Zeitschrift: Mitteilungen der Naturforschenden Gesellschaft Bern

Herausgeber: Naturforschende Gesellschaft Bern

Band: - (1887)

Heft: 1169-1194

Artikel: Potential eines homogenen rechtwinklichen Parallelepipedes

Autor: Bigler, U.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-319009

Dr. U. Bigler.

Potential eines homogenen rechtwinklichen Parallelepipedes.

Eingereicht den 28. Mai 1887.

Nachstehender Aufsatz enthält die Darstellung des Potentiales des homogenen, rechtwinklichen Parallelepipedes, wie ich dasselbe in meinen Vorlesungen an hiesiger Hochschule vorgetragen habe. Aus der Literatur über diesen Gegenstand ist mir nur ein Aufsatz des Hrn. Röthig (Crelle, Bd. 58) aus dem Jahre 1860 bekannt. Obschon beide Aufsätze den gleichen Gegenstand so ziemlich vom gleichen Gesichtspunkte aus behandeln, so hoffe ich doch durch meine Arbeit auf einzelne Punkte der eben erwähnten Abhandlung des Hrn. Röthig ein helleres Licht werfen zu können und namentlich die Unstatthaftigkeit der Annahme zu zeigen, als wäre das Potential für einen inneren Punkt die analytische Fortsetzung des Potentials für einen äussern Punkt. Auch glaube ich, die Potentialfunktion etwas eingehender betrachtet zu haben, als es dort geschah.

§ 1. Vorbereitungen.

x, y, z seien die rechtwinklichen Coordinaten eines Punktes im Raume. Setze ich nun abkürzend
$r^2 = x^2 + y^2 + z^2$, $n^2 = y^2 + z^2$, $p^2 = x^2 + z^2$, $q^2 = x^2 + y^2$,
wo r, n, p, q pos. verstanden werden,

$$n\,e^{\alpha} = r + x,\ p\,e^{\beta} = r + y,\ q\,e^{\gamma} = r + z,$$ so folgt

1) $\alpha = \log \frac{r + x}{n}, \quad \beta = \log \frac{r + y}{p}, \quad \gamma = \log \frac{r + z}{q}.$

Weil ferner

$$n\, e^{-\alpha} = r - x, \; p\, e^{-\beta} = r - y, \; q\, e^{-\gamma} = r - z$$

also auch

$$e^{2\alpha} = \frac{r + x}{r - x}, \; e^{2\beta} = \frac{r + y}{r - y}, \; e^{2\gamma} = \frac{r + z}{r - z}$$

so hat man ebenfalls

2) $\alpha = \frac{1}{2} \log \frac{r + x}{r - x}, \quad \beta = \frac{1}{2} \log \frac{r + y}{r - y}, \quad \gamma = \frac{1}{2} \log \frac{r + z}{r - z}.$

wo α, β, γ pos. verstanden werden, sobald x, y, z pos. sind.

Aus obigen Formeln folgt ferner, dass
$p^2 q^2 = x^2 r^2 + y^2 z^2, \; q^2 n^2 = y^2 r^2 + x^2 z^2, \; n^2 p^2 = r^2 z^2 + x^2 y^2;$
man setze desshalb

$$p\, q\, e^{i\zeta} = x\, r + i\, y\, z, \; q\, n\, e^{i\eta} = y\, r + i\, x\, z,$$

$$n\, p\, e^{i\Theta} = z\, r + i\, x\, y, \text{ also}$$

$$\cos \zeta = \frac{x\, r}{p\, q}, \; \sin \zeta = \frac{y\, z}{p\, q}, \; \operatorname{tang} \zeta = \frac{y\, z}{x\, r}$$

$$\cos \eta = \frac{y\, r}{q\, n}, \; \sin \eta = \frac{x\, z}{q\, n}, \; \operatorname{tang} \eta = \frac{x\, z}{y\, r},$$

$$\cos \Theta = \frac{z\, r}{n\, p}, \; \sin \Theta = \frac{x\, y}{n\, p}, \; \operatorname{tang} \Theta = \frac{x\, y}{z\, r},$$

wo die Winkel ζ, η, Θ zwischen Null und $\frac{\pi}{2}$ liegen, sobald x, y, z pos. sind. Aus diesen Formeln folgt

3) $\zeta = \operatorname{arctg} \frac{y\, z}{x\, r}, \quad \eta = \operatorname{arctg} \frac{x\, z}{y\, r}, \quad \Theta = \operatorname{arctg.} \frac{x\, y}{z\, r}.$

Wenn $y = \frac{1}{2} \log \frac{1+u}{1-u}$, so ist $dy = \frac{du}{1-u^2}$, also ist auch

$$d\alpha = \frac{d\frac{x}{r}}{1 - \frac{x^2}{r^2}} = \frac{r\,dx - x\,dr}{r^2 - x^2} = \frac{r^2 dx - (x\,dx + y\,dy + z\,dz)x}{r\,n^2}$$

somit

$$4) \left\{ \begin{aligned} d\alpha &= \frac{dx}{r} - \frac{xy}{rn^2} dy - \frac{xz}{rn^2} dz \text{ und ebenso findet man} \\ d\beta &= -\frac{xy}{rp^2} dx + \frac{dy}{r} - \frac{yz}{rp^2} dz, \\ d\gamma &= -\frac{xz}{rq^2} dx - \frac{yz}{rq^2} dy + \frac{dz}{r}. \end{aligned} \right.$$

Aus den Formeln (3) folgt ferner

$$d\zeta = \frac{d\frac{yz}{rx}}{1 + \frac{y^2 z^2}{r^2 x^2}} = \frac{r^2 x^2 d\frac{yz}{rx}}{p^2 q^2} \text{ und da}$$

$$d\frac{yz}{xr} = -\frac{yz}{x^2 r} dx + \frac{z}{rx} dy + \frac{y}{rx} dz - \frac{yz}{xr^2} dr,$$

$$= -\frac{yz}{r} \frac{(p^2 + q^2)}{r^2 x^2} dx + \frac{z}{xr} \frac{p^2}{r^2} dy + \frac{y}{rx} \frac{q^2}{r^2} dz,$$

also

$$r^2 x^2 d\frac{yz}{xr} = -\frac{yz}{r}(p^2 + q^2) + \frac{xz}{r} \cdot p^2 dy + \frac{xy}{r} \cdot q^2 dz$$

somit

$$
5)\left\{\begin{aligned}
& d\zeta = -\frac{yz}{r}\left(\frac{1}{p^2}+\frac{1}{q^2}\right)dx + \frac{xz}{rq^2}\,dy + \frac{xy}{rp^2}\,dz, \\
& \text{und ebenso} \\
& d\eta = \frac{yz}{rq^2}\,dx - \frac{xz}{r}\left(\frac{1}{q^2}+\frac{1}{n^2}\right)dy + \frac{xy}{rn^2}\,dz, \\
& d\Theta = \frac{yz}{rp^2}\,dx + \frac{xz}{rn^2}\,dy - \frac{xy}{r}\left(\frac{1}{n^2}+\frac{1}{p^2}\right)dz.
\end{aligned}\right.
$$

Aus diesem System ergibt sich nun, dass

$$d\zeta + d\eta + d\Theta = o,\quad \frac{d\zeta}{dx} + \frac{d\eta}{dx} + \frac{d\Theta}{dx} = o,$$

$$\frac{d\zeta}{dy} + \frac{d\eta}{dy} + \frac{d\Theta}{dy} = o\quad \frac{d\zeta}{dz} + \frac{d\eta}{dz} + \frac{d\Theta}{dz} = o,$$

folglich

$$6)\qquad \zeta + \eta + \Theta = \text{Const.}$$

Diese Constante soll nun noch bestimmt werden. Es ist

$$
\begin{aligned}
n\,q\,e^{i\eta} \times n\,p\,e^{i\Theta} &= (yr + ixz)\,(zr + ixy) \\
&= yz\,(r^2 - x^2) + ixr\,(y^2 + z^2) \\
&= i\,n^2\,(xr - iyz) \\
&= i\,n^2\,p\,q\,e^{-i\zeta},
\end{aligned}
$$

also $e^{i(\zeta+\eta+\Theta)} = i$, folglich ist nur

$$7)\qquad \zeta + \eta + \Theta = \frac{\pi}{2}\ \text{möglich.}$$

§ 2. Potential eines homogenen, rechtwinklichen || Pipedes, wenn eine Ecke als Bezugspunkt gewählt wird.

Man verlege den Ursprung des Coordinatensystems in eine Ecke des gegebenen || Pipedes und lasse die Coordinatenaxen mit den Kanten desselben zusammenfallen. Bezeichnet man nun die Kanten mit x, y, z, so ist

$$8) \qquad f(x, y, z) = \int_0^x \int_0^y \int_0^z \frac{dx\, dy\, dz}{r}$$

eine erste Form des Potentials. Um die Integration nach y ausführen zu können, setze ich

$$\frac{y}{p} = \mathfrak{Sin}\, \varphi, \text{ also } d\frac{y}{p} = \mathfrak{Cos}.\, \varphi\, d\varphi$$

somit

$$\int_0^y \frac{dy}{r} = \int_0^y \frac{d\frac{y}{p}}{\sqrt{1 + \left(\frac{y}{p}\right)^2}} = \int_0^\varphi d\varphi = \varphi = \log \frac{r+y}{p} = \beta,$$

also

$$f(x, y, z) = \int_0^x \int_0^z \beta\, dx\, dz. \text{ Ich integrire nun nach z.}$$

Weil nun gleich wie oben bewiesen werden kann, dass

$$\int_0^y \frac{dx}{r} = \alpha, \quad \int_0^z \frac{dx}{r} = \gamma, \text{ so ist}$$

$$\int_0^z \beta\, dz = \beta z - \int_0^z z.\frac{d\beta}{dz} dz = \beta z + y \int_0^z \frac{z^2\, dz}{p^2 r}$$

$$= \beta z + y \int_0^z \frac{dz}{r} - x^2 y \int_0^z \frac{dz}{p^2 r} = \beta z + y\gamma - x^2 y \int_0^z \frac{dz}{p^2 r}.$$

In dem letzten Integral setze man $z = q \tang \varphi$, also

$$dz = \frac{q}{\cos^2 \varphi} d\varphi, \text{ somit } \frac{dz}{r} = \frac{d\varphi}{\cos\varphi}, \frac{1}{x^2 + z^2} = \frac{\cos^2\varphi}{x^2 + y^2 \sin^2\varphi}$$

folglich ist

$$\int\limits_0^z \frac{dz}{p^2 r} = \int\limits_0^\varphi \frac{\cos\varphi \, d\varphi}{x^2 + y^2 \sin^2\varphi} = \int\limits_0^{\sin\varphi} \frac{d \sin\varphi}{x^2 + y^2 \sin^2\varphi}.$$

Setzt man ferner $\frac{y \sin\varphi}{x} = s$, so findet man

$$\int\limits_0^z \frac{dz}{p^2 r} = \frac{1}{xy} \int\limits_0^s \frac{ds}{1 + s^2} = \frac{1}{xy} \operatorname{arctg} s \text{ und weil}$$

$\cos\varphi = \frac{q}{r}$, $\sin\varphi = \frac{z}{r}$, so hat man schliesslich

$$\int\limits_0^z \frac{dz}{p^2 r} = \frac{1}{xy} \operatorname{arctg} \frac{yz}{xr} = \frac{1}{xy} \cdot \zeta \text{ und ebenso}$$

$$\int\limits_0^x \frac{dx}{q^2 r} = \frac{1}{yz} \cdot \eta, \quad \int\limits_0^y \frac{dy}{n^2 r} = \frac{1}{xz} \cdot \Theta.$$

Es ist also

$$\int\limits_0^z \beta \, dz = \beta z + \gamma y - x \zeta \text{ und folglich}$$

$$f(x, y, z) = z \int\limits_0^x \beta \, dx + y \int\limits_0^x \gamma \, dx - \int\limits_0^x x \zeta \, dx \text{ und wir}$$

haben nun noch eine Integration nach x auszuführen, um die Funktion f (x, y, z) zu erhalten. Es kann nun gleich wie oben bewiesen werden, dass

$$\int\limits_0^x \gamma \, dx = \gamma x + \alpha z - y \eta; \quad \int\limits_0^x \beta \, dx = \beta x + \alpha y - z \Theta,$$

und es bleibt somit nur noch das Integral $\int\limits_0^x x \zeta \, dx$ zu bestimmen übrig. Weil

$$-\int_0^x x\zeta\, dx = -\frac{x^2\zeta}{2} + \int_0^x \frac{x^2}{2}\frac{d\zeta}{dx}\, dx = -\frac{x^2\zeta}{2}$$

$$-\frac{yz}{2} \times \int_0^x \frac{x^2}{r}\left(\frac{1}{p^2} + \frac{1}{q^2}\right) dx,$$

so reduzirt sich diese Bestimmung auf die Berechnung folgender 2 Integrale:

$$\int_0^x \frac{x^2\, dx}{p^2 r} \quad \text{und} \quad \int_0^x \frac{x^2\, dx}{q^2 r}\,.$$

Wir haben nun gefunden, dass $\int_0^x \frac{z^2\, dz}{p^2 r} = \gamma - \frac{x\zeta}{y}$,

also ist auch $\int_0^x \frac{x^2\, dx}{q^2 r} = \alpha - \frac{y}{z}\eta$, $\int_0^x \frac{x^2 dx}{p^2 r} = \alpha - \frac{z}{y}\Theta$,

folglich

$$-\int_0^x x\zeta\, dx = -\frac{x^2\zeta}{2} - yz\alpha + \frac{y^2}{2}\eta + \frac{z^2}{2}\cdot\Theta$$

und wir erhalten schliesslich für das Potential den Ausdruck

$$9)\quad f(x, y, z) = \alpha yz + \beta xz + \gamma xy - \frac{x^2\zeta}{2} - \frac{y^2\eta}{2} - \frac{z^2\Theta}{2}.$$

Diese Formel ist nun direkt durch Integration gefunden worden. Wir erhalten dieselbe kürzer auf folgende Art: Aus Gleichung (8) ist leicht ersichtlich, dass f(x, y, z) eine homogene Funktion 2. Grades von x, y, z ist, dass also die Gleichung

$$2\,f(x, y, z) = x\frac{df}{dx} + y\frac{df}{dy} + z\frac{df}{dz}$$

existirt. Wir haben aber gefunden, dass

$$\frac{df}{dx} = -x\zeta + y\gamma + z\beta \text{ ist; also auch}$$

$$\frac{df}{dy} = x\gamma - y\eta + z\alpha,$$

$$\frac{df}{dz} = \beta x + \alpha y - \Theta z, \text{ folglich}$$

$$f(x, y, z) = \alpha y z + \beta x z + \gamma x y - \frac{x^2\zeta}{2} - \frac{y^2\eta}{2} - \frac{z^2\Theta}{2}.$$

Wir gehen nun zur Betrachtung der Funktion f und ihrer Abgeleiteten über. Zu dem Zwecke betrachte ich f (x, y, z) einfach als analytische Funktion von x, y, z und will ihr Verhalten im ganzen Raume näher untersuchen. Zunächst ergibt sich aus den aufgestellten Formeln sogleich, dass, wenn eine Variable auf Null sinkt, die Funktion auch den Werth Null annimmt. Sinkt x von seinem positiven Werthe fortwährend bis auf $-x$ herab, während y und z fest bleiben, so verwandelt sich α in $-\alpha$, β in β, γ in γ, ζ in $\pi - \zeta$, η in $-\eta$ und Θ in Θ. Bleiben hingegen x und z constant, während y auf $-y$ herab sinkt, so geht α in α, β in $-\beta$, γ in $+\gamma$, η in $\pi - \eta$, Θ in $-\Theta$ und ζ in $-\zeta$ über. Bleiben schliesslich x und y constant und lässt man z auf $-z$ sinken, so verwandelt sich α in α, β in β, γ in $-\gamma$, ζ in $-\zeta$, η in $-\zeta$ und Θ in $\pi - \Theta$. Es ist also

$$f(-x, y, z) = -f(x, y, z) - \frac{\pi x^2}{2},\ f(x, -y, z) =$$

$$-f(x, y, z) - \frac{\pi y^2}{2},\ f(x, y, -z) = -f(x, y, z) - \frac{\pi z^2}{2}.$$

Ich führe nun zuerst die Funktion f aus dem Punkte x, y, z, wo alle Coordinaten positiv verstanden werden, nach dem Punkte — x, y, z; von hier nach dem Punkte — x, y, — z; dann nach dem Punkte x, y, — z und schliesslich durch die Ebene $z = o$ hindurch nach dem Ausgangspunkte x, y, z zurück. Die einzelnen Wegstücke seien so beschaffen, dass jeweilen nur eine Coordinate ihren Werth verändert und die beiden andern constant bleiben. Die Funktion im Punkte (x, y, z) werde mit f_0, im Punkte (—x, y, z) mit f_1, im Punkte (— x, y, —z) mit f_2 etc. bezeichnet. Man hat also

$$f_1(-x, y, z) = -f_0(x, y, z) - \frac{\pi x^2}{2},$$

$$f_2(-x, y, -z) = f_0(x, y, z) + \frac{\pi}{2}(z^2 - x^2),$$

$$f_3(+x, y, -z) = -f_0(x, y, z) + \frac{\pi}{2} z^2 - \pi x^2,$$

und schliesslich

$$f_4(x, y, z) = f_0(x, y, z) + \pi(z^2 - x^2).$$

Diese letzte Gleichung zeigt nun, dass die Funktion f nach einer vollen pos. Drehung um die y-Axe nicht wieder auf den alten Werth zurückkehrt, sondern sich um den Term $\pi(z^2 - x^2)$ vermehrt. Hätte man sie in negativer Richtung um die y-Axe herum geführt, so würde sie sich um den Term $\pi(x^2 - z^2)$ vermehrt haben. Aehnlich verhält sich die Funktion in Bezug auf die andern Axen. Die Abgeleiteten nach x, y, und z sind schon oben angegeben worden. Wir wollen sie aber hier noch aus der Funktion selber ableiten. Zu dem Zwecke führe ich die beiden Symbole D und D^1 ein. Das Symbol D bezeichnet eine Ableitung nach den offenen Coordinaten, während D^1 die in den Transcendenten α, β, γ, ξ etc. versteckten Coordinaten angreifen soll. Ich setze also

$$\frac{df}{dx} = D_x \cdot f + D_x^1 \cdot f, \frac{df}{dy} = D_y \cdot f + D_y^1 \cdot f, \frac{df}{dz} = D_z \cdot f + D_z^1 \cdot f$$

$\frac{d^2 f}{dx\,dy} = D_y \cdot f_x + D_y^1 \cdot f_x$ etc. Es ist nun

$$D_x^1 . f = yz \frac{d\alpha}{dx} + zx \frac{d\beta}{dx} + xy \frac{d\gamma}{dx} - \frac{x^2}{2} \frac{d\xi}{dx} - \frac{y^2}{2} \cdot \frac{d\eta}{dx} - \frac{z^2}{2} \frac{d\Theta}{dx}.$$

Entnimmt man nun aus den Systemen (4) und (5) die Werthe für $\frac{d\alpha}{dx}$ etc. und setzt diese hier ein, so erhält man

$$D_x^1 \cdot f = \frac{yz}{r} \left(\frac{x^2}{2p^2} + \frac{x^2}{2q^2} - \frac{y^2}{2q^2} - \frac{z^2}{2p^2} - \frac{x^2}{p^2} - \frac{x^2}{q^2} + 1 \right) = 0.$$

Ebenso leicht kann man beweisen, dass

$$D_y^1 \cdot f = 0, \; D_z^1 \cdot f = 0, \text{ somit}$$

$$10) \quad \begin{cases} \frac{df}{dx} = D_x \cdot f = \xi x + \gamma y + \beta z = f_x \\ \frac{df}{dy} = D_y \cdot f = \gamma x - \eta y + \alpha z = f_y \\ \frac{df}{dz} = D_z \cdot f = \beta x + \alpha y - \Theta z = f_z. \end{cases}$$

ferner ist

$$f_{xx} = D_x \cdot f_x + D_x^1 \cdot f_x, \text{ wo aber}$$

$D_x^1 \cdot f_x = - x \frac{d\xi}{dx} + y \frac{d\gamma}{dx} + z \frac{d\beta}{dx}$ ist. Setzt man hier wieder die Werthe für die Abgeleiteten ein, so hat man

$D_x^1 \cdot f_x = \frac{xyz}{r} \left(\frac{1}{p^1} + \frac{1}{q^2} + \frac{1}{p^2} + \frac{1}{q^2} \right) = 0$; ebenso ist $D_y^1 \cdot f_x = 0$, $D_z^1 \cdot f_x = 0$, $D_x^1 f_y = 0$ etc. und man hat

$$11)\quad \left\{ \begin{array}{lll} f_{xx} = -\xi, & f_{xy} = \gamma, & f_{xz} = \beta \\ f_{yy} = -\eta, & f_{yx} = \gamma, & f_{yz} = \alpha \\ f_{zz} = -\Theta, & f_{zy} = \alpha, & f_{zx} = \beta \end{array} \right.$$

Aus diesem System folgt, dass

$$12)\quad \frac{d^2 f}{d x^2} + \frac{d^2 f}{d y^2} + \frac{d^2 f}{d z^2} = -(\xi + \eta + \Theta) = -\frac{\pi}{2} \text{ und}$$

$$\frac{d^3 f}{d x\, d y\, d z} = \frac{d \gamma}{d z} = \frac{1}{r}$$

§ 3. Potential eines homogenen, rechtwinklichen Parallelepipedes mit den Kanten a, b, c für eine beliebige Lage des Bezugspunktes.

Der Ursprung des Coordinatensystems werde in eine Ecke des gegebenen || Pipedes verlegt und die Axen seien so gewählt, dass sie mit den Kanten a, b, c zusammenfallen. Der Bezugspunkt habe die Coordinaten x, y, z und seine Lage sei durch

$$1)\qquad x > a, \; y > b, \; z > c$$

bestimmt. In diesem Falle ist

$$a = x - (x - a), \; b = y - (y - b), \; c = z - (z - c)$$

somit der Inhalt des || Pipedes

$$\begin{aligned} a b c = (x - (x - a))\,(y - (y - b))\,(z - (z - c)) = x y z \\ - x y (z - c) - y z (x - a) - z x (y - b) + x (y - b) \\ \times (z - c) + y (z - c)(x - a) + z (x - a)(y - b) \\ - (x - a)(y - b)(z - c). \end{aligned}$$

Derselbe ist also gleich der algebraischen Summe von 8 rechtwinklichen || Pipeden, die alle in der Ecke (x, y, z) zusammenstossen.

Das Potential ist also

13) $\text{Pot.} = f(x, y, z) - f(x, y, z - c) - f(x - a, y, z)$
$- f(x, y - b, z) + f(x, y - b, z - c) + f(x - a, y, z - c)$
$+ f(x - a, y - b, z) - f(x - a, y - b, z - c).$

Mit Hülfe der Formel (12) erkennt man sofort, dass

$$\sum \frac{d^2 \text{Pot.}}{d x^2} = 0 \text{ ist.}$$

Es sei ferner

2) $$0 < x < a, \; y > b, \; z > c.$$

Hier ist nun

$$a = x + (a - x), \; b = y - (y - b), \; c = z - (z - c),$$

also der Inhalt des || Pipedes

$$a\,b\,c = \big(x + (a - x)\big)\,\big(y - (y - b)\big)\,\big(z - (z - c)\big)$$
$$= x\,y\,z + x\,(y - b)\,(z - c) - z\,(y - b)\,(a - x) - y$$
$$(a - x)\,(z - c) + y\,z\,(a - x) - x\,y\,(z - c) - x\,z\,(y - b)$$
$$+ (a - x)\,(y - b)\,(z - c)$$

und somit das Potential

14) $\text{Pot.} = f(x, y, z) + f(x, y - b, z - c) - f(a - x, y - b, z)$
$- f(a - x, y, z - c) + f(a - x, y, z) - f(x, y - b, z)$
$- f(x, y, z - c) + f(a - x, y - b, z - c).$

Die Funktion (13) soll nun in das Gebiet (2) analytisch fortgesetzt werden. Aus $f(x - a, y\,z)$ wird $- f(a - x, y, z) - \frac{\pi\,(a - x)^2}{2}$. Der Term $\frac{\pi\,(a - x)^2}{2}$ tritt also 2 Mal mit dem $+$ Zeichen und 2 Mal mit dem $-$ Zeichen auf und die Funktion bekommt die Form von (14), stellt somit das Potential für den neuen Punkt dar. Auch Formel (14) ergibt sofort

$$\sum \frac{d^2 \text{Pot.}}{d x^2} = 0.$$

Wenn

3) $$0 < x < a,\ y > b,\ o < z < c, \text{ so ist}$$

$a = x + (a - x),\ b = y - (y - b),\ c = z + (c - z)$, also

$$a\,b\,c = x\,y\,z + x\,y\,(c - z) - x\,z\,(y - b) + y\,z\,(a - x) - x \times (y - b)\,(c - z) + y\,(a - x)\,(c - z) - z\,(a - x)\,(y - b) - (a - x)\,(y - b)\,(c - z)$$

somit

15) $$\text{Pot.} = f\,(x, y, z) + f\,(x, y, c - z) - f\,(x, y - b, z) + f\,(a - x, y, z) - f\,(x, y - b, c - z) + f\,(a - x, y, c - z) - f\,(a - x, y - b, z) - f\,(a - x, y - b, c - z).$$

Diese Formel wird auch erhalten, wenn Funktion (14) aus dem Gebiete (2) in das Gebiet (3) analytisch fortgesetzt wird. Denn aus f $(x, y - b, z - c)$ wird $-f\,(x, y - b, c - z) - \frac{\pi\,(c - z)^2}{2}$ und da nun der Term $\frac{\pi\,(c - z)^2}{2}$ zwei Mal mit dem $+$ Zeichen und zwei Mal mit dem $-$ Zeichen auftritt, so heben sich die Zusätze auf und man erhält Formel (15). Auch hier ist

$$\sum \frac{d^2\,\text{Pot.}}{d\,x^2} = 0.$$

Ich nehme ferner an, dass

4) $$0 < x < a,\ y > b,\ z < 0 \text{ stattfinde.}$$

In diesem Falle setze ich

$a = x + (a - x),\ b = y - (y - b),\ c = -(-z) + (c - z)$

also

$$a\,b\,c = -x\,y\,(-z) + x\,y\,(c - z) - (a - x)\,y\,(-z) + x\,(y - b)\,(-z) - x\,(y - b)\,(c - z) + (a - x)\,y\,(c - z) + (a - x)\,(y - b)\,(-z) - (a - x)\,(y - b)\,(c - z), \text{ somit}$$

16) $\text{Pot.} = -f(x, y, (-z)) + f(x, y, c-z) - f(a-x, y, -z)$
$+ f(x, y, -b, -z) - f(x, y-b, c-z) + f(a-x, y, c-z)$
$+ f(a-x, y-b, -z) - f(a-x, y-b, c-z).$

Diese Formel ergibt sich auch als analytische Fortsetzung der Funktion (15) aus dem Gebiete (3) in das Gebiet (4). Die Gleichung

$$\sum \frac{d^2\,\text{Pot.}}{d\,x^2} = 0$$

findet auch hier statt. So könnte man fortfahren und zeigen, dass die Funktion (13) in jedem Punkte des Raumes ausserhalb des ∥ Pipedes das Pot. des betreffenden Punktes darstellt und dass immer die Gleichung

$$\sum \frac{d^2\,\text{Pot.}}{d\,x^2} = 0$$

erfüllt ist. Anders ist es aber, wenn die Funktion (13) ins Innere des ∥ Pipedes fortgesetzt wird. Um das zu zeigen, gehe ich vom Gebiete (1) aus und setze

5) $x > a,\ 0 < y < b,\ z > c$

also $a = x - (x-a),\ b = y + (b-y),\ c = z - (z-c)$

und folglich

$$a\,b\,c = x\,y\,z - x\,y\,(z-c) + x\,(b-y)\,z - (x-a)\,y\,z$$
$$- x\,(b-y)\,(z-c) + (x-a)\,y\,(z-c) + (x-a)\,(b-y)\,z$$
$$+ (x-a)\,(b-y)\,(z-c)$$

also das Pot. für diesen Punkt

17) $\text{Pot.} = f(x, y, z) - f(x, y, z-c) + f(x, b-y, z)$
$- f(x-a, y, z) - f(x, b-y, z-c) + f(x-a, y, z-c)$
$+ f(x-a, b-y, z) + f(x-a, b-y, z-c).$

Die analytische Fortsetzung der Funktion (13) ergibt dasselbe. Es sei ferner, ausgehend von (5)

6) $x > a,\ 0 < y < b,\ 0 < z < c.$ Man setze wieder

$$a = x - (x - a),\ b = y + (b - y),\ c = z + (c - z)$$

und findet

$$\begin{aligned} a\,b\,c = x\,y\,z &+ x\,y\,(c - z) + x\,(b - y)\,z - (x - a)\,y\,z \\ &+ x\,(b - y)\,(c - z) - (x - a)\,y\,(c - z) - (x - a)\,(b - y)\,z \\ &- (x - a)\,(b - y)\,(c - z) \end{aligned}$$

folglich

$$\begin{aligned} 18)\ \text{Pot.} = f(x, y, z) &+ f(x, y, c - z) + f(x, b - y, z) \\ - f(x - a, y, z) &+ f(x, b - y, c - z) - f(x - a, y, c - z) \\ - f(x - a, b - y, z) &- f(x - a, b - y, c - z) \end{aligned}$$

Auch hier führt die analytische Fortsetzung der Funktion (17) zum gleichen Ausdrucke. Ich führe nun den Bezugspunkt aus dem Gebiete 6 durch die Ebene $x = a$ in das Innere des $\|$ Pipedes. Für diese Lage des Bezugspunktes hat man aber

$$7)\ 0 < x < a,\ 0 < y < b,\ 0 < z < c.$$

Man setze hier

$a = x + (a - x)$, $b = y + (b - y)$, $c = z + (c - z)$, also

$$\begin{aligned} a\,b\,c = x\,y\,z &+ x\,y\,(c - z) + x\,z\,(b - y) + (a - x)\,y\,z \\ &+ x\,(b - y)\,(c - z) + (a - x)\,y\,(c - z) + (a - x)\,(b - y)\,z \end{aligned}$$

$(a - x)\,(b - y)\,(c - z)$ und somit das Potential für diesen Punkt, das ich mit $Q(x, y, z)$ bezeichnen will

$$\begin{aligned} 19)\ Q(x, y, z) = f(x, y, z) &+ f(x, y, c - z) + f(x, b - y, z) \\ + f(a - x, y, z) &+ f(x, b - y, c - z) + f(a - x, y, c - z) \\ + f(a - x, b - y, z) &+ f(a - x, b - y, c - z). \end{aligned}$$

Wird hingegen die Funktion (18) analytisch in diesen Punkt fortgesetzt, so hat man

$$\begin{aligned} P(x, y, z) = f(x, y, z) &+ f(x, y, c - z) + f(x, b - y, z) \\ + f(a - x, y, z) &+ f(x, b - y, c - z) + f(a - x, y, c - z) \\ + f(a - x, b - y, z) &+ f(a - x, b - y, c - z) + 2\,(a - x)^2\,\pi. \end{aligned}$$

Also

$$P(x, y, z) = Q(x, y, z) + 2\,(a - x)^2\,\pi \text{ oder}$$

20) $Q(x, y, z,) = P(x y, z) - 2(a - x)^2 \pi$. Diese Formel zeigt nun deutlich, dass das Potential eines innern Punktes nicht die analytische Fortsetzung des Potentials eines äussern Punktes ist. Aus Gleichung (20) folgt nun

21)
$$\sum \frac{d^2 Q}{d x^2} = -4\pi.$$

Ed. Fischer.

Bemerkungen über den Streckungsvorgang des Phalloideen-Receptaculums.

Vorgelegt in der Sitzung vom 19. November 1887.

Es ist eine bekannte Thatsache, dass die Entwicklung der Phalloideenfruchtkörper ihren Abschluss erreicht mit einer relativ raschen Dehnung des Receptaculums, durch welche die Volva gesprengt und die Sporenmasse emporgehoben wird. Die Zeitdauer, welche dieser Prozess in Anspruch nimmt, beträgt nach *de Bary*[1]) bei *Mutinus caninus* ungefähr 36 Stunden (an im Zimmer beobachteten Exemplaren), bei *Ithyphallus impudicus* nach *Feuilleaubois*[2]) bis zum völligen Austritt des Hutes eine bis mehrere Stunden und für den übrigen Theil der Streckung 4—12 Stunden, nach *Corda*[3]) dagegen und

[1]) Zur Morphologie der Phalloideen. Abh. der Senkenbergischen naturforschenden Gesellschaft, p. 203.

[2]) Revue mycologique VI, 1884, Januar, p. 21 ff.

[3]) Icones fungorum V, p. 73.