich im gemeinschaftlichen unendlich fernen Punkt  $X'_\infty$  berühren, d. h. die unendlich ferne Gerade wäre die Tangente der  $C_6$  in  $X'_\infty$ .

Wenn der Inverse  $X'_\infty$  eines Schnittpunktes  $X$  einer  $p$ -Tangente  $t_X$  mit dem Kreise  $K$  auf  $t_X$  liegt, dann ist  $X'_\infty$  ein unendlich ferner



Punkt der  $C_6$  und  $t_X$  gibt die Richtung nach demselben an. Es gibt sechs solche Tangenten  $t_X$ , von denen je zwei imaginär sein können.

Jedes Mal, wenn der Kegelschnitt  $p$  eine der sechs Seiten des vollständigen Vierecks  $E E_1 E_2 E_3$  berührt, vermindert sich die Ordnungszahl der  $C_6$  um eine Einheit; denn ist z. B. die Linie  $E_2 E_3$  oder  $x_2 + x_3 = 0$  eine Tangente von  $p$ , dann gehören alle Punkte dieser

Linie, da sie sich selbst entspricht, der  $C_6$  an, es sondert sich daher  $x_2 + x_3 = 0$  als Theil ab und der Rest ist eine Curve fünfter Ordnung. Es können höchstens vier der Linien  $E_i E_k$ , von denen keine drei durch einen Punkt gehen, von  $p$  berührt werden; tritt dieser Fall ein, so reduzirt sich die  $C_6$  auf eine  $C_2$ , welche in ein Linienpaar zerfällt. Ist beispielsweise  $p$  eine Ellipse, welche die Linien  $x_2 + x_3 = 0$  und  $x_1 + x_3 = 0$  zu Tangenten hat, dann zerfällt  $C_6$  in diese vier Linien und eine  $C_2$  mit dem Doppelpunkt  $A_3$ , also ein Linienpaar durch  $A_3$  und zwar ist es das Paar der von  $A_3$  aus an die Ellipse  $p$  gehenden Tangenten; letztere sind zu einander invers. Bezeichnen  $t_3$  und  $t_3'$  diese beiden Tangenten, so bilden die übrigen Tangenten des Kegelschnittes  $p$  auf  $t_3$  und  $t_3'$  zwei projektivische Punktreihen, deren Erzeugniss, d. h. die Enveloppe der Verbindungslinien entsprechender Punkte beider Reihen, der Kegelschnitt  $p$  ist.

Die Konstruktion der  $C_6$  ist sehr einfach, man hat nur mehrmals die Schnittpunkte einer Geraden mit einem durch fünf Elemente bestimmten Kegelschnitt zu bestimmen. Von jedem einer  $p$ -Tangente entsprechenden Kegelschnitt kennt man die Tangenten in den Fundamentalpunkten. Bezeichnen nämlich  $B_1, B_2, B_3$  die Schnittpunkte irgend einer  $p$ -Tangente  $t$  mit den Fundamentallinien  $x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0$ , so sind die Inversen zu  $A_1 B_1, A_2 B_2, A_3 B_3$  die respectiven Tangenten des Kegelschnittes  $t'$  in den Fundamentalpunkten  $A_1, A_2, A_3$ . Zur Konstruktion der gemeinsamen Punkte von  $t$  und  $t'$  genügen für  $t'$  die Punkte  $A_1, A_2, A_3$  und die Tangenten in zwei derselben.

Unter den den  $p$ -Tangenten entsprechenden Kegelschnitten gibt es im Allgemeinen sechs Linienpaare, dieselben sind reell, wenn  $p$  die Fundamentalpunkte ausschliesst, — Ellipsen und Hyperbeln, erstere entsprechen den  $p$ -Tangenten, welche den Kreis  $K$  nicht schneiden, letztere sind die Inversen der den Kreis  $K$  schneidenden  $p$ -Tangenten, — vier Parabeln, dieselben entsprechen den gemeinschaftlichen Tangenten von  $p$  und  $K$ , — zwei gleichseitige Hyperbeln, wenn der Mittelpunkt  $M$  des Kreises  $K$  ausserhalb  $p$  liegt\*) — endlich auch einen Kreis, wenn  $p$  eine Parabel ist; in diesem Falle ist die unendlich ferne Gerade eine  $p$ -Tangente, ihr entsprechender Kegelschnitt der Kreis  $K$  und die  $C_6$  enthält in Folge dessen die unendlich fernen imaginären Kreispunkte. Es ergibt sich hieraus, dass die Zahl der reellen unendlich fernen Punkte der  $C_6$  von der Lage des Kegelschnittes  $p$  in Bezug auf den Kreis  $K$  abhängig ist. So wird z. B. die  $C_6$  keine reellen unendlich fernen Punkte haben, wenn  $p$  den Kreis  $K$  einschliesst, weil in diesem Falle den  $p$ -Tangenten nur Ellipsen\*\*) entsprechen können.

Um zur Gleichung der Curve sechster Ordnung in Punktcoordinaten zu gelangen, ermitteln wir zunächst die Coordinaten (besser gesagt: die Verhältnisse der Coordinaten) eines beliebigen Punktes  $P_\lambda$ , welcher dem Kegelschnitt  $p$  angehört; dieselben werden Funktionen

---

\*) Dem Strahlenbüschel mit dem Scheitel  $M$  entspricht das Kegelschnittbüschel mit den Grundpunkten  $A_1, A_2, A_3, H$ , wo  $H$  den Höhenschnittpunkt des Dreiecks  $A_1 A_2 A_3$  bezeichnet. Die Kegelschnitte dieses Büschels sind sämtlich gleichseitige Hyperbeln. Durch Anwendung der Inversion (im weiteren Sinne) ist daher der Beweis des Satzes, dass jede einem Dreieck umschriebene gleichseitige Hyperbel durch den Höhenpunkt desselben geht, ausserordentlich einfach.

\*\*) Unter diesen befindet sich auch der Kreis  $K$ , wenn  $p$  eine Parabel ist.

eines variablen Parameters  $\lambda$  sein. Alsdann stellt man die Gleichung der p-Tangente  $t_\lambda$  im Punkte  $P_\lambda$  auf und ersetzt hierin die Variablen  $x_1, x_2, x_3$  durch ihre reciproken Werthe, um die Gleichung des Kegelschnittes  $t_\lambda'$  zu erhalten, welcher der Tangente  $t_\lambda$  entspricht. Eliminirt man nun zwischen den beiden Gleichungen für  $t_\lambda$  und  $t_\lambda'$  den in den Coëfficienten derselben auftretenden Parameter  $\lambda$ , so ergibt sich eine Gleichung, welcher die Coordinaten der Schnittpunkte sämtlicher p-Tangenten mit ihren entsprechenden Kegelschnitten genügen, also die Gleichung unserer  $C_6$ . \*)

Nach diesen allgemeinen Betrachtungen gehen wir nun über zur Untersuchung einiger Curven sechster Ordnung, die sich ergeben, wenn der Kegelschnitt p spezielle Lagen gegenüber dem Fundamentaldreieck annimmt.

### I. Der feste Kegelschnitt p sei ein Kegelschnitt, für welchen das Fundamentaldreieck ein Tripel harmonischer Pole ist.

Ein Kegelschnitt, bezogen auf ein Tripel harmonischer Pole, hat die Gleichung

$$p) \quad \dots \quad a_1 x_1^2 + a_2 x_2^2 - a_3 x_3^2 = 0.$$

Bezeichnen  $a_1, a_2, a_3$  positive Zahlen, dann liegt der Fundamentalknoten  $A_3$  innerhalb,  $A_1$  und  $A_2$  dagegen liegen ausserhalb des Kegelschnittes p. Die Fundamentallinien sind die Polaren der Gegenecken in Bezug auf p.

Die Inverse  $p'$  von p hat die Gleichung

$$p') \quad \dots \quad a_1 x_2^2 x_3^2 + a_2 x_1^2 x_3^2 - a_3 x_1^2 x_2^2 = 0;$$

sie ist eine Curve vierter Ordnung und sechster Klasse, welche in  $A_1$  und  $A_2$  doppelte Inflexionsknoten besitzt und für welche  $A_3$  ein isolirter Punkt ist. Da die von  $A_1$  aus an den Kegelschnitt p gehenden Tan-

\*) Da zwei zu einander inverse Punkte der Ebene die Brennpunkte eines Kegelschnittes sind, welcher die Fundamentallinien berührt, so kann die nachgewiesene Curve sechster Ordnung auch betrachtet werden als Ort der Brennpunkte derjenigen die Fundamentallinien berührenden Kegelschnitte, deren Axen eine feste Curve zweiten Grades umhüllen.