Zeitschrift: Mitteilungen der Naturforschenden Gesellschaft Bern

Herausgeber: Naturforschende Gesellschaft Bern

Band: - (1889)

Heft: 1215-1243

Artikel: Erzeugung und Untersuchung einiger ebenen Curven höherer Ordnung

Autor: Leuch, Albert

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-319023

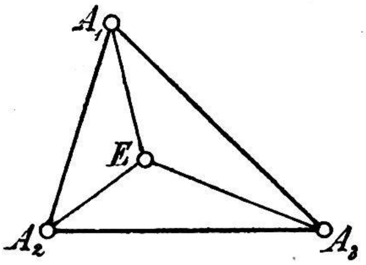
Dr. Albert Leuch.

Erzeugung und Untersuchung
einiger
ebenen Curven höherer Ordnung.

(Vorgetragen in der Sitzung vom 14. Januar 1888.)

Ein in Bezug auf das Fundamentaldreieck $A_1 A_2 A_3$ *) in dessen Ebene beliebig gelegener Kegelschnitt p wird durch Anwendung der allgemeinsten birationalen quadratischen Transformation (Inversion, im weitern Sinne aufgefasst) **) zu einer Curve vierter Ordnung p' mit drei Doppelpunkten in den Fundamentalpunkten. Den Tangenten von p entsprechen Kegelschnitte, welche dem Fundamentaldreieck umschrieben sind und die Curve p' berühren. Bringt man nun alle diese Kegelschnitte mit ihren zugehörigen, den Kegelschnitt p umhüllenden Geraden zum Schnitt, so wird eine höhere ebene Curve erzeugt als Ort der Schnittpunkte der Tangenten von p mit ihren correspondirenden Kegelschnitten.

Die vorliegende Arbeit soll sich mit der Untersuchung dieser Curve beschäftigen. †)



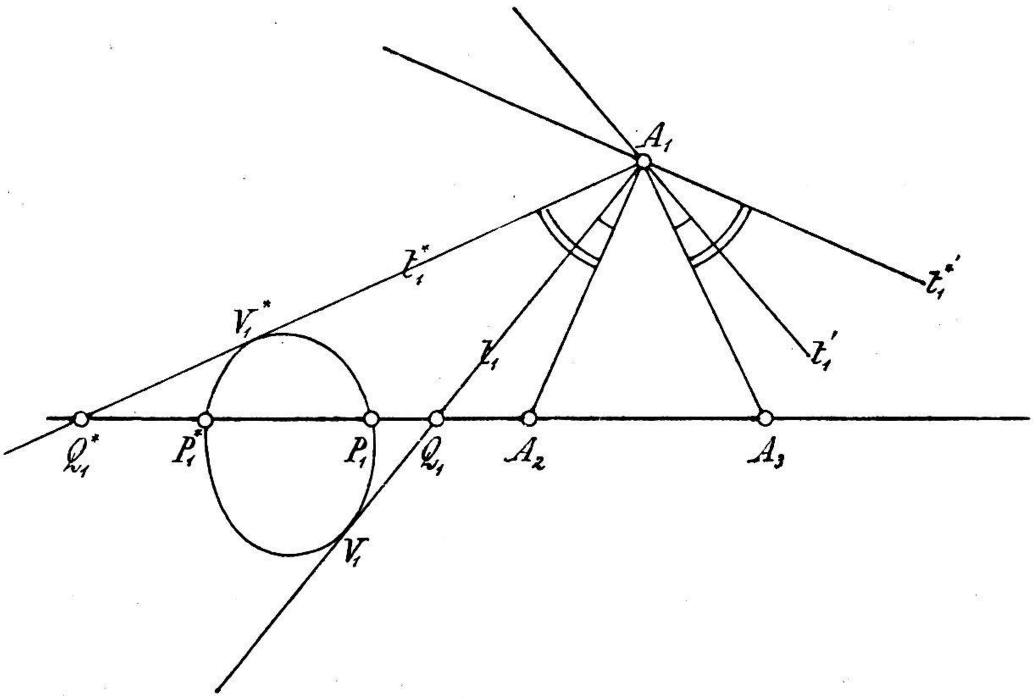
Jede Tangente des Kegelschnittes p liefert zwei Curvenpunkte, die zu einander invers sind oder einander entsprechen; daraus geht hervor, dass einem beliebigen Punkte der Curve stets wieder ein Punkt derselben entspricht. Die Curve muss sich daher selbst

*) A_1, A_2, A_3 sind die Fundamentalpunkte, A_1A_2, A_1A_3, A_2A_3 die Fundamentallinien oder Axen eines ebenen Coordinatensystems; sein Einheitpunkt E werde in den Mittelpunkt des dem Fundamentaldreieck $A_1 A_2 A_3$ eingeschriebenen Kreises gelegt, so dass unter den trimetrischen Coordinaten x_1, x_2, x_3 eines Punktes der Ebene speziell Dreilinien-Coordinaten zu verstehen sind.

**) Vergl. Salmon-Fiedler, Höhere ebene Curven. Art. 284.

†) In anderer Ausdrucksform lautet das zu behandelnde Problem: Eine bewegliche Gerade g berühre einen festen Kegelschnitt p, man bestimme und untersuche den Ort der Schnittpunkte der beweglichen Geraden mit ihrem entsprechenden (inversen) Kegelschnitt g'.

entsprechen und zwar in der Weise, dass je zwei entsprechende Punkte auf einer Tangente des Kegelschnittes p liegen; die Inverse oder Transformirte unserer Curve ist also identisch mit der Original-Curve. — Die durch die Fundamentalpunkte gehenden Tangenten von p, denen Kegelschnitte entsprechen, welche in Linienpaare zerfallen, liefern ebenfalls je zwei Curvenpunkte. Von A_1 aus gehen an den Kegelschnitt p die beiden Tangenten t_1 und t_1^*; der Geraden t_1 entspricht ein Kegelschnitt, welcher in das Linienpaar $A_2 A_3$, t_1' zerfällt, wobei t_1' denjenigen durch A_1 gehenden Strahl bedeutet, der mit $A_1 A_3$ denselben Winkel bildet wie t_1 mit $A_1 A_2$, oder es ist t_1' der sogenannte inverse Strahl zu t_1. Die Schnittpunkte A_1 und Q_1 von t_1 mit



t_1' respective $A_2 A_3$ gehören daher der Curve an. Die Tangente t_1^* gibt die Curvenpunkte A_1 und Q_1^* als Schnittpunkte von t_1^* mit seinem inversen Strahle $t_1^{*'}$ und der Fundamentallinie $A_2 A_3$ oder $x_1 = 0$. Der Fundamentalpunkt A_1 zählt also für zwei Punkte, die Curve geht zwei Mal durch ihn hindurch oder A_1 ist ein Doppelpunkt der Curve. Analog verhält es sich mit den Fundamentalpunkten A_2 und A_3.

Die Fundamentallinie $A_2 A_3$ oder $x_1 = 0$ kann nur die Doppelpunkte A_2, A_3, welche vier Punkte repräsentiren und die beiden Punkte Q_1 und Q_1^* mit der Curve gemein haben; denn angenommen, es existirte ein weiterer Schnittpunkt R, so müsste sein entsprechender Punkt R′ auf einer p-Tangente aus R liegen, auf t_R oder t_R^*, welche reell wären, da R, wie alle Curvenpunkte, nicht im Innern von p sich befinden könnte. Nun entspricht aber dem Punkte R, wie jedem Punkte der Fundamentallinie $x_1 = 0$, der Fundamentalpunkt A_1, folglich kann RR' keine p-Tangente sein und somit R unmöglich der Curve angehören. Die Curve lässt also mit $x_1 = 0$ höchstens sechs Schnittpunkte zu; ebenso schneidet jede der Fundamentallinien $x_2 = 0$, $x_3 = 0$ die Curve in sechs Punkten, worin allfällige imaginäre Schnittpunkte inbegriffen sind. Unsere Curve wird daher von der sechsten Ordnung sein müssen, was auch durch die folgende Betrachtung bestätigt wird.

Wenn μ die Ordnungszahl einer Original-Curve ist, dann ist die Ordnungszahl ihrer Transformirten im Allgemeinen 2μ. Geht aber die Original-Curve, wie unsere zu untersuchende Curve, zwei Mal durch jeden der Fundamentalpunkte, so wird die Transformirte oder Inverse von der Ordnung $2\mu - 6$, weil sich die Fundamentallinien, jede doppelt gezählt, absondern und daher nicht zur Inversen gerechnet werden können. Nun soll die Inverse identisch sein mit der Original Curve, somit ist

$$2\mu - 6 = \mu, \quad \text{woraus folgt:}$$

$$\mu = 6.$$

Die Tangenten der Curve sechster Ordnung C_6 (wie sie im Folgenden stets bezeichnet werden soll) im Doppelpunkt A_1 sind die Inversen von t_1 und t_1^*, also t_1' und $t_1^{*\prime}$. Dem Schnittpunkt Q_1 der C_6 mit $A_2 A_3$ entspricht nämlich ein dem Punkte A_1 unendlich naher Punkt Q_1' in bestimmter Richtung von A_1 aus, nämlich so, dass wie im Allgemeinen die Strahlen $A_1 Q_1$, $A_1 Q_1'$ mit $A_1 A_2$ resp. $A_1 A_3$ gleiche Winkel einschliessen, d. h. einander entsprechen; es ist somit $A_1 Q_1'$ oder t_1' eine Tangente der C_6 in A_1. Analog ist $t_1^{*\prime}$ die Tangente eines zweiten durch A_1 gehenden Astes der C_6 in A_1.

Die Tangenten im Doppelpunkt A_1 sind gleichzeitig Tangenten der Curve vierter Ordnung p' und zwar ausser den Tangenten in A_1 die einzigen, welche von A_1 aus an p' gehen; sie berühren die C_4 in den Punkten V_1' und $V_1^{*\prime}$, welche beziehungsweise den Berührungspunkten V_1 und V_1^* von t_1 und t_1^* mit p entsprechen.

Die Tangenten von p' im Doppelpunkt A_1 sind bekanntlich die Inversen der Geraden, welche von A_1 nach den Schnittpunkten P_1, P_1^* der Curve p mit $A_2 A_3$ gehen; würden P_1 und P_1^* beziehungsweise mit Q_1 und Q_1^* zusammenfallen, so hätten p' und C_6 im gemeinschaftlichen Doppelpunkt A_1 die nämlichen Tangenten. In diesem Falle fielen aber auch die Berührungspunkte V_1 und V_1^* resp. mit Q_1 und

Q_1^* und daher V_1' und $V_1^{*\prime}$ mit A_1 zusammen, so dass die Tangenten der C_6 in A_1 die einzigen von A_1 aus an p' gehenden Tangenten wären.*)

Im Falle der Realität der Tangenten t_1 und t_1^*, also wenn A_1 ausserhalb des Kegelschnittes p liegt, ist A_1 ein Knotenpunkt der C_6. Liegt A_1 im Innern von p, so sind die Tangenten im Doppelpunkt A_1 imaginär, d. h. A_1 ist ein isolirter Punkt. Befindet sich A_1 auf dem Kegelschnitt p, dann fallen die Tangenten in A_1 zusammen, d. h. A_1 wird zur Spitze; die zugehörige Rückkehrtangente t_1' ist die Inverse der Tangente t_1 des Kegelschnittes p in A_1. Im Schnittpunkte der letztern mit $x_1 = 0$ fallen Q_1 und Q_1^* zusammen und in diesem Punkte wird daher die C_6 von der Fundamentallinie $x_1 = 0$ berührt. — Analoges gilt für die übrigen Doppelpunkte A_2 und A_3; die Tangenten der C_6 in denselben sind die Inversen der respectiven Tangenten, welche von A_2 und A_3 aus an den Kegelschnitt p gelegt werden können.

Da die C_6 sich selbst entspricht, so muss sie auch durch die vier sich selbst entsprechenden Punkte der Ebene, die Centra E, E_1, E_2, E_3 der dem Fundamentaldreiseit eingeschriebenen Kreise, hindurchgehen. Es seien t_E und t_E^* die beiden von E aus an p gehenden Tangenten, dann entspricht der Geraden t_E ein durch A_1, A_2, A_3 gehender Kegelschnitt, welcher t_E in E berührt; die beiden Punkte der C_6, welche t_E liefert, fallen also in E zusammen, woraus folgt, dass t_E eine Tangente der C_6 in E ist. Ebenso ist t_E^* eine Tangente der C_6 im sich selbst entsprechenden Punkte E; letzterer ist daher ein Punkt, durch welchen zwei verschiedene Aeste der Curve gehen, d. h. ein Doppelpunkt der C_6, und die Tangenten in demselben sind die von E aus an den Kegelschnitt p gehenden Tangenten t_E und t_E^*. E ist ein Knotenpunkt oder ein isolirter Punkt der C_6, je nachdem er ausserhalb oder innerhalb des Kegelschnittes p liegt. Geht p durch E, dann wird E ein Berührungsknoten der C_6, d. h. durch E gehen zwei Aeste der Curve, welche sich in E berühren; die gemeinschaftliche Tangente hat, wie später für einige spezielle Curven auch analytisch nachgewiesen wird, in E vier zusammenfallende Punkte mit der C_6 gemein. Der Punkt E vertritt die Stelle von zwei Durchschnittspunkten der beiden sich in ihm berührenden Aeste, d. h. von zwei Doppelpunkten der C_6; derselbe kann als Vereinigung zweier Knotenpunkte angesehen werden. Im Berührungsknoten berühren sich die vier Curven p, p', C_6 und der Kegelschnitt t_E'.

---

*) Weiteres hierüber folgt im zweiten, spezielleren Theile dieser Schrift.

Dasselbe gilt für die Punkte E_1, E_2 und E_3. — Die C_6 kann nicht mehr als die sieben Doppelpunkte A_1, A_2, A_3, E, E_1, E_2, E_3 besitzen, denn gesetzt, es würde noch irgend ein Doppelpunkt D existiren, so müsste sein inverser Punkt D' ebenfalls ein Doppelpunkt der C_6 sein und die Gerade DD' hätte alsdann mehr als sechs Punkte mit der C_6 gemein.

Im allgemeinsten Falle (bei der allgemeinsten Lage von p gegenüber dem Fundamentaldreieck) besitzt daher die C_6 sieben Doppelpunkte und keine Spitzen und hat somit die folgenden Plücker'schen Charaktere:

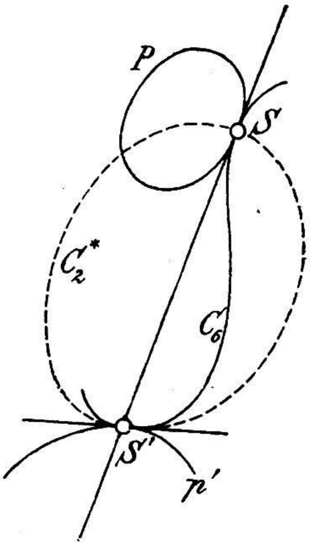
Ordnungszahl $\mu = 6$, Zahl der Doppelpunkte $\delta = 7$,
Zahl der Spitzen $\varkappa = 0$,
Klassenzahl $\nu = \mu\,(\mu - 1) - 2\,\delta - 3\,\varkappa = 16$,
Zahl der Inflexionstangenten $\iota = 3\,\mu\,(\mu - 2) - 6\,\delta - 8\,\varkappa = 30$,
« « Doppeltangenten $\tau = \frac{1}{2} \cdot \left[(\nu - \mu)(\nu + \mu - 9) + 2\,\delta\right] = 72.$

Enthält	p	einen der	Punkte	E,	dann	ist	für	die	C_6	$\delta =$	8.
«	«	zwei «	«	«	«	«	«	«	«	$\delta =$	9.
«	«	drei «	«	«	«	«	«	«	«	$\delta =$	10.
«	«	sämmtliche vier	«	«	«	«	«	«	«	$\delta =$	11.

Da 10 die Maximalzahl der Doppelpunkte einer Curve sechster Ordnung ist, so müsste letztere nothwendigerweise zerfallen, wenn p durch alle vier Punkte E ginge.

Da die C_6 zu sich selbst invers ist, so entspricht einem gemeinsamen Punkte von p und C_6 ein gemeinsamer Punkt von p' und C_6. p' und C_6 schneiden sich in $4 \times 6 = 24$ Punkten, unter denen sich die Fundamentalpunkte, und zwar jeder vierfach gezählt, befinden. Sieht man daher von den zwölf letzteren ab, so bleiben zwölf gemeinsame Punkte von p' und C_6 übrig, welche die Inversen zu den zwölf gemeinsamen Punkten von p und C_6 repräsentiren. Nun können niemals Punkte der C_6 innerhalb p liegen; ist daher S ein gemeinsamer Punkt von p und C_6, so kann in S die C_6 den Kegelschnitt p nicht schneiden, muss ihn also berühren und in Folge dessen berührt C_6 die Curve p' in S', dem Inversen zu S. Von den zwölf gemeinsamen Punkten der C_6 und p müssen also je zwei zusammenfallen, so dass demnach p von der C_6 sechs Mal und ebenso oft p' von der C_6 berührt wird. Die Gerade SS' ist die Tangente an p in S, ihr correspondirender Kegelschnitt C_2^* geht durch S und S' und berührt die Curve p' in S'; C_2^*

und p′ haben also in S′ die nämliche Tangente, welche im Allgemeinen nicht mit SS′ zusammenfallen wird. Da eine Gerade g nur dann ihren entsprechenden Kegelschnitt g′ berühren kann, wenn g und folglich auch g′ durch E_i $(i = 0, 1, 2, 3)$ gehen, so wird auch SS′ nur dann ihren entsprechenden Kegelschnitt C_2^* berühren, wenn S und mithin auch S′ mit E_i zusammenfallen; in letzterem Falle ist dann SS′ eine gemeinschaftliche Tangente von p und p′ (auch von C_2^* und C_6) mit dem gemeinschaftlichen Berührungspunkt E_i. Im Allgemeinen wird demnach SS′ keine gemeinschaftliche Tangente sein.



Es gibt nun sechs Punkte S und, da jeder einen einzigen entsprechenden S′ auf C_6 hat, auch sechs Linien SS′. Diese Linien sind solche Tangenten von p, deren entsprechende Kegelschnitte sie in ihren Berührungspunkten S schneiden und gleichzeitig p′ und C_6 in den Punkten S′ berühren.

Den zwölf gemeinschaftlichen Tangenten von p und p′ †) entsprechen Kegelschnitte, welche p′ und p gleichzeitig berühren.

Die C_6 schneidet den dem Fundamentaldreieck umschriebenen Kreis K in zwölf Punkten, unter denen die Fundamentalpunkte sich befinden, und zwar jeder zwei Schnittpunkte repräsentirend. Ausser A_1, A_2, A_3 existiren also noch sechs Schnittpunkte von K und C_6; ihre Inversen, welche auch der C_6 angehören, sind unendlich fern, sie stellen daher die sechs unendlich fernen Punkte der C_6 vor. Ist X ein solcher Schnittpunkt von C_6 und K, so gibt diejenige von X aus an p gehende Tangente, welche parallel zur Inversen von A_1X *) ist, die Richtung $X\underset{\infty}{X}'$ nach dem unendlich fernen Punkt $\underset{\infty}{X}'$ an. $X\underset{\infty}{X}'$ ist eine p-Tangente, welche ihren entsprechenden Kegelschnitt in X u. $\underset{\infty}{X}'$ schneidet; der Kegelschnitt wird also eine Hyperbel und die Gerade $X\underset{\infty}{X}'$ eine Parallele zu einer ihrer Asymptoten sein, oder er ist eine Parabel und $X\underset{\infty}{X}'$ eine Parallele zu ihrer Axe; dieser letztere Fall tritt nur dann ein, wenn XX′ zugleich eine Tangente des Kreises K und zwar diejenige im Punkte X ist. Der unendlich ferne Punkt X′ der C_6 ist

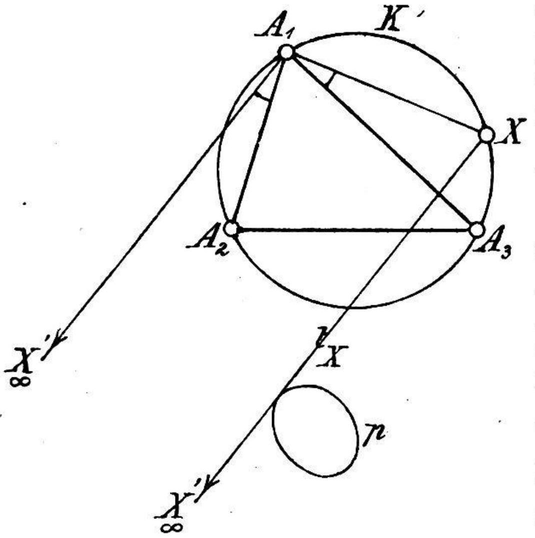
---

†) p ist von der zweiten, p′ von der sechsten Klasse.

*) oder A_2X, oder A_3X.

ein unendlich ferner Punkt der Hyperbel, respective der unendlich ferne Punkt der Parabel, welche der Geraden XX' entspricht. Die Tangente der C_6 in X'_∞, also eine Asymptote der C_6, ist parallel XX'_∞, also parallel der zu X' gehörigen Asymptote der Hyperbel, respective parallel zur Axe der Parabel, welche XX' entspricht. Würde XX' zugleich die C_6 in X berühren, so hätten die Hyperbel und C_6 eine gemeinschaftliche Asymptote; im andern Falle, in welchem die Inverse von XX' eine Parabel ist, würden die Parabel und die C_6 sich im gemeinschaftlichen unendlich fernen Punkt X'_∞ berühren, d. h. die unendlich ferne Gerade wäre die Tangente der C_6 in X'_∞.

Wenn der Inverse X'_∞ eines Schnittpunktes X einer p-Tangente t_X mit dem Kreise K auf t_X liegt, dann ist X'_∞ ein unendlich ferner Punkt der C_6 und t_X gibt die Richtung nach demselben an. Es gibt sechs solche Tangenten t_X, von denen je zwei imaginär sein können.



Jedes Mal, wenn der Kegelschnitt p eine der sechs Seiten des vollständigen Vierecks $E\ E_1\ E_2\ E_3$ berührt, vermindert sich die Ordnungszahl der C_6 um eine Einheit; denn ist z. B. die Linie $E_2\,E_3$ oder $x_2 + x_3 = 0$ eine Tangente von p, dann gehören alle Punkte dieser Linie, da sie sich selbst entspricht, der C_6 an, es sondert sich daher $x_2 + x_3 = 0$ als Theil ab und der Rest ist eine Curve fünfter Ordnung. Es können höchstens vier der Linien $E_i\,E_k$, von denen keine drei durch einen Punkt gehen, von p berührt werden; tritt dieser Fall ein, so reduzirt sich die C_6 auf eine C_2, welche in ein Linienpaar zerfällt. Ist beispielsweise p eine Ellipse, welche die Linien $x_2 \pm x_3 = 0$ und $x_1 \pm x_3 = 0$ zu Tangenten hat, dann zerfällt C_6 in diese vier Linien und eine C_2 mit dem Doppelpunkt A_3, also ein Linienpaar durch A_3 und zwar ist es das Paar der von A_3 aus an die Ellipse p gehenden Tangenten; letztere sind zu einander invers. Bezeichnen t_3 und t_3' diese beiden Tangenten, so bilden die übrigen Tangenten des Kegelschnittes p auf t_3 und t_3' zwei projektivische Punktreihen, deren Erzeugniss, d. h. die Enveloppe der Verbindungslinien entsprechender Punkte beider Reihen, der Kegelschnitt p ist.

Die Konstruktion der C_6 ist sehr einfach, man hat nur mehrmals die Schnittpunkte einer Geraden mit einem durch fünf Elemente bestimmten Kegelschnitt zu bestimmen. Von jedem einer p-Tangente entsprechenden Kegelschnitt kennt man die Tangenten in den Fundamentalpunkten. Bezeichnen nämlich B_1, B_2, B_3 die Schnittpunkte irgend einer p-Tangente t mit den Fundamentallinien $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$, so sind die Inversen zu $A_1 B_1$, $A_2 B_2$, $A_3 B_3$ die respectiven Tangenten des Kegelschnittes t' in den Fundamentalpunkten A_1, A_2, A_3. Zur Konstruktion der gemeinsamen Punkte von t und t' genügen für t' die Punkte A_1, A_2, A_3 und die Tangenten in zwei derselben.

Unter den den p-Tangenten entsprechenden Kegelschnitten gibt es im Allgemeinen sechs Linienpaare, dieselben sind reell, wenn p die Fundamentalpunkte ausschliesst, — Ellipsen und Hyperbeln, erstere entsprechen den p-Tangenten, welche den Kreis K nicht schneiden, letztere sind die Inversen der den Kreis K schneidenden p-Tangenten, — vier Parabeln, dieselben entsprechen den gemeinschaftlichen Tangenten von p und K, — zwei gleichseitige Hyperbeln, wenn der Mittelpunkt M des Kreises K ausserhalb p liegt*) — endlich auch einen Kreis, wenn p eine Parabel ist; in diesem Falle ist die unendlich ferne Gerade eine p-Tangente, ihr entsprechender Kegelschnitt der Kreis K und die C_6 enthält in Folge dessen die unendlich fernen imaginären Kreispunkte. Es ergibt sich hieraus, dass die Zahl der reellen unendlich fernen Punkte der C_6 von der Lage des Kegelschnittes p in Bezug auf den Kreis K abhängig ist. So wird z. B. die C_6 keine reellen unendlich fernen Punkte haben, wenn p den Kreis K einschliesst, weil in diesem Falle den p-Tangenten nur Ellipsen**) entsprechen können.

Um zur Gleichung der Curve sechster Ordnung in Punktcoordinaten zu gelangen, ermitteln wir zunächst die Coordinaten (besser gesagt: die Verhältnisse der Coordinaten) eines beliebigen Punktes P_λ, welcher dem Kegelschnitt p angehört; dieselben werden Funktionen

---

*) Dem Strahlenbüschel mit dem Scheitel M entspricht das Kegelschnittbüschel mit den Grundpunkten A_1, A_2, A_3, H, wo H den Höhenschnittpunkt des Dreiecks $A_1 A_2 A_3$ bezeichnet. Die Kegelschnitte dieses Büschels sind sämmtlich gleichseitige Hyperbeln. Durch Anwendung der Inversion (im weiteren Sinne) ist daher der Beweis des Satzes, dass jede einem Dreieck umschriebene gleichseitige Hyperbel durch den Höhenpunkt desselben geht, ausserordentlich einfach.

**) Unter diesen befindet sich auch der Kreis K, wenn p eine Parabel ist.

eines variablen Parameters λ sein. Alsdann stellt man die Gleichung der p-Tangente t_λ im Punkte P_λ auf und ersetzt hierin die Variablen x_1, x_2, x_3 durch ihre reciproken Werthe, um die Gleichung des Kegelschnittes t_λ' zu erhalten, welcher der Tangente t_λ entspricht. Eliminirt man nun zwischen den beiden Gleichungen für t_λ und t_λ' den in den Coëfficienten derselben auftretenden Parameter λ, so ergibt sich eine Gleichung, welcher die Coordinaten der Schnittpunkte sämmtlicher p-Tangenten mit ihren entsprechenden Kegelschnitten genügen, also die Gleichung unserer C_6. *)

Nach diesen allgemeinen Betrachtungen gehen wir nun über zur Untersuchung einiger Curven sechster Ordnung, die sich ergeben, wenn der Kegelschnitt p spezielle Lagen gegenüber dem Fundamentaldreieck annimmt.

I. Der feste Kegelschnitt p sei ein Kegelschnitt, für welchen das Fundamentaldreieck ein Tripel harmonischer Pole ist.

Ein Kegelschnitt, bezogen auf ein Tripel harmonischer Pole, hat die Gleichung

p) . . . . . $a_1 x_1^2 + a_2 x_2^2 - a_3 x_3^2 = 0.$

Bezeichnen a_1, a_2, a_3 positive Zahlen, dann liegt der Fundamentalpunkt A_3 innerhalb, A_1 und A_2 dagegen liegen ausserhalb des Kegelschnittes p. Die Fundamentallinien sind die Polaren der Gegenecken in Bezug auf p.

Die Inverse p′ von p hat die Gleichung

p′) . . . $a_1 x_2^2 x_3^2 + a_2 x_1^2 x_3^2 - a_3 x_1^2 x_2^2 = 0;$

sie ist eine Curve vierter Ordnung und sechster Klasse, welche in A_1 und A_2 doppelte Inflexionsknoten besitzt und für welche A_3 ein isolirter Punkt ist. Da die von A_1 aus an den Kegelschnitt p gehenden Tan-

*) Da zwei zu einander inverse Punkte der Ebene die Brennpunkte eines Kegelschnittes sind, welcher die Fundamentallinien berührt, so kann die nachgewiesene Curve sechster Ordnung auch betrachtet werden als Ort der Brennpunkte derjenigen die Fundamentallinien berührenden Kegelschnitte, deren Axen eine feste Curve zweiten Grades umhüllen.

genten denselben in seinen Schnittpunkten mit $x_1 = 0$ berühren, so sind die Inversen dieser Tangenten, d. h. die Tangenten der C_4 (p') im Doppelpunkt A_1 zugleich Inflexionstangenten und somit A_1 ein doppelter Inflexionsknoten. Diess wird durch Rechnung bestätigt, indem man zeigt, dass jede dieser Tangenten mit der C_4 in A_1 vier zusammenfallende Punkte (drei mit dem einen Aste, einen mit dem andern) gemein hat. Analoges findet für A_2 statt. p' hat zwei reelle, unendlich ferne Punkte, dieselben entsprechen den zwei Schnittpunkten von p mit dem Kreise K. Die Asymptoten der C_4 lassen sich, wie überhaupt sämmtliche Tangenten derselben, leicht konstruiren; bezeichnet X einen gemeinsamen Punkt von p und K, so hat man nur zu berücksichtigen, dass der Tangente im Punkte X'_∞ oder einer Asymptote der C_4 derjenige Kegelschnitt entspricht, welcher durch A_1, A_2, A_3, X geht und den Kegelschnitt p in X berührt.

Um nun die Gleichung der C_6, welche im vorliegenden Falle entsteht, abzuleiten, suchen wir zunächst die Coordinaten eines beliebigen Punktes von p und bestimmen die Gleichung der Tangente von p in diesem Punkt. Wir legen zu diesem Zwecke durch A_1 einen beliebigen Strahl

$$\frac{x_2}{x_3} = \lambda ;$$

derselbe schneidet p in zwei Punkten, für welche man hat:

$$a_1 \left(\frac{x_1}{x_3}\right)^2 + a_2 \cdot \left(\frac{x_2}{x_3}\right)^2 - a_3 = 0 \quad \text{und} \quad \frac{x_2}{x_3} = \lambda .$$

Daraus folgt:

$$\frac{x_1}{x_3} = \pm \sqrt{\frac{a_3 - a_2 \lambda^2}{a_1}} .$$

Berücksichtigen wir nur das pos. Zeichen der Wurzel, so haben wir für die Coordinaten eines Punktes P_λ auf p:

$$P_\lambda) \quad \ldots \quad x_1 : x_2 : x_3 = \sqrt{\frac{a_3 - a_2 \lambda^2}{a_1}} : \lambda : 1 .$$

Bezeichnet F die linke Seite der Gleichung von p, so haben die ersten partiellen Differentialquotienten von F in Bezug auf x_1, x_2, x_3 die Werthe:

$$F_1 = 2a_1x_1 \;;\; F_2 = 2a_2x_2 \;;\; F_3 = -2a_3x_3 \;;$$

demnach lautet die Gleichung der Tangente von p in P_λ:

$$(F_1)_\lambda \cdot x_1 + (F_2)_\lambda \cdot x_2 + (F_3)_\lambda \cdot x_3 = 0 \quad \text{oder}$$

$$t_\lambda) \quad \ldots \quad \sqrt{a_1 (a_3 - a_2 \lambda^2)} \cdot x_1 + a_2\lambda x_2 - a_3x_3 = 0 .$$

Der Tangente t_λ entspricht der Kegelschnitt

$$t_\lambda') \quad \sqrt{a_1 (a_3 - a_2 \lambda^2)} \,.\, x_2 x_3 + a_2 \lambda x_1 x_3 - a_3 x_1 x_2 = 0 \,.$$

Betrachtet man λ als einen variablen Parameter, so repräsentirt die Gleichung für t_λ sämmtliche geraden Linien, welche p umhüllen und die Gleichung von t_λ' sämmtliche Kegelschnitte, welche dem Fundamentaldreieck umschrieben sind und die Curve p' berühren. Eliminirt man endlich zwischen diesen beiden Gleichungen den Parameter λ, so erhält man die Gleichung des Ortes der Schnittpunkte aller Geraden t_λ mit ihren inversen Kegelschnitten. Durch Elimination der Anfangsglieder folgt zunächst:

$$\lambda a_2 (x_1^2 - x_2^2) \,.\, x_3 = a_3 x_2 (x_1^2 - x_3^2)$$

$$\lambda = \frac{a_3 x_2 (x_1^2 - x_3^2)}{a_2 x_3 (x_1^2 - x_2^2)} \,.$$

Setzt man diesen Werth von λ in die quadrirte Gleichung von t_λ $a_1(a_3 - a_2\lambda^2) \,.\, x_1^2 = (a_3 x_3 - a_2 \lambda x_2)^2$ ein, so ergibt sich:

$$a_1 \,.\, \left[a_3 - \frac{a_3^2 x_2^2 (x_1^2 - x_3^2)^2}{a_2 x_3^2 (x_1^2 - x_2^2)^2}\right] . \, x_1^2 = \left[a_3 x_3 - \frac{a_3 x_2^2 (x_1^2 - x_3^2}{x_3 (x_1^2 - x_2^2)}\right]^2$$

oder nach gehöriger Reduktion

$$C_6) \text{ I.)} \; a_2 a_3 x_1^2 \,.\, (x_2^2 - x_3^2)^2 + a_3 a_1 x_2^2 (x_3^2 - x_1^2)^2 - a_1 a_2 x_3^2 (x_1^2 - x_2^2)^2 = 0,$$

welche Gleichung unsere C_6 repräsentirt.

Zur Untersuchung der C_6 übergehend, bestimmen wir zuerst ihre Schnittpunkte mit den Coordinatenaxen. Substituiren wir in (I) $x_1 = 0$, so kommt

$$x_2^2 x_3^2 (a_3 x_3^2 - a_2 x_2^2) = 0 \,, \text{ woraus folgt}$$

$$x_2^2 = 0 \,,\; x_3^2 = 0 \,,\; \sqrt{a_2} \,.\, x_2 + \sqrt{a_3} \,.\, x_3 = 0 \,,\; \sqrt{a_2} \,.\, x_2 - \sqrt{a_3} \,.\, x_3 = 0,$$

d. h. die Schnittpunkte der Fundamentallinie $x_1 = 0$ mit der C_6 sind die Doppelpunkte A_2 und A_3 und die Punkte, in denen $x_1 = 0$ den Kegelschnitt p schneidet; die letztern fallen zusammen mit den Punkten Q_1 und Q_1^*, in welchen die von A_1 aus an den Kegelschnitt p gehenden Tangenten die Fundamentallinie $x_1 = 0$ schneiden. Die zwei letzten Gleichungen stellen die p-Tangenten A_1Q_1 und $A_1Q_1^*$ vor. (Tafel I.)

Analog ergiebt sich, dass $A_1 \begin{pmatrix} x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \end{pmatrix}$ ein Doppelpunkt und

$$Q_2 \begin{pmatrix} x_2 = 0 \\ \sqrt{a_1} \,.\, x_1 + \sqrt{a_3} \,.\, x_3 = 0 \end{pmatrix} , \quad Q_2^* \begin{pmatrix} x_2 = 0 \\ \sqrt{a_1} \,.\, x_1 - \sqrt{a_3} \,.\, x_3 = 0 \end{pmatrix}$$

$$Q_3 \begin{pmatrix} x_3 = 0 \\ \sqrt{a_1} \,.\, x_1 + i\sqrt{a_2} \,.\, x_2 = 0 \end{pmatrix} , \quad Q_3^* \begin{pmatrix} x_3 = 0 \\ \sqrt{a_1} \,.\, x_1 - i\sqrt{a_2} \,.\, x_2 = 0 \end{pmatrix}$$

einfache Punkte der C_6 sind. Q_2, Q_2^* sind die Schnittpunkte von $x_2 = 0$ mit p oder mit den von A_2 ausgehenden p-Tangenten, und Q_3, Q_3^*, welche imaginär sind, stellen die Schnittpunkte von $x_3 = 0$ mit p oder mit den von A_3 ausgehenden p-Tangenten vor.

Die Gleichung (I) ist ferner erfüllt für die Coordinaten der Punkte E, E_1, E_2, E_3; diese Punkte ergeben sich als Schnittpunkte der C_6 mit den sechs Geraden

$$x_2 \pm x_3 = 0 \;,\; x_1 \pm x_3 = 0 \;,\; x_1 \pm x_2 = 0.$$

Substituiren wir in (I) $x_2 \pm x_3 = 0$, so folgt:

$$a_3x_3^2(x_3^2 - x_1^2)^2 - a_2x_3^2(x_1^2 - x_3^2)^2 = 0 \quad \text{oder}$$

$$x_3^2\,(x_1^2 - x_3^2)^2 = 0 \quad \text{und daraus}$$

$x_3^2 = 0$, $(x_1 + x_3)^2 = 0$, $(x_1 - x_3)^2 = 0$. Diese Gleichungen drücken aus, dass die Schnittpunkte A_1, E, E_1, E_2, E_3 der Linien $x_2 - x_3 = 0$, $x_2 + x_3 = 0$ mit der C_6 Doppelpunkte der letztern sind.

Um die Tangenten der C_6 in den bekannten Punkten zu bestimmen resp. ihre Gleichungen aufzustellen, sind die Differentialquotienten der Funktion u *) nach x_1, x_2, x_3 erforderlich. Es ist

$$u_1 = 2a_2a_3x_1(x_2^2 - x_3^2)^2 - 4a_3a_1x_2^2(x_3^2 - x_1^2)x_1 - 4a_1a_2x_1x_3^2(x_1^2 - x_2^2)$$
$$u_2 = 4a_2a_3x_1^2x_2(x_2^2 - x_3^2) + 2a_3a_1x_2(x_3^2 - x_1^2)^2 + 4a_1a_2x_2x_3^2(x_1^2 - x_2^2)$$
$$u_3 = -4a_2a_3x_1^2x_3(x_2^2 - x_3^2) + 4a_3a_1x_2^2x_3(x_3^2 - x_1^2) - 2a_1a_2x_3(x_1^2 - x_2^2)^2$$
$$u_{11} = 2a_2a_3(x_2^2 - x_3^2)^2 - 4a_3a_1x_2^2(x_3^2 - 3x_1^2) - 4a_1a_2x_3^2(3x_1^2 - x_2^2)$$
$$u_{12} = 8a_2a_3x_1x_2(x_2^2 - x_3^2) - 8a_3a_1x_1x_2(x_3^2 - x_1^2) + 8a_1a_2x_2x_3^2$$
$$u_{13} = -8a_2a_3x_1x_3(x_2^2 - x_3^2) - 8a_3a_1x_1x_2^2x_3 - 8a_1a_2x_1x_3(x_1^2 - x_2^2)$$
$$u_{22} = 4a_2a_3x_1^2(3x_2^2 - x_3^2) + 2a_3a_1(x_3^2 - x_1^2)^2 + 4a_1a_2x_3^2(x_1^2 - 3x_2^2)$$
$$u_{23} = -8a_2a_3x_1^2x_3 + 8a_3a_1x_2x_3(x_3^2 - x_1^2) + 8a_1a_2x_2x_3(x_1^2 - x_2^2)$$
$$u_{33} = -4a_2a_3x_1^2(x_2^2 - 3x_3^2) + 4a_3a_1x_2^2(3x_3^2 - x_1^2) - 2a_1a_2(x_1^2 - x_2^2)^2$$

Das Tangentenpaar in einem Doppelpunkte der Curve $u = 0$ wird nun repräsentirt durch die Gleichung

$u_{11}x_1^2 + u_{22}x_2^2 + u_{33}x_3^2 + 2u_{23}x_2x_3 + 2u_{13}x_1x_3 + 2u_{12}x_1x_2 = 0$, wenn x_1, x_2, x_3 die laufenden Coordinaten bedeuten und in die Ausdrücke für u_{11}, u_{22}, u_{33}, u_{23}, u_{13}, u_{12} die Coordinaten des Doppelpunktes substituirt werden.

Für den Doppelpunkt A_1 $\begin{pmatrix} x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \end{pmatrix}$ ist

$$u_1 = 0 \;,\; u_2 = 0 \;,\; u_3 = 0$$
$$u_{11} = 0 \;,\; u_{12} = 0 \;,\; u_{13} = 0$$

---

*) $u = 0$ bedeutet die Gleichung der C_6.

$u_{22} = 2a_3a_1x_1^4$, $u_{23} = 0$, $u_{33} = -2a_1a_2x_1^4$; *) somit lautet die Gleichung des Tangentenpaares in A_1:

$$a_3x_2^2 - a_2x_3^2 = 0 \quad \text{oder}$$
$$(\sqrt{a_3}\,.\,x_2 + \sqrt{a_2}\,.\,x_3)\,.\,(\sqrt{a_3}\,.\,x_2 - \sqrt{a_2}\,.\,x_3) = 0\,.$$

Hieraus sieht man, dass die Tangenten im Doppelpunkt A_1 die resp. Inversen der p-Tangenten aus A_1 sind. Ganz dieselben Tangenten hat die Curve p′ im Doppelpunkt A_1, was auch schon aus dem Umstande folgt, dass A_1Q_1 und $A_1Q_1^*$ den Kegelschnitt p in Q_1 resp. Q_1^* berühren. — Um zu untersuchen, von welcher Art der Doppelpunkt A_1 ist, bestimmen wir die Schnittpunkte der Tangenten $a_3x_2^2 - a_2x_3^2 = 0$ mit der C_6. $x_2^2 = \frac{a_2}{a_3}x_3^2$ in (I) substituirt, gibt:

$$a_2a_3x_1^2.\left(\frac{a_2}{a_3}x_3^2 - x_3^2\right)^2 + a_1a_2a_3^2\left(x_3^2 - x_1^2\right)^2 - a_1a_2x_3^2\left(x_1^2 - \frac{a_2}{a_3}x_3^2\right)^2 = 0$$

$$\text{oder}\quad x_3^4.\left[(2a_1 + a_2 - a_3)\,x_1^2 - \frac{a_1(a_2 + a_3)}{a_3}\,.\,x_3^2\right] = 0.$$

$x_3^4 = 0$ sagt aus, dass in A_1 vier Schnittpunkte zusammenfallen; jede der Tangenten in A_1 hat also in A_1 vier zusammenfallende Punkte mit der C_6 gemein (mit einem Aste drei, mit dem andern einen), ist daher Inflexionstangente und der Punkt A_1 ein doppelter Inflexionsknoten, wie bei der Curve p′.

Für $A_2 \begin{pmatrix} x_1 = 0 \\ x_3 = 0 \end{pmatrix}$ ist

$$u_{11} = 2a_2a_3x_2^4\ ;\ u_{12} = 0\ ;\ u_{13} = 0$$
$$u_{22} = 0\ ;\ u_{23} = 0\ ;\ u_{33} = -2a_1a_2x_2^4\,.$$

Die Tangenten der C_6 im Doppelpunkt A_2 haben daher die Gleichungen

$$a_3x_1^2 - a_1x_3^2 = 0 \qquad \text{oder}$$
$$\sqrt{a_3}\,.\,x_1 + \sqrt{a_1}\,.\,x_3 = 0,\ \sqrt{a_3}\,.\,x_1 - \sqrt{a_1}\,.\,x_3 = 0\ ;$$

dieselben stimmen überein mit den Gleichungen der Inversen der p-Tangenten aus A_2. Die Tangenten der C_6 in A_2 sind also identisch mit den Tangenten der C_4 in A_2; sie sind für beide Curven Inflexionstangenten und A_2 ist somit auch, wie A_1, ein doppelter Inflexionsknoten für p′ und C_6.

---

*) Hier bedeutet x_1 eine Constante, nämlich die erste Coordinate von A_1, also das zu A_2A_3 gehörige Höhenperpendikel des Dreiecks $A_1A_2A_3$, wenn der Radius des dem letztern eingeschriebenen Kreises gleich der Einheit ist.

Endlich erhält man für die Tangenten der C_6 im Doppelpunkt A_3:

$$a_2 x_1^2 + a_1 x_2^2 = 0 \qquad \text{oder}$$

$$\sqrt{a_3}\,.\,x_1 + i\sqrt{a_1}\,.\,x_2 = 0\;,\;\sqrt{a_2}\,.\,x_1 - i\sqrt{a_1}\,.\,x_2 = 0\;.$$

A_3 ist also ein Doppelpunkt mit imaginären Tangenten, d. h. ein isolirter Punkt der C_6.

Die Punkte E, E_1, E_2, E_3 sind, wie schon gezeigt worden, ebenfalls Doppelpunkte der C_6; diess wird dadurch bestätigt, dass für dieselben die Ausdrücke u_1, u_2, u_3 verschwinden. Ferner ist für $E\begin{pmatrix} x_1 = 1 \\ x_2 = 1 \\ x_3 = 1 \end{pmatrix}$:

$$u_{11} = 8a_1(a_3 - a_2)\;;\; u_{12} = 8a_1a_2\;;\; u_{13} = -\,8a_1a_3$$

$$u_{22} = 8a_2(a_3 - a_1)\;;\; u_{23} = -\,8a_2a_3\;;\; u_{33} = 8a_3(a_1 + a_2).$$

Das Tangentenpaar im Doppelpunkt E hat demnach die Gleichung

$$a_1(a_3 - a_2)\,.\,x_1^2 + a_2(a_3 - a_1)\,.\,x_2^2 + a_3(a_1 + a_2)\,.\,x_3^2$$
$$+ 2a_1a_2x_1x_2 - 2a_1a_3x_1x_3 - 2a_2a_3x_2x_3 = 0.$$

Dasselbe stimmt überein mit dem von E aus an den Kegelschnitt p gehenden Tangentenpaare, denn die Gleichung desselben lautet:

$$(a_1x_1^2 + a_2x_2^2 - a_3x_3^2)\,(a_1 + a_2 - a_3) = (a_1x_1 + a_2x_2 - a_3x_3)^2$$

oder

$$a_1(a_3 - a_2)x_1^2 + a_2(a_3 - a_1)x_2^2 + a_3(a_1 + a_2)x_3^2$$
$$+ 2\,a_1a_2x_1x_2 - 2\,a_1a_3x_1x_3 - 2\,a_2a_3x_2x_3 = 0.$$

Je nachdem E ausserhalb oder innerhalb des Kegelschnittes p liegt, sind die Tangenten in E reell oder imaginär und E ist daher ein Knotenpunkt oder ein isolirter Punkt der C_6.

Analog verhält es sich mit den Punkten E_1, E_2, E_3. Enthält der Kegelschnitt p einen der vier Punkte E, E_1, E_2, E_3, dann muss er alle enthalten, weil für sämmtliche vier Punkte $a_1 + a_2 - a_3 = 0$ sein muss; in diesem Falle ist p eine gleichseitige Hyperbel. Die Punkte E, E_1, E_2, E_3 liegen sämmtlich entweder ausserhalb oder innerhalb des Kegelschnittes p oder alle auf demselben und zwar

ausserhalb, wenn $a_3 < a_1 + a_2$
innerhalb, wenn $a_3 > a_1 + a_2$
auf p, wenn $a_3 = a_1 + a_2$.

Für die Punkte Q_1 und Q_1^* ist $x_1 = 0$, $x_2^2 = \frac{a_3}{a_2}\,x_3^2$, daher $u_1 = 0$

$$u_2 = 2\,a_3a_1\sqrt{\frac{a_3}{a_2}}\,.\,x_3^5 - 4a_1a_3\sqrt{\frac{a_3}{a_2}}\,.\,x_3^5 = -\,2\,a_1a_3\sqrt{\frac{a_3}{a_2}}\,.\,x_3^5$$

$$u_3 = 4\,\frac{a_1a_3^2}{a_2}\,.\,x_3^5 - 2\,\frac{a_1a_3^2}{a_2}\,.\,x_3^5 = \frac{2\,a_1a_3^2}{a_2}\,x_3^5\,.$$

Die Tangenten in diesen Punkten haben daher die Gleichungen

$$\pm\sqrt{\frac{a_3}{a_2}}\cdot x_2 - \frac{a_3}{a_2}\cdot x_3 = 0 \qquad \text{oder}$$

$$\sqrt{a_2}\,.\,x_2 \pm \sqrt{a_3}\,.\,x_3 = 0\,, \qquad \text{also}$$

Gleichung von t_{Q_1} : $\sqrt{a_2}\,.\,x_2 + \sqrt{a_3}\,.\,x_3 = 0$

« « $t_{Q_1^*}$: $\sqrt{a_2}\,.\,x_2 - \sqrt{a_3}\,.\,x_3 = 0$.

Die Tangenten der C_6 in Q_1 und Q_1^* sind also identisch mit den p-Tangenten in jenen Punkten. †) Ebenso findet man, dass die von A_2 resp. A_3 ausgehenden p-Tangenten A_2Q_2, $A_2Q_2^*$; A_3Q_3, $A_3Q_3^*$ die Tangenten der C_6 in Q_2, Q_2^*; Q_3, Q_3^* sind; die zwei letzteren Tangenten sind natürlich, sowie ihre Berührungspunkte Q_3, Q_3^*, imaginär.

Die C_6 und der Kegelschnitt p berühren sich in den sechs Punkten Q (wovon zwei imaginär sind), und da sie im Allgemeinen nur zwölf gemeinsame Punkte haben können, so existiren keine weiteren gemeinsamen Punkte. Demnach werden auch die C_6 und p' nur die Fundamentalpunkte A_1, A_2, A_3 gemein haben; in der That liefert in A_i jeder Ast der C_4 mit den beiden Aesten der C_6 $1 + 3 = 4$ Schnittpunkte, es zählt also jeder Fundamentalpunkt für acht Schnittpunkte, sämmtliche Schnittpunkte von p' und C_6 liegen daher in den Fundamentalpunkten.

Da A_1Q_1, $A_1Q_1^*$; A_2Q_2, $A_2Q_2^*$ die C_6 in den resp. Punkten Q_1, Q_1^*; Q_2, Q_2^* berühren, so folgt, dass ihre Inversen, d. h. die Tangenten der C_6 in den Doppelpunkten A_1 und A_2 Inflexionstangenten sein müssen; dasselbe Resultat hat früher schon die Rechnung ergeben.

Die C_6 hat sechs unendlich ferne Punkte, von denen entweder vier reell und zwei imaginär oder gar keine reell sind. Die Curve besitzt vier reelle unendlich ferne Punkte und besteht daher aus vier ins Unendliche gehenden Zweigen (siehe Tafel 1, Fig. 1), wenn $a_3 < a_1 + a_2$, also sämmtliche E_i Knotenpunkte sind. Die C_6 schneidet den dem Fundamentaldreieck umschriebenen Kreis K ausser A_1, A_2, A_3 in vier Punkten X_1, Y_1, Z_1, W_1, denen die unendlich fernen Punkte der C_6 entsprechen. Die p-Tangenten X_1X_1', Y_1Y_1', Z_1Z_1', W_1W_1' geben die Richtungen an, nach welchen die C_6 ins Unendliche geht, und die zu ihnen parallelen Tangenten der C_6 in X_1', Y_1', Z_1', W_1'

†) Dieses Resultat liess sich erwarten, denn wenn die C_6 diejenigen Punkte enthält, in welchen $x_1 = 0$ den Kegelschnitt p schneidet, so muss in jenen Punkten p von C_6 berührt werden, da keine Punkte der C_6 im Innern von p liegen können.

sind die Asymptoten der Curve. X_1X_1', Y_1Y_1', Z_1Z_1', W_1W_1' sind die von X_1, Y_1, Z_1, W_1 aus an den Kegelschnitt p gehenden Tangenten, welche parallel zu den resp. Inversen von A_1X_1, A_1Y_1, A_1Z_1, A_1W_1 sind; sie stellen diejenigen p-Tangenten vor, welche sich mit ihren inversen Hyperbeln in je einem unendlich fernen Punkte schneiden, welche also parallel sind zu je einer Asymptote der ihnen entsprechenden Hyperbeln. — Die C_6 entspricht in der Weise sich selbst, dass

dem	Stück	$EA_1\underset{\infty}{Z_1'}E_1$	das	Stück	$EQ_1{}^*Z_1E_1$	
«	«	$EA_2\underset{\infty}{W_1'}E_2$	«	«	$EQ_2{}^*W_1E_2$	
«	«	$E_1A_2Y_1E_3$	«	«	$E_1Q_2\underset{\infty}{Y_1'}E_3$	und
«	«	$E_2A_1X_1E_3$	«	«	$E_2Q_1\underset{\infty}{X_1'}E_3$	entspricht.

Jeder der vier Zweige entspricht sich also selbst.

Von der C_6 liegen gar keine Punkte im Unendlichen, wenn $a_3 > a_1 + a_2$, also sämmtliche E isolirte Punkte sind (Tafel II, Fig. 1). Die C_6 besteht in diesem Falle aus zwei geschlossenen, mit doppeltem Inflexionsknoten versehenen Curven, von denen die eine in Q_1 und $Q_1{}^*$, die andere in Q_2 und $Q_2{}^*$ den Kegelschnitt p berührt. Dem Curvenstück $Q_1PA_2RQ_1{}^*$ entspricht das Stück $A_1P'Q_2R'A_1$ der andern Curve und dem Stück $Q_1{}^*TA_2Q_1$ entspricht $A_1T'Q_2{}^*A_1$.

In beiden Fällen sind die Plücker'schen Charaktere der C_6, wie im allgemeinsten Falle:

$$\mu = 6\,,\quad \nu = 16\,,\quad \delta = 7\,,\quad \varkappa = 0\,,\quad \iota = 30\,,\quad \tau = 72.$$

Wenn $a_2 = a_3$, dann wird der Kegelschnitt p (eine Hyperbel) von den Linien $x_2 - x_3 = 0$ und $x_2 + x_3 = 0$ in ihren Schnittpunkten mit $x_1 = 0$ berührt, es müssen daher A_1E_1 und A_1E_2 der C_6 als Theile angehören. Die Gleichungen von p und C_6 lauten:

p) . . . . . . $a_1x_1^2 + a_3(x_2^2 - x_3^2) = 0$

C_6) . $a_3x_1^2(x_2^2 - x_3^2)^2 + a_1x_2^2(x_3^2 - x_1^2)^2 - a_1x_3^2(x_1^2 - x_2^2)^2 = 0.$

Letztere kann umgeformt werden, wie folgt:

$$a_3x_1^2(x_2^2 - x_3^2)^2 + a_1\left[x_1^4.(x_2^2 - x_3^2) - x_2^2x_3^2(x_2^2 - x_3^2)\right] = 0 \text{ oder}$$

$$(x_2^2 - x_3^2).\left[a_3x_1^2(x_2^2 - x_3^2) + a_1(x_1^4 - x_2^2x_3^2)\right] = 0.$$

Es sondern sich also in der That die Faktoren $x_2 + x_3$ und $x_2 - x_3$ ab, die C_6 zerfällt somit in $x_2 - x_3 = 0$, $x_2 + x_3 = 0$ und die Curve vierter Ordnung:

$$C_4 \ . \ . \ . \left\{ \begin{array}{l} a_1x_1^4 - a_1x_2^2x_3^2 - a_3x_1^2x_3^2 + a_3x_1^2x_2^2 = 0 \qquad \text{oder} \\ x_1^2(a_1x_1^2 - a_3x_3^2) + x_2^2(a_3x_1^2 - a_1x_3^2) = 0. \end{array} \right.$$

Die C_4 enthält die Punkte A_2, A_3, E, E_1, E_2, E_3, jedoch sind nur A_2 und A_3 Doppelpunkte der C_4. Ferner geht sie durch die Schnittpunkte Q_2, Q_2^* und Q_3, Q_3^* (die zwei letzteren sind imaginär) der Hyperbel p mit $x_2 = 0$ resp. $x_3 = 0$ und wird, wie die Hyperbel, von A_2Q_2 und $A_2Q_2^*$ in Q_2 resp. Q_2^* berührt. Die Tangenten der C_4 in A_2 sind die Inversen von A_2Q_2 und $A_2Q_2^*$, ihre Gleichungen lauten: $\sqrt{a_1}\,.\,x_3 + \sqrt{a_3}\,.\,x_1 = 0$, $\sqrt{a_1}\,.\,x_3 - \sqrt{a_3}\,.\,x_1 = 0$; da jede von ihnen mit der C_4 in A_2 vier Punkte gemein hat, so sind sie zugleich Inflexionstangenten und A_2 ist ein doppelter Inflexionsknoten. Der Fundamentalpunkt A_3 ist ein isolirter Punkt der C_4. (Tafel II, Fig. 2) Für das Tangentenpaar der C_6 in E ergibt sich:

$$(x_2 - x_3)\,.\,\left[2a_1x_1 + (a_3 - a_1)\,.\,x_2 - (a_3 + a_1)x_3\right] = 0,$$

daher repräsentirt die Gleichung

$$2a_1x_1 + (a_3 - a_1)x_2 - (a_3 + a_1)x_3 = 0$$

die Tangente der C_4 in E, dieselbe stimmt überein mit der von E aus an die Hyperbel p gehenden Tangente, welche nicht mit A_1E_1 zusammenfällt. Ebenso sind die Tangenten der C_4 in E_1, E_2, E_3 die von diesen Punkten ausgehenden Hyperbeltangenten, welche nicht mit A_1E_1 oder A_1E_2 zusammenfallen. — Die C_4 hat zwei reelle unendlich ferne Punkte und besteht daher aus zwei ins Unendliche gehenden Zweigen. Die Plücker'schen Charaktere der C_4 lauten: $\mu = 4$, $\delta = 2$, $\varkappa = 0$, $\nu = 8$, $\iota = 12$, $\tau = 8$.

Wenn $a_1 = a_2 = a_3$, dann ist p die Hyperbel

$$x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0,$$

und da $x_2 \pm x_3 = 0$ und $x_1 \pm x_3 = 0$ die Tangenten derselben in Q_1, Q_1^* resp. Q_2, Q_2^* sind, so sondern sich E_2E_3, A_1E_1, E_1E_3, A_2E_2 von der C_6 ab, so dass schliesslich noch eine C_2 übrig bleibt. Die im vorigen Specialfalle erhaltene C_4 geht über in

$$x_1^2(x_1^2 - x_3^2) + x_2^2(x_1^2 - x_3^2) = 0 \quad \text{oder}$$
$$(x_1^2 - x_3^2)\,.\,(x_1^2 + x_2^2) = 0.$$

Die im vorliegenden Falle entstehende C_6 lautet daher:

$$(x_2^2 - x_3^2)\,.\,(x_1^2 - x_3^2)\,.\,(x_1^2 + x_2^2) = 0;$$

sie besteht aus den Linien A_1E_1, A_1E_2; A_2E_1, A_2E_2 und den imaginären Geraden, welche A_3 mit den (imaginären) Schnittpunkten von p mit $x_3 = 0$ verbinden. Sieht man von den erstern ab, so reducirt sich die C_6 auf das Linienpaar

$$x_1 + ix_2 = 0\,,\quad x_1 - ix_2 = 0\,;$$

da dasselbe imaginär ist, so werden die Hyperbeltangenten die ihnen entsprechenden Kegelschnitte niemals reell schneiden.

Es bleibt nun noch der besonders interessante Fall zu behandeln übrig, in welchem p eine durch E, E_1, E_2, E_3 gehende gleichseitige Hyperbel vorstellt; derselbe tritt ein, wenn $a_3 = a_1 + a_2$ ist.

Die Gleichung der gleichseitigen Hyperbel p lautet:

$$\text{p)} \quad \ldots \quad a_1x_1^2 + a_2x_2^2 - (a_1 + a_2)\,.\,x_3^2 = 0.$$

Ihr entspricht die Curve vierter Ordnung:

$$\text{p}') \quad \ldots \quad a_1x_2^2x_3^2 + a_2x_1^2x_3^2 - (a_1 + a_2)x_1^2x_2^2 = 0$$

und die C_6 hat die Gleichung:

$$C_6) \quad a_2(a_1 + a_2)\,.\,x_1^2(x_2^2 - x_3^2)^2 + a_1(a_1 + a_2)x_2^2(x_3^2 - x_1^2)^2 - a_1a_2x_3^2(x_1^2 - x_2^2)^2 = 0.$$

Alle drei Curven p, p′ und C_6 gehen durch E, E_1, E_2, E_3 und haben in jedem dieser Punkte die nämliche Tangente. Die Gleichungen der vier gemeinschaftlichen Tangenten lauten:

$$t_E) \quad \ldots \quad a_1x_1 + a_2x_2 - (a_1 + a_2)x_3 = 0$$

$$t_{E_1}) \quad \ldots \quad a_1x_1 - a_2x_2 + (a_1 + a_2)x_3 = 0$$

$$t_{E_2}) \quad \ldots \quad a_1x_1 - a_2x_2 - (a_1 + a_2)x_3 = 0$$

$$t_{E_3}) \quad \ldots \quad a_1x_1 + a_2x_2 + (a_1 + a_2)x_3 = 0$$

Die C_6 berührt also p nicht nur in Q_1, Q_1^*, Q_2, Q_2^*, Q_3, Q_3^*, sondern auch noch in E, E_1, E_2, E_3. (Tafel III.) Wenn aber C_6 und p mehr als zwölf gemeinsame Punkte haben, so müssen sämmtliche Hyperbelpunkte der C_6 angehören, d. h. die Hyperbel p bildet einen Theil der C_6, welche zerfällt. Enthält aber die C_6 sämmtliche Punkte von p, so müssen ihre Inversen d. h. die Punkte von p′ nothwendigerweise ebenfalls der C_6 angehören; es bildet also auch die Curve p′ einen Theil der C_6. Im vorliegenden Falle zerfällt demnach die Curve sechster Ordnung in die gleichseitige Hyperbel p und die ihr entsprechende Curve vierter Ordnung p′. Diess zeigt auch die Gleichung der C_6, dieselbe kann nämlich in folgender Form geschrieben werden:

$$\left[a_1x_1^2 + a_2x_2^2 - (a_1 + a_2)x_3^2\right] \cdot \left[a_1x_2^2x_3^2 + a_2x_1^2x_3^2 - (a_1 + a_2)x_1^2x_2^2\right] = 0.$$

Während im allgemeinsten Falle die Verbindungslinie entsprechender Punkte der C_6 den Kegelschnitt p umhüllen, so liegen hier zwei entsprechende Punkte der C_6, von denen der eine stets der Hyperbel p, der andere der Curve p' angehören muss, auf der p-Tangente im ersten der beiden Punkte. Der entsprechende Kegelschnitt einer jeden Hyperbel-Tangente schneidet die letztere in ihrem Berührungspunkte und der Ort des zweiten Schnittpunktes ist die C_4, welche zur Hyperbel invers ist. Der inverse Punkt P' eines Hyperbelpunktes P liegt auf der zu P gehörigen Hyperbel-Tangente.

Die C_6 hat vier reelle unendlich ferne Punkte, da die Hyperbel und die C_4 (p') je zwei besitzen; sie entsprechen den Punkten, in denen der Kreis K die Curven p und p' trifft. Die unendlich fernen Punkte der C_4 sind die Inversen der Schnittpunkte X und Y von K mit p, und die unendlich fernen Punkte der Hyperbel p entsprechen den gemeinsamen Punkten Z und W von K und p' (siehe Tafel III).

Nun muss nach Vorigem

$$\begin{array}{lccccll}
X\underset{\infty}{X'} & \text{die Tangente} & \text{der} & \text{Hyperbel} & \text{in} & X & \\
Y\underset{\infty}{Y'} & « & « & « & « & Y & \\
Z\underset{\infty}{Z'} & « & « & « & « & \underset{\infty}{Z'} & \\
W\underset{\infty}{W'} & « & « & « & « & \underset{\infty}{W'} & \text{sein,}
\end{array}$$

es sind daher $Z\underset{\infty}{Z'}$ und $W\underset{\infty}{W'}$ die Asymptoten der Hyperbel. Der Tangente der C_4 in $\underset{\infty}{X'}$ (Asymptote der C_4) entspricht ein Kegelschnitt, welcher durch A_1, A_2, A_3, X geht und die Hyperbel in X berührt (XX' ist die Tangente desselben in X). Construirt man von demselben die Tangente z. B. in A_1 und zu derselben die Inverse, so geht durch den Schnittpunkt der letztern mit A_2A_3, zu XX' parallel, die erwähnte Asymptote der C_4. Analog kann die andere Asymptote der C_4, die Tangente den C_4 in $\underset{\infty}{Y'}$, construirt werden.

Man kann die C_6 betrachten als eine aus den vier Zweigen:

$$\underset{\infty}{X'}A_2EA_1\underset{\infty}{Y'} \quad , \quad \underset{\infty}{Y'}E_1WA_2E_3A_1ZE_2\underset{\infty}{X'}$$
$$\underset{\infty}{Z'}E_2XEYE_1\underset{\infty}{W'} \quad , \quad \underset{\infty}{W'}Q_2E_3Q_1\underset{\infty}{Z'}$$

zusammengesetzte Curve. Der erste Zweig berührt den dritten in E, der zweite Zweig berührt den dritten in E_1 und E_2 und der vierten in E_3. Die Punkte E, E_1, E_2, E_3 sind dann also als Berührungsknoten der C_6 anzusehen. Die Tangente t_E hat in E vier zusammenfallende Punkte mit der C_6 gemein, nämlich zwei mit Hyperbel und der zwei mit der C_4, welche beide Curven sich in E berühren. Analoges gilt für die Tangenten in E_1, E_2 und E_3. *)

Die C_6 kann aber auch angesehen werden als Curve, welche aus den vier Zweigen besteht:

$$\underset{\infty}{Y'}A_1EQ_1{}^*YE_1\underset{\infty}{Y'} \qquad \underset{\infty}{X'}A_2EQ_2{}^*XE_2\underset{\infty}{X'}$$

$$\underset{\infty}{Z'}Q_1E_3A_1ZE_2\underset{\infty}{Z'} \qquad \underset{\infty}{W'}Q_2E_3A_2WE_1\underset{\infty}{W'}$$

Diese Auffassung entspricht ganz derjenigen bei der Curve C_6 in Fig. 1, Tafel I, wo je zwei inverse Punkte auf demselben Zweige der C_6 liegen und also jeder einzelne Zweig sich selbst entspricht.

Bei der hier vorliegenden C_6 entspricht dem Curvenstück

$EA_1\underset{\infty}{Y'}E_1$	das Stück $EQ_1{}^*YE_1$;	beide bilden den Curvenzweig	$\underset{\infty}{Y'}A_1EQ_1{}^*YE_1\underset{\infty}{Y'}$
$EA_2\underset{\infty}{X'}E_2$	« « $EQ_2{}^*XE_2$;	« « « «	$\underset{\infty}{X'}A_2EQ_2{}^*XE_2\underset{\infty}{X'}$
$E_3A_1ZE_2$	« « $E_3Q_1\underset{\infty}{Z'}E_2$;	« « « «	$\underset{\infty}{Z'}Q_1E_3A_1ZE_2\underset{\infty}{Z'}$
$E_3A_2WE_1$	« « $E_3Q_2\underset{\infty}{W'}E_1$;	« « « «	$\underset{\infty}{W'}Q_2E_3A_2WE_1\underset{\infty}{W'}$

Daraus geht hervor, dass in E die Tangente (t_E) der C_6 für beide durch E hindurchgehende Aeste der C_6 Inflexionstangente ist, sie repräsentirt also zwei zusammenfallende Inflexionstangenten; man kann daher E als einen doppelten Inflexionsknoten ansehen, bei welchem die beiden Tangenten im Knoten zusammenfallen. Die beiden durch E gehenden Zweige der C_6 berühren und durchsetzen sich in E, oder es findet zwischen den beiden Aesten in E eine Osculation statt; einen solchen Punkt nennt man einen Osculationsknoten. Derselbe kann als Vereinigung von drei Knotenpunkten betrachtet werden, d. h. er vertritt die Stelle von drei Doppelpunkten der C_6. Ebenso sind E_1, E_2, E_3 Osculationsknoten der Curve sechster Ordnung. **)

Aus den Gleichungen der Tangenten t_E, t_{E_1}, t_{E_2}, t_{E_3} in den Osculationsknoten ist noch folgendes Erwähnenswerthe ersichtlich:

t_E und t_{E_1} schneiden sich auf $x_1 = 0$ im Punkte F

t_{E_2} und t_{E_3} « « « « « « F_1

(Tafel III, Fig. 2.) und F, F_1 sind harmonisch conjugirt in Bezug auf A_2, A_3.

t_E und t_{E_2} schneiden sich auf $x_2 = 0$ im Punkte G

t_{E_1} und t_{E_3} « « « « « « G_1

und G, G_1 sind harmonisch conjugirte Punkte in Bezug auf A_1, A_3.

*) Die C_6 ist zweitheilig; jeder Theil (C_2 und C_4) besteht aus zwei unendlichen Aesten, die eine zusammenhängende Curve bilden.

**) Nach der zweiten Auffassung besteht die C_6 aus vier unendlichen Aesten, die nicht zusammenhängen; sie ist also eine viertheilige Curve.

t_E und t_{E_3} schneiden sich auf $x_3 = 0$ in H
t_{E_1} und t_{E_2} « « « « « H_1

und H, H_1 sind harmonisch conjugirte Punkte in Bezug auf A_1, A_2.

Auf t_E liegen die Punkte F, G, H
« t_{E_1} « « « F, G_1, H_1
« t_{E_2} « « « F_1, G, H_1
« t_{E_3} « « « F_1, G_1, H

Die vier Tangenten bilden also ein vollständiges Vierseit, für welches die sechs Punkte F, G, H, F_1, G_1, H_1 die Ecken, die Fundamentallinien die Diagonalen und A_1, A_2, A_3 die Diagonalpunkte sind. Das vollständige Viereck $E\,E_1\,E_2\,E_3$ besitzt das nämliche Diagonal-Dreieck. Sobald eine der vier Tangenten gegeben ist, ergeben sich die übrigen sofort mit Hülfe der Punkte F, G, H. Umgekehrt folgt: Sind vier Tangenten einer gleichseitigen Hyperbel gegeben, so findet man ihre Berührungspunkte, indem man das Dreieck der Diagonalpunkte und für dieses die Punkte E, E_1, E_2, E_3 construirt.

Der Kegelschnitt p, dessen Gleichung in Punktcoordinaten x_1, x_2, x_3 lautet: $a_1x_1^2 + a_2x_2^2 - a_3x_3^2 = 0$, hat in Liniencoordinaten ξ_1, ξ_2, ξ_3 die Gleichung:

$$a_2a_3\xi_1^2 + a_1a_3\xi_2^2 - a_1a_2\xi_3^2 = 0.$$

Für seinen Mittelpunkt 0 erhält man die Gleichung:

$$a_2a_3\sin A_1 \,.\, \xi_1 + a_1a_3\sin A_2 \,.\, \xi_2 - a_1a_2\sin A_3 \,.\, \xi_3 = 0,$$

d. h. für die Coordinaten von 0 ist

$$x_1 : x_2 : x_3 = a_2a_3\sin A_1 : a_3a_1\sin A_2 : - a_1a_2\sin A_3.$$

Wenn nun p eine gleichseitige Hyperbel, also $a_1 + a_2 - a_3 = 0$ ist, dann liegt 0 auf dem Kreise K und zwar auf der Geraden

$$x_1 : x_2 = a_2\sin A_1 : a_1\sin A_2.$$

Im speziellen Falle $a_1 = a_2$ liegt 0 auf der Inversen der Schwerlinie A_3S *) des Fundamentaldreiecks.

Für alle unendlich vielen gleichseitigen Hyperbeln, welche durch E, E_1, E_2, E_3 gehen, befindet sich das Centrum 0 auf K. Die Geraden OZ und OW sind die Asymptoten der gleichseitigen Hyperbel, und da dieselben aufeinander senkrecht stehen, so muss ZW ein Durchmesser von K sein.

*) S bezeichnet den Schwerpunkt des Dreiecks $A_1\,A_2\,A_3$.

II. Der Kegelschnitt p sei dem Fundamentaldreieck eingeschrieben.

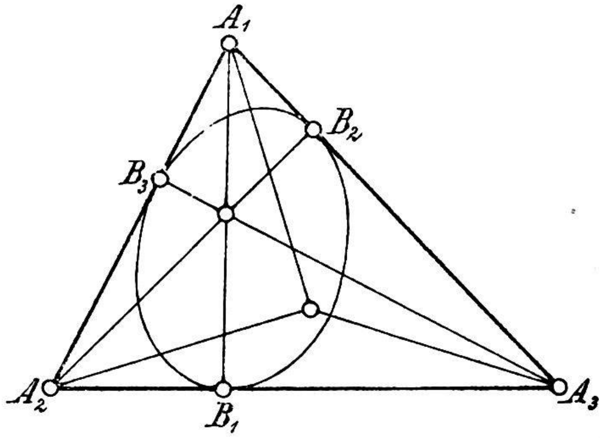
Ein dem Fundamentaldreieck eingeschriebener Kegelschnitt hat die Gleichung:

$$1.\ p)\begin{cases} \sqrt{a_1x_1} + \sqrt{a_2x_2} + \sqrt{a_3x_3} = 0 \qquad \text{oder} \\ a_1^2x_1^2 + a_2^2x_2^2 + a_3^2x_3^2 - 2a_1a_2x_1x_2 - 2a_1a_3x_1x_3 \\ \qquad - 2a_2a_3x_2x_3 = 0. \end{cases}$$

Die correspondirende Curve p′ ist die Curve vierten Gerades:

$$2.\ p')\begin{cases} \sqrt{a_1x_2x_3} + \sqrt{a_2x_1x_3} + \sqrt{a_3x_1x_2} = 0 \qquad \text{oder} \\ a_1^2x_2^2x_3^2 + a_2^2x_1^2x_3^2 + a_3^2x_1^2x_2^2 - 2a_1a_2x_3^2x_1x_2 \\ \qquad - 2a_1a_3x_2^2x_1x_3 - 2a_2a_3x_1^2x_2x_3 = 0. \end{cases}$$

Diese C_4 besitzt drei Spitzen in den Fundamental-Punkten; die zugehörigen Rückkehr-Tangenten sind die Inversen zu den resp. Verbindungslinien der Fundamentalpunkte A_1, A_2, A_3 mit den Berührungspunkten des Kegelschnittes auf den Gegenseiten. Die betreffenden Gleichungen lauten:



Für die Tangente in der Spitze A_1 : $a_3x_2 - a_2x_3 = 0$
« « « « « « A_2 : $a_1x_3 - a_3x_1 = 0$
« « « « « « A_3 : $a_2x_1 - a_1x_2 = 0$

Die drei Tangenten gehen durch einen und denselben Punkt, den Inversen des gemeinsamen Punktes von A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3, wobei B_1, B_2, B_3 die Berührungspunkte von p mit A_2A_3, A_1A_3, A_1A_2 bezeichnen. *)

Um die Gleichung der Curve sechster Ordnung C_6 zu erhalten, setzen wir wieder für einen Punkt P_λ auf p $\frac{x_2}{x_3} = \lambda$, dann gibt Gleichung (1):

*) Unter dem eingeschriebenen Kegelschnitt wurde, wie gewöhnlich, derjenige verstanden, für welchen die Berührungspunkte B_1, B_2, B_3 zwischen den Ecken des Fundamentaldreiecks liegen; es liegen dann auch keine Punkte von p und p′ ausserhalb des Dreiecks $A_1A_2A_3$ und p′ kann somit keine unendlich fernen Punkte besitzen. Diess ist der Fall, wenn die Coefficienten a_1, a_2, a_3 positive Werthe haben.

$$\sqrt{a_1\frac{x_1}{x_3}} + \sqrt{a_2\lambda} + \sqrt{a_3} = 0 \qquad \text{oder}$$

$$\frac{x_1}{x_3} = \frac{(\sqrt{a_3} + \sqrt{a_2\lambda})^2}{a_1}.$$

Für die Coordinaten des Punktes P_λ ist daher

$$x_1 : x_2 : x_3 = (\sqrt{a_3} + \sqrt{a_2\lambda})^2 : a_1\lambda : a_1.$$

Bedeutet f die linke Seite der Gleichung (1), so sind

$$f_1 = \frac{\sqrt{a_1}}{2\sqrt{x_1}}, \quad f_2 = \frac{\sqrt{a_2}}{2\sqrt{x_2}}, \quad f_3 = \frac{\sqrt{a_3}}{2\sqrt{x_3}}$$

die ersten Differentialquotienten von f nach x_1, x_2, x_3; durch Substitution der Coordinaten von P_λ gehen dieselben über in

$$f_1 = -\frac{\sqrt{a_1}}{2(\sqrt{a_3} + \sqrt{a_2\lambda})}, \quad f_2 = \frac{\sqrt{a_2}}{2\sqrt{a_1\lambda}}, \quad f_3 = \frac{\sqrt{a_3}}{2\sqrt{a_1}},$$

wobei ein gemeinschaftlicher constanter Faktor weggelassen worden ist. *) Nun erhält man für die Tangente t_λ des Kegelschnittes p im Punkte P_λ die Gleichung:

$$3.\ t_\lambda)\quad -\frac{\sqrt{a_1}}{\sqrt{a_3} + \sqrt{a_2\lambda}} \cdot x_1 + \frac{\sqrt{a_2}}{\sqrt{a_1\lambda}} \cdot x_2 + \frac{\sqrt{a_3}}{\sqrt{a_1}} \cdot x_3 = 0$$

und für ihren entsprechenden (inversen) Kegelschnitt:

$$4.\ t_\lambda')\quad -\frac{\sqrt{a_1}}{\sqrt{a_3} + \sqrt{a_2\lambda}} \cdot x_2x_3 + \sqrt{\frac{a_2}{a_1\lambda}} \cdot x_1x_3 + \sqrt{\frac{a_3}{a_1}} \cdot x_1x_2 = 0.$$

Multiplizirt man (3) mit $-x_2x_3$, (4) mit x_1 und addirt beide Gleichungen, so kommt:

$$\sqrt{\frac{a_2}{a_1\lambda}} \cdot x_3(x_1^2 - x_2^2) = \sqrt{\frac{a_3}{a_1}} \cdot x_2(x_3^2 - x_1^2);$$

hieraus folgt:

$$\sqrt{\frac{a_2}{\lambda}} = \frac{\sqrt{a_3}\,.\,x_2(x_3^2 - x_1^2)}{x_3(x_1^2 - x_2^2)} \quad \text{und} \quad \lambda = \frac{a_2x_3^2(x_1^2 - x_2^2)^2}{a_3x_2^2(x_3^2 - x_1^2)^2}.$$

Setzt man den gefundenen Werth von λ in (3) ein, so ergibt sich als Resultat der Elimination des Parameters λ zwischen (3) und (4) die folgende Gleichung:

---

*) Anmerkung. $\sqrt{x_1}$ ist positiv oder negativ, je nachdem $\sqrt{x_2}$ und $\sqrt{x_3}$ beide negativ oder positiv sind. Wenn $\sqrt{x_2}$ und $\sqrt{x_3}$ positiv angenommen werden, wie hier geschehen ist, so muss $\sqrt{x_1}$ negativ sein, da die Werthe von $\sqrt{x_1}$, $\sqrt{x_2}$, $\sqrt{x_3}$ der Gleichung $\sqrt{a_1x_1} + \sqrt{a_2x_2} + \sqrt{a_3x_3} = 0$ genügen müssen.

$$-\frac{\sqrt{a_1}\,.\,x_1}{\sqrt{a_3}+\dfrac{a_2x_3(x_1^2-x_2^2)}{\sqrt{a_3}\,.\,x_2(x_3^2-x_1^2)}}+\sqrt{\frac{a_3}{a_1}}\cdot\frac{x_2(x_3^2-x_1^2)}{x_3(x_1^2-x_2^2)}\cdot x_2+\sqrt{\frac{a_3}{a_1}}\cdot x_3=0$$

oder

$$-\frac{a_1x_1x_2(x_3^2-x_1^2)}{a_3x_2(x_3^2-x_1^2)+a_2x_3(x_1^2-x_2^2)}+\frac{x_2^2(x_3^2-x_1^2)}{x_3(x_1^2-x_2^2)}+x_3=0$$

oder

$$\begin{aligned}&-a_1x_1x_2x_3(x_3^2-x_1^2)\,.\,(x_1^2-x_2^2)\\&+x_2^2(x_3^2-x_1^2)\,.\,\left[a_3x_2(x_3^2-x_1^2)+a_2x_3(x_1^2-x_2^2)\right]\\&+x_3^2(x_1^2-x_2^2)\,.\,\left[a_3x_2(x_3^2-x_1^2)+a_2x_3(x_1^2-x_2^2)\right]=0\end{aligned}$$

oder

$$\begin{aligned}&-a_1x_1x_2x_3(x_3^2-x_1^2)\,.\,(x_1^2-x_2^2)\\&-\left[a_3x_2(x_3^2-x_1^2)+a_2x_3(x_1^2-x_2^2)\right]\,.\,x_1^2(x_2^2-x_3^2)=0\end{aligned}$$

oder

II.) . . . $a_3x_1x_2(x_2^2-x_3^2)\,(x_3^2-x_1^2)$
$+\,a_2x_1x_3(x_2^2-x_3^2)\,(x_1^2-x_2^2)+a_1x_2x_3(x_3^2-x_1^2)\,(x_1^2-x_2^2)=0.$

Diese Gleichung repräsentirt die C_6.

Nehmen wir speziell $a_1=a_2=a_3$ an, d. h. stellt p den Kegelschnitt vor, welcher die Fundamentallinien in den Punkten

$$\begin{pmatrix}x_1=0\\x_2-x_3=0\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}x_2=0\\x_1-x_3=0\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}x_3=0\\x_1-x_2=0\end{pmatrix}$$

berührt, dann sind $x_2-x_3=0$, $x_1-x_3=0$, $x_1-x_2=0$ die Rückkehrtangenten der C_4 (p′) und die bezüglichen Gleichungen lauten:

für p: $\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}+\sqrt{x_3}=0$
« p′: $\sqrt{x_2x_3}+\sqrt{x_1x_3}+\sqrt{x_1x_2}=0$
« C_6: $x_1x_2(x_2^2-x_3^2)\,(x_3^2-x_1^2)+x_1x_3(x_2^2-x_3^2)\,(x_1^2-x_2^2)$
$+\,x_2x_3(x_3^2-x_1^2)\,(x_1^2-x_2^2)=0.$

Die Untersuchung der Curve (II) zeigt zunächst, dass die Fundamentalpunkte A_1, A_2, A_3 Knotenpunkte derselben sind. Die Fundamentallinie $x_1=0$ schneidet die C_6 in sechs Punkten, für welche $x_2^3\,.\,x_3^3=0$, also $x_2^3=0$, $x_3^3=0$, d. h. A_2 und A_3 sind Doppelpunkte, die Fundamentallinie A_2A_3 ist Tangente der C_6 sowohl in A_2 als in A_3, und die Punkte Q_1 und Q_1^* fallen mit A_2 resp. A_3 zusammen. (Tafel IV, Fig. 1.)

Ferner folgt aus Gleichung (II)

für $x_2=0$: $x_1^3\,.\,x_3^3=0$ oder $x_1^3=0$, $x_3^2=0$ und
für $x_3=0$: $x_1^3\,.\,x_2^3=0$ oder $x_1^3=0$, $x_2^2=0$;

demnach ist $x_2 = 0$ Tangente in den Knotenpunkten A_3, A_1 und $x_3 = 0$ Tangente in A_1, A_2; Q_2 fällt mit A_3, Q_2^* mit A_1, Q_3 mit A_1 und Q_3^* mit A_2 zusammen.

Die Fundamentallinien repräsentiren also die sechs Tangenten in den Knotenpunkten A_1, A_2, A_3, jede ist somit eine Doppeltangente der C_6.

Weitere Doppelpunkte der C_6 sind E, E_1, E_2, E_3. Substituirt man in (II) $x_2 \pm x_3 = 0$, so folgt:

$$\pm x_3^2 . (x_3^2 - x_1^2)(x_1^2 - x_3^2) = 0 \quad \text{oder} \quad x_3^2(x_3^2 - x_1^2)^2 = 0$$

$$\text{woraus} \quad x_3^2 = 0 \;,\; (x_3 + x_1)^2 = 0 \;,\; (x_3 - x_1)^2 = 0,$$

d. h. die Punkte A_1, E, E_1, E_2, E_3 gehören der C_6 an und sind Doppelpunkte derselben. E wird, weil innerhalb des Kegelschnittes p gelegen, zu einem isolirten Punkt der C_6; E_1, E_2, E_3 dagegen sind Knotenpunkte, die Tangenten in denselben stimmen überein mit den von E_1, E_2, E_3 aus an den Kegelschnitt p gehenden Tangenten. Für das Tangentenpaar in E_1 ($-1, 1, 1$) z. B. erhält man:

$$x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 + x_1x_2 + x_1x_3 + 3x_2x_3 = 0, \text{*)}$$

woraus sich die Gleichungen der einzelnen Tangenten in E_1 ergeben:

$$2x_1 + (1 + \sqrt{5}) . x_2 + (1 - \sqrt{5}) . x_3 = 0$$

$$2x_1 + (1 - \sqrt{5}) . x_2 + (1 + \sqrt{5}) . x_3 = 0.$$

Die C_6 hat sechs unendlich ferne Punkte, welche sämmtlich reell sind; dieselben sind die Inversen der Schnittpunkte der C_6 mit dem Kreise K. Bezeichnen X, Y, Z, V, W, T diese Schnittpunkte, dann repräsentiren X′, Y′, Z′, V′, W′, T′ die unendlich fernen Punkte der Curve und die Geraden XX′, YY′, ZZ′, VV′, WW′, TT′, welche die Richtungen angeben, nach welchen die Curve ins Unendliche geht, müssen Tangenten des Kegelschnittes p sein. Von den sechs Punkten X, Y etc. gehen an den Kegelschnitt p je zwei Tangenten, allein nur eine derselben gibt jeweilen die Richtung nach einem unendlich fernen Punkt der C_6 an und zwar diejenige, welche parallel ist zum Inversen des Strahles, der einen Punkt X, Y etc. mit einem Fundamentalpunkt verbindet. Die C_6 besteht aus sechs ins Unendliche gehenden Aesten, von denen je zwei eine zusammenhängende Theilcurve bilden.

Dem Curvenstück A_1WE_2 entspricht $Q_1\underset{\infty}{W'}E_2$

« « $A_1\underset{\infty}{Y'}E_1$ « Q_1YE_1.

Die beiden Aeste $\underset{\infty}{Y'}A_1WE_2\underset{\infty}{\overset{\infty}{W'}}$ und $\underset{\infty}{W'}Q_1YE_1\underset{\infty}{Y'}$, welche in der angegebenen Weise einander entsprechen, haben grosse Aehnlichkeit

*) Vorausgesetzt, dass $a_1 = a_2 = a_3$ sei.

mit den Aesten der Hyperbel $x_3^2 + x_1x_2 = 0$. Letztere hat mit der C_6 gemein die Punkte A_1, A_2 sammt Tangenten und die Punkte E_1 und E_2, dagegen sind die Tangenten der Hyperbel in E_1 und E_2 verschieden von den Tangenten der C_6 in diesen Punkten. Ferner entspricht

$$\text{dem Stück } A_1VE_3 \text{ das Stück } Q_1^*\underset{\infty}{V'}E_3$$

$$\text{« « } A_1\underset{\infty}{X'}E_1 \text{ « « } Q_1^*XE_1.$$

Die aus diesen Curvenstücken zusammengesetzten Aeste

$$\underset{\infty}{X'}A_1VE_3\underset{\infty}{V'}\ ,\ \underset{\infty}{V'}Q_1^*XE_1\underset{\infty}{X'}$$

welche in der angeführten Weise zu einander invers sind, haben Aehnlichkeit mit der Hyperbel $x_2^2 + x_1x_3 = 0$, welche durch A_1, A_2, E_1, E_3 geht und A_1A_2 in A_1 und A_3A_2 in A_3 berührt, wie die C_6. Endlich entspricht

$$\text{dem Stück } A_2ZE_3 \text{ das Stück } Q_2\underset{\infty}{Z'}E_3$$

$$\text{« « } A_2\underset{\infty}{T'}E_2 \text{ « « } Q_2TE_2.$$

Die aus diesen Stücken bestehenden Aeste

$$\underset{\infty}{T'}A_2ZE_3\underset{\infty}{Z'}\ ,\ \underset{\infty}{Z'}Q_2TE_2\underset{\infty}{T'}$$

der C_6, welche in der soeben angegebenen Weise einander entsprechen, bilden eine hyperbelähnliche Curve; dieselbe hat mit der Hyperbel $x_1^2 + x_2x_3 = 0$ gemein die Punkte A_2, A_3, E_2, E_3 und die Tangenten in A_2 und A_3.

Die Plücker'schen Charaktere der vorliegenden C_6 sind die nämlichen wie bei der C_6, welche im allgemeinsten Falle resultirt. *)

Sind die Werthe von a_1, a_2, a_3 respective proportional zu $\cos^2\frac{A_1}{2}$, $\cos^2\frac{A_2}{2}$, $\cos^2\frac{A_3}{2}$, dann gibt Gleichung (II) die spezielle C_6, †) welche entsteht, wenn p der dem Dreieck $A_1A_2A_3$ eingeschriebenen Kreis (mit dem Centrum E) ist, dessen Gleichung lautet:

$$\cos\frac{A_1}{2}\cdot\sqrt{x_1} + \cos\frac{A_2}{2}\cdot\sqrt{x_2} + \cos\frac{A_3}{2}\cdot\sqrt{x_3} = 0.$$

Setzt man nun voraus, dass a_1, a_2, a_3 sowohl negative als positive Grössen sein können, so stellt die Gleichung

---

*) Anmerkung. In Uebereinstimmung mit der Note auf Seite 22 wurde die Gleichung (II) discutirt unter der Voraussetzung, dass a_1, a_2, a_3 positiv seien und in Fig. 1, Tafel IV ist speziell $a_1 = a_2 = a_3$ angenommen worden.

†) Der Unterschied zwischen dieser Curve und der in Fig. 1, Tafel IV skizzirten ist unwesentlich.

$$a_1{}^2x_1{}^2 + a_2{}^2x_2{}^2 + a_3{}^2x_3{}^2 - 2a_2a_3x_2x_3 - 2a_3a_1x_3x_1 - 2a_1a_2x_1x_2 = 0$$

allgemein einen Kegelschnitt vor, welcher die Fundamentallinien berührt. Ausser dem betrachteten Falle, in welchem a_1, a_2, a_3 positiv sind, können folgende Fälle vorkommen:

a_1	negativ,	a_2	und	a_3	positiv
a_2	«	a_1	«	a_3	«
a_3	«	a_1	«	a_2	«

d. h. entweder können in der Kegelschnittsgleichung alle drei Doppelprodukte negativ sein oder es sind zwei der Doppelprodukte positiv, während das dritte negativ ist. Bedeuten z. B. a_1, a_2 positive Zahlen und ist $a_3 = -\alpha_3$, so ergeben sich für die Curven p, p′ und C_6 folgende Gleichungen:

$$\text{p)}\quad a_1{}^2x_1{}^2 + a_2{}^2x_2{}^2 + \alpha_3{}^2x_3{}^2 + 2a_2\alpha_3x_2x_3 + 2\alpha_3a_1x_3x_1 - 2a_1a_2x_1x_2 = 0$$

$$\text{p}')\quad a_1{}^2x_2{}^2x_3{}^2 + a_2{}^2x_1{}^2x_3{}^2 + \alpha_3{}^2x_1{}^2x_2{}^2 + 2a_2\alpha_3x_1{}^2x_2x_3 + 2\alpha_3a_1x_2{}^2x_3x_1 - 2a_1a_2x_3{}^2x_1x_2 = 0$$

$$C_6)\quad a_1x_2x_3(x_3{}^2 - x_1{}^2)(x_1{}^2 - x_2{}^2) + a_2x_1x_3(x_2{}^2 - x_3{}^2)(x_1{}^2 - x_2{}^2) - \alpha_3x_1x_2(x_2{}^2 - x_3{}^2)(x_3{}^2 - x_1{}^2) = 0. \text{*)}$$

Der Kegelschnitt p berührt die Fundamentaldreiecksseite A_1A_2 und die Verlängerungen der Seiten A_1A_3, A_2A_3, so dass sämmtliche Punkte von p ausserhalb des Fundamentaldreiecks liegen. Die ihm entsprechende Curve vierter Ordnung p′ liegt in Folge dessen ebenfalls ganz ausserhalb des Dreiecks $A_1A_2A_3$ und besitzt zwei reelle unendlich ferne Punkte, da p den Kreis K zwei Mal schneidet. Die C_6 hat in diesem Falle nur zwei reelle unendlich ferne Punkte und besteht aus einer hyperbelähnlichen Curve (zwei unendlichen Aesten) und zwei Ovalen, von denen das eine mit der Ellipse $x_2{}^2 - x_1x_3 = 0$ die Punkte A_1, A_3, E, E_2 und die Tangenten in A_1 und A_3, das andere mit der Ellipse $x_1{}^2 - x_2x_3 = 0$ die Punkte A_2, A_3, E, E_1 und die Tangenten in A_2 und A_3 gemein hat. (Vergl. Fig. 2 in Tafel IV, wo p den die Fundamentallinien berührenden Kreis bedeutet, dessen Mittelpunkt E_3 ist.) **)

*) Diese Gleichungen erhält man aus den früheren auch dadurch, dass man x_3 durch $-x_3$ ersetzt.

**) Dieser Kreis hat die Gleichung

$$\cos\frac{A_1}{2}\cdot\sqrt{x_1} + \cos\frac{A_2}{2}\cdot\sqrt{x_2} + \cos\frac{A_3}{2}\sqrt{-x_3} = 0$$

und die Gleichung der C_6 lautet:

$$\cos^2\frac{A_1}{2}\,x_2x_3(x_3{}^2 - x_1{}^2)(x_1{}^2 - x_2{}^2) + \cos^2\frac{A_2}{2}\,x_1x_3(x_2{}^2 - x_3{}^2)(x_1{}^2 - x_2{}^2) - \cos^2\frac{A_3}{2}\,x_1x_2(x_2{}^2 - x_3{}^2)(x_3{}^2 - x_1{}^2) = 0.$$

III. Der Kegelschnitt p sei die Ellipse, welche die Punkte A_1, A_2, E, E_3 enthält und die Fundamentallinien A_1A_3 und A_2A_3 in A_1 resp. A_2 berührt.

Die Gleichung von p lautet:

1. p) $x_3^2 - x_1x_2 = 0$; die Curve p' ist mit p identisch.

Wir schreiben die Gleichung:

$$1 - \frac{x_1}{x_3} \cdot \frac{x_2}{x_3} = 0 \quad \text{und setzen wieder} \quad \frac{x_2}{x_3} = \lambda; \text{ diess gibt:}$$

$$1 - \lambda \cdot \frac{x_1}{x_3} = 0, \text{ woraus folgt: } \frac{x_1}{x_3} = \frac{1}{\lambda}.$$

Für einen Punkt P_λ auf p ist daher

$$x_1 : x_2 : x_3 = 1 : \lambda^2 : \lambda.$$

Da für die Ellipse p $(f = 0)$

$$f_1 = -x_2, \; f_2 = -x_1, \; f_3 = 2x_3,$$

so hat die Tangente der Ellipse in P_λ die Gleichung:

2. t_λ) $\lambda^2 x_1 + x_2 - 2\lambda x_3 = 0$; der ihr correspondirende Kegelschnitt heisst:

3. t_λ') $\lambda^2 x_2 x_3 + x_1 x_3 - 2\lambda x_1 x_2 = 0$.

Aus (2) und (3) folgt: $\lambda = \dfrac{x_3(x_1^2 - x_2^2)}{2x_2(x_1^2 - x_3^2)}$ und durch Substitution dieses Werthes in Gl. (2) erhält man:

$$\frac{x_1 x_3^2 (x_1^2 - x_2^2)^2}{4x_2^2(x_1^2 - x_3^2)^2} + x_2 - \frac{x_3^2(x_1^2 - x_2^2)}{x_2(x_1^2 - x_3^2)} = 0 \quad \text{oder}$$

III.) $x_3^2(x_1^2 - x_2^2)^2 - 4x_1x_2(x_2^2 - x_3^2)(x_3^2 - x_1^2) = 0$.

Diess ist die Gleichung der im Falle (III) erzeugten Curve sechster Ordnung.

Aus der Erzeugungsweise der C_6 geht zunächst hervor, dass A_1 und A_2, weil auf p gelegen, Spitzen der C_6 werden und für beide ist $x_3 = 0$ Rückkehrtangente; diess bestätiget auch die Rechnung. Für die Schnittpunkte der Curve mit $x_3 = 0$ hat man nämlich

$$4x_1^3 x_2^3 = 0, \text{ woraus folgt: } x_1^3 = 0 \text{ und } x_2^3 = 0,$$

d. h. $x_3 = 0$ hat in A_1 und A_2 mit der C_6 je drei zusammenfallende Punkte gemein. Ferner ergibt die Rechnung, dass das Tangentenpaar in jedem der Doppelpunkte A_1 und A_2 die Gleichung $x_3^2 = 0$ hat, dass also A_1 und A_2 Spitzen der C_6 sein müssen, deren Tangenten mit A_1A_2 zusammenfallen. — Wenn $u = 0$ die Gleichung (III) bedeutet, so ist

$$\begin{aligned}
u_1 &= 4x_1x_3^2(x_1^2 - x_2^2) - 4x_2(x_2^2 - x_3^2)(x_3^2 - 3x_1^2) \\
u_2 &= -4x_2x_3^2(x_1^2 - x_2^2) - 4x_1(x_3^2 - x_1^2)(3x_2^2 - x_3^2) \\
u_3 &= 2x_3(x_1^2 - x_2^2)^2 - 8x_1x_2x_3\,.\,(x_1^2 + x_2^2 - 2x_3^2) \\
u_{11} &= 4x_3^2(3x_1^2 - x_2^2) + 24x_2x_1(x_2^2 - x_3^2) \\
u_{12} &= -8x_1x_2x_3^2 - 4(x_3^2 - 3x_1^2)(3x_2^2 - x_3^2) \\
u_{13} &= 8x_1x_3(x_1^2 - x_2^2) - 8x_2x_3(3x_1^2 + x_2^2 - 2x_3^2) \\
u_{22} &= -4x_3^2(x_1^2 - 3x_2^2) - 24x_1x_2(x_3^2 - x_1^2) \\
u_{23} &= -8x_2x_3(x_1^2 - x_2^2) - 8x_1x_3(x_1^2 + 3x_2^2 - 2x_3^2) \\
u_{33} &= 2(x_1^2 - x_2^2)^2 - 8x_1x_2(x_1^2 + x_2^2 - 6x_3^2).
\end{aligned}$$

Für den Doppelpunkt A_3 wird $u_{11} = 0$, $u_{12} = 4x_3^4$, $u_{13} = 0$, $u_{22} = 0$, $u_{23} = 0$, $u_{33} = 0$, daher hat sein Tangentenpaar die Gleichung $x_1 \,.\, x_2 = 0$. Der Fundamentalpunkt A_3 ist also ein Knotenpunkt der C_6 und die Tangenten in demselben sind A_2A_3 und A_1A_3; sie sind die respectiven Inversen der Tangenten A_3Q_3 und $A_3Q_3^*$ (Q_3 fällt mit A_1, Q_3^* mit A_2 zusammen), welche von A_3 aus an die Ellipse gehen. (Siehe Fig. 1, Tafel V.) Aus dem Umstande, dass A_3Q_3, $A_3Q_3^*$ die C_6 in Q_3 resp. Q_3^* berühren, folgt, dass die Tangenten im Knoten A_3 Inflexionstangenten sind (vergl. Fall I); diess stimmt mit der Thatsache überein, dass $x_1 = 0$ und $x_2 = 0$ die Tangenten der C_6 in den Punkten Q_1 und Q_2, welche mit A_3 zusammenfallen, vorstellen. Die folgende Rechnung liefert den einfachsten Nachweis hiefür. Substituirt man in (III) $x_1 = 0$, so kommt $x_3^2 \,.\, x_2^4 = 0$, woraus folgt: $x_3^2 = 0$, $x_2^4 = 0$, d. h. $x_1 = 0$ schneidet die C_6 in A_2 zwei Mal, in A_3 vier Mal.

Ferner ist für $x_2 = 0$: $x_3^2 \,.\, x_1^4 = 0$, oder $x_3^2 = 0$ und $x_1^4 = 0$, was besagt, dass $x_2 = 0$ mit der C_6 in A_1 zwei, in A_3 vier Punkte gemein hat.

A_3 ist also ein doppelter Inflexionsknoten.

Die Punkte $E_1 \begin{pmatrix} x_1 = -1 \\ x_2 = 1 \\ x_3 = 1 \end{pmatrix}$ und $E_2 \begin{pmatrix} x_1 = 1 \\ x_2 = -1 \\ x_3 = 1 \end{pmatrix}$ sind Doppelpunkte mit reellen und von einander verschiedenen Tangenten, also Knotenpunkte der C_6. Die Tangenten in denselben stimmen überein mit den von E_1 resp. E_2 aus an die Ellipse gehenden Tangenten. Die bezüglichen Gleichungen lauten:

Für das Tangentenpaar in E_1:

$$x_1^2 + x_2^2 - 4x_3^2 + 6x_1x_2 - 4x_1x_3 + 4x_2x_3 = 0$$

und für dasjenige in E_2:

$$x_1^2 + x_2^2 - 4x_3^2 + 6x_1x_2 + 4x_1x_3 - 4x_2x_3 = 0.$$

Was die Punkte E_3 (1, 1, — 1) und E (1, 1, 1) betrifft, so sind dieselben zunächst als Doppelpunkte der C_6 anzusehen, weil für diese Punkte u_1, u_2, u_3 verschwinden.

Als Gleichung des Tangentenpaares in E_3 erhält man:

$$(x_1 + x_2 - 2x_3)^2 = 0$$

und diejenige für das Tangentenpaar in E lautet:

$$(x_1 + x_2 - 2x_3) = 0,$$

d. h. die beiden Tangenten der C_6 im Doppelpunkt E_3 fallen zusammen mit der Ellipsentangente $x_1 + x_2 + 2x_3 = 0$ im Punkte E_3 und die Tangenten im Doppelpunkt E sind vereinigt in der zu E gehörigen Ellipsentangente $x_1 + x_2 - 2x_3 = 0$. *)

Allein diese Punkte sind nicht etwa Spitzen, wie die nachfolgende Betrachtung zeigt.

Für die Schnittpunkte der C_6 mit der Tangente $x_1 + x_2 + 2x_3 = 0$ ergibt sich, wenn man in der Curvengleichung $x_3 = -\dfrac{x_1 + x_2}{2}$ setzt:

$$(x_1 - x_2)^4 \cdot (x_1^2 + 3x_1x_2 + x_2^2) = 0.$$

Im Doppelpunkt E_3 hat also die Tangente mit der Curve vier vereinigte Punkte gemein und schneidet sie noch in den zwei Punkten

$$\left(\frac{x_1}{x_3} = -1 + \sqrt{5},\ \frac{x_2}{x_3} = -(1 + \sqrt{5})\right)$$

$$\left(\frac{x_1}{x_3} = -(1 + \sqrt{5}),\ \frac{x_2}{x_3} = -1 + \sqrt{5}\right).$$

Der Punkt E_3 muss daher ein Berührungsknoten sein, d. h. durch E_3 gehen zwei Aeste der C_6, welche sich in ihm zweipunktig berühren. Die beiden Curvenzweige sind aber nicht reell, denn setzt man im Bereiche des Punktes E_3 $y = x_1 + x_2 + 2x_3$, $z = x_1 - x_2$, wo y und z sehr klein sind, in die Gleichung der C_6 ein, so wird annähernd $16x_3^2y^2 + 8x_3yz^2 + 5z^4 = 0$; diese Gleichung repräsentirt zwei imaginäre Curvenzweige, die einander in E_3 berühren, ihre gemeinschaftliche Tangente $y = 0$ ist reell. In Uebereinstimmung damit findet man auch, dass die Schnittpunkte der C_6 mit der Geraden $x_1 - kx_2 = 0$ mit Ausnahme der zwei sich in E_3 befindenden imaginär sind, so lange k zwischen 0 und $+\infty$ liegt. Weil die Curve nicht reell durch E_3 hindurch geht, so ist E_3 ein isolirter Punkt der C_6, allein er muss als imaginärer Berührungsknoten angesehen werden. Da im Punkte E_3 zwei Durchschnittspunkte der beiden sich in ihm

*) Die beiden Tangenten in E_3 und E gehen durch den Punkt $\left(\begin{smallmatrix} x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 = 0 \end{smallmatrix}\right)$.

berührenden Curvenzweige vereinigt sind, so repräsentirt derselbe zwei vereinigte Knotenpunkte. Ebenso ist E ein imaginärer Berührungsknoten mit reeller Tangente.

Die gemeinsamen Punkte der Ellipse und der C_6 sind A_1, A_2, E_3, E; die C_6 berührt die Ellipse in A_1 und A_2 zweipunktig, in E_3 und E vierpunktig.

Die C_6 hat die folgenden Plücker'schen Charaktere:

$$\mu = 6, \quad \delta = 7, \quad \varkappa = 2$$
$$\nu = 10, \quad \iota = 14, \quad \tau = 21.$$

Wenn die Hyperbel $x_3^2 + x_1x_2 = 0$ den festen Kegelschnitt p vorstellt, dann ergibt sich die C_6:

$$x_3^2(x_1^2 - x_2^2)^2 + 4x_1x_2(x_2^2 - x_3^2)(x_3^2 - x_1^2) = 0.$$

Die Hyperbel geht durch A_1, A_2, E_1, E_2 und berührt in A_1, A_2 die respectiven Fundamentallinien A_1A_3, A_2A_3. Die C_6 hat zwei Spitzen in A_1 und A_2, für welche wieder $x_3 = 0$ die Rückkehrtangente ist; ferner besitzt sie drei Knotenpunkte, den doppelten Inflexionsknoten A_3 und die Knotenpunkte E und E_3. Die Punkte E_1 und E_2 sind isolirte Punkte der C_6 und zwar imaginäre Berührungsknoten, die Tangenten in denselben sind reell und zwar die zu E_1 und E_2 gehörigen Hyperbeltangenten, also die den Punkt ($x_3 = 0$, $x_1 - x_2 = 0$) mit E_1 resp. E_2 verbindenden Geraden. (Fig. 2, Tafel V.)

IV. Es sei p ein dem Fundamentaldreieck umschriebener Kegelschnitt.

Ein Kegelschnitt, welcher durch die Fundamentalpunkte geht, hat allgemein die Gleichung:

1. p) . . . $a_1x_2x_3 + a_2x_1x_3 + a_3x_1x_2 = 0$;

ihm entspricht alsdann die gerade Linie

2. p') . . . . $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = 0$.

Für die Coordinaten eines beliebigen Punktes P_λ von p ist

$$x_1 : x_2 : x_3 = \lambda(a_1 + \lambda a_2) : (a_1 + \lambda a_2) : - \lambda a_3.$$

Bezeichnet $F = 0$ die Gleichung von p, so haben die ersten Differentialquotienten von F nach x_1, x_2, x_3 die Werthe

$$F_1 = a_2x_3 + a_3x_2\,,\quad F_2 = a_1x_3 + a_3x_1\,,\quad F_3 = a_1x_2 + a_2x_1\,;$$

dieselben gehen, wenn man die Coordinaten von P_λ substituirt, abgesehen von einem constanten Faktor, über in

$$(F_1)_\lambda = a_1a_3\,,\quad (F_2)_\lambda = a_2a_3\lambda^2\,,\quad (F_3)_\lambda = (a_1 + a_2\lambda)^2.$$

Demnach lautet die Gleichung der Tangente t_λ von p im Punkte P_λ:

3. t_λ) . . $a_1a_3x_1 + a_2a_3\lambda^2x_2 + (a_1 + a_2\lambda)^2x_3 = 0$

und diejenige des der Geraden t_λ entsprechenden Kegelschnittes t_λ':

4. t_λ') . $a_1a_3x_2x_3 + a_2a_3\lambda^2x_1x_3 + (a_1 + a_2\lambda)^2x_1x_2 = 0.$

Betrachtet man λ als variablen Parameter, so repräsentirt Gleichung (4) sämmtliche dem Fundamentaldreieck umschriebene Kegelschnitte, welche die feste Gerade p' berühren. Durch Elimination von λ zwischen (3) und (4) folgt:

IV.) $a_1^2x_1^2(x_2^2 - x_3^2)^2 + a_2^2x_2^2(x_3^2 - x_1^2)^2 + a_3^2x_3^2(x_1^2 - x_2^2)^2$
$- 2a_1a_2x_1x_2(x_2^2 - x_3^2)(x_3^2 - x_1^2) - 2a_1a_3x_1x_3(x_2^2 - x_3^2)(x_1^2 - x_2^2)$
$- 2a_2a_3x_2x_3(x_3^2 - x_1^2)(x_1^2 - x_2^2) = 0.$

Die erhaltene Gleichung (IV), welche im Allgemeinen eine Curve sechster Ordnung repräsentirt, ist die Gleichung des Ortes der Schnittpunkte aller Tangenten t_λ mit ihren entsprechenden Kegelschnitten. Diese C_6 hat drei Spitzen in A_1, A_2, A_3; die zugehörigen Rückkehrtangenten sind die resp. Inversen der Tangenten von p in A_1, A_2, A_3, also bezw. die Geraden A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3, wobei B_1, B_2, B_3 die Schnittpunkte der Geraden p' mit den Fundamentallinien A_2A_3, A_1A_3, A_1A_2 bezeichnen. Bedeutet $u = 0$ die Gleichung (IV), so ergibt sich für A_1:

$$u_1 = 0,\ u_2 = 0,\ u_3 = 0$$

$u_{11} = 0$, $u_{12} = 0$, $u_{13} = 0$, $u_{22} = 2a_2^2x_1^4$, $u_{23} = 2a_2a_3x_1^4$, $u_{33} = 2a_3^2x_1^4$; *) das Tangentenpaar im Doppelpunkt A_1 wird daher ausgedrückt durch die Gleichung:

$$a_2^2x_2^2 + 2a_2a_3x_2x_3 + a_3^2x_3^2 = 0 \quad \text{oder}$$
$$(a_2x_2 + a_3x_3)^2 = 0\,,$$

d. h. die Tangenten im betrachteten Doppelpunkt fallen zusammen, A_1 ist eine Spitze der C_6 und die zugehörige Rückkehrtangente ist $a_2x_2 + a_3x_3 = 0$, also A_1B_1. Letztere hat mit der C_6 in A_1 drei vereinigte Punkte gemein. Analog findet man, dass

$$a_1x_1 + a_3x_3 = 0\,,\quad a_1x_1 + a_2x_2 = 0$$

die Tangenten in den resp. Rückkehrpunkten A_2, A_3 vorstellen. (Tafel VI.)

---

*) Unter x_1 ist hier die erste Coordinate von A_1 zu verstehen.

Die Punkte E, E_1, E_2, E_3 sind Doppelpunkte mit je zwei von einander verschiedenen reellen oder imaginären Tangenten, also Knotenpunkte oder isolirte Punkte, je nachdem sie ausserhalb oder innerhalb des Kegelschnittes p liegen; die Tangenten in denselben werden nämlich angegeben durch die resp. von E, E_1, E_2, E_3 ausgehenden Kegelschnittstangenten. Das Tangentenpaar im Doppelpunkt E_3 z. B. hat die Gleichung:

$$\begin{aligned}(a_{12} - a_{13})^2x_1^2 + (a_{12} - a_{23})^2x_2^2 + (a_{13} + a_{23})^2x_3^2 \\ + 2\left[a_{12}(a_{23} - a_{12}) + a_{13}(a_{23} + a_{12})\right] . x_1x_2 \\ 2\left[a_{13}(a_{13} - a_{12}) + a_{23}(a_{13} + a_{12})\right] . x_1x_3 \\ + 2\left[a_{23}(a_{23} - a_{12}) + a_{13}(a_{23} + a_{12})\right] . x_2x_3 = 0.\end{aligned}$$

Enthält der Kegelschnitt p einen der Punkte E, E_1, E_2, E_3 (mehr als einen kann p nicht enthalten, wenn er nicht in ein Linienpaar zerfallen soll), dann wird derselbe zu einem Berührungsknoten der C_6 und die gemeinschaftliche Tangente der beiden sich in ihm berührenden Aeste ist die Tangente von p in diesem Punkte. *) Die C_6 mit drei Spitzen kann höchstens einen Berührungsknoten besitzen.

Für die Schnittpunkte der C_6 mit $x_1 = 0$ hat man

$$a_2^2x_2^2x_3^4 + a_3^2x_3^2x_2^4 + 2a_2a_3x_2^3x_3^3 = 0 \quad \text{oder}$$
$$x_2^2x_3^2(a_2x_3 + a_3x_2)^2 = 0,$$

d. h. $x_1 = 0$ schneidet die C_6 in den Spitzen A_2, A_3 und berührt sie in $Q_1(x_1 = 0,\ a_3x_2 + a_2x_3 = 0)$, dem Schnittpunkte der p-Tangente in A_1 mit $x_1 = 0$.

Da für $Q_1 \left(\frac{x_1}{x_3} = 0, \ \frac{x_2}{x_3} = - \frac{a_2}{a_3}\right)$ $u_2 = 0$ und $u_3 = 0$, während u_1 von 0 verschieden ist, so ergibt sich, in Uebereinstimmung mit dem Vorigen, als Gleichung der Tangente der C_6 im Punkte Q_1:

$$x_1 = 0.$$

Analog findet man, dass $x_2 = 0$ und $x_3 = 0$ die resp. Tangenten der C_6 in den Punkten

$$Q_2\left(x_2 = 0, \ \frac{x_1}{x_3} = - \frac{a_1}{a_3}\right)$$

$$Q_3\left(x_3 = 0, \ \frac{x_1}{x_2} = - \frac{a_1}{a_2}\right) \quad \text{sind.}$$

---

*) Geht z. B. p durch E_3, dann ist p' die Tangente von p in E_3, also gleichzeitig die Tangente im Berührungsknoten der C_6.

Die C_6 und der Kegelschnitt p haben zwölf gemeinsame Punkte, unter denen sich die doppelten Fundamentalpunkte befinden; sehen wir von den letztern ab, so bleiben noch sechs gemeinsame Punkte, welche die Inversen der sechs gemeinsamen Punkte von C_6 und der Geraden p' sein müssen. Ist S ein von A_1, A_2, A_3 verschiedener gemeinsamer Punkt von p und C_6, so müssen sich in diesem Punkte die beiden Curven berühren; S repräsentirt also zwei gemeinsame Punkte. Im entsprechenden Punkte S' berühren sich alsdann C_6 und die Gerade p'. Die C_6 berührt daher in drei Punkten den Kegelschnitt p und in ihren Inversen die Gerade p'. Der Geraden SS', welche p in S berührt, entspricht ein Kegelschnitt C_2^*, welcher durch S und S' geht und sowohl p' als C_6 in S' berührt. Es gibt drei Tangenten von p, deren entsprechende Kegelschnitte (C_2^*) sie in ihren Berührungspunkten schneiden; diese Punkte sind gleichzeitig die Berührungspunkte der beiden Curven C_6 und p, und in ihren Inversen berühren sich C_6, p' und die bezüglichen Kegelschnitte C_2^*. Die Gerade p' ist somit eine dreifache Tangente der C_6, ihre Berührungspunkte sind entweder reell und (im Allgemeinen) von einander verschieden oder es ist nur einer derselben reell. Um die Coordinaten der Berührungspunkte der dreifachen Tangente p' zu erhalten, hat man die Gleichungen (2) und (IV) in Bezug auf $\frac{x_1}{x_3}$ und $\frac{x_2}{x_3}$ aufzulösen.

Die C_6 hat sechs unendlich ferne Punkte, welche paarweise imaginär sein können. In dem in Tafel VI skizzirten Falle, in welchem E und E_1 isolirte Punkte sind, liegen gar keine Punkte der C_6 im Unendlichen und nur ein Berührungspunkt der dreifachen Tangente p' ist reell.

Die Plücker'schen Charaktere der Curve IV sind im allgemeinsten Falle (bei der allgemeinsten Lage des dem Dreieck $A_1A_2A_3$ umschriebenen Kegelschnittes p):

$$\mu = 6, \quad \delta = 4, \quad \varkappa = 3$$
$$\nu = 13, \quad \iota = 24, \quad \tau = 39.$$

Spezialfälle.

a) Der dem Fundamentaldreieck umschriebene Kegelschnitt p gehe durch E_3; dieser Fall tritt ein, wenn $a_3 = a_1 + a_2$.

Der feste Kegelschnitt hat die Gleichung

5. p) . . $a_1x_2x_3 + a_2x_1x_3 + (a_1 + a_2)x_1x_2 = 0.$

Die ihm entsprechende Gerade

6. p') . . . $a_1x_1 + a_2x_2 + (a_1 + a_2)x_3 = 0$

enthält E_3 ebenfalls und berührt p in E_3.

Die hier entstehende C_6

$$\mathrm{IV_a})\quad a_1^2x_1^2(x_2^2 - x_3^2)^2 + a_2^2x_2^2(x_3^2 - x_1^2)^2 + (a_1 + a_2)^2x_3^2(x_1^2 - x_2^2)^2$$
$$- 2a_1a_2x_1x_2(x_2^2 - x_3^2)(x_3^2 - x_1^2)$$
$$- 2a_1(a_1 + a_2)x_1x_3(x_2^2 - x_3^2)(x_1^2 - x_2^2)$$
$$- 2a_2(a_1 + a_2)x_2x_3(x_3^2 - x_1^2)(x_1^2 - x_2^2) = 0$$

unterscheidet sich von der Curve IV wesentlich nur dadurch, dass E_3 ein Berührungsknoten ist, seine Tangente ist identisch mit der Geraden p'. Dieselbe ist eine dreifache Tangente, bei welcher zwei ihrer Berührungspunkte in E_3 zusammenfallen, und der dritte Berührungspunkt muss dann nothwendigerweise auch reell sein. Da E_3 zwei Doppelpunkte repräsentirt, so sind die Plücker'schen Charaktere der Curve:

$$\mu = 6,\quad \delta = 5,\quad \varkappa = 3$$
$$\nu = 11,\quad \iota = 18,\quad \tau = 25.$$

In dem speziellen Falle (siehe Tafel VII)

p') . . . . $x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0$

p) . . . . . . $x_2x_3 + 2x_1x_3 + 3x_1x_2 = 0$

$$C_6)\quad x_1^2(x_2^2 - x_3^2)^2 + 4x_2^2(x_3^2 - x_1^2)^2 + 9x_3^2(x_1^2 - x_2^2)^2$$
$$- 4x_1x_2(x_2^2 - x_3^2)(x_3^2 - x_1^2)$$
$$- 6x_1x_3(x_2^2 - x_3^2)(x_1^2 - x_2^2) - 12x_2x_3(x_3^2 - x_1^2)(x_1^2 - x_2^2) = 0$$

ist E ein isolirter Punkt, E_3 ein Berührungsknoten und E_1, E_2 sind Knotenpunkte der C_6. Die Tangente in E_3 schneidet die Curve in sechs Punkten, für welche man hat:

$$(x_1 - x_2)^4 . (4x_1 + 5x_2)^2 = 0,$$

d. h. p' hat in E_3 mit der C_6 vier zusammenfallende Punkte gemein und berührt sie ausserdem im Punkte

$$\mathfrak{B}'\left(\frac{x_2}{x_3} = -4,\ \frac{x_1}{x_3} = 5\right).$$

Die beiden sich in E_3 berührenden Curvenzweige sind imaginär.

Berührt der Kegelschnitt p (Gleichung 5) eine der Seiten des Dreiecks $E_1E_2E_3$, z. B. E_1E_2 in A_3, *) dann sondert sich von der Curve IVa die Gerade $x_1 + x_2 = 0$ ab und es bleibt eine Curve fünfter Ordnung, welche zwei Spitzen (A_1, A_2), einen Doppelpunkt (der isolirte Punkt E) und einen Berührungsknoten (E_3) besitzt, welch' letzterer ein isolirter Punkt der C_5 ist, da die beiden sich in ihm berührenden Curvenzweige imaginär sind. Für die C_5 ist E_1E_2 die Tangente im einfachen Punkte A_3 und die Gerade p' eine Doppeltangente, deren Berührungspunkte in E_3 zusammenfallen; der fünfte Schnittpunkt von p' mit der C_5 ist der Punkt ($x_3 = 0$, $x_1 + x_2 = 0$). Die C_5 hat die folgenden Plücker'schen Charaktere:

$$\mu = 5,\quad \delta = 3,\quad \varkappa = 2$$
$$\nu = 8,\quad \iota = 11,\quad \tau = 9.$$

---

b) Es sei p die dem Fundamentaldreieck umschriebene Ellipse, welche die Linien E_2E_3, E_1E_3, E_1E_2 beziehungsweise in A_1, A_2, A_3 berührt.

In diesem Falle hat p die Gleichung

7. p) . . . . $x_2x_3 + x_1x_3 + x_1x_2 = 0.$

Die dieser Ellipse entsprechende Gerade p' ist

8. p') . . . . . $x_1 + x_2 + x_3 = 0;$

sie ist die auf allen Seiten und an allen Ecken des Fundamentaldreiecks vom Punkte E harmonisch getrennte Einheitgerade e des mit $A_1A_2A_3$ identisch gedachten Liniencoordinatensystems A_2A_3, A_1A_3, A_1A_2. Dieselbe schneidet die Fundamentallinien in den respectiven Punkten

$$B_1\begin{pmatrix} x_1 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0\end{pmatrix},\quad B_2\begin{pmatrix} x_2 = 0 \\ x_1 + x_3 = 0\end{pmatrix},\quad B_3\begin{pmatrix} x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 = 0\end{pmatrix}.$$

Für die sich hier ergebende C_6 erhält man nach (IV) die Gleichung

$$x_1^2(x_2^2 - x_3^2)^2 + x_2^2(x_3^2 - x_1^2)^2 + x_3^2(x_1^2 - x_2^2)^2$$
$$- 2x_1x_2(x_2^2 - x_3^2)(x_3^2 - x_1^2) - 2x_1x_3(x_2^2 - x_3^2)(x_1^2 - x_2^2)$$
$$- 2x_2x_3(x_3^2 - x_1^2)(x_1^2 - x_2^2) = 0.$$

---

*) p ist die den Punkt E einschliessende Ellipse $x_2x_3 + x_1x_3 + 2x_1x_2 = 0$ und p' die Gerade $x_1 + x_2 + 2x_3 = 0$.

Diese C_6 muss zerfallen. Weil E_2E_3 eine Tangente von p ist, so müssen ihre sämmtlichen Punkte der C_6 angehören, die Gerade $x_2 + x_3 = 0$ ist daher ein Theil der C_6. Ebenso sondern sich von der C_6 die geradlinigen Theile $x_1 + x_3 = 0$, $x_1 + x_2 = 0$ ab und es bleibt somit übrig eine C_3. In der That kann man auf der linken Seite obiger Curvengleichung die Faktoren $x_2 + x_3$, $x_1 + x_3$, $x_1 + x_2$ abtrennen und bekommt als Gleichung der C_6:

$$(x_2 + x_3)(x_1 + x_3)(x_1 + x_2).$$
$$\left[x_1^2x_2 + x_1^2x_3 + x_2^2x_3 + x_1x_2^2 + x_1x_3^2 + x_2x_3^2 - 6x_1x_2x_3\right] = 0.$$

Sieht man von den Geraden $x_2 + x_3 = 0$, $x_1 + x_3 = 0$, $x_1 + x_2 = 0$ ab, so ist im vorliegenden Falle das Erzeugniss die Curve dritter Ordnung:

$$\mathrm{IV_b})\left\{\begin{array}{l} x_1^2x_2 + x_1^2x_3 + x_2^2x_3 + x_1x_2^2 + x_1x_3^2 + x_2x_3^2 - 6x_1x_2x_3 = 0 \\ \quad\text{oder} \\ x_1^2(x_2 + x_3) + x_2^2(x_3 + x_1) + x_3^2(x_1 + x_2) - 6x_1x_2x_3 = 0. \end{array}\right.$$

Diese C_3 wird von den Fundamentallinien in je drei Punkten geschnitten und zwar

$$\text{von } x_1 = 0 \text{ in } A_2\begin{pmatrix} x_1 = 0 \\ x_3 = 0 \end{pmatrix},\ A_3\begin{pmatrix} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \end{pmatrix},\ B_1\begin{pmatrix} x_1 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{von } x_2 = 0 \text{ in } A_1\begin{pmatrix} x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \end{pmatrix},\ A_3\begin{pmatrix} x_2 = 0 \\ x_1 = 0 \end{pmatrix},\ B_2\begin{pmatrix} x_2 = 0 \\ x_1 + x_3 = 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{von } x_3 = 0 \text{ in } A_1\begin{pmatrix} x_3 = 0 \\ x_2 = 0 \end{pmatrix},\ A_2\begin{pmatrix} x_3 = 0 \\ x_1 = 0 \end{pmatrix},\ B_3\begin{pmatrix} x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 = 0 \end{pmatrix}.$$

Die Fundamentalpunkte sind also einfache Punkte der C_3 und die Tangenten in denselben stimmmen überein mit den Ellipsentangenten in A_1, A_2, A_3. *) Bezeichnet $u = 0$ die Gleichung ($\mathrm{IV_b}$) so ist

$$u_1 = 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + x_2^2 + x_3^2 - 6x_2x_3$$
$$u_2 = x_1^2 + 2x_2x_3 + 2x_1x_2 + x_3^2 - 6x_1x_3$$
$$u_3 = x_1^2 + x_2^2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3 - 6x_1x_2$$

$$u_{11} = 2x_2 + 2x_3,\quad u_{12} = 2x_1 + 2x_2 - 6x_3,\quad u_{13} = 2x_1 + 2x_3 - 6x_2$$
$$u_{22} = 2x_3 + 2x_1,\quad u_{23} = 2x_2 + 2x_3 - 6x_1,\quad u_{33} = 2x_1 + 2x_2.$$

---

*) Da die C_3 sich selbst entspricht, so entspricht dem Punkte B_1 ein mit A_1 zusammenfallender Punkt B_1 in der Richtung A_1E_2, d. h. es ist E_2E_3 die Tangente der Curve in A_1.

Es ergeben sich nun folgende Gleichungen:

für die Tangente in A_1: $x_2 + x_3 = 0$

« « « « A_2: $x_1 + x_3 = 0$

« « « « A_3: $x_1 + x_2 = 0$

« « « « B_1: $-8x_1 + x_2 + x_3 = 0$

« « « « B_2: $x_1 - 8x_2 + x_3 = 0$

« « « « B_3: $x_1 + x_2 - 8x_3 = 0.$

Von den Punkten E, E_1, E_2, E_3 gehört einzig E der C_3 an, derselbe ist ein Doppelpunkt mit imaginären Tangenten, also ein isolirter Punkt der Curve.

Das Tangentenpaar in E hat die Gleichung

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_1x_2 - x_1x_3 - x_2x_3 = 0.$$

Die einzelnen Tangenten sind die von E nach den imaginären Schnittpunkten von p′ mit p gehenden Geraden, da $x_1 + x_2 + x_3 = 0$ (oder e) die Polare des Punktes E in Bezug auf die Ellipse p ist. Ihre Gleichungen lauten:

$$(1 - i\sqrt{3})x_1 + (1 + i\sqrt{3})x_2 - 2x_3 = 0$$
$$(1 + i\sqrt{3})x_1 + (1 - i\sqrt{3})x_2 - 2x_3 = 0.$$

Die Tangente

in B_1 enthält die Punkte $D_1\begin{pmatrix} x_2 = 0 \\ 8x_1 - x_3 = 0\end{pmatrix}$, $F_1\begin{pmatrix} x_3 = 0 \\ 8x_1 - x_2 = 0\end{pmatrix}$

« B_2 « « « $D_2\begin{pmatrix} x_1 = 0 \\ 8x_2 - x_3 = 0\end{pmatrix}$, $F_2\begin{pmatrix} x_3 = 0 \\ x_1 - 8x_3 = 0\end{pmatrix}$

« B_3 « « « $D_3\begin{pmatrix} x_1 = 0 \\ x_2 - 8x_3 = 0\end{pmatrix}$, $F_3\begin{pmatrix} x_2 = 0 \\ x_1 - 8x_3 = 0\end{pmatrix}$.

A_1D_2 und A_1D_3 sind inverse Strahlen

A_2D_1 « A_2F_3 « « «

A_3F_1 « A_3F_2 « « « ; *)

wenn daher eine der drei Tangenten in B_1, B_2, B_3 bekannt ist, so lassen sich die übrigen durch einfache Construction finden. (Tafel VIII, Fig. 1). Für die Schnittpunkte der C_3 mit ihrer Tangente in B_1 ergibt sich, wenn man in der Gleichung der Curve $x_1 = \frac{x_2 + x_3}{8}$ setzt: $(x_2 + x_3)^3 = 0$, d. h. alle drei Schnittpunkte fallen im Berührungs-

*) A_1D_2, A_1D_3, A_1B_1, A_1E bilden ein harmonisches Büschel und D_2, D_3, B_1, ${}^1E_1$ sind vier harmonische Punkte. Ebenso bilden je eine harmonische Gruppe D_1, F_3, B_2, ${}^2E_2$ und F_2, F_1, B_3, ${}^3E_3$.

punkte B_1 zusammen. Die betrachtete Tangente hat also in B_1 mit der C_3 drei vereinigte Punkte gemein, sie ist daher eine Inflexionstangente und B_1 ein Inflexionspunkt der C_3. Ebenso besitzt die Curve Inflexionen in B_2 und B_3.

Die Curve dritter Ordnung hat einen Doppelpunkt (isolirten Punkt), keine Spitzen, ist daher von der vierten Klasse und besitzt drei Inflexionstangenten und keine Doppeltangenten. Die drei Inflexionspunkte sind die Schnittpunkte der Geraden e (p') mit der C_3.

Der dem Fundamentaldreieck umschriebene Kreis K schneidet die C_3 in sechs Punkten, worunter A_1, A_2, A_3 sich befinden; ausser den letztern gibt es also noch drei Schnittpunkte X, Y, Z von K mit C_3, ihre Inversen X', Y', Z' sind die unendlich fernen Punkte der Curve, welche alle reell sein müssen. XX', YY', ZZ', welche die Richtungen nach den unendlich fernen Punkten angeben, sind die resp. von X, Y, Z ausgehenden, zu den resp. Inversen von A_lX, A_lY, A_lZ *) parallel laufenden Ellipsentangenten.

Die C_3 zerfällt in drei unendliche Aeste, von denen der eine (eine einfache Hyperbel genannt) keinen Inflexionspunkt hat und seine Asymptoten nicht durchschneidet, während der zweite (eine einfach inflektirte Hyperbel genannt) einen Inflexionspunkt hat und somit eine Asymptote durchsetzt, und der dritte (eine zweifach inflektirte Hyperbel) zwei Inflexionen hat und daher beide Asymptoten durchsetzt. Alle drei Theile bilden eine continuirliche Curve; der Theil eines Astes, welcher die Asymptote an ihrem einen Ende berührt, hängt zusammen mit dem Theil des zweiten Astes, welcher dieselbe Asymptote an ihrem andern Ende berührt. (Tafel VIII, Fig. 1.)

Wenn das Fundamentaldreieck gleichseitig ist, dann wird e (p') zur unendlich fernen Geraden und die Ellipse p zum Kreise, welcher dem Dreieck $A_1A_2A_3$ umschrieben ist. Die Punkte X, Y, Z der Curve dritter Ordnung fallen resp. mit A_1, A_2, A_3 und daher ihre entsprechenden $\underset{\infty}{X'}$, $\underset{\infty}{Y'}$, $\underset{\infty}{Z'}$ mit den unendlich fernen Punkten der Fundamentallinien, d. h. resp. mit $\underset{\infty}{B_1}$, $\underset{\infty}{B_2}$, $\underset{\infty}{B_3}$ zusammen. Die unendlich fernen Punkte der C_3 sind daher identisch mit den im Unendlichen (auf den Fundamentallinien) liegenden Inflexionspunkten derselben. Die zugehörigen Tangenten oder die Asymptoten der C_3 sind die drei zu den Seiten des Fundamentaldreiecks und gleich weit von denselben abstehenden Parallelen

*) A_l bedeutet A_1 oder A_2 oder A_3.

$-8x_1+x_2+x_3=0$, $x_1-8x_2+x_3=0$, $x_1+x_2-8x_3=0$; dieselben bilden ein zu $A_1A_2A_3$ ähnliches Dreieck mit dem nämlichen Mittelpunkt E.

Die Tangenten der C_3 im isolirten Punkt E sind die von E nach den unendlich fernen imaginären Kreispunkten gehenden Geraden.

Da die C_3 im Endlichen keine Inflexionen haben kann, so wird sie von ihren Asymptoten nirgends geschnitten und besteht daher aus drei sogenannten einfachen Hyperbeln. Die drei hyperbolischen Zweige sind symmetrisch in Bezug auf die Symmetrieaxen des gleichseitigen Fundamentaldreiecks und unter sich congruent. (Tafel VIII, Fig. 2.)

Wenn die Coordinatenaxen, wie gewöhnlich, ein beliebiges Dreieck bilden, so ergibt sich für die Ecken des von den Inflexionstangenten der C_3 gebildeten Dreiecks Folgendes:

Bezeichnet A_1^* den Schnittpunkt der beiden Inflexionstangenten B_2D_2, B_3D_3 (vergl. Fig. 1, Tafel VIII), so genügen seine Coordinaten den beiden Gleichungen:

$$A_1^* \begin{cases} x_1 - 8x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 - 8x_3 = 0. \end{cases}$$

Durch Subtraktion folgt: $9x_2 - 9x_3 = 0$ oder $x_2 - x_3 = 0$, d. h. A_1^* liegt auf A_1E. Ferner hat man für A_2^*, dem Schnittpunkt von B_1D_1 und B_3D_3:

$$\left.\begin{array}{r} -8x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 - 8x_3 = 0 \end{array}\right\}, \quad \text{woraus folgt:} \quad x_1 - x_3 = 0$$

und für die dritte Ecke A_3^*:

$$\left.\begin{array}{r} -8x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 - 8x_2 + x_3 = 0 \end{array}\right\}, \quad \text{woraus folgt:} \quad x_1 - x_2 = 0;$$

d. h. A_2^* liegt auf A_2E und A_3^* auf A_3E. Nun sind (vergl. die Note auf Seite 38) EA_2, EA_3, EB_1, E^1E_1 vier harmonische Strahlen, daher auch EA_2^*, EA_3^*, EB_1, EE_1^*, und die Punkte A_2^*, A_3^*, B_1, E_1^* bilden eine harmonische Gruppe. Analog sind

A_1^*, A_3^*, B_2, E_2^* vier harmonische Punkte,

ebenso A_1^*, A_2^*, B_3, E_3^*.

Die Gerade p' ist somit auch auf allen Seiten und an allen Ecken des Dreiecks $A_1^*A_2^*A_3^*$ vom Punkte E harmonisch getrennt, oder der isolirte Punkt der C_3 ist der Pol der Verbindungslinie der Inflexionspunkte in Bezug auf das von den Inflexionstangenten gebildete Dreieck. *)

---

*) Vergl. Salmon-Fiedler, Höhere ebene Curven. Art. 216, pag. 239.

c) Der feste Kegelschnitt p sei der dem Fundamentaldreieck umschriebene Kreis K.

Die Gleichung des Kreises K heisst:

p) . . $\sin A_1 \,.\, x_2x_3 + \sin A_2 \,.\, x_1x_3 + \sin A_3 \,.\, x_1x_2 = 0.$

Die Inverse von K ist die unendlich ferne Gerade der Ebene, ihre Gleichung lautet:

p') . . . $\sin A_1 \,.\, x_1 + \sin A_2 \,.\, x_2 + \sin A_3 \,.\, x_3 = 0.$ *)

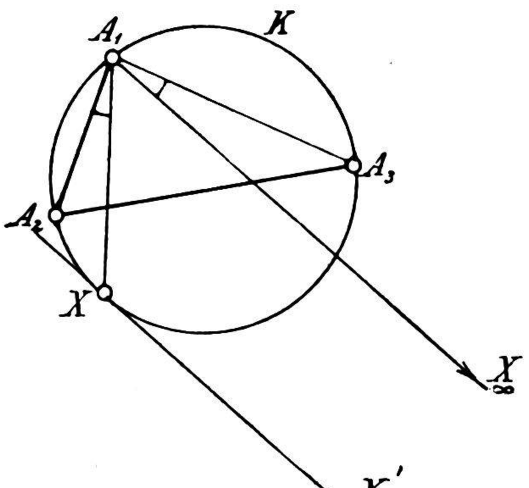
Im vorliegenden Falle geht Gleichung (IV) über in

$$\text{IV}_c) \quad \sin^2 A_1 \,.\, x_1^2(x_2^2 - x_3^2)^2 + \sin^2 A_2 \,.\, x_2^2(x_3^2 - x_1^2)^2$$
$$+ \sin^2 A_3 \,.\, x_3^2(x_1^2 - x_2^2)^2 - 2\sin A_1 \sin A_2 \,.\, x_1x_2(x_2^2 - x_3^2)(x_3^2 - x_1^2)$$
$$- 2\sin A_1 \sin A_3 \,.\, x_1x_3(x_2^2 - x_3^2)(x_1^2 - x_2^2)$$
$$- 2\sin A_2 \sin A_3 \,.\, x_2x_3(x_3^2 - x_1^2)(x_1^2 - x_2^2) = 0.$$

Die durch diese Gleichung repräsentirte C_6 besitzt drei Spitzen in A_1, A_2, A_3, drei Knotenpunkte in E_1, E_2, E_3 und einen isolirten Punkt in E. Die Punkte B_1, B_2, B_3 sind unendlich fern, Q_1, Q_2, Q_3 die Schnittpunkte der resp. Kreistangenten in A_1, A_2, A_3 mit den gegenüberliegenden Fundamentallinien. Die Rückkehrtangenten sind die Geraden $A_1\underset{\infty}{B_1}$, $A_2\underset{\infty}{B_2}$, $A_3\underset{\infty}{B_3}$, deren Gleichungen lauten:

$$\sin A_2 \,.\, x_2 + \sin A_3 \,.\, x_3 = 0, \quad \sin A_1 \,.\, x_1 + \sin A_3 \,.\, x_3 = 0,$$
$$\sin A_1 \,.\, x_1 + \sin A_2 \,.\, x_2 = 0.$$

Die Tangenten der C_6 in Q_1, Q_2, Q_3 sind, wie im allgemeinen Falle IV, bezw. die Fundamentallinien $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$.



Da den Kreistangenten lauter Parabeln entsprechen, mit Ausnahme der drei Paare paralleler Geraden $A_2A_3, A_1\underset{\infty}{B_1}$; $A_1A_3, A_2\underset{\infty}{B_2}$; $A_1A_2, A_3\underset{\infty}{B_3}$, so stellt die C_6 den Ort der Schnittpunkte der Kreistangenten mit ihren entsprechenden Parabeln vor. (T. IX.)

Die unendlich ferne Gerade ist eine dreifache Tangente der C_6, ihre Berührungspunkte sind reell und von einander verschieden, wie sich in der Folge zeigen wird. Ist $\underset{\infty}{X'}$ ein

---

*) Unter A_1, A_2, A_3 sind hier die Winkel des Fundamentaldreiecks zu verstehen.

Berührungspunkt, so liegt der Inverse X auf dem Kreise K (fällt mit keinem Fundamentalpunkt zusammen, so lange das Fundamentaldreieck ein beliebiges ist) und repräsentirt einen Berührungspunkt von C_6 und K. Die Gerade XX'_∞ muss die Kreistangente in X sein und ihr entspricht die durch A_1, A_2, A_3, X, X'_∞ gehende Parabel, deren Axe parallel XX'_∞ ist und welche die unendlich ferne Gerade, also auch die C_6, in X'_∞ berührt.

Wenn $x_2 + \lambda x_3 = 0$ die Gleichung des Strahles A_1X bedeutet, dann hat man für die Coordinaten von X:

$$x_1 : x_2 : x_3 = \lambda \sin A_1 : -\lambda(\sin A_2 - \lambda \sin A_3) : (\sin A_2 - \lambda \sin A_3),$$

für diejenigen von X'_∞:

$$x_1' : x_2' : x_3' = (\sin A_2 - \lambda \sin A_3) : -\sin A_1 : \lambda \sin A_1$$

und die Gleichung der Kreistangente in X lautet:

$$(\sin A_2 - \lambda \sin A_3)^2 . x_1 + \sin A_1 \sin A_2 . x_2 + \lambda^2 . \sin A_1 \sin A_3 . x_3 = 0.$$

Diese Gleichung muss auch für die Coordinaten von X'_∞ erfüllt sein, setzt man daher x_i' an Stelle von x_i, so erhält man zur Bestimmung von λ die cubische Gleichung:

$$\lambda^3 \sin(A_1 - A_3) + 3\lambda^2 \sin A_3 - 3\lambda \sin A_2 - \sin(A_1 - A_2) = 0.$$

Ihre Wurzeln sind reell und von einander verschieden, woraus folgt, dass es auf dem Kreise K drei Punkte X, Y, Z gibt, in denen die Tangenten der C_6 zugleich Kreistangenten sind. *) Die Tangenten XX', YY', ZZ' geben gleichzeitig die Richtungen nach den unendlich fernen Punkten X'_∞, Y'_∞, Z'_∞ der C_6 an. Von den im allgemeinen Falle IV auftretenden sechs unendlich fernen Punkten fallen also je zwei zusammen und bilden einen Berührungspunkt der C_6 mit der unendlich fernen Geraden. Die C_6 hat also keine im Endlichen liegenden Asymptoten und sie besteht aus drei Theilen, wovon der eine, mit zwei Spitzen und einem Knotenpunkt versehen, ganz im Endlichen liegt, — der zweite, eine Spitze und einen Knoten besitzend, ein unendlicher Ast ist, der, ähnlich wie die Parabel, die unendlich ferne Gerade berührt, und der dritte, einen Knoten enthaltend, die unendlich

---

*) X, Y, Z bilden ein gleichseitiges Dreieck, was planimetrisch leicht bewiesen werden kann; daher Kreistangente $XX'_\infty \parallel YZ$, $YY'_\infty \parallel XZ$ und $ZZ'_\infty \parallel XY$. Die Richtungen nach den unendlich fernen Punkten X'_∞, Y'_∞, Z'_∞ werden also angegeben durch die respectiven Dreiecksseiten YZ, XZ, XY.

ferne Gerade zwei Mal berührt. Jeder dieser Theile bildet einen zusammenhängenden Curvenzweig. *)

Ist im Fundamentaldreieck $\sphericalangle A_3 = \sphericalangle A_3$, so geht die cubische Gleichung für λ über in

$$\lambda^3 + \frac{3\sin A_2}{\sin(A_1 - A_2)} \cdot \lambda^2 - \frac{3\sin A_2}{\sin(A_1 - A_2)} \cdot \lambda - 1 = 0.$$

Hiervon ist $\lambda = 1$ eine Wurzel, ein Berührungspunkt X fällt also in den Schnittpunkt von $x_2 + x_3 = 0$ mit K, d. h. fällt mit A_1 zusammen. Der entsprechende unendlich ferne Punkt $\underset{\infty}{X'}$ ist dann der Schnittpunkt der Fundamentallinie $x_1 = 0$ mit der zu ihr parallelen Kreistangente in A_1 ($x_2 + x_3 = 0$). Die beiden andern Wurzeln ergeben sich aus

$$\lambda_2 + \left[\frac{\sin(A_1 - A_2) + 3\sin A_2}{\sin(A_1 - A_2)}\right] \lambda + 1 = 0$$

$$\lambda = \frac{-[\sin(A_1 - A_2) + 3\sin A_2] \pm \sqrt{[\sin(A_1 - A_2) + 3\sin A_2]^2 - 4\sin^2(A_1 - A_2)}\ \dagger)}{2\sin(A_1 - A_2)};$$

sie sind beide negativ oder beide positiv, je nachdem $A_1 \gtrless A_2$ ist, und die eine ist der reciproke Werth der andern. Denselben gehören die Punkte Y und Z zu, welche auf einer Parallelen zu A_2A_3 liegen und zwar beide unter oder über A_2A_3; die Tangenten in Y und Z sind symmetrisch zu A_1M. **) — Da $x_2 + x_3 = 0$ eine Tangente von K ist, so reducirt sich die C_6 auf eine C_5; ihre Gleichung lautet:

$$\sin^2 A_1 \,.\, x_1^2(x_2 + x_3)(x_2 - x_3)^2 + \sin^2 A_2 \,.\, (x_2 + x_3)(x_1^2 - x_2x_3)^2$$
$$+ 2\sin A_1 \sin A_2 \,.\, x_1(x_2 - x_3)^2(x_1^2 + x_2x_3) = 0.$$

---

*) Die durch die Gleichung IV_c ausgedrückte C_6 ist der Ort der Brennpunkte derjenigen die Fundamentallinien berührenden Kegelschnitte, deren Axen den dem Fundamentaldreieck umschriebenen Kreis K umhüllen.

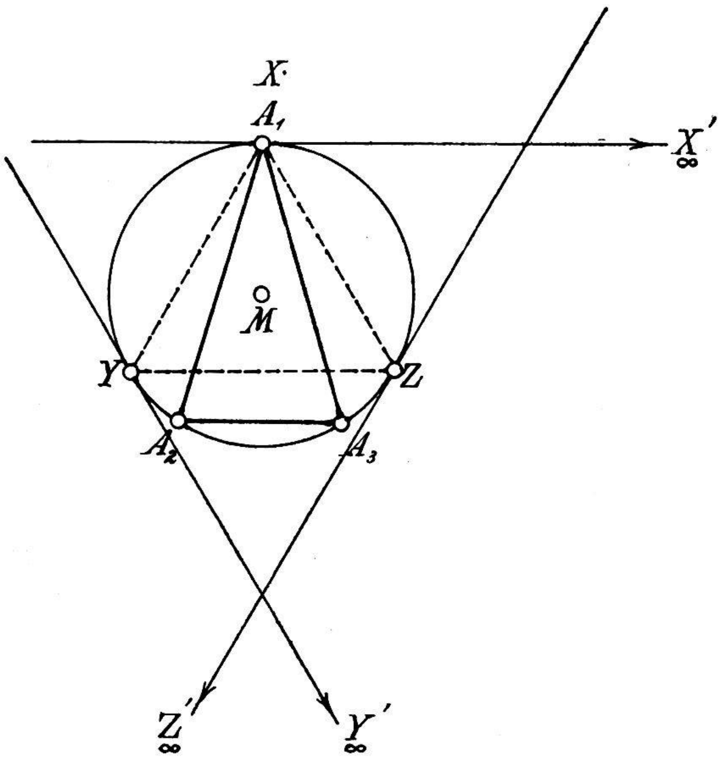
†) Berücksichtigt man, dass $\sin(A_1 - A_2) = \sin 3A_2$, so wird

$$\lambda = \frac{-(3 - 2\sin^2 A_2) \pm 2\sin A_2 \cos A_2 \,.\, \sqrt{3}}{3 - 4\sin^2 A_2} \quad \text{oder}$$

$$\lambda = \frac{-(3 - 2\sin^2 A_2) \pm \sqrt{3} \,.\, \sin 2A_2}{3 - 4\sin^2 A_2}.$$

**) X, Y, Z bilden ein gleichseitiges Dreieck, ebenso die Tangenten $\underset{\infty}{XX'}$, $\underset{\infty}{YY'}$, $\underset{\infty}{ZZ'}$.

Diese C_5 besitzt zwei Spitzen (in A_2 und A_3), zwei Doppelpunkte (den isolirten Punkt E und den Knotenpunkt E_1), ist daher von der zehnten Klasse, hat 17 Inflexionstangenten und 17 Doppeltangenten.



(Tafel X.) Sie berührt die Gerade $x_2 + x_3 = 0$ in A_1 und die unendlich ferne Gerade in Y'_∞ und Z'_∞, den Inversen von Y_∞ und Z, welche Berührungspunkte von C_5 und K sind. Die unendlich ferne Gerade ist eine Doppeltangente der C_5 und schneidet die Curve in X'_∞. Die einzige im Endlichen liegende Asymptote der C_5 ist die Tangente in X'_∞, dieselbe ist eine zu A_2A_3 parallele Gerade, welche die Gleichung hat:

$$- 8 \sin A_1 \,.\, x_1 + \sin A_2 \,.\, x_2 + \sin A_2 x_3 = 0.$$

Die Asymptote hat mit der Curve in X'_∞ drei zusammenfallende Punkte gemein, ist daher Inflexionstangente und X'_∞ ein Inflexionspunkt der Curve; letztere wird im Endlichen von der Asymptote nicht geschnitten.

Die C_5 ist vollständig symmetrisch in Bezug auf die Halbirungslinie des Winkels A_1.

Wenn $\measuredangle A_1 = \measuredangle A_2 = \measuredangle A_3$ ist, so fällt X mit A_1, Y mit A_2, Z mit A_3 zusammen und es ergibt sich genau dieselbe Curve dritter Ordnung, die wir unter IV_b in dem speziellen Falle erhielten, in welchem ein gleichseitiges Fundamentaldreieck angenommen wurde. (Siehe pag. 40 und Tafel VIII, Fig. 2.)

Das behandelte Problem kann in der Weise verallgemeinert werden, dass der feste Kegelschnitt p ersetzt wird durch eine Curve m.) Ordnung n.) Klasse; ihre Inverse oder Transformirte ist eine Curve von der Ordnung 2m, für welche die Fundamentalpunkte mfache Punkte sind. Als Ort der Schnittpunkte aller Tangenten der festen Curve (C_m^n) mit ihren entsprechenden Kegelschnitten ergibt sich eine Curve von der Ordnung 3n, für welche sowohl die Fundamentalpunkte als die sich selbst entsprechenden Punkte E, E_1, E_2, E_3 nfache Punkte sind. Die Tangenten der C_{3n} im Fundamentalpunkt A_i sind die Inversen der von A_i aus an die feste Curve p gehenden n Tangenten, in A_i schneiden sich also (im Allgemeinen) n Curvenzweige, welche natürlich paarweise imaginär sein können. Gehört A_i als einfacher Punkt der Curve p an, dann vereinigen sich zwei von den n Curventangenten, und zwei der durch A_i gehenden Aeste der C_{3n} bilden daher eine Spitze. Im Schnittpunkt der zu A_i gehörigen Tangente von p mit der Fundamentallinie $x_i = 0$ berührt die letztere die Curve C_{3n} und schneidet sie ausser in den Fundamentalpunkten A_k und A_l noch in n — 2 einfachen Punkten.

Die Tangenten der C_{3n} in einem der nfachen Punkte E sind die von E aus an die feste Curve p gehenden Tangenten. Ist E ein einfacher Punkt der Curve p, so gehen durch denselben n Zweige der Curve C_{3n}, von denen sich zwei in ihm berühren.

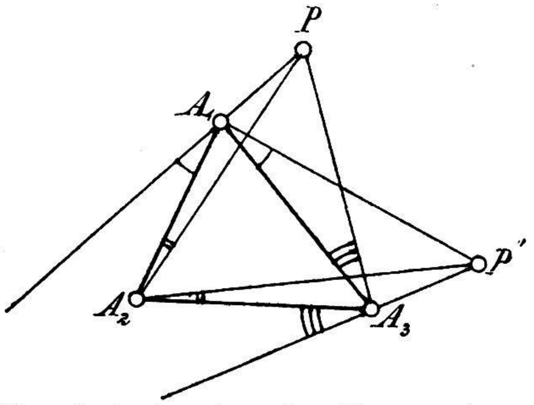
Wenn die feste Curve eine der Seiten des vollständigen Vierecks E E_1 E_2 E_3 β Mal berührt, so hat die erzeugte Curve die Ordnungszahl $3n - \beta$. *)

Eine eingehende Untersuchung einzelner besonders interessanter Fälle, in welchen die feste Curve p von höherem als dem zweiten Grade ist, soll demnächst an anderer Stelle erfolgen.

---

*) Die C_{3n} ist der Ort der Brennpunkte derjenigen die Fundamentallinien berührenden Kegelschnitte, deren Axen eine feste Curve C_m^n umhüllen.

Zum Schlusse verdient noch besondere Beachtung der Spezialfall, in welchem der feste Kegelschnitt p zu einem Punkt P zusammenschrumpft. Die Gesammtheit der beweglichen Geraden d. h. der Tangenten von p geht über in das Strahlenbüschel mit dem Scheitel P und die den beweglichen Geraden entsprechenden Kegelschnitte bilden das zum Strahlenbüschel projektivische Kegelschnittbüschel mit den Grundpunkten A_1, A_2, A_3, P', wobei P' den entsprechenden (inversen) Punkt von P bedeutet. Der Ort der Schnittpunkte der beweglichen Geraden mit ihrem entsprechenden Kegelschnitt ist das Erzeugniss der beiden projektivischen Büschel.



Um das Strahlenbüschel durch eine Gleichung auszudrücken, müssen die Coordinaten seines Scheitels P oder aber die Gleichungen von zwei durch P gehenden (und P bestimmenden) Strahlen gegeben sein. Die einfachste Gleichungsform haben im Büschel P die Strahlen PA_1, PA_2 und PA_3. Wenn PA_1 und PA_2 durch die Gleichungen

1. PA_1) . . . . . . $a_2x_2 + a_3x_3 = 0$
2. PA_2) . . . . . . $a_1x_1 + a_3x_3 = 0$ *)

repräsentirt werden, so ist für die Coordinaten von P:

$$\frac{x_1}{x_3} = -\frac{a_3}{a_1}, \quad \frac{x_2}{x_3} = -\frac{a_3}{a_2} \quad \text{oder}$$

$$x_1 : x_2 : x_3 = a_2a_3 : a_3a_1 : -a_1a_2$$

und für die Coordinaten des entsprechenden Punktes P':

$$x_1' : x_2' : x_3' = a_1 : a_2 : -a_3.$$

Der Strahl PA_3 hat die aus (1) und (2) durch Subtraktion sich ergebende Gleichung:

3. PA_3) . . . . . . $a_1x_1 - a_2x_2 = 0.$

Das Strahlenbüschel wird nun repräsentirt durch:

$$4. \quad \ldots \quad \begin{cases} (a_2x_2 + a_3x_3) + \lambda(a_1x_1 + a_3x_3) = 0 & \text{oder} \\ \lambda a_1x_1 + a_2x_2 + (1 + \lambda) \,.\, a_3x_3 = 0. \end{cases}$$

Wenn der variable Parameter die Werthe 0, ∞, -1 annimmt, so gibt (4) respektive die Gleichungen der Strahlen PA_1, PA_2, PA_3. Das entsprechende Kegelschnittbüschel erhält alsdann die Gleichung:

*) a_1, a_2, a_3 bedeuten positive oder negative constante Zahlen.

$$5. \quad \left\{ \begin{array}{l} a_2x_1x_3 + a_3x_1x_2 + \lambda(a_1x_2x_3 + a_3x_1x_2 = 0 \quad \text{oder} \\ \lambda a_1x_2x_3 + a_2x_1x_3 + (1 + \lambda) \, . \, a_3x_1x_2 = 0. \end{array} \right.$$

In diesem Büschel gibt es stets drei in Linienpaare zerfallende Kegelschnitte, nämlich die Gegenseitenpaare des Vierecks $A_1A_2A_3P'$:

$$A_1P', \; A_2A_3\,; \quad A_2P', \; A_1A_3\,; \quad A_3P', \; A_1A_2\,;$$

dieselben entsprechen den resp. Strahlen

$$A_1P\,, \quad A_2P\,, \quad A_3P.$$

Da einer Geraden eine Ellipse, Parabel oder Hyperbel entspricht, je nachdem sie den Kreis K nicht schneidet, berührt oder schneidet, so wird das Kegelschnittbüschel bei jeder beliebigen Lage des Punktes P Hyperbeln enthalten, darunter eine gleichseitige, die Inverse des Strahles PM. Dagegen können Ellipsen und zwei Parabeln nur dann vorkommen, wenn P ausserhalb des Kreises K liegt; die zwei Parabeln entsprechen den von P ausgehenden Kreistangenten. Befindet sich P auf dem Kreise, so existirt nur eine Parabel, sie ist die Inverse der zu P gehörigen Kreistangente; in diesem Falle liegt der vierte Grundpunkt P' im Unendlichen. Endlich kann das Kegelschnittbüschel einen Kreis und zwar K selbst enthalten, wenn P ein Punkt der unendlich fernen Geraden ist und demzufolge P' auf K liegt.

Das Strahlenbüschel mit dem Scheitel P und das Kegelschnittbüschel mit den Grundpunkten A_1, A_2, A_3, P' sind nun offenbar projektivisch und erzeugen demnach eine ebene Curve. Das Erzeugniss dieser beiden projektivischen Gebilde ist der geometrische Ort der Schnittpunkte entsprechender Elemente; seine Gleichung ergibt sich durch Elimination von λ zwischen den Gleichungen (4) und (5).

Aus (4) folgt: $\lambda = -\dfrac{a_2x_2 + a_3x_3}{a_1x_1 + a_3x_3}$; diess in (5) eingesetzt gibt:

$$(a_2x_2 + a_3x_3)\,(a_1x_2x_3 + a_3x_1x_2) - (a_1x_1 + a_3x_3)(a_2x_1x_3 + a_3x_1x_2) = 0$$

oder

$$6. \quad \left\{ \begin{array}{l} a_1x_1{}^2(a_3x_2 + a_2x_3) - a_2x_2{}^2(a_3x_1 + a_1x_3) + a_3x_3{}^2(a_2x_1 - a_1x_2) = 0 \\ \quad \text{oder} \\ a_1x_2x_3(a_2x_2 + a_3x_3) - a_2x_1x_3(a_1x_1 + a_3x_3) - a_3x_1x_2(a_1x_1 - a_2x_2 = 0 \\ \quad \text{oder} \\ a_2a_3x_1(x_2{}^2 - x_3{}^2) + a_1a_3x_2(x_3{}^2 - x_1{}^2) - a_1a_2x_3(x_1{}^2 - x_2{}^2) = 0. \end{array} \right.$$

Das Erzeugniss ist daher eine Curve dritter Ordnung. Diese C_3 enthält sowohl die Grundpunkte des Kegelschnittbüschels als den Scheitel des Strahlenbüschels, ferner die Punkte

$$E\begin{pmatrix} x_1 = 1 \\ x_2 = 1 \\ x_3 = 1 \end{pmatrix}, \quad E_1\begin{pmatrix} x_1 = -1 \\ x_2 = 1 \\ x_3 = 1 \end{pmatrix}, \quad E_2\begin{pmatrix} x_1 = 1 \\ x_2 = -1 \\ x_3 = 1 \end{pmatrix}, \quad E_3\begin{pmatrix} x_1 = 1 \\ x_2 = 1 \\ x_3 = -1 \end{pmatrix}$$

und die Punkte Q_1, Q_2, Q_3, in denen die Strahlen PA_1, PA_2, PA_3 die resp. Fundamentallinien A_2A_3, A_1A_3, A_1A_2 schneiden. (Tafel XI.) Diese zwölf ausgezeichneten Punkte der C_3

$$A_1 \text{ und } Q_1,\ A_2 \text{ und } Q_2,\ A_3 \text{ und } Q_3,\ E,\ E_1,\ E_2,\ E_3,\ P \text{ und } P'$$

sind die Durchschnittspunkte der acht Strahlen

$$PA_1,\ PA_2,\ PA_3,\ PE,\ PE_1,\ PE_2,\ PE_3,\ PP'$$

mit ihren entsprechenden Kegelschnitten. (Dem Strahl PP' entspricht der durch A_1, A_2, A_3, P, P' bestimmte Kegelschnitt.) Die Punkte Q_1, Q_2, Q_3, welche zu den Schnittpunkten der C_3 mit den resp. Fundamentallinien $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$ gehören, haben folgende Coordinaten:

$$\begin{array}{ll} Q_1) & x_1 : x_2 : x_3 = 0 : a_3 : -a_2 \\ Q_2) & x_1 : x_2 : x_3 = a_3 : 0 : -a_1 \\ Q_3) & x_1 : x_2 : x_3 = a_2 : a_1 : 0. \end{array}$$

Die C_3 entspricht sich selbst und zwar in der Weise, dass entsprechende Punkte auf Strahlen durch P liegen. *)

Jeder durch P gehende Strahl hat mit der C_3 ausser P noch zwei Punkte S_1 und S_2 gemein, die zu einander invers sind und welche reell und verschieden oder zusammenfallend oder imaginär sein können. **) Sie fallen zusammen für die vier Strahlen PE, PE_1, PE_2, PE_3. Bei dem Strahl PP' fällt einer der Punkte S_1, S_2 mit P, der andere mit P' zusammen.

Nach dem Vorhergehenden ist es nun leicht, für einige der bereits bekannten Punkte der C_3 die Tangenten anzugeben. Die Tangente in A_1 ist die Gerade $P'A_1$, denn da die Curve sich selbst entspricht, so entspricht dem Punkte Q_1 ein dem Punkte A_1 unendlich naher Punkt in der Richtung von A_1P', demnach muss A_1P' die C_3 in A_1 berühren. Ebenso sind $P'A_2$, $P'A_3$ die resp. Tangenten der C_3

---

*) Diess ergibt sich ohne Weiteres aus der Erzeugungsweise der C_3 und wird direkt nachgewiesen, wenn man ihre Gleichung transformirt.

**) S_1 und S_2 sind die Brennpunkte eines Kegelschnittes, welcher dem Fundamentaldreiseit eingeschrieben ist; es liegen daher die Brennpunkte sämmtlicher die Fundamentallinien berührenden Kegelschnitte, deren Axen das Strahlenbüschel mit dem Scheitel P bilden, auf der C_3.

in A_2 und A_3. Dem Strahl PE entspricht ein ihn in E berührender Kegelschnitt, PE hat daher mit der C_3 in E zwei zusammenfallende Punkte gemein, d. h. ist die Tangente der Curve in E. Aus analogen Gründen wird die C_3 von den Strahlen PE_1, PE_2, PE_3 bezw. in E_1, E_2, E_3 berührt. Der Strahl PP′ hat mit der C_3 in P zwei vereinigte Punkte gemein, ist daher die zu P gehörige Tangente der Curve. In Folge dessen (und des Umstandes, dass dem Curvenelement bei P dasjenige bei P′ entspricht) muss der dem Strahle PP′ correspondirende Kegelschnitt die C_3 in P′ berühren; die Tangente des durch die fünf Punkte A_1, A_2, A_3, P, P′ bestimmten Kegelschnittes in P′ stellt somit die Curventangente in letzterem Punkte vor.

Vorstehendes wird analytisch am einfachsten bestätiget durch die Aufstellung der Gleichungen der Tangenten.

Wir schreiben die Gleichung der C_3 in der Form:

$$u \equiv a_1a_3x_1^2x_2 + a_1a_2x_1^2x_3 - a_1a_2x_2^2x_3 - a_2a_3x_1x_2^2 + a_2a_3x_1x_3^2 - a_1a_3x_2x_3^2 = 0$$

und bilden

$$u_1 = \frac{\partial u}{\partial x_1} = 2a_1a_3x_1x_2 + 2a_1a_2x_1x_3 - a_2a_3x_2^2 + a_2a_3x_3^2$$

$$u_2 = \frac{\partial u}{\partial x_2} = a_1a_3x_1^2 - 2a_1a_2x_2x_3 - 2a_2a_3x_1x_2 - a_1a_3x_3^2$$

$$u_3 = \frac{\partial u}{\partial x_3} = a_1a_2x_1^2 - a_1a_2x_2^2 + 2a_2a_3x_1x_3 - 2a_1a_3x_2x_3.$$

In diesen Ausdrücken sind nun an Stelle der x_i die Coordinaten der Berührungspunkte der betreffenden Tangenten zu setzen. Für $A_1(x_1 = h_1,\ x_2 = 0,\ x_3 = 0)$ folgt:

$$u_1 = 0, \quad u_2 = a_1a_3h_1^2, \quad u_3 = a_1a_2h_1^2;$$

somit lautet die Gleichung der Tangente in A_1: $a_3x_2 + a_2x_3 = 0$. Diess ist aber die Gleichung des zu PA_1 inversen Strahles $P'A_1$.

Für $A_2(x_1 = 0,\ x_2 = h_2,\ x_3 = 0)$ ergibt sich:

$$u_1 = -a_2a_3h_2^2, \quad u_2 = 0, \quad u_3 = -a_1a_2h_2^2;$$

die Tangente der C_3 in A_2 hat daher die Gleichung

$$a_3x_1 + a_1x_3 = 0,$$

welche identisch ist mit der Gleichung von $P'A_2$.

$A_3(x_1 = 0,\ x_2 = 0,\ x_3 = h_3)$ gibt:

$$u_1 = a_2a_3h_3^2, \quad u_2 = -a_1a_3h_3^2, \quad u_3 = 0;$$

die Tangente in A_3 wird also ausgedrückt durch $a_2x_1 - a_1x_2 = 0$, d. h. sie ist identisch mit dem Strahl $P'A_3$.

Bevor wir die Gleichungen der Tangenten der C_3 in den Punkten E, E_1, E_2, E_3, P, P' ermitteln, suchen wir die Gleichungen der Strahlen $PE, PE_1, PE_2, PE_3, PP'$ und der zu P' gehörigen Tangente des dem Strahl PP' entsprechenden Kegelschnittes.

Für die Coordinaten von $E(1, 1, 1)$ geht die Gleichung (4) über in $a_2 + a_3 + \lambda(a_1 + a_3) = 0$, woraus folgt:

$$\lambda = -\frac{a_2 + a_3}{a_1 + a_3}.$$

Der Strahl PE erhält somit die Gleichung:

$$a_2x_2 + a_3x_3 - \frac{a_2 + a_3}{a_1 + a_3}(a_1x_1 + a_3x_3) = 0 \qquad \text{oder}$$

$$PE) \ \ldots \ a_1(a_2 + a_3)x_1 - a_2(a_3 + a_1)x_2 - a_3(a_1 - a_2)\,.\,x_3 = 0.$$

Analog ergeben sich für PE_1, PE_2, PE_3, PP' die Gleichungen:

$$PE_1) \quad a_1(a_2 + a_3)x_1 - a_2(a_3 - a_1)x_2 + a_3(a_1 + a_2)x_3 = 0$$

$$PE_2) \quad a_1(a_2 - a_3)x_1 + a_2(a_3 + a_1)x_2 + a_3(a_1 + a_2)x_3 = 0$$

$$PE_3) \quad a_1(a_2 - a_3)x_1 + a_2(a_3 - a_1)x_2 - a_3(a_1 - a_2)x_3 = 0$$

$$PP') \quad a_1(a_2^2 - a_3^2)x_1 + a_2(a_3^2 - a_1^2)x_2 - a_3(a_1^2 - a_2^2)x_3 = 0.$$

Der dem Strahl PP' entsprechende Kegelschnitt hat die Gleichung

$$a_1(a_2^2 - a_3^2)x_2x_3 + a_2(a_3^2 - a_1^2)x_1x_3 - a_3(a_1^2 - a_2^2)x_1x_2 = 0$$

und seine Tangente in P' ist

$$a_2a_3(a_2^2 - a_3^2)\,.\,x_1 + a_1a_3(a_3^2 - a_1^2)\,.\,x_2 - a_1a_2(a_1^2 - a_2^2)\,.\,x_3 = 0.$$

Da nun u_1, u_2, u_3 für die Coordinaten von E, E_1, E_2, E_3, P, P' die Werthe annehmen:

$$(E)\begin{cases} u_1 = 2a_1(a_2 + a_3) \\ u_2 = -2a_2(a_3 + a_1) \\ u_3 = -2a_3(a_1 - a_2) \end{cases} \qquad (E_1)\begin{cases} u_1 = -2a_1(a_2 + a_3) \\ u_2 = 2a_2(a_3 - a_1) \\ u_3 = -2a_3(a_1 + a_2) \end{cases}$$

$$(E_2)\begin{cases} u_1 = 2a_1(a_2 - a_3) \\ u_2 = 2a_2(a_3 + a_1) \\ u_3 = 2a_3(a_1 + a_2) \end{cases} \qquad (E_3)\begin{cases} u_1 = -2a_1(a_2 - a_3) \\ u_2 = -2a_2(a_3 - a_1) \\ u_3 = 2a_3(a_1 - a_2) \end{cases}$$

$$(P)\begin{cases} u_1 = -a_1^2a_2a_3(a_2^2 - a_3^2) \\ u_2 = -a_1a_2^2a_3(a_3^2 - a_1^2) \\ u_3 = a_1a_2a_3^2(a_1^2 - a_2^2) \end{cases} \quad (P')\begin{cases} u_1 = -a_2a_3(a_2^2 - a_3^2) \\ u_2 = -a_1a_3(a_3^2 - a_1^2) \\ u_3 = a_1a_2(a_1^2 - a_2^2) \end{cases} *)$$

*) Bei jeder dieser sechs Werthegruppen ist ein constanter Faktor weggelassen worden.

so lauten die Gleichungen der Tangenten der C_3 in E, E_1, E_2, E_3, P, P' folgendermassen:

$$
\begin{array}{ll}
t_E) & a_1(a_2 + a_3)x_1 - a_2(a_3 + a_1)x_2 - a_3(a_1 - a_2)x_3 = 0 \\
t_{E_1}) & a_1(a_2 + a_3)x_1 - a_2(a_3 - a_1)x_2 + a_3(a_1 + a_2)x_3 = 0 \\
t_{E_2}) & a_1(a_2 - a_3)x_1 + a_2(a_3 + a_1)x_2 + a_3(a_1 + a_2)x_3 = 0 \\
t_{E_3}) & a_1(a_2 - a_3)x_1 + a_2(a_3 - a_1)x_2 - a_3(a_1 - a_2)x_3 = 0 \\
t_P) & a_1(a_2^2 - a_3^2)x_1 + a_2(a_3^2 - a_1^2)x_2 - a_3(a_1^2 - a_2^2)x_3 = 0 \\
t_{P'}) & a_2a_3(a_2^2 - a_3^2)x_1 + a_1a_3(a_3^2 - a_1^2)x_2 - a_1a_2(a_1^2 - a_2^2)x_3 = 0.
\end{array}
$$

Die Tangenten t_E, t_{E_1}, t_{E_2}, t_{E_3}, t_P stimmen also vollständig mit den resp. Strahlen PE, PE_1, PE_2, PE_3, PP' und $t_{P'}$ mit der Tangente des zu PP' inversen Kegelschnittes in P' überein.

Endlich erhält man für die Tangenten der C_3 in Q_1, Q_2, Q_3 folgende Gleichungen:

$$
\begin{array}{ll}
t_{Q_1}) \quad . \quad . \quad . & (a_2^2 - a_3^2)x_1 + a_1a_2x_2 + a_1a_3x_3 = 0 \\
t_{Q_2}) \quad . \quad . \quad . & a_1a_2x_1 - (a_3^2 - a_1^2)x_2 + a_2a_3x_3 = 0 \\
t_{Q_3}) \quad . \quad . \quad . & a_1a_3x_1 - a_2a_3x_2 - (a_1^2 - a_2^2)x_3 = 0.
\end{array}
$$

Für diese Tangenten lassen sich auch sehr einfache Constructionen herleiten. Zu diesem Zwecke stellen wir die Gleichungen der Geraden Q_1P', Q_2P' und Q_3P' auf und vergleichen dieselben mit denjenigen von t_{Q_1}, t_{Q_2} und t_{Q_3}.

Die Verbindungslinie der Punkte

$$Q_1(0 : a_3 : - a_2), \quad P'(a_1 : a_2 : - a_3)$$

hat die Gleichung:

$$
\begin{vmatrix} x_1, & x_2, & x_3 \\ 0, & a_3, & - a_2 \\ a_1, & a_2, & - a_3 \end{vmatrix} = 0 \qquad \text{oder}
$$

$$Q_1P') \quad . \quad . \quad (a_2^2 - a_3^2)x_1 - a_1a_2x_2 - a_1a_3x_3 = 0.$$

Die vier Strahlen $Q_1A_1 (= A_1P)$, Q_1A_3, Q_1P', t_{Q_1} bilden, wie aus ihren Gleichungen ersichtlich ist, ein harmonisches Büschel und zwar ist t_{Q_1} der harmonisch conjugirte Strahl von Q_1P' in Bezug auf Q_1A_1 und Q_1A_3. Um daher die Tangente der C_3 in Q_1 zu erhalten, hat man im Büschel $Q_1 . A_1A_2P'$ den vierten harmonischen, zu Q_1P' conjugirten Strahl zu construiren.

Für Q_2P' und Q_3P' ergeben sich die Gleichungen:

$$
\begin{vmatrix} x_1, & x_2, & x_3 \\ a_3, & 0, & - a_1 \\ a_1, & a_2, & - a_3 \end{vmatrix} = 0, \qquad
\begin{vmatrix} x_1, & x_2, & x_3 \\ a_2, & a_1, & 0 \\ a_1, & a_2, & - a_3 \end{vmatrix} = 0 \qquad \text{oder}
$$

Q_2P') . . $a_1a_2x_1 + (a_3^2 - a_1^2)x_2 + a_2a_3x_3 = 0$

Q_3P') . . $a_1a_3x_1 - a_2a_3x_2 + (a_1^2 - a_2^2)x_3 = 0.$

Die Gleichungen

$Q_2A_2(= Q_2P)$ . . . $a_1x_1 + a_3x_3 = 0$

Q_2A_1) . . . . $x_2 = 0$

Q_2P') $a_1a_2x_1 + (a_3^2 - a_1^2)x_2 + a_2a_3x_3 = 0$

t_{Q_2}) $a_1a_2x_1 - (a_3^2 - a_1^2)x_2 + a_2a_3x_3 = 0$

zeigen, dass Q_2A_2, Q_2A_1, Q_2P', t_{Q_2} vier harmonische Strahlen sind, und zwar ist die Tangente t_{Q_2} der harmonisch conjugirte zu Q_2P' in Bezug auf Q_2A_2 und Q_2A_1.

Endlich bilden die durch die Gleichungen

Q_3A_3) . . . . . . $a_1x_1 - a_2x_2 = 0$

Q_3A_1) . . . . $x_3 = 0$

Q_3P') . . $a_1a_3x_1 - a_2a_3x_2 + (a_1^2 - a_2^2)x_3 = 0$

t_{Q_3}) . . $a_1a_3x_1 - a_2a_3x_2 - (a_1^2 - a_2^2)x_3 = 0$

repräsentirten Strahlen Q_3A_3, Q_3A_1, Q_3P', t_{Q_3} ein harmonisches Büschel, in welchem die Tangente t_{Q_3} der zu Q_3P' conjugirte Strahl ist.

Unsere Curve dritter Ordnung kann keine Doppelpunkte besitzen, weil auf jedem durch P gehenden Strahl neben P nur noch zwei Curvenpunkte liegen können; wäre nun ein Doppelpunkt D vorhanden, so hätte, da dem Punkte D im Allgemeinen wieder ein Doppelpunkt entsprechen müsste, PD mit der Curve fünf Punkte gemein. (A_1, A_2, A_3, E, E_1, E_2, E_3 können nicht Doppelpunkte sein, weil in jedem dieser Punkte eine einzige Curventangente existirt, wie nachgewiesen worden ist.) *) Aus dem gleichen Grunde enthält die C_3 keine Rückkehrpunkte. Auch die folgende Betrachtung zeigt deutlich, dass die C_3 weder Doppelpunkte noch Spitzen hat. Die erste Polare des Punktes P in Bezug auf die C_3 ist ein Kegelschnitt, welcher durch E, E_1, E_2, E_3, P geht und die Curve in P berührt und hat somit keine weitern als diese sechs Punkte mit der C_3 gemein. Wären nun Doppelpunkte und Spitzen vorhanden, so müssten dieselben auf der ersten Polaren liegen, und die letztere hätte alsdann mit der C_3 mehr als sechs Punkte gemein, was unmöglich ist. (Die erste Polare von P' in Bezug auf die C_3 geht durch A_1, A_2, A_3, P, P' und berührt die C_3 in P', sie ist also gerade derjenige Kegelschnitt, welcher dem Strahl PP' entspricht.)

*) Läge D in A_i oder E_i, so hätte PD vier Punkte mit der C_3 gemein (im Falle D in E_i könnten PD und die C_3 auch fünf gemeinsame Punkte haben, dann müsste aber E_i ein Berührungsknoten der C_3 sein).

Da die C_3 keine Doppel- und Rückkehrpunkte enthält, so ist ihre Klassenzahl $\nu = \mu(\mu - 1) = 6$, die Zahl der Wendetangenten $\iota = 3\mu(\mu - 2) = 9$ und die Zahl der Doppeltangenten

$$\tau = \frac{1}{2}\mu(\mu - 2)(\mu - 3)(\mu + 3) \quad \text{oder}$$
$$= \frac{1}{2}(\nu - \mu)(\nu + \mu - 9) = 0.$$

Die vorliegende C_3 ist daher die allgemeinste Curve dritter Ordnung.

Die C_3 hat im Allgemeinen drei unendlich ferne Punkte $U'_\infty, V'_\infty, W'_\infty$, die Coordinaten derselben ergeben sich durch Auflösung der Gleichungen der unendlich fernen Geraden und der C_3 nach $\frac{x_1}{x_3}$ und $\frac{x_2}{x_3}$. Ihre Inversen sind die im Allgemeinen von A_1, A_2, A_3 verschiedenen Schnittpunkte U, V, W des Kreises K mit der C_3, und die Strahlen UU'_∞, VV'_∞, WW'_∞ gehen durch P. Um zu untersuchen, welche Strahlen des Büschels P die im Unendlichen liegenden Punkte der C_3 liefern, bestimmen wir den Schnittpunkt des Strahles

$$g_\lambda) \quad . \quad . \quad . \quad \lambda a_1 x_1 + a_2 x_2 + (1 + \lambda) a_3 x_3 = 0$$

mit der unendlich fernen Geraden

$$g_\infty) \quad . \quad . \quad . \quad \sin A_1 x_1 + \sin A_2 x_2 + \sin A_3 x_3 = 0.$$

Aus den vorstehenden Gleichungen folgt:

$$U'_\infty) \frac{x_1}{x_3} = \frac{a_2 \sin A_3 - (1 + \lambda) a_3 \sin A_2}{\lambda a_1 \sin A_2 - a_2 \sin A_1}, \quad \frac{x_2}{x_3} = \frac{(1 + \lambda) a_3 \sin A_1 - \lambda a_1 \sin A_3}{\lambda a_1 \sin A_2 - a_2 \sin A_1}.$$

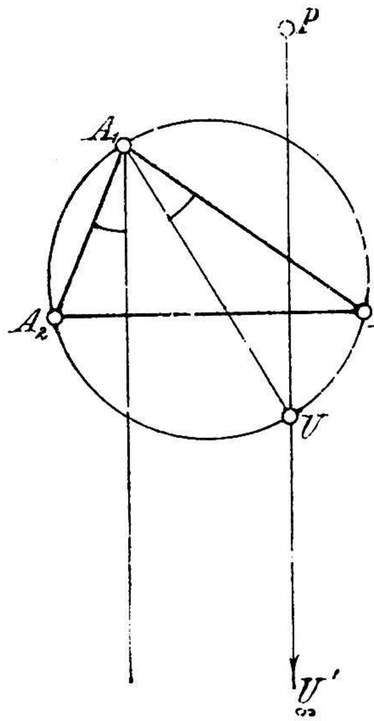
Soll nun U'_∞ der C_3 angehören, so muss sein entsprechender Punkt U, der die Coordinaten

$$U) \left\{ \begin{aligned} x_1 &= \varrho\Big[(1 + \lambda) a_3 \sin A_1 - \lambda a_1 \sin A_3\Big]\Big[\lambda a_1 \sin A_2 - a_2 \sin A_1\Big] \\ x_2 &= \varrho\Big[a_2 \sin A_3 - (1 + \lambda) a_3 \sin A_2\Big]\Big[\lambda a_1 \sin A_2 - a_2 \sin A_1\Big] \\ x_3 &= \varrho\Big[a_2 \sin A_3 - (1 + \lambda) a_3 \sin A_2\Big]\Big[(1 + \lambda) a_3 \sin A_1 - \lambda a_1 \sin A_3\Big] \end{aligned} \right.$$

hat, auf g_λ, K und C_3 liegen. Setzt man seine Coordinaten in die Gleichung von g_λ ein (die Gleichung von K ist identisch erfüllt), so resultirt die cubische Gleichung:

$$a_1 \lambda\Big[(1 + \lambda) a_3 \sin A_1 - \lambda a_1 \sin A_3\Big]\Big[\lambda a_1 \sin A_2 - a_2 \sin A_1\Big] +$$
$$+ a_2\Big[a_2 \sin A_3 - (1 + \lambda) a_3 \sin A_2\Big]\Big[\lambda a_1 \sin A_2 - a_2 \sin A_1\Big] +$$
$$+ a_3(1 + \lambda)\Big[a_2 \sin A_3 - (1 + \lambda) a_3 \sin A_2\Big]\Big[(1 + \lambda) a_3 \sin A_1 - \lambda a_1 \sin A_3\Big] = 0,$$

deren Wurzeln λ_1, λ_2, λ_3 diejenigen Werthe von λ liefern, welche den die Richtungen nach den unendlich fernen Punkten U'_∞, V'_∞, W'_∞ der C_3 angebenden Strahlen des Büschels zugehören. Die Gleichungen der Strahlen PU'_∞, PV'_∞, PW'_∞ gehen aus der Gleichung von g_λ hervor, wenn man in derselben λ successive durch λ_1, λ_2, λ_3 ersetzt. Von den drei unendlich fernen Punkten der C_3 ist stets mindestens einer reell. Bezeichnet U'_∞ den letztern, dann entspricht dem Strahl PU'_∞ eine Hyperbel, die durch A_1, A_2, A_3, U, U'_∞ geht und deren eine Asymptote also parallel zu PU sein muss. Zu PU parallel verläuft auch die Tangente der C_3 in U'_∞, d. h. eine Asymptote der letztern. Dieser Asymptote entspricht ein Kegelschnitt, welcher durch A_1, A_2, A_3, U geht und die C_3 in U berührt. Derselbe könnte zur Construction der Asymptote benutzt werden, wenn man seine Tangente, mithin auch diejenige der C_3, in U kennen würde. Die beiden erwähnten Asymptoten (der Hyperbel und der C_3) können nur dann zusammenfallen, wenn P auf dem Kreise K liegt; in diesem Falle ist dann P mit U und P' mit U'_∞ identisch, und da die Hyperbel und die C_3 sich in U'_∞ berühren müssen, so ist PU'_∞ die Tangente der C_3 in U, und es kann daher die Asymptote der C_3 leicht construirt werden, entweder nach dem Pascal'schen Satze oder mit Hülfe des der Asymptote entsprechenden Kegelschnittes, der die C_3 (also auch PU') in U berührt.



Fällt speziell P(U) mit einem der Punkte X, Y, Z (vergl. pag. 42) zusammen, so berührt PP' und in Folge dessen auch die C_3 den Kreis K in P, und die unendlich ferne Gerade ist die Tangente in P'_∞ sowohl für die dem Strahl PP' entsprechende Parabel als für die C_3 (die vorige Asymptote ist ins Unendliche gerückt). In P'_∞ sind zwei unendlich ferne Punkte U'_∞ und V'_∞ der C_3 vereinigt, und es existirt ausser diesen ein dritter W'_∞, welcher reell sein muss.

Die Tangenten der C_3 in U und U'_∞ können auch in dem Falle durch einfache Construction gefunden werden, in welchem P im Unendlichen liegt, also P und P' resp. mit U'_∞ und U zusammenfallen. Alsdann ist PU die Asymptote der C_3, und daher müssen die C_3 und die zu PU inverse Hyperbel in U die nämliche Tangente haben.

Je nach der Lage von P hat die C_3 drei reelle und von einander verschiedene unendlich ferne Punkte, — oder zwei imaginäre und einen reellen, — oder drei reelle, wovon zwei zusammenfallen.

Im ersten Falle ist unsere Curve eine zweitheilige Curve dritter Ordnung, sie besteht aus einer sogen. Serpentine (welche in die conchoidale Form übergehen kann) *) und einem sogen. hyperbolischen Paar, d. h. zwei unendlichen (hyperbolischen) Aesten, die als eine stetig zusammenhängende Curve zu betrachten sind. Bei speziellerer Lage von P kann die Serpentine zur geraden Linie werden, und der übrige Theil geht in eine Hyperbel über (welche auch gleichseitig sein und im speziellsten Falle in ein Linienpaar zerfallen kann). Bei drei unendlich fernen Punkten kann die C_3 aber auch bestehen aus einem Oval und drei unendlichen Aesten, die eine zusammenhängende Curve bilden. Wenn die unendlich fernen Punkte gewöhnliche Punkte sind, so hat einer der Aeste keinen Inflexionspunkt, der zweite einen und der dritte zwei Inflexionspunkte. Liegt dagegen ein Inflexionspunkt im Unendlichen, so können entweder zwei Aeste mit keinen und ein Ast mit zwei Inflexionsstellen oder zwei Aeste mit je einem und ein Ast mit keinem Inflexionspunkt vorkommen.

Im zweiten Falle, in welchem nur ein unendlich ferner Punkt, also auch nur eine Asymptote existirt, setzt sich die C_3 zusammen aus einem Oval und einer Serpentine. Letztere kann in eine gerade Linie und das Oval in eine Ellipse, speziell einen Kreis übergehen.

Im dritten Falle kann die C_3 bestehen aus einer Serpentine und einem Oval, welches parabolische Form hat, d. h. die unendlich ferne Gerade berührt; die Serpentine kann speziell zur Geraden und das Oval zur Parabel werden. Oder die beiden Theile der C_3 sind ein Oval und eine Curve, welche eine Asymptote hat und die unendlich ferne Gerade berührt, d. h. eine Curve, welche in parabolischer Form auseinander geht. Ein Zweig der letztern hat zwei Inflexionspunkte, der andere einen oder, wenn ein Inflexionspunkt im Unendlichen liegt, so haben beide Zweige je eine Inflexionsstelle.

Die viel Interessantes bietende Untersuchung aller möglichen Spezialfälle, welche ich vollständig durchgeführt habe, soll den Gegenstand einer besondern Abhandlung bilden, die demnächst veröffentlicht wird.

---

*) Vergl. Salmon-Fiedler, Art. 205.

Anhang.

Legt man Liniencoordinaten (ξ_1, ξ_2, ξ_3) zu Grunde und ersetzt dieselben durch ihre reciproken Werthe, d. h. wendet die durch die Relationen $\xi_1' = \lambda\xi_2\xi_3$, $\xi_2' = \lambda\xi_1\xi_3$, $\xi_3' = \lambda\xi_1\xi_2$ ausgedrückte birationale quadratische Transformation (Methode der Inversion) an, wobei einer Geraden ξ_i eine einzige, bestimmte Gerade $\xi_i' = \frac{1}{\xi_i}$ und umgekehrt entspricht, so entsprechen sich oder sind zu einander invers:

Punkt und Curve zweiter Klasse (welche dem Fundamentaldreiseit eingeschrieben ist).

Gerade und Gerade,

Curve zweiter Klasse und Curve vierter Klasse (mit drei Doppeltangenten in den Coordinatenaxen; für dieselbe ist im Allgemeinen $\nu = 4$, $\tau = 3$, $\iota = 0$, $\mu = 6$, $\varkappa = 6$, $\delta = 4$).

Curve n. Klasse und Curve von der Klasse 2n (letztere hat die Fundamentallinien zu nfachen Tangenten).

Zu dem behandelten Problem, als dessen Lösung sich die Curve sechster Ordnung mit sieben Doppelpunkten und keinen Spitzen ergab, gibt es nun das folgende dualistisch entsprechende:

Ein Punkt S bewege sich auf einem festen Kegelschnitt, man bestimme die Enveloppe der durch S gehenden Tangenten der Curve zweiter Klasse, welche als Inverse dem Punkte S entspricht.

Die Untersuchung, von welcher ich an dieser Stelle nur die Resultate mittheilen will, ergibt als gesuchte Enveloppe im allgemeinsten Falle eine Curve sechster Klasse mit sieben Doppeltangenten und keinen stationären Tangenten. Die Doppeltangenten sind die drei Fundamentallinien ($x_1 = 0$ oder $\xi_2 = 0$, $\xi_3 = 0$; $x_2 = 0$ oder $\xi_1 = 0$, $\xi_3 = 0$; $x_3 = 0$ oder $\xi_1 = 0$, $\xi_2 = 0$) und die vier sich selbst entsprechenden Geraden e, e_1, e_2, e_3, deren Liniencoordinaten sind: ($\xi_1 = 1$, $\xi_2 = 1$, $\xi_3 = 1$), ($\xi_1 = -1$, $\xi_2 = 1$, $\xi_3 = 1$), ($\xi_1 = 1$, $\xi_2 = -1$, $\xi_3 = 1$), ($\xi_1 = 1$, $\xi_2 = 1$, $\xi_3 = -1$) oder deren Punktcoordinatengleichungen lauten:

$$\begin{array}{lrcl}
(e) & x_1 + x_2 + x_3 & = & 0 \\
(e_1) & -x_1 + x_2 + x_3 & = & 0 \\
(e_2) & x_1 - x_2 + x_3 & = & 0 \\
(e_3) & x_1 + x_2 - x_3 & = & 0.
\end{array}$$

Da $\nu = 6$, $r = 7$, $\iota = 0$, so sind die übrigen Plücker'schen Charaktere der Curve

$$\mu = 16\,, \quad \varkappa = 30\,, \quad \delta = 72\,,$$

d. h. sie hat 30 Spitzen, 72 Doppelpunkte und ist von der 16. Ordnung.

Schneidet der feste Kegelschnitt p die Fundamentallinie A_2A_3 in zwei Punkten B_1, B_1^*, so sind die Schnittpunkte B_1', $B_1^{*\prime}$ der resp. Inversen von A_1B_1, $A_1B_1^*$ (A_1B_1 und $A_1B_1^*$ sind Tangenten der C^6) mit A_2A_3 die Berührungspunkte der Doppeltangente A_2A_3 (letztere sind imaginär, wenn A_2A_3 den Kegelschnitt p nicht schneidet). Fallen B_1 und B_1^* zusammen, d. h. wird A_2A_3 von p berührt, dann vereinigen sich B_1' und $B_1^{*\prime}$, d. h. die Doppeltangente A_2A_3 geht in eine Inflexionstangente über. Es fallen auch die beiden Tangenten A_1B_1 und $A_1B_1^*$ zusammen, und die C^6 geht daher durch A_1 hindurch (A_1 wird Berührungspunkt der Curventangente A_1B_1).

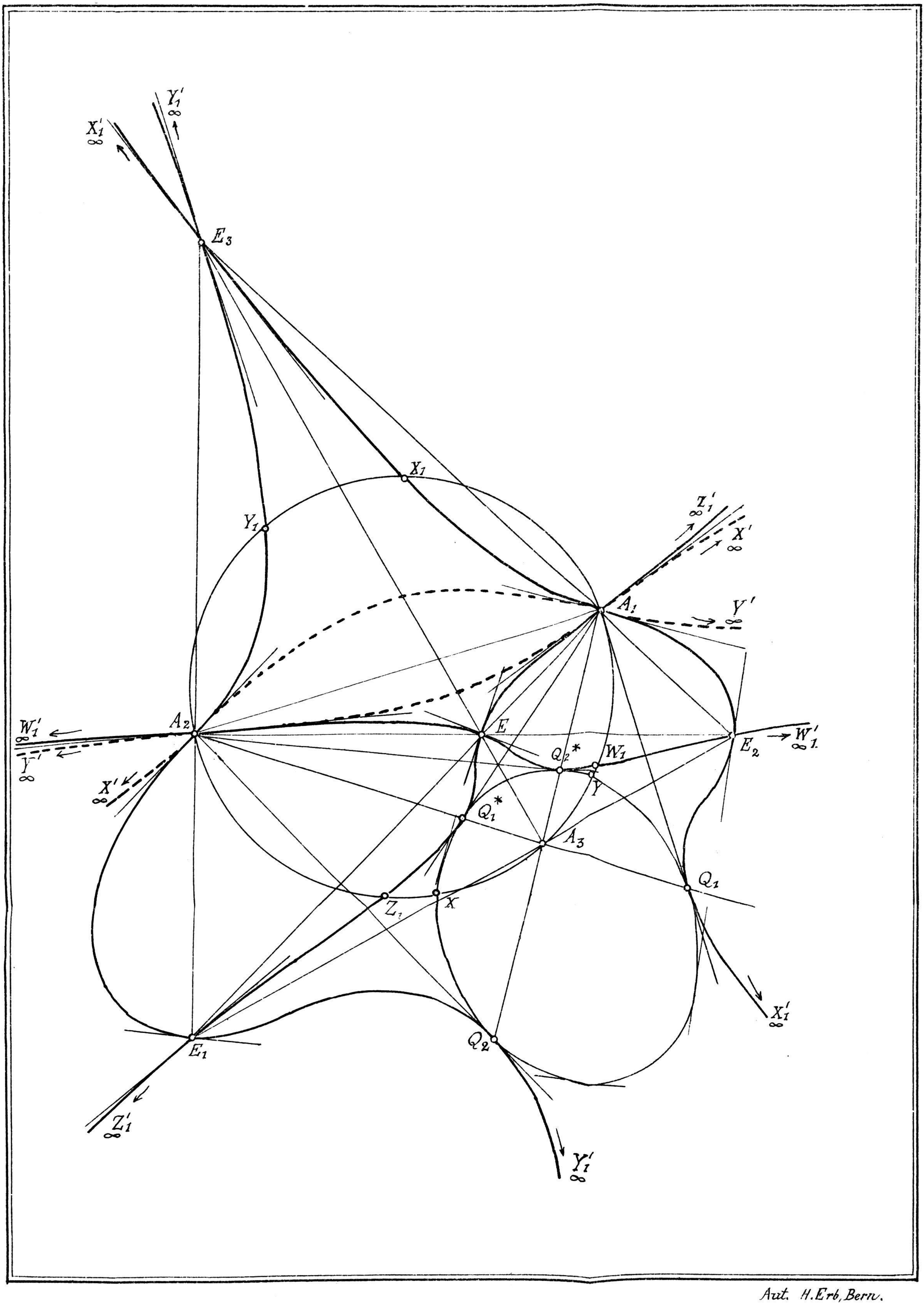
Analoges gilt für die übrigen Fundamentallinien. Die Berührungspunkte der Doppeltangenten e, e_1, e_2, e_3 sind die resp. Schnittpunkte dieser Linien mit dem festen Kegelschnitt p. Berührt p eine der Linien e_i ($i = 0, 1, 2, 3$), dann sind im Berührungspunkt $\mathfrak{E}_i$ die beiden Berührungspunkte der Doppeltangente e_i vereinigt, von $\mathfrak{E}_i$ aus gehen an die C^6 sechs Tangenten, von denen vier mit e_i zusammenfallen; es sind daher in e_i vier Curventangenten vereinigt oder die Tangente e_i zählt als Doppeltangente zweifach, ist also keine Inflexionstangente.

Die sechs Ecken des vollständigen Vierseits $e\,e_1\,e_2\,e_3$ sind Punkte, die sich selbst entsprechen; geht demnach der feste Kegelschnitt p durch einen derselben, so sondert sich dieser (resp. das Strahlenbüschel, dessen Scheitel er ist) als ein Theil der Enveloppe ab, und der Rest derselben ist eine Curve fünfter Klasse. Enthält p vier (die höchste Zahl) sich selbst entsprechende Punkte, so reduzirt sich die C^6 auf eine C^2, welche in ein Punktepaar zerfällt.

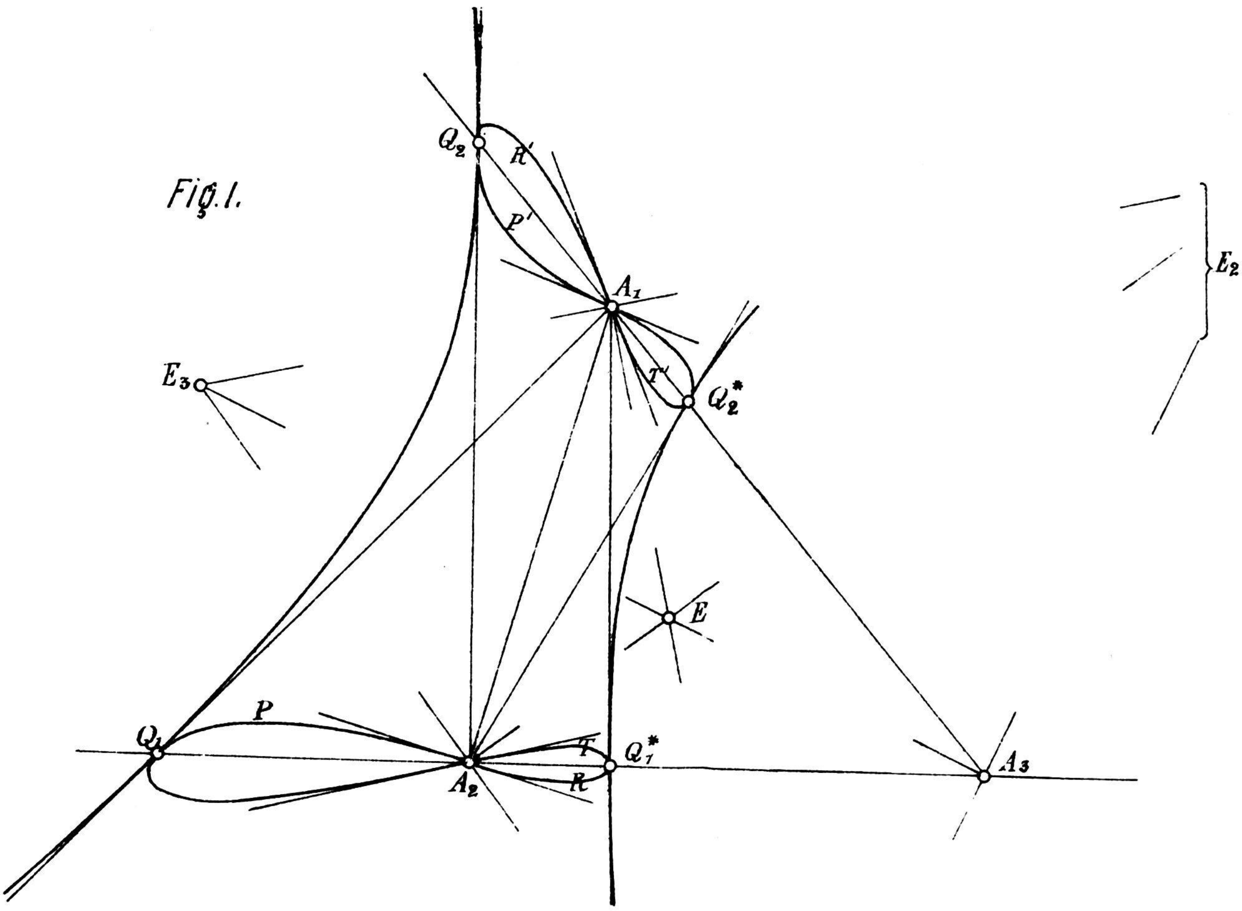
Die $C_{16}{}^6$ ist zu sich selbst invers (in Bezug auf die Tangenten) und zwar in der Weise, dass je zwei entsprechende Tangenten der Curve sich in einem Punkte des festen Kegelschnittes schneiden. Von jeder einem Punkte S entsprechenden Curve zweiter Klasse kennt man drei Tangenten (die Fundamentallinien) und die Berührungspunkte derselben (der Berührungspunkt auf der Fundamentallinie $A_k A_l$ ist der Schnittpunkt von $A_i S'$ mit $A_k A_l$, wobei $A_i S'$ den zu $A_i S$ inversen Strahl bedeutet). Es können daher sämmtliche Tangenten der $C_{16}{}^6$ leicht construirt werden.

Spezialfall.

Bewegt sich der Punkt S auf einer geraden Linie g, dann resultirt als Enveloppe der Tangenten, die von S aus an seine inverse Curve zweiter Klasse möglich sind, eine Curve dritter Klasse, welche keine Doppeltangenten und Inflexionstangenten hat, demnach neun Spitzen und keine Doppelpunkte besitzt und von der sechsten Ordnung ist. Diese Curve ist die dualistisch entsprechende zu der ausführlich behandelten $C_3{}^6$ und repräsentirt das Erzeugniss der auf g befindlichen Punktreihe mit der zu letzterer projektivischen Kegelschnittschaar, deren Grundtangenten die Fundamentallinien und die zu g inverse Gerade g' sind.

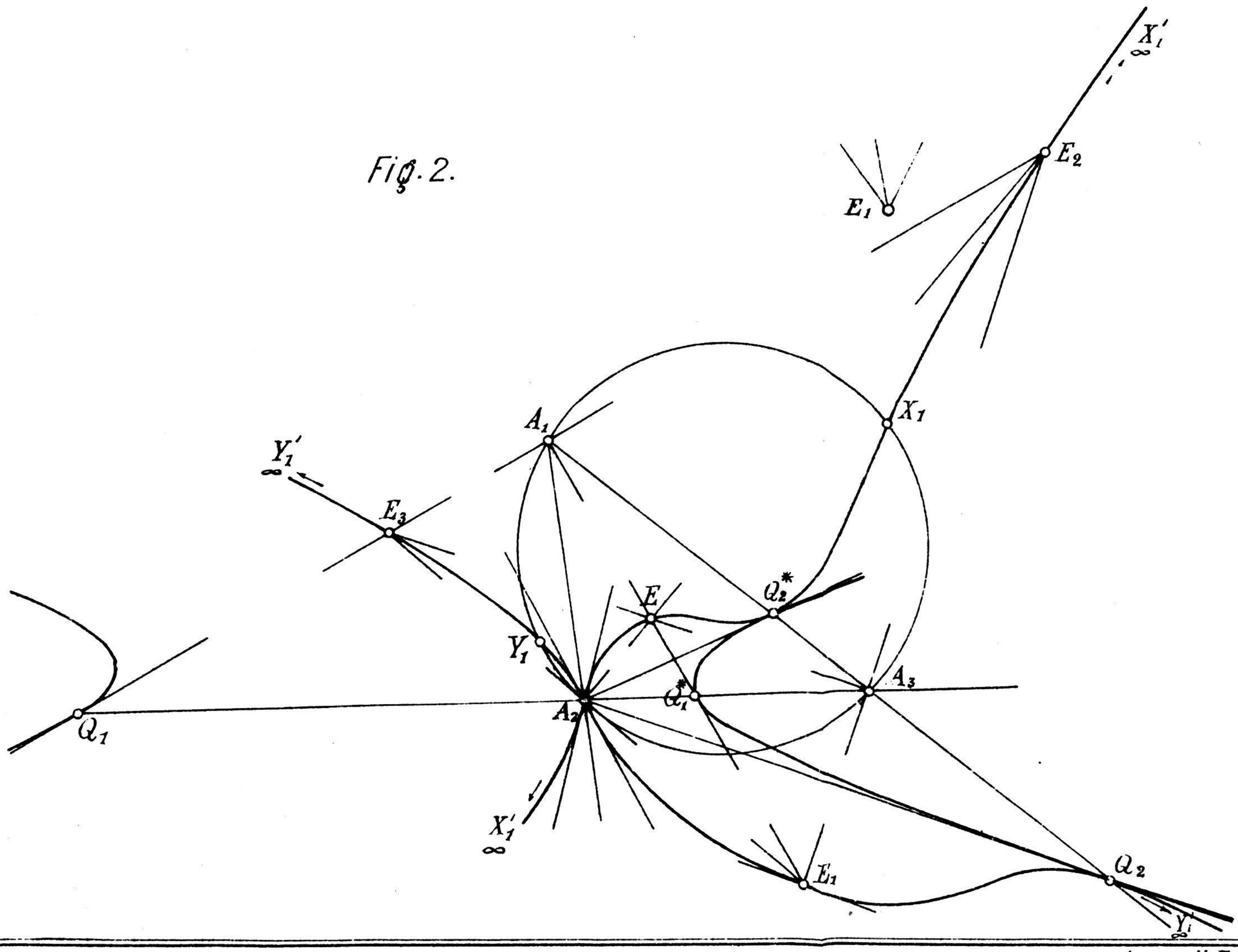


Aut. H. Erb, Bern.



Q_2
R'
P'
A_1
E_3
T'
Q_2^*
E_2
E
P
Q_1
T
Q_1^*
A_2
R
A_3

Fig. 1.



X_1'
∞
E_2
E_1
X_1
A_1
Y_1'
∞
E_3
Q_2^*
E
Y_1
Q_1^*
A_3
A_2
Q_1
X_1'
∞
E_1
Q_2
Y_1'
∞

Fig. 2.

Fig. 1.

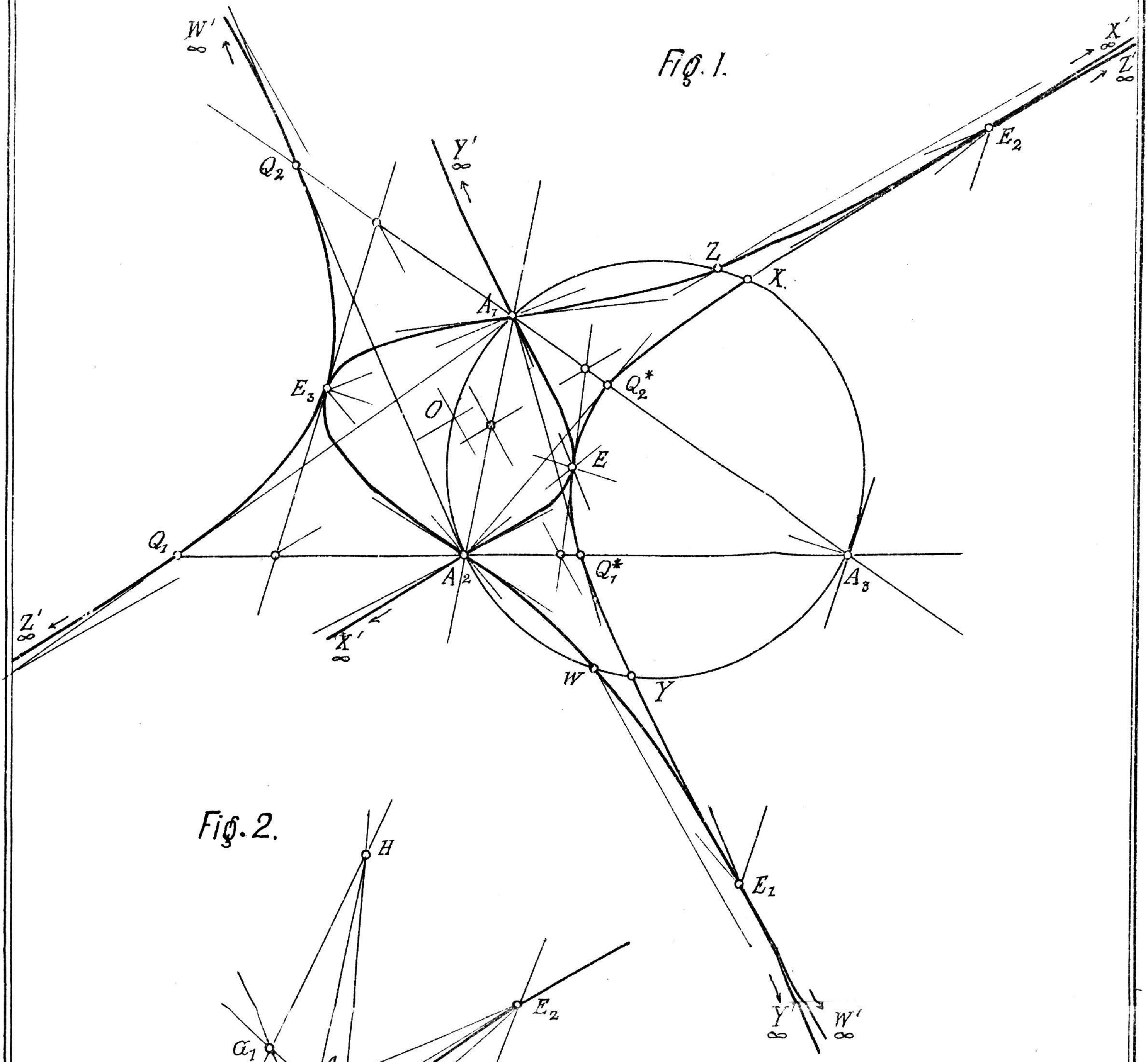
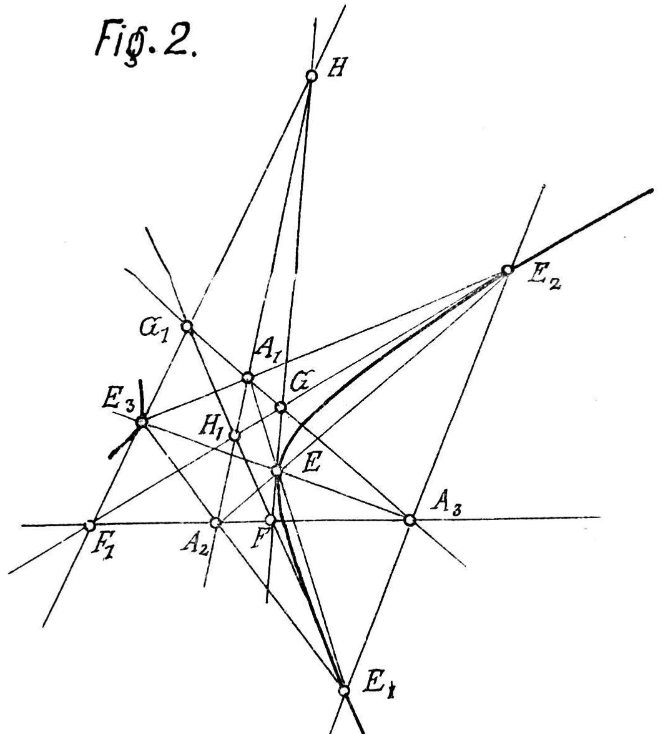


Fig. 2.



Aut. H. Erb, Bern.

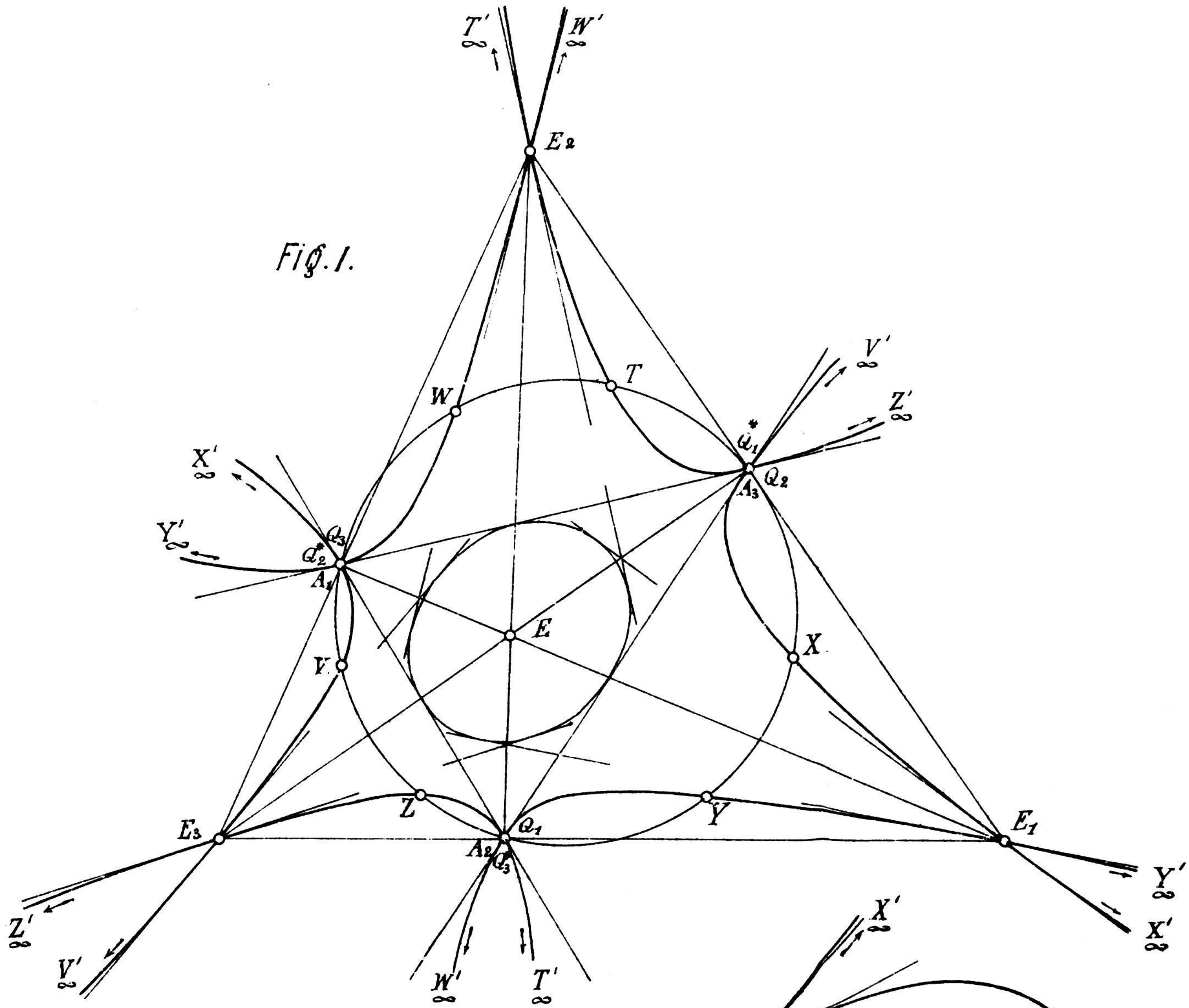


Fig. 1.

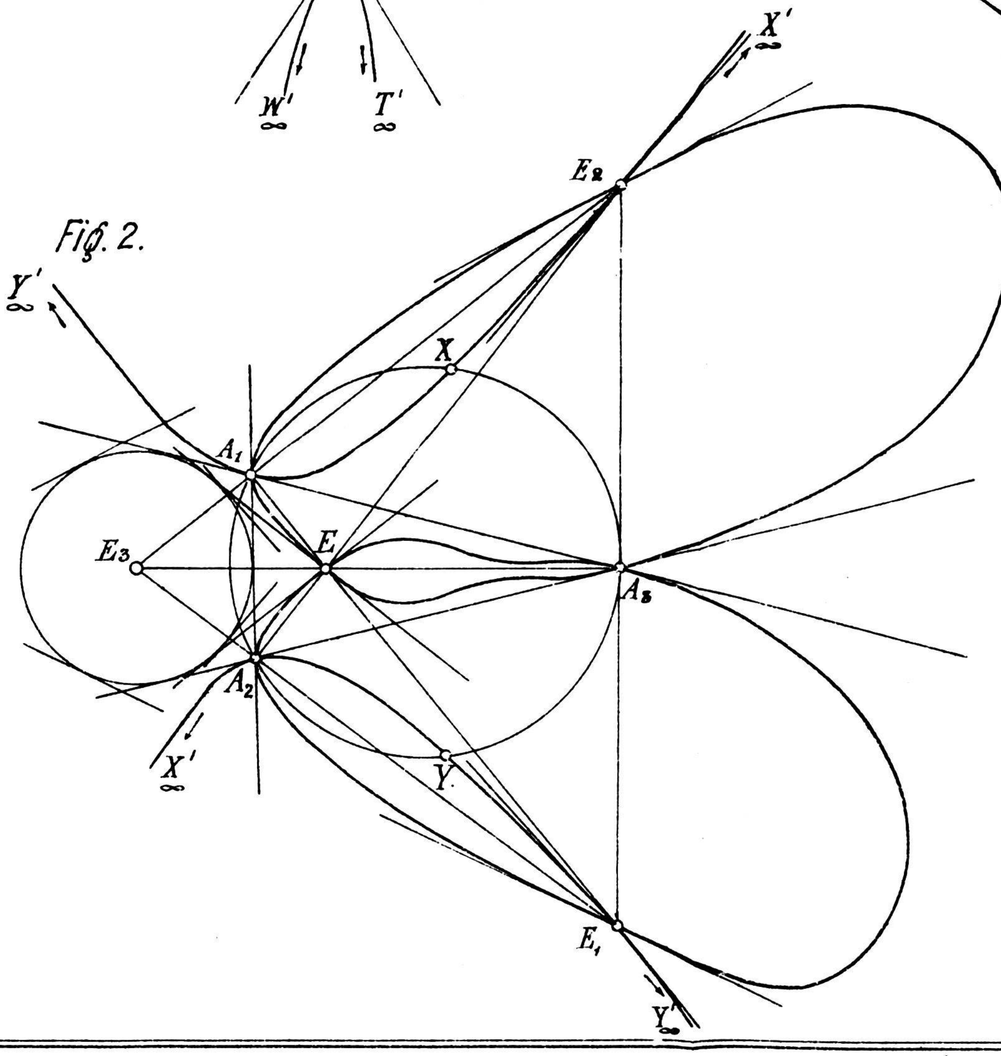


Fig. 2.

Autog. H. Erb, Bern.

Fig. 1.

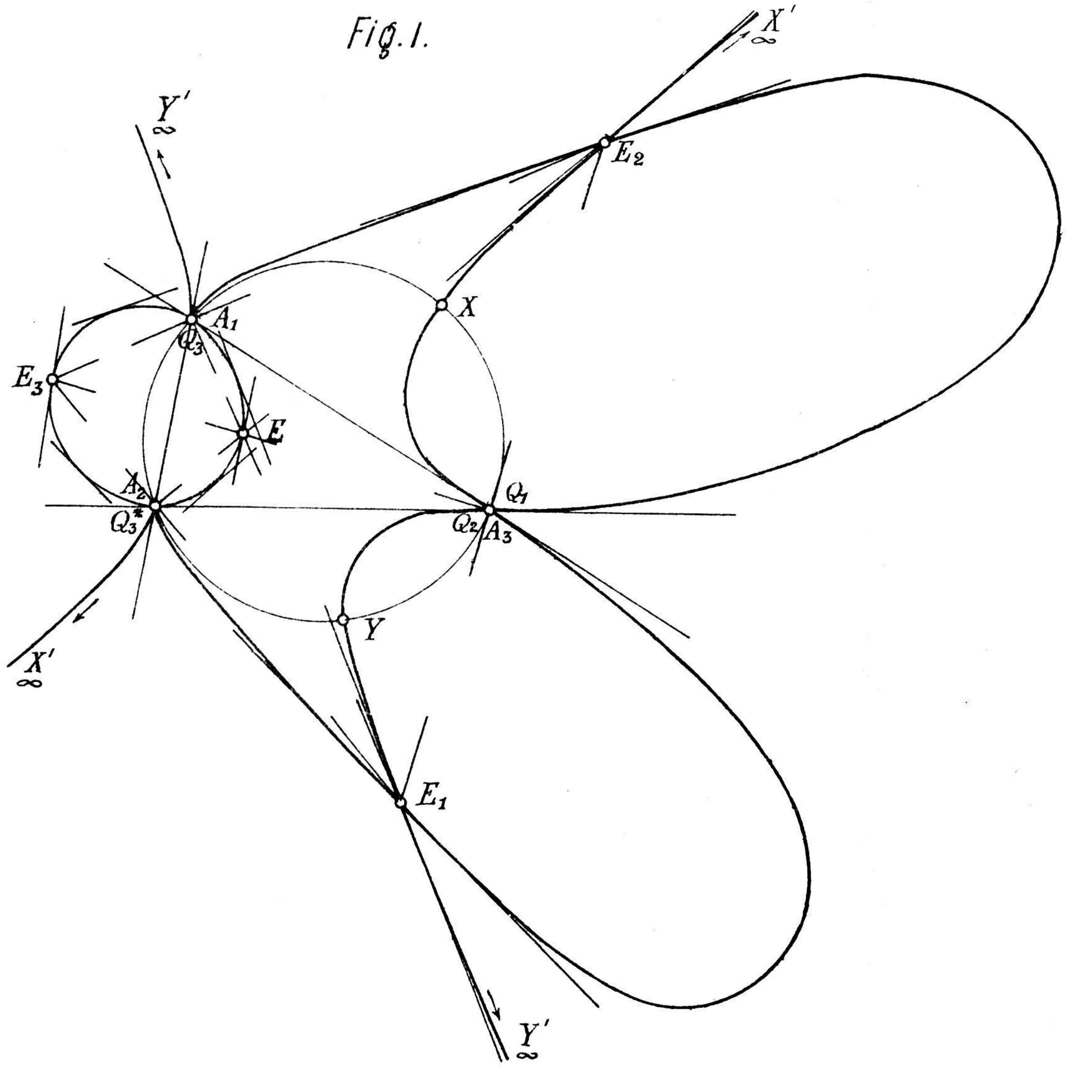
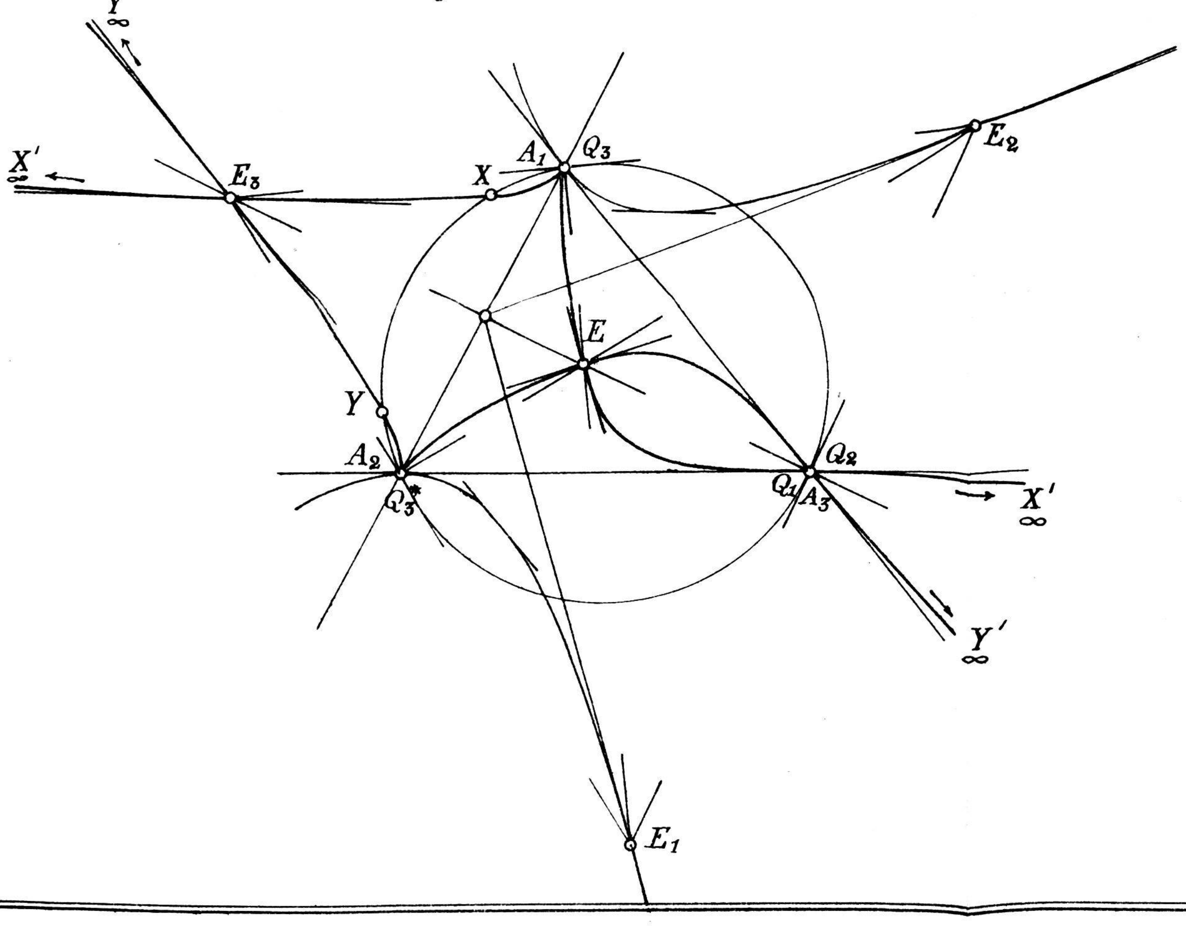
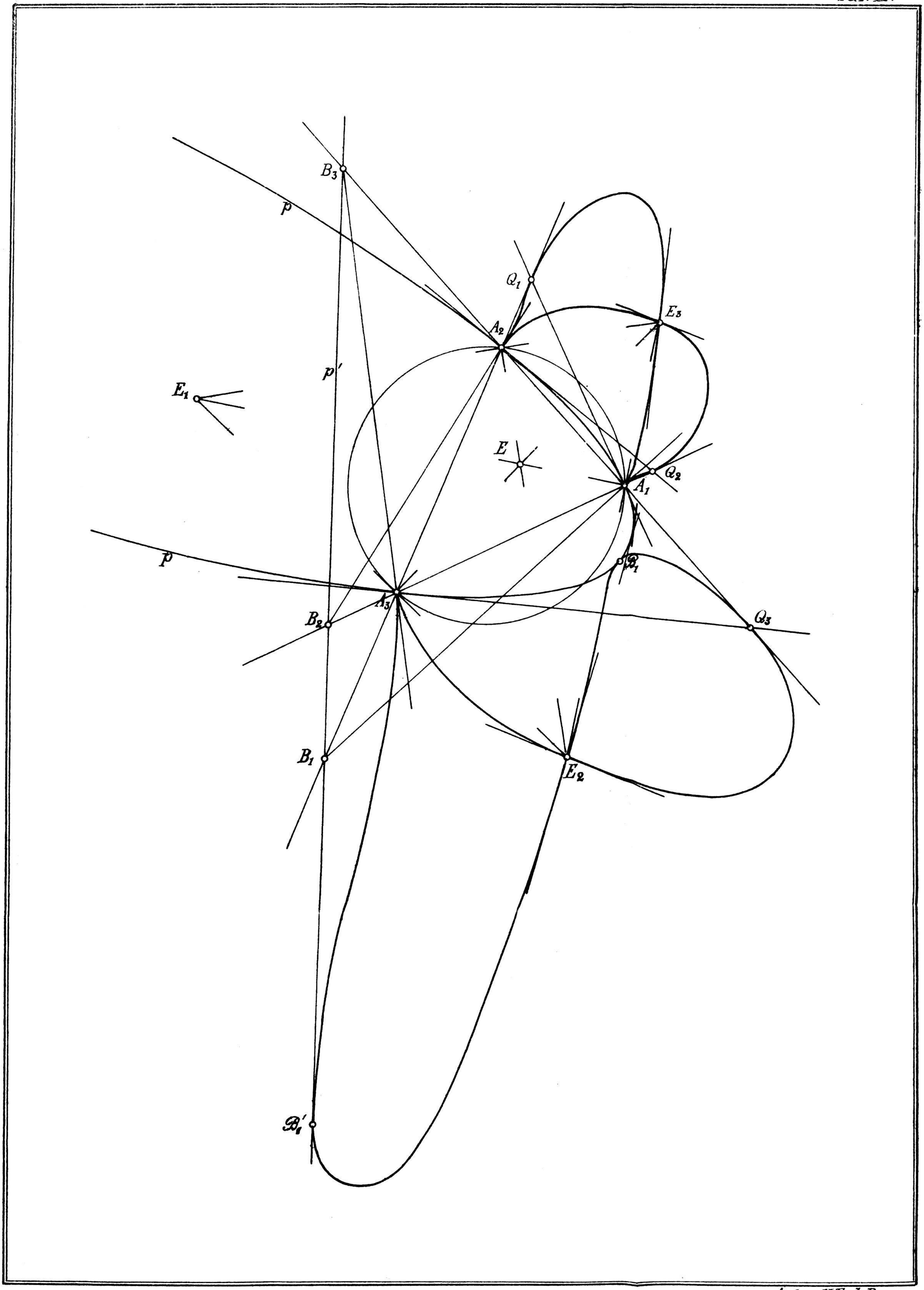

X'
∞
Y'
∞
E₂
X
A₁
Q₃
E₃
E
A₂
Q₃*
Q₁
Q₂
A₃
Y
X'
∞
E₁
Y'
∞

Fig. 2.


Y'
∞
X'
∞
E₃
X
A₁
Q₃
E₂
E
Y
A₂
Q₃*
Q₂
Q₁
A₃
X'
∞
Y'
∞
E₁



Autog. H. Erb, Bern.

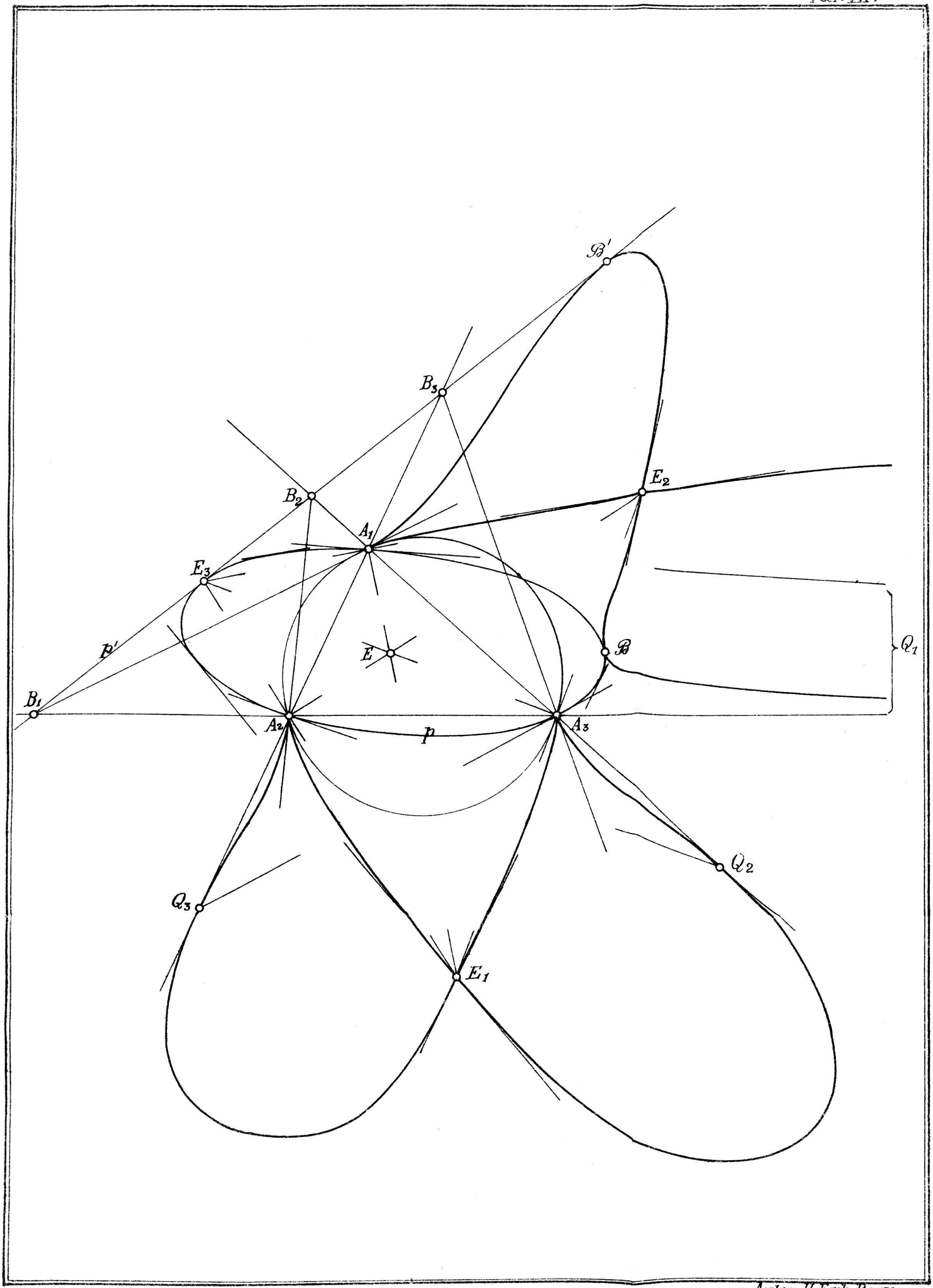
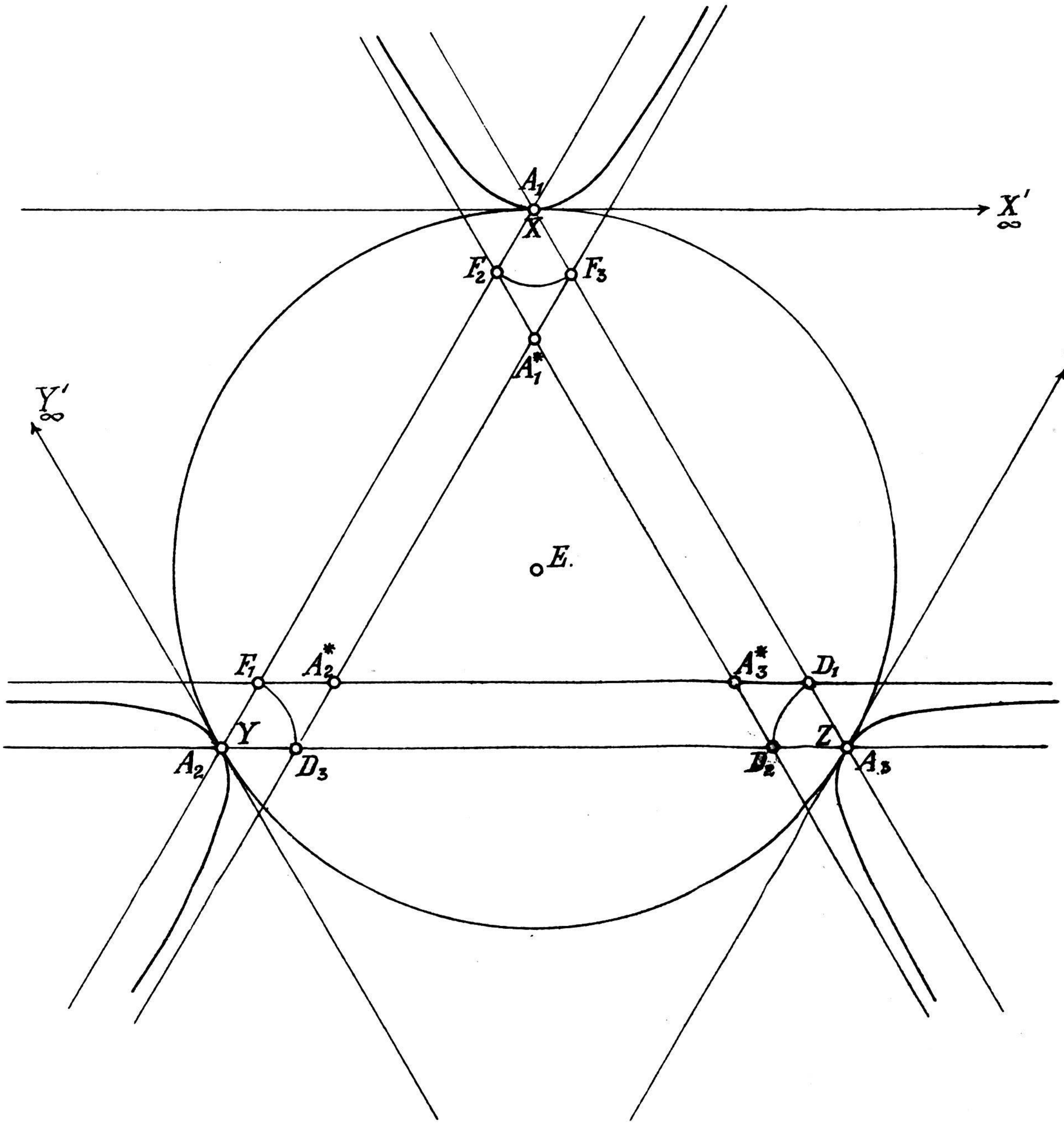
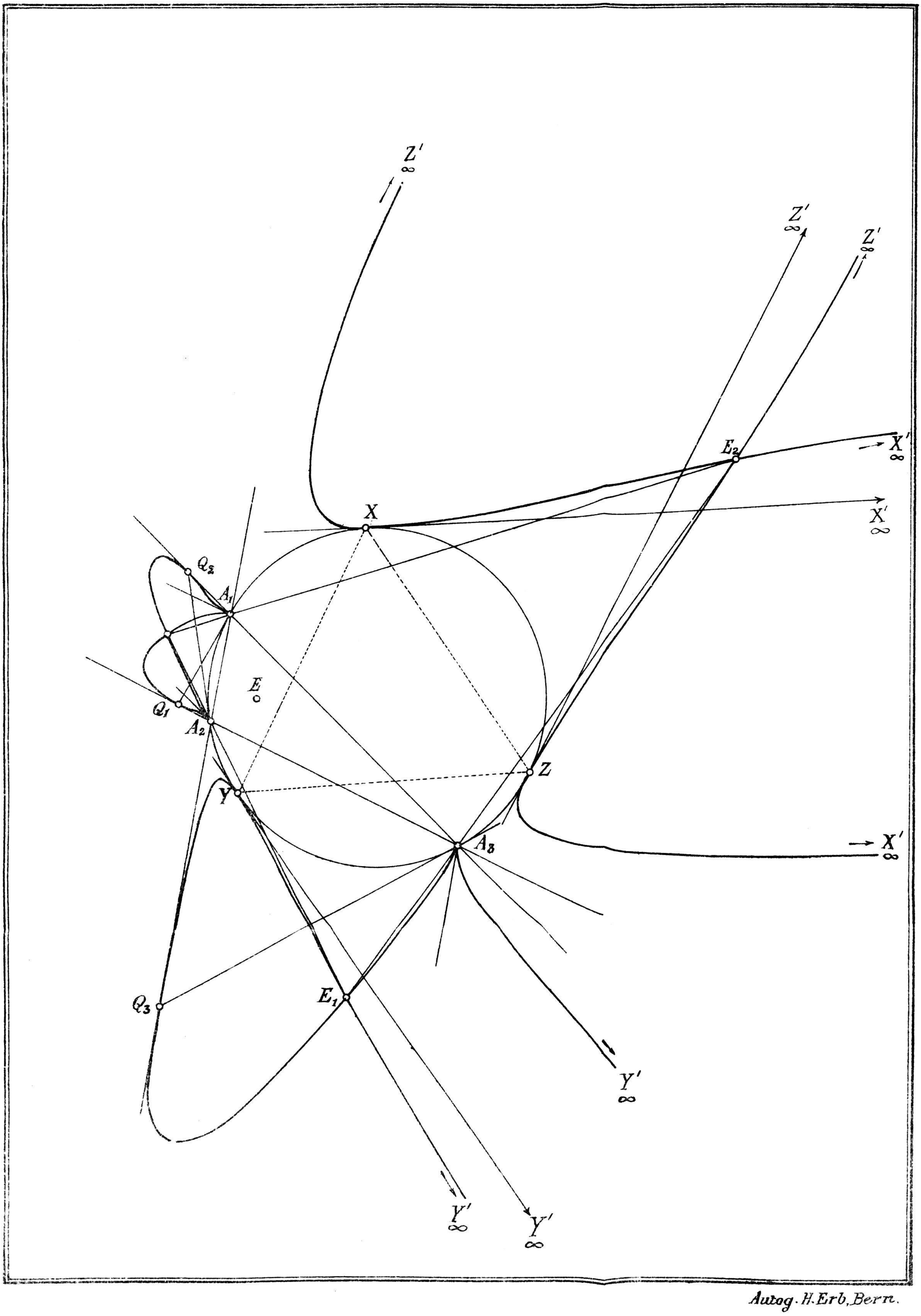

𝔅′
B₃
E₂
B₂
A₁
E₃
E
𝔅
Q₁
p′
B₁
A₂
A₃
p
Q₂
Q₃
E₁

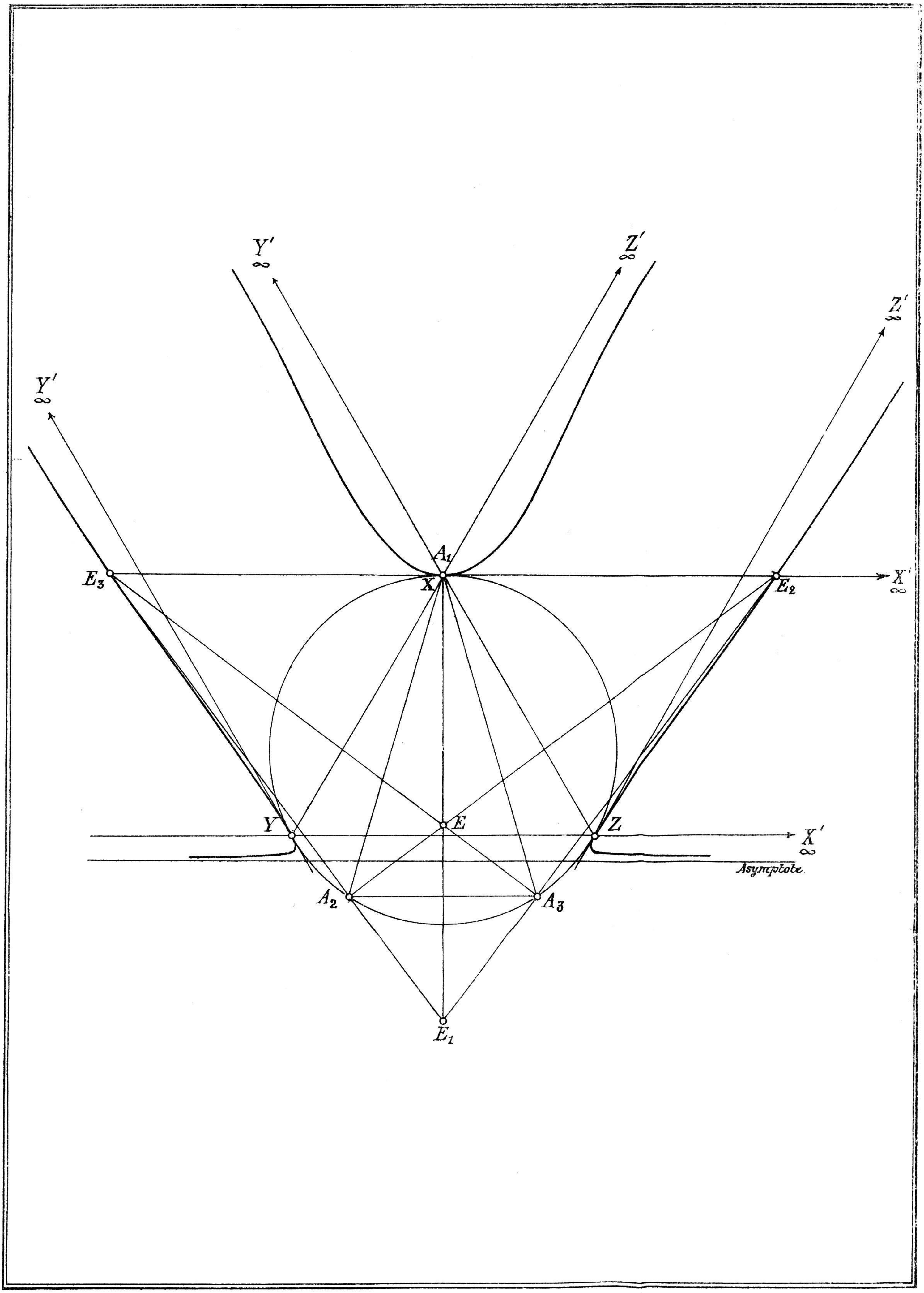
Fig. 2.



Autog. H. Erb, Bern.

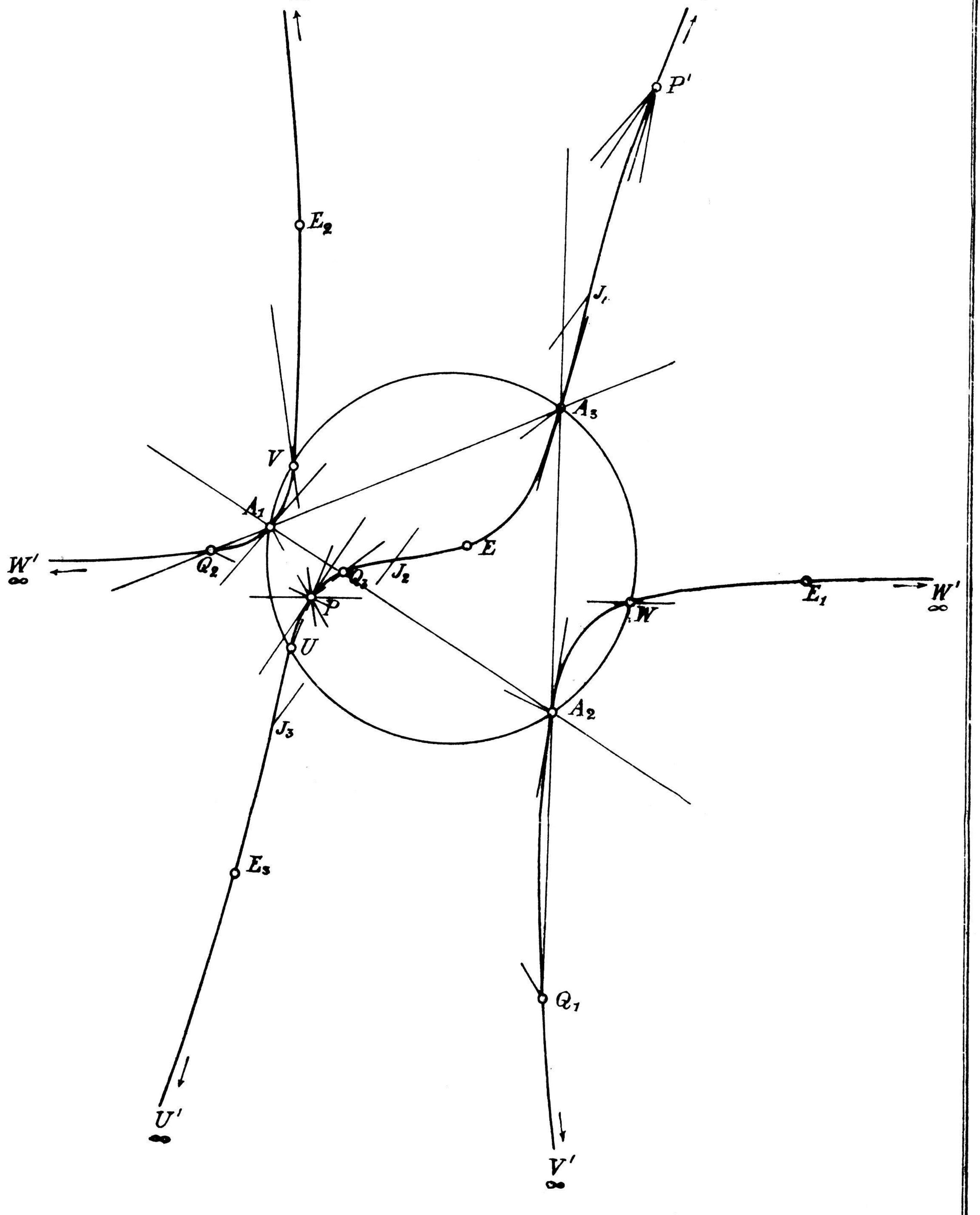


Autog. H. Erb, Bern.



Autog. H. Erb, Bern.

Fig. 2.



Autog. H. Erb, Bern.