

**Zeitschrift:** Mitteilungen der Naturforschenden Gesellschaft Bern

**Herausgeber:** Naturforschende Gesellschaft Bern

**Band:** - (1888)

**Heft:** 1195-1214

**Artikel:** Die Cassinischen Kurven

**Autor:** Huber, G.

**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-319019>

### Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 10.02.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

Dr. G. Huber.

# Die Cassinischen Kurven.

Vorgetragen in der Sitzung vom 4. Februar 1888.

Eine Cassinische Kurve ist der Ort aller Punkte, für welche das Produkt der Abstände von zwei festen Punkten, den Brennpunkten, gleich einer constanten, positiven Grösse  $k$  ist.

Liegen die beiden Brennpunkte auf der  $x$  Axe im Abstand  $x = \pm 1$  vom Coordinatenanfangspunkt, so ist ihre Gleichung:

$$(x^2 + y^2 + 1)^2 - 4x^2 = k^2. \quad 1)$$

Lässt man  $k$  von  $0$  bis  $\infty$  variiren, so erhält man unendlich viele solche Kurven, die alle die imaginären unendlich fernen Kreispunkte zu Doppelpunkten haben. Da sie sonst keinen Doppelpunkt mehr besitzen, so ist ihr Geschlecht  $p = 1$ , die Coordinaten  $x, y$  eines Punktes der Kurve lassen sich daher durch elliptische Funktionen eines Parameters ausdrücken. Zu dieser Darstellung gelangt man folgenderweise:

Setzt man in der Gleichung 1)  $x^2 + y^2 = v$ , so erhält man:

$$4x^2 = (v + 1 - k)(v + 1 + k)$$

$$4y^2 = (v - 1 + k)(k + 1 - v).$$

Hierin  $v = (1 + k) \frac{1 - t}{1 + t}$  gesetzt, ergiebt:

$$x^2 = (1 + k) \frac{(1 - kt)}{(1 + t)^2} \text{ und } y^2 = (1 + k) \frac{(k - t)}{(1 + t)^2}.$$

Damit  $x$  und  $y$  reell werden, muss immer  $t < k$  sein.

Es sind nun 3 Fälle zu unterscheiden:

- I.  $k < 1$
- II.  $k > 1$
- III.  $k = 1$  (Lemniskate).

Diese 3 Fälle sollen der Reihe nach behandelt werden.

### I. $k < 1$ .

In diesem Fall kann man setzen:  $t = k \operatorname{sn}^2 u$ , wo  $k$  der Modulus der elliptischen Funktion sei.

Dann werden die Coordinaten eines Punktes der Kurve:

$$2) \quad x = \pm \sqrt{1 + k} \frac{\operatorname{dn} u}{1 + k \operatorname{sn}^2 u}, \quad y = \pm k \sqrt{1 + k} \frac{\operatorname{sn} u \operatorname{cn} u}{1 + k \operatorname{sn}^2 u}.$$

Zu jedem Werthe von  $u$  gehören 4 zu den Coordinatenachsen symmetrisch liegende Punkte.

Für  $y = 0$ :

- 1)  $\operatorname{sn} u = 0, u = 0$  und  $x = \pm \sqrt{1 + k}$ , Schnittpunkte A und A'.
- 2)  $\operatorname{cn} u = 0, u = K$ , „  $x = \pm \sqrt{1 - k}$  „, B „, B'.

Die letzteren Schnittpunkte auf der x Axe sind nur reell, wenn  $k < 1$ .

Für  $x = 0$  wird:

$$\operatorname{dn} u = 0, u = K + L, \text{ und } y = \pm \sqrt{k - 1} = \text{imaginär.}$$

Dabei sind  $K$  und  $L$  die reelle und die imaginäre Periode der elliptischen Funktionen.

Die Kurve schneidet die y Axe nicht, sie besteht aus 2 getrennten Ovalen, symmetrisch zur y Axe, um die Brennpunkte  $F_1$  und  $F_2$  herum, denn für alle Werthe von  $u$  zwischen 0 und  $K$  erhält man reelle, endliche Werthe für  $x$  und  $y$ .

Für  $k = 0$  erhält man die Brennpunkte selber.

Es sollen nun die *Doppeltangenten* der Kurve untersucht werden. Die Parameter der Schnittpunkte der Parallelen  $y = \pm q$  zur x Axe bestimmen sich aus der Gleichung:

$$q = k \sqrt{1 + k} \frac{\operatorname{sn} u \operatorname{cn} u}{1 + k \operatorname{sn}^2 u}, \text{ woraus folgt:}$$

$$\operatorname{sn}^2 u = \frac{k(1 + k) - 2q^2 \pm (1 + k)\sqrt{k^2 - 4q^2}}{2k(1 + k + q^2)}.$$

Die Schnittpunkte werden nur reell, wenn  $q < \frac{k}{2}$  ist.

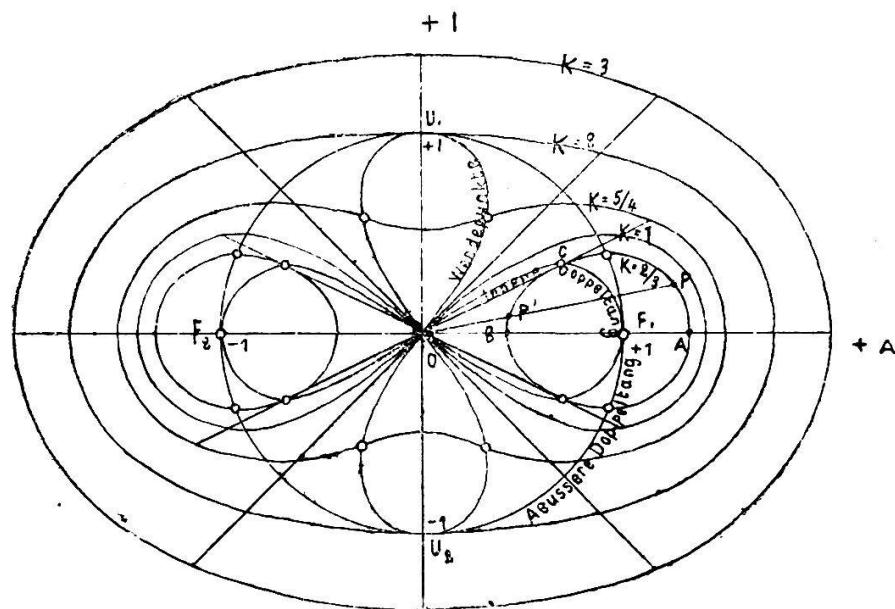
Für  $q = \pm \frac{k}{2}$  fallen je 2 der 4 Schnittpunkte der Geraden mit der Kurve zusammen, die beiden Geraden  $y = \pm \frac{k}{2}$  werden zu Doppeltangenten der Kurve. Für die Berührungsstelle derselben wird  $\sin^2 u = \frac{1}{2 + k}$ , und ihre Coordinaten

$$x = \pm \frac{1}{2} \sqrt{4 - k^2}, \quad y = \pm \frac{k}{2}. \quad 3)$$

Durch Elimination des  $k$  ergibt sich:

$$x^2 + y^2 = 1, \quad 4)$$

d. h. die Berührungs punkte der Doppeltangenten parallel der x Achse liegen auf dem *Einheitskreis* um 0.



### Die Parameter der Schnittpunkte der Geraden

$$y = \operatorname{tg} \alpha \cdot x = m \cdot x$$

erhält man aus der Gleichung

$$\sin^2 u = \frac{k(1+m^2) \pm \sqrt{k^2(1+m^2)^2 - 4m^2}}{2k}.$$

Ist  $k^2(1+m^2)^2 - 4m^2 = 0$ , so fallen von den 4 Schnittpunkten je 2 zusammen, die Gerade wird zur Doppel-tangente. Es

geschieht dies für die 4 Werthe:  $m = \pm \left( \frac{1 \pm \sqrt{1 - k^2}}{k} \right)$ , wo  $l^2 = 1 - k^2$

gesetzt ist. Von diesen 4 Werthen ergeben aber nur die zwei,  $m = \pm \left( \frac{1-l}{k} \right)$ , reelle Lösungen; für dieselben wird  $\operatorname{sn} u = \frac{1}{\sqrt{1+l}}$   
also  $u = \frac{K}{2}$ .

Es giebt also 2 reelle Doppeltangenten CC' und DD' durch 0, so lange  $k < 1$  ist. Die Coordinaten der Berührungs punkte sind

$$5) \quad x = \pm \sqrt{\frac{l(1+l)}{2}}, \quad y = \pm \sqrt{\frac{l(1-l)}{2}}.$$

Für  $k = 1$  werden diese zu  $x = 0, y = 0$ . Die Berührungs punkte auf der Doppeltangente fallen in 0 zusammen, es ist dies ein Doppelpunkt der Kurve, die Doppeltangenten gehen in Wendetangenten in demselben über. Für dieselben wird  $m = \operatorname{tg} \alpha = \pm 1$ ,  $\alpha = \pm 45^\circ$ . Die Kurve ist die Lemniskate.

Durch Elimination des l aus den obigen Gleichungen ergibt sich:

$$(x^2 + y^2)^2 - (x^2 - y^2)^2 = 0,$$

d. h. die Berührungs punkte der innern Doppeltangenten liegen auf einer *Lemniskate* mit Doppelpunkt in 0 und den Brennpunkten  $x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}, y = 0$ . Sie geht durch die Brennpunkte  $x = \pm 1$  der Cassinischen Kurven.

Der Bogen s der Kurve ist ausgedrückt durch das Integral;

$$s = k \sqrt{1+k} \int \frac{1-k \operatorname{sn}^2 u}{\sqrt{1-k^2 \operatorname{sn}^4 u}} du.$$

Um dasselbe auszuführen, zerlegt man

$$\sqrt{1+k} = \sqrt{\frac{1+l}{2}} + \sqrt{\frac{1-l}{2}},$$

formt den Zähler etwas um und erhält

$$s = k \sqrt{\frac{1+l}{2}} \int \frac{1-(1-l)\operatorname{sn}^2 u}{\sqrt{1-k^2 \operatorname{sn}^4 u}} du + k \sqrt{\frac{1-l}{2}} \int \frac{1-(1+l)\operatorname{sn}^2 u}{\sqrt{1-k^2 \operatorname{sn}^4 u}} du.$$

Setzt man im ersten Integral:  $\frac{1-(1+l)\operatorname{sn}^2 u}{dn u} = t$ , so

geht dasselbe über in:

$$-\frac{k}{2} \int \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2) \left( (1 - \frac{1-l}{2}) t^2 \right)}}.$$

Ebenso geht das zweite Integral durch die Substitution:

$$t' = \frac{1 - (1 - l) \operatorname{sn}^2 u}{dn u} \text{ über in:}$$

$$- \frac{k}{2} \int \frac{dt'}{\sqrt{(1 - t'^2) \left(1 - \left(\frac{1+l}{2}\right) t'^2\right)}},$$

somit wird:

$$s = -\frac{k}{2} \times \quad (6)$$

$$\left[ \int \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)\left(1-\left(\frac{1-l}{2}\right)t^2\right)}} + \int \frac{dt'}{\sqrt{(1-t'^2)\left(1-\left(\frac{1+l}{2}\right)t'^2\right)}} \right]$$

Der Bogen der Cassinischen Kurve ist also durch 2 elliptische Normalintegrale erster Art dargestellt.

Um den halben Umfang eines Ovals zu erhalten, muss man von  $u = 0$  bis  $u = K$  integrieren, also

$$\begin{aligned} &\text{für } t \text{ von } t = 1 \text{ bis } t = -1 \\ &,, t',,, t' = 1,, t' = -1. \end{aligned}$$

Die Grenzen des zweiten Integrals sind also einander gleich, es verschwindet und es wird

$$\frac{U}{2} = -\frac{k}{2} \times$$

$$\int_1^{-1} \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)\left(1-\left(\frac{1-l}{2}\right)t^2\right)}} = k \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)\left(1-\left(\frac{1-l}{2}t^2\right)\right)}}.$$

Der Werth dieses vollständigen Normalintegrals ist gleich  $K$  für den Modul  $\frac{\sqrt{1-l}}{2}$ , es werde mit  $K \left( \sqrt{\frac{1-l}{2}} \right)$  bezeichnet. Der Umfang eines Ovals wird also

$$U = 2k K \left( \sqrt{\frac{1-l}{2}} \right). \quad (7)$$

Für  $k = 1, l = 0$  erhält man den Umfang einer Lemniskaten-schleife

$$S = 2 K \left( \sqrt{\frac{1}{2}} \right).$$

Der Inhalt eines Sektors OAP der Kurve von der x Axe aus gerechnet, bestimmt sich aus dem Integral:

$$S = \frac{1}{2} \int_0^v r^2 dv.$$

Im vorliegenden Falle ist:

$$r^2 = x^2 + y^2 = (1 + k) \frac{1 - k \operatorname{sn}^2 u}{1 + k \operatorname{sn}^2 u} \text{ und}$$

$$dv = k \left( \frac{1 - 2 \operatorname{sn}^2 u + k^2 \operatorname{sn}^4 u}{1 - k^2 \operatorname{sn}^4 u} \right) du,$$

somit

$$S = \frac{k}{2} (1 + k) \int_0^u \frac{1 - 2 \operatorname{sn}^2 u + k^2 \operatorname{sn}^4 u}{(1 + k \operatorname{sn}^2 u)^2} du.$$

Setzt man  $1 + k \operatorname{sn}^2 u = p$  und berücksichtigt die Formel:

$$\frac{d^2}{du^2} \operatorname{Lg}(1 + k \operatorname{sn}^2 u) = \frac{4(1+k)^2}{p^2} - \frac{4(1+k)^2}{p} + 2kp, \text{ so folgt:}$$

$$S = \frac{1}{4} \int_0^u \left[ \frac{d^2}{du^2} \operatorname{Lg}(1 + k \operatorname{sn}^2 u) - 2kp + 2k(1+k) \right] du \text{ oder}$$

$$S = \frac{1}{4} \left[ \frac{d}{du} \operatorname{Lg}(1 + k \operatorname{sn}^2 u) + 2(k^2 - 1)u + 2 \int_0^u dn^2 u du \right]_0^u$$

$$8) \quad S = \frac{1}{2} \left[ \frac{k \operatorname{sn} u \operatorname{cn} u \operatorname{dn} u}{1 + k \operatorname{sn}^2 u} - l^2 u + \operatorname{Eam.} u \right].$$

Dieser Sektor OAP ist von 0 aus bis zur äussern Begrenzung der Kurve gerechnet. Der Sektor APP'B, welcher der Kurve angehört, ist:

$$S = \text{Sektor OAP} - \text{Sektor OBP}' = S_1 - S_2.$$

In den Schnittpunkten A und B der Kurve mit der x Axe hat u die Werthe 0 und K, der Berührungs punkt C der äussersten Tangente hat, wie gefunden, den Parameter  $u = \frac{K}{2}$ . Das Argument hat daher auf den Bögen AC und BC, in Punkten, die auf demselben Strahl durch O liegen, die Werthe u und  $K - u$ .

Der Sektor  $S_1$  wird durch Formel 8 bestimmt, und  $S_2$  erhält man, wenn in derselben  $u$  durch  $K - u$  ersetzt wird

$$S_2 = \frac{1}{2} \left[ \frac{k \operatorname{sn} u \operatorname{cn} u \operatorname{dn} u}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 u} - l^2 (K - u) + E - E_{\text{am}} u \right]_0^u,$$

wo  $E$  das vollständige Normalintegral zweiter Art ist.

Der Kurvensektor APP'B wird nun:

$$S = E_{\text{am}} u - l^2 u - \frac{k^2 \operatorname{sn}^3 u \operatorname{cn} u \operatorname{dn} u}{1 - k^2 \operatorname{sn}^4 u}. \quad (9)$$

Für  $u = \frac{K}{2}$  erhält man den Inhalt eines halben Ovals:

$$\frac{0}{2} = \frac{1}{2} (E - l^2 K),$$

somit der Inhalt eines Ovals:

$$O = E - l^2 K, \quad (10)$$

annähernd  $= \frac{\pi}{2} k^2$  für kleine  $k$ , mit Vernachlässigung der vierten und höheren Potenzen von  $k$ .

Für  $k = 1$  erhält man den Inhalt einer Lemniskatenschleife  $L = 4$ .

## II. $k > 1$ .

In diesem Falle gelten die vorigen Formeln nicht mehr. Man transformiert zu einem Modul  $k' = \frac{1}{k} < 1$  durch Transformation des ursprünglichen Periodenverhältnisses  $z$  zu einem neuen  $z'$  durch Substitution  $z' = \frac{z}{1+z}$ .

Im transformirten System werden alle Größen durch Accente bezeichnet. Dann gelten die Gleichungen:

$$z' = \frac{z}{1+z}, \quad k = \frac{1}{k'}, \quad l = \frac{\sqrt{k'^2 - 1}}{k'}, \quad u = k' u', \quad t = \operatorname{sn}' u', \\ \operatorname{sn} u = k' \operatorname{sn}' u', \quad \operatorname{cn} u = \operatorname{dn}' u', \quad \operatorname{dn} u = \operatorname{cn}' u'.$$

Die Gleichungen der Cassinischen Kurve werden nun:

$$x = \pm \sqrt{\frac{1+k'}{k'}} \frac{\operatorname{cn}' u'}{1+k' \operatorname{sn}'^2 u'}, \quad y = \pm \sqrt{\frac{1+k'}{k'}} \frac{\operatorname{sn}' u' \operatorname{dn}' u'}{1+k' \operatorname{sn}'^2 u'}. \quad (11)$$

Die Schnittpunkte mit den Axen werden:

$$\text{Für } y = 0 \text{ 1) } \operatorname{sn}' u' = 0, u' = 0, \quad x = \frac{\pm \sqrt{1+k'}}{k'} = \pm \sqrt{1-k}.$$

$$2) \operatorname{dn}' u' = 0, u' = K' + L', x = \pm \sqrt{\frac{k'-1}{k'}} = \text{imaginär.}$$

$$x = 0 \quad \operatorname{cn}' u' = 0, u' = K' \quad y = \sqrt{\frac{1-k'}{k'}} = \sqrt{k-1}.$$

Die Kurve besteht aus nur einem Zweig, symmetrisch zu den Axen.

Die Geraden  $y = \pm \frac{k}{2}$  sind wieder Doppeltangenten der Kurve;

die Koordinaten der Berührungs punkte sind:

$$x = \pm \frac{1}{2} \sqrt{\frac{4 k'^2 - 4}{k'}} = \pm \frac{1}{2} \sqrt{4 - k^2}, y = \pm \frac{1}{2k'} = \pm \frac{k}{2}.$$

Sie werden durch dieselben Gleichungen bestimmt wie diejenigen für die Cassinischen Kurven aus zwei Ovalen bestehend, die Berührungs punkte liegen also auf demselben Kreis

$$x^2 + y^2 = 1,$$

der durch die Brennpunkte geht.

Die Doppeltangenten sind nur reell, so lange  $k < 2$  ist. Für  $k = 2$  fallen die Berührungs punkte auf jeder derselben zusammen in den Punkten  $x = 0, y = \pm 1$ , die Doppeltangenten werden zu *Undulationstangenten*. Die Cassinische Kurve  $k = 2$  hat daher 2 Undulations punkte in  $x = 0, y = \pm 1$ .

Für die Parameter der *Inflexionspunkte* muss die Bedingung erfüllt sein:

$$\frac{dx}{du'} \cdot \frac{d^2y}{du'^2} - \frac{dy}{du'} \cdot \frac{d^2x}{du'^2} = 0$$

Es ist diese Bedingung erfüllt, wenn

$$\operatorname{sn}'^2 u' = \frac{k' + 2 \pm \sqrt{3(1 - k'^2)}}{k'(2k' + 1)}$$

Von den 8 Wendepunkten, die sich hieraus ergeben, sind aber nur 4 reell, denn das positive Vorzeichen der Wurzel liefert imaginäre Werthe für  $u'$ .

Für  $k = k' = 1$ , die Lemniskate, wird  $\operatorname{sn}' u' = 1, u' = K'$  und  $x = 0, y = 0$ ; die 4 Wendepunkte fallen im Doppelpunkt zusammen.

Das negative Vorzeichen der Wurzel liefert einen reellen Werth für  $u'$ , also 4 reelle Wendepunkte, so lange  $1 > k' > \frac{1}{2}$  oder  $1 < k < 2$  ist. Denn wird  $k' < \frac{1}{2}$  so wird der obige Ausdruck für  $\operatorname{sn}'^2 u'$  wieder  $> 1$ , also  $u'$  imaginär.

Für die Grenze selber  $k = 2$  wird  $\operatorname{sn}' u' = 1$ ,  $u' = K'$  und die Coordinaten der Wendepunkte werden:

$$x = 0, y = \pm 1$$

d. h. in diesen beiden Punkten, die wir bereits als Undulationspunkte der Kurve  $k = 2$  gefunden haben, fallen je 2 Wendepunkte zusammen.

Die Cassinischen Kurven mit 4 reellen Wendepunkten erhält man, wenn  $k$  zwischen 1 und 2 liegt; die untere Grenze  $k = 1$  ist die Lemniskate mit Doppelpunkt, die obere Grenze  $k = 2$  ein Oval mit 2 Undulationspunkten. Für  $k > 2$  haben die Curven keine Doppeltangentialen und keine Inflexionspunkte mehr, es sind Ovale; ein Kreis mit unendlich grossem Radius bildet die Grenze.

Die Coordinaten der Wendepunkte sind:

$$x^2 = -\frac{1}{6k'^2}(l'^2 - k'l'\sqrt{3}) \text{ u. } y^2 = \frac{1}{6k'^2}(l'^2 + k'l'\sqrt{3}). \quad (12)$$

Durch Elimination von  $k'$  und  $l'$  ergibt sich:

$$(x^2 + y^2)^2 + (x^2 - y^2) = 0 \quad (13)$$

d. h. die Wendepunkte sämmtlicher Cassinischen Kurven liegen auf einer Lemniskate mit Doppelpunkt in 0, und den Brennpunkten auf der y Axe im Abstand  $y = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$ . Dieselbe geht durch die Undulationspunkte  $x = 0, y = \pm 1$  und ist congruent mit der vorher gefundenen Lemniskate, auf welcher die Berührungs punkte der inneren Doppeltangentialen liegen, nur ist sie um  $90^\circ$  gedreht.

Für den Bogen  $s$  der Kurve erhält man:

$$s = \frac{1}{\sqrt{k'}} \cdot \sqrt{1 + k'} \int \frac{1 - k' \operatorname{sn}'^2 u'}{\sqrt{1 - k'^2 \operatorname{sn}'^4 u'}} du'.$$

Vom Faktor  $\frac{1}{\sqrt{k'}}$  abgesehen, ist das Integral dasselbe wie das im Fall I behandelte; es wird daher:

$$s = -\frac{1}{2\sqrt{k'}} \times \\ \left[ \int \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-(\frac{1-l'}{2})t^2)}} + \int \frac{dt'}{\sqrt{(1-t'^2)(1-(\frac{1+l'}{2})t'^2)}} \right]$$

Man erhält den Quadranten der Kurve, wenn man nach  $u'$  von  $u' = 0$  bis  $u' = K'$  integriert, und man erhält wie dort:

$$\frac{U}{4} = \frac{1}{\sqrt{k'}} K \left( \sqrt{\frac{1 - l'}{2}} \right) = \sqrt{k} K \left( \sqrt{\frac{1 - l'}{2}} \right),$$

somit der ganze Umfang der Kurve:

$$14) \quad U = 4 \sqrt{k} K \left( \sqrt{\frac{1 - l'}{2}} \right).$$

Für  $k = k' = 1$ ,  $l' = 0$  erhält man den Umfang der Lemniskate:

$$U = 4 K \left( \sqrt{\frac{1}{2}} \right)$$

Den Kurvensektor erhält man durch Transformation der Gleichung 8 auf das neue Periodenverhältniss:

$$15) \quad S = \frac{1}{2k'} \left[ \frac{k' \operatorname{sn}' u' \operatorname{cn}' u' \operatorname{dn}' u'}{1 + k' \operatorname{sn}'^2 u'} + E' \operatorname{am} u' \right]_0^{u'}$$

Da die Kurve eintheilig ist, wird der Sektor vom Ursprung aus gerechnet. Der Inhalt eines Quadranten wird erhalten, wenn man von  $u' = 0$  bis  $u' = K'$  integriert, somit

$$\frac{0}{4} = \frac{1}{2k'} E' \operatorname{am} K' = \frac{E'}{2k'} = \frac{k}{2} E'.$$

Der Inhalt der ganzen Kurve wird also:

$$16) \quad 0 = 2k E'.$$

Für kleine Werthe von  $k'$  oder grosse Werthe von  $k$  wird annähernd

$$0 = \pi \left( \frac{4k^2 - 1}{4k} \right)$$

nach Vernachlässigung der vierten und höhern Potenzen von  $k'$ .

Für  $k' = k = 1$  erhält man den Inhalt der Lemniskate:

$$L = 2.$$

### III. $k = 1$ . Die Lemniskate mit Doppelpunkt.

In diesem Falle wird bei Einführung von hyperbolischen Funktionen:

$$\operatorname{sn} u = \frac{e^u - e^{-u}}{e^u + e^{-u}} = \frac{\sin u}{\cosh u} = \operatorname{tang.} u, \operatorname{cn} u = \operatorname{dn} u = \frac{1}{\cosh u}.$$

Die Coordinaten eines Punktes der Lemniskate werden nun, sowohl nach den Gleichungen 2 als auch nach den Gleichungen 14:

$$17) \quad x = \pm \sqrt{2} \frac{\cosh u}{\cosh 2u} \text{ und } y = \pm \sqrt{2} \frac{\sin u}{\cosh 2u}.$$

Für  $\cof 2u = 0$ ,  $u = \pm i \frac{\pi}{4}$  wird  $x = \pm \infty$ ,  $y = \pm i \infty$

und die Richtung dieser unendlich fernen, imaginären Punkte ist:  
 $\frac{y}{x} = \pm i$ , d. h. die unendlich fernen, imaginären Kreispunkte gehören der Lemniskate als Doppelpunkte an.

Für  $u = \infty$  fallen je zwei entgegengesetzte Werthe von  $x$  und  $y$  im Ursprung zusammen. derselbe ist ein Doppelpunkt der Kurve.

Der Bogen der Lemniskate wird dargestellt durch das Integral:

$$s = \sqrt{2} \int \frac{du}{\sqrt{\cof 2u}}. \quad (18)$$

Um den halben Umfang einer Schleife zu erhalten, muss man  $x = \sqrt{2}$  bis  $x = 0$  oder von  $u = 0$  bis  $u = \infty$  integrieren, so dass

$$\frac{U}{2} = \sqrt{2} \int_0^\infty \frac{du}{\sqrt{\cof 2u}}$$

Setzt man  $\cof 2u = \frac{1}{\cos^2 \varphi}$ , so wird:

$$U = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \frac{1}{2} \sin^2 \varphi}} = 2K(\sqrt{1/2}). \quad (19)$$

Der Kurvensektor wird:

$$S = \int \frac{du}{\cof^2 2u} = \frac{1}{2} \tang. 2u. \quad (20)$$

Den Inhalt einer halben Schleife erhält man durch Integration von  $u = 0$  bis  $u = \infty$ . Also:

$$\frac{J}{2} = \frac{1}{2} \left[ \tang. 2u \right]_0^\infty = \frac{1}{2}.$$

Der Inhalt einer Schleife wird daher

$$J = 1$$

wie bereits früher gefunden.

