Zeitschrift: Mitteilungen der Naturforschenden Gesellschaft Bern

Herausgeber: Naturforschende Gesellschaft Bern

Band: - (1887)

Heft: 1169-1194

Artikel: Betrachtung des räumlichen Integrals dxdydz / r^(1+) ausgedehnt über das Innere des Ellipsoides X²/A + Y²/B + Z²/C = 1

Autor: Bigler, U.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-319004

Hülfsmittel zur Bestimmung der sich stetig mehrenden Sammlung dienen muss.

Allen Herren, die sich um die Vermehrung unserer Sammlung verdient gemacht haben, sei die sich stetig entwickelnde Sammlung auch ferner ihres besondern Wohlwollens empfohlen.

Dr. U. Bigler.

Betrachtung des räumlichen Integrals

$$\iiint \frac{d\,x\,d\,y\,d\,z}{r^{1+\alpha}},$$

ausgedehnt über das Innere des Ellipsoides

$$\frac{X^2}{A} + \frac{Y^2}{B} + \frac{Z^2}{C} = 1.$$

Eingereicht den 22. Januar 1887.

Der Punkt, von welchem aus der Strahl r gezählt wird, habe die Coordinaten a, b, c, während der laufende Punkt die Coordinaten x, y, z haben soll, so dass

$$r^2 = (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2$$

ist. In Polarcoordinaten ausgedrückt, ist das Raumelement $d\,x\,d\,y\,d\,z$ gleich $r^2 \sin\Theta\, d\,\varphi\, d\,\Theta\, d\,r$ somit

$$\iiint \frac{d\,x\,d\,y\,d\,z}{r^{1+\alpha}} = \iiint \frac{\sin\Theta\, d\,\varphi\, d\,\Theta\, d\,r}{r^{-1+\alpha}},$$

wo aber für Θ, φ, r entsprechende Grenzen zu setzen sind. Liegt nun der Punkt a, b, c, den ich Bezugspunkt nennen will, innerhalb des Raumes, über welchen das Integral sich ausdehnt, so ist Null die untere Grenze für r. Soll nun auch für diesen Fall das Integral seine Bedeutung nicht verlieren, so muss die reelle Componente von $2-\alpha$ positiv sein, also α westlich des Meridianes (2) liegen. Ich nehme an, die reelle Componente von α liege zwischen 0 und 2. Der Grund dieser letztern Annahme wird sich im Verlaufe der Rechnung ergeben. Es ist nun

$$\frac{1}{r^{1+\alpha}} = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{1+\alpha}{2}\right)} \cdot \int_0^\infty e^{-r^2\chi} \cdot \chi^{-\frac{1}{2}+\frac{\alpha}{2}}\, d\chi,$$

wo die Convergenz an der untern Grenze nur verlangt, dass α östlich des Meridians (-1) liege. Ferner ist auch

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin\varphi}{\varphi} \cdot \left(e^{ig\varphi} + e^{-ig\varphi}\right) d\varphi = 1 \text{ oder} = 0,$$

je nachdem $0 < g < 1$ oder $1 < g$ ist. Setze ich nun

$$g = \frac{x^2}{A} + \frac{y^2}{B} + \frac{z^2}{C} = \sum \frac{x^2}{A},$$

$$\Omega = r^2\chi - i\varphi \cdot \sum \frac{x^2}{A}, \Omega^1 = r^2\chi + i\varphi \cdot \sum \frac{x^2}{A},$$

so ist

$$1)\ V = \iiint \frac{dx\,dy\,dz}{r^{1+\alpha}} = \frac{1}{\pi\Gamma\left(\frac{1+\alpha}{2}\right)} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} \frac{\sin\varphi}{\varphi} \times$$

$$\times \chi^{\frac{\alpha-1}{2}} \left(e^{-\Omega} + e^{-\Omega^1}\right) dx\,dy\,dz\,d\varphi\,d\chi,$$ wo nun die Variabeln x, y, z von $-\infty$ bis $+\infty$ laufen.

Wenn

$$\mathfrak{A} = \frac{\sqrt{A\chi - i\varphi}}{\sqrt{A}} \cdot x - \frac{\sqrt{A}}{\sqrt{A\chi - i\varphi}} \cdot a\chi;$$

$$\mathfrak{A}_1 = \frac{\sqrt{A\chi + i\varphi}}{\sqrt{A}} \cdot x - \frac{\sqrt{A}}{\sqrt{A\chi + i\varphi}} \cdot a\chi;$$

$$\mathfrak{B} = \frac{\sqrt{B\chi - i\varphi}}{\sqrt{B}} \cdot y - \frac{\sqrt{B}}{\sqrt{B\chi - i\varphi}} \cdot b\chi;$$

$$\mathfrak{B}_1 = \frac{\sqrt{B\chi + i\varphi}}{\sqrt{B}} \cdot y - \frac{\sqrt{B}}{\sqrt{B\chi + i\varphi}} \cdot b\chi;$$

$$\mathfrak{C} = \frac{\sqrt{C\chi - i\varphi}}{\sqrt{C}} \cdot z - \frac{\sqrt{C}}{\sqrt{C\chi - i\varphi}} \cdot c\chi;$$

$$\mathfrak{C}_1 = \frac{\sqrt{C\chi + i\varphi}}{\sqrt{C}} \cdot z - \frac{\sqrt{C}}{\sqrt{C\chi + i\varphi}} \cdot c\chi;$$

$$\mathfrak{D} = \varphi\left(\frac{-ia^2\chi}{A\chi - i\varphi} + \frac{-ib^2\chi}{B\chi - i\varphi} + \frac{-ic^2\chi}{C\chi - i\varphi}\right);$$

$$\mathfrak{D}_1 = \varphi\left(\frac{ia^2\chi}{A\chi + i\varphi} + \frac{ib^2\chi}{B\chi + i\varphi} + \frac{ic^2\chi}{C\chi + i\varphi}\right)$$

gesetzt wird, so kann man nun dem Ausdrucke V folgende Form geben:

$$2)\quad V = \frac{1}{\pi\,\Gamma\left(\frac{1+\alpha}{2}\right)} \cdot \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{0}^{+\infty}\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{\sin\varphi}{\varphi}\,\chi^{\frac{\alpha-1}{2}} \times$$

$$\times \left(e^{-(\mathfrak{A}^2+\mathfrak{B}^2+\mathfrak{C}^2+\mathfrak{D}^2)} + e^{-(\mathfrak{A}^2_1+\mathfrak{B}^2_1+\mathfrak{C}^2_1+\mathfrak{D}^2_1)}\right) \times$$

$$dx\,dy\,dz\,d\varphi\,d\chi.$$

Die reellen Componenten der Quadratwurzeln in den Ausdrücken für $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ etc. werden positiv verstanden. Ich habe nun in dem Aufsatze über das Potential der elliptischen Scheibe bewiesen, *) dass

*) Siehe nachfolgender Aufsatz.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\mathfrak{A}^2} dx = \frac{\sqrt{A}}{\sqrt{A\,\chi - i\,\varphi}} \cdot \Gamma(\tfrac{1}{2});\ \int_{+\infty}^{+\infty} e^{-\mathfrak{B}^2} dy = \frac{\sqrt{B}}{\sqrt{B\,\chi - i\,\varphi}} \cdot \Gamma(\tfrac{1}{2});$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\mathfrak{C}^2} dz = \frac{\sqrt{C}}{\sqrt{C\,\chi - i\,\varphi}} \cdot \Gamma(\tfrac{1}{2});\ \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\mathfrak{A}_1^{\,2}} dx = \frac{\sqrt{A}}{\sqrt{A\,\chi - i\,\varphi}} \cdot \Gamma(\tfrac{1}{2});$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\mathfrak{B}_1^{\,2}} dy = \frac{\sqrt{B}}{\sqrt{B\,\chi + i\,\varphi}} \cdot \Gamma(\tfrac{1}{2});\ \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\mathfrak{C}_1^{\,2}} dz = \frac{\sqrt{C}}{\sqrt{C\,\chi + i\,\varphi}} \cdot \Gamma(\tfrac{1}{2}),$$

somit ist auch

$$3)\quad V = \frac{\sqrt{\pi}\ \sqrt{ABC}}{\Gamma\left(\frac{1+\alpha}{2}\right)} \cdot \int_0^\infty\int_0^\infty \frac{\sin\varphi}{\varphi}\,\chi^{\frac{\alpha-1}{2}} \times$$

$$\times \left(\frac{e^{-\mathfrak{D}}}{\sqrt{\Pi\,(A - i\,\varphi)}} + \frac{e^{-\mathfrak{D}_1}}{\sqrt{\Pi\,(A + i\,\varphi)}} \right) d\varphi\, d\chi,$$

wenn $\Pi\,(A - i\,\varphi) = (A - i\,\varphi)\ (B - i\,\varphi)\ (C - i\,\varphi)$ bedeutet.

Man setze nun $s = \frac{\varphi}{\chi}$, also

$$\mathfrak{D} = \varphi \left(\frac{-i\,a^2}{A - i\,s} + \frac{-i\,b^2}{B - i\,s} + \frac{-i\,c^2}{C - i\,s} \right) = \varphi\, S,$$

$$\mathfrak{D}_1 = \varphi \left(\frac{-i\,a^2}{A + i\,s} + \frac{i\,b^2}{B + i\,s} + \frac{i\,c^2}{C + i\,s} \right) = \varphi\, S_1,$$

und wenn φ constant gedacht wird, so ist

$$d\chi = -\,\chi^2 \cdot \frac{ds}{\varphi},$$

folglich

$$4)\quad V = \frac{\sqrt{\pi}\,\sqrt{ABC}}{\Gamma\left(\frac{1+\alpha}{2}\right)} \int_0^\infty\!\!\int_0^\infty \frac{\sin\varphi}{\varphi^{2-\frac{\alpha}{2}}} \times$$

$$\times \left(\frac{e^{-\varphi S}}{\sqrt{\Pi(A-is)}} + \frac{e^{-\varphi S_1}}{\sqrt{\Pi(A+is)}} \right) \frac{ds\,d\varphi.}{s^{\frac{\alpha}{2}}}$$

Ich integrire nun zuerst nach φ. Weil $\sin\varphi = \frac{1}{2i} \times$ $\times \left(e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}\right)$, so ist

$$\int_0^\infty \frac{\sin\varphi}{\varphi^{2-\frac{\alpha}{2}}} \cdot e^{-\varphi S} d\varphi = \frac{1}{2i} \int_0^\infty \left(\frac{e^{-(S-i)\varphi} - e^{-(S+i)\varphi}}{\varphi^{2-\frac{\alpha}{2}}} \right) d\varphi,$$

Damit dieses Integral auch an der untern Grenze convergire, muss α östlich des Meridians (0) liegen. Nach der bekannten Formel

$$\int_0^\infty \frac{e^{-l\varphi} - e^{-m\varphi}}{\varphi^{1+n}} \cdot d\varphi = \frac{\Gamma(1-n)}{n} (m^n - l^n)$$

findet man nun, dass

$$\int_0^\infty \frac{\sin\varphi}{\varphi^{2-\frac{\alpha}{2}}} \cdot e^{-\varphi S} d\varphi = \frac{\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{i(2-\alpha)} \cdot \left((S+i)^{1-\frac{\alpha}{2}} - (S-i)^{1-\frac{\alpha}{2}} \right)$$

ist, wo die imaginären Componenten der Logarithmen von $S+i$ und $S-i$ zwischen $-\frac{\pi}{2}$ und $\frac{\pi}{2}$ liegen sollen.

Ferner hat man

$$\int_0^\infty \frac{\sin\varphi}{\varphi^{2-\frac{\alpha}{2}}} e^{-\varphi S_1} d\varphi = \frac{\Gamma(\frac{\alpha}{2})}{i(2-\alpha)}\left((S_1+i)^{1-\frac{\alpha}{2}}-(S_1-i)^{1-\frac{\alpha}{2}}\right),$$

folglich ist

$$5)\quad V = \frac{\sqrt{\pi}\,\sqrt{ABC}}{2-\alpha}\cdot\frac{\Gamma(\frac{\alpha}{2})}{\Gamma(\frac{1+\alpha}{2})}\times$$

$$\times\left[\int_0^\infty \frac{(S+i)^{1-\frac{\alpha}{2}}-(S-i)^{1-\frac{\alpha}{2}}}{i\sqrt{\Pi(A-is)}}\frac{ds}{s^{\frac{\alpha}{2}}}+\int_0^\infty \frac{(S_1+i)^{1-\frac{\alpha}{2}}-(S_1-i)^{1-\frac{\alpha}{2}}}{i\sqrt{\Pi(A+is)}}\frac{ds}{s^{\frac{\alpha}{2}}}\right].$$

Die Zerlegung in eine Summe zweier Integrale ist desshalb zulässig, weil beide für das bezeichnete Gebiet von α convergiren. Im Horizonte verschwinden dieselben wie $\frac{1}{\sqrt{s^3}}$. Ich setze nun den Integrationsweg des ersten Integrales im Horizonte vom Ostpunkte bis zum Nordpunkte in positiver Richtung fort und verlege den neuen Weg auf die Nordhälfte der lateralen Axe. Hier sei nun $s = e^{i\frac{\pi}{2}} u$ gesetzt, so dass die neue Variable u die positive Hälfte der Realitätslinie in positiver Richtung durchläuft. Man sieht sich nun genöthigt, hier folgende zwei Fälle zu unterscheiden:

1. Der Bezugspunkt (a, b, c) liege ausserhalb des Ellipsoides.

Ist t die Wurzel der Gleichung

$$\frac{a^2}{A+u}+\frac{b^2}{B+u}+\frac{c^2}{C+u}=1,$$

die dem Ellipsoid entspricht, das durch den Punkt (a, b, c) geht, so ist für das Intervall $o < u < t$ die Grösse T grösser als 1 und für das Intervall $t < u$ kleiner als 1, wenn

$$T = \frac{a^2}{A+u} + \frac{b^2}{B+u} + \frac{c^2}{C+u}$$

gesetzt wird. Für das Intervall $o < u < t$ hat man

$$\log(S+i) = \log(T-1) - \frac{i\pi}{2}, \log(S-i) = \log(T+1) - \frac{i\pi}{2}$$

und für $t < u$

$$\log(S+i) = \log(1-T) + \frac{i\pi}{2}, \log(S-i) = \log(1+T) - \frac{i\pi}{2},$$

wo die Logarithmen von $T-1$, $1-T$ etc. reell zu verstehen sind. Es ist demnach

$$\int_o^\infty \frac{(S+i)^{1-\frac{\alpha}{2}} - (S-i)^{1-\frac{\alpha}{2}}}{i\sqrt{\Pi(A-is)}} \cdot \frac{ds}{s^{\frac{\alpha}{2}}} = e^{-\frac{\pi}{2}} \int_o^t \frac{(T-1)^{1-\frac{\alpha}{2}} - (T+1)^{1-\frac{\alpha}{2}}}{\sqrt{\Pi(A+u)}} \cdot \frac{du}{u^{\frac{\alpha}{2}}}$$

$$+ e^{\frac{i\pi}{2}(1-\alpha)} \int_t^\infty \frac{(1-T)^{1-\frac{\alpha}{2}} - e^{\frac{i\pi}{2}(-2+\alpha)}(1+T)^{1-\frac{\alpha}{2}}}{\sqrt{(A+u)}} \frac{du}{u^{\frac{\alpha}{2}}}.$$

Beim zweiten Integral der Formel V setze man den Integrationsweg im Horizonte vom Ostpunkte bis zum Südpunkte in negativer Richtung fort und verlege den neuen

Weg auf die Südhälfte der lateralen Axe. Hier sei $s = e^{-i\frac{\pi}{2}} u$, wo nun u die positive Hälfte der Realitätslinie in positiver Richtung durchläuft. Für $o < u < t$ hat man

$$\log(S_1 + i) = \log(T+1) + \frac{i\pi}{2},\ \log(S_1 - i) = \log(T-1) + \frac{i\pi}{2}$$

und für $t < u$

$$\log(S_1 + i) = \log(1+T) + \frac{i\pi}{2},\ \log(S_1 - i) = \log(1-T) - \frac{i\pi}{2}$$

Man findet so, dass

$$\int_o^\infty \frac{(S_1+i)^{1-\frac{\alpha}{2}} - (S_1-i)^{1-\frac{\alpha}{2}}}{i\sqrt{\Pi(A+is)}} \cdot \frac{ds}{s^{\frac{\alpha}{2}}} = e^{-\frac{i\pi}{2}} \cdot \int_o^t \frac{(T+1)^{1-\frac{\alpha}{2}} - (T-1)^{1-\frac{\alpha}{2}}}{\sqrt{\Pi(A+u)}} \cdot \frac{du}{\alpha}$$

$$+ e^{-\frac{i\pi}{2}} \int_t^\infty \frac{(1+T)^{1-\frac{\alpha}{2}} + e^{\frac{i\pi\alpha}{2}} (1-T)^{1-\frac{\alpha}{2}}}{\sqrt{\Pi(A+u)}} \cdot \frac{du}{u^{\frac{\alpha}{2}}},$$

folglich

$$\int_o^\infty \frac{(S+i)^{1-\frac{\alpha}{2}} - (S-i)^{1-\frac{\alpha}{2}}}{i\sqrt{\Pi(A-is)}} \cdot \frac{ds}{s^{\frac{\alpha}{2}}} + \int_o^\infty \frac{(S_1+i)^{1-\frac{\alpha}{2}} - (S_1+i)^{1-\frac{\alpha}{2}}}{i\sqrt{\Pi(A+is)}} \cdot \frac{ds}{s^{\frac{\alpha}{2}}}$$

$$= 2\sin\frac{\alpha\pi}{2} \int_t^\infty \frac{(1-T)^{1-\frac{\alpha}{2}}}{\sqrt{\Pi(A+u)}} \cdot \frac{du}{u^{\frac{\alpha}{2}}}$$

und demnach

$$6)\quad V=\frac{\pi^{3/2}\sqrt{A\,B\,C}}{\Gamma\left(\frac{1+\alpha}{2}\right)\Gamma\left(2-\frac{\alpha}{2}\right)}\times$$

$$\times\int_t^\infty\frac{\left(1-\left(\frac{a^2}{A+u}+\frac{b^2}{B+u}+\frac{c^2}{C+u}\right)\right)^{1-\frac{\alpha}{2}}}{\sqrt{(A+u)(B+u)(C+u)}}\cdot\frac{d\,u}{u^{\frac{\alpha}{2}}}.$$

2. Der Bezugspunkt (a, *b*, *c*) *liege innerhalb des Ellipsoides.*

Weil in diesem Falle auf dem ganzen Wege von u die Grösse T kleiner als 1 ist, so hat man

$$\log(S+i)=\log(1-T)+\frac{i\pi}{2},\ \log(S-i)=\log(1+T)-\frac{i\pi}{2},$$

also

$$\int_0^\infty\frac{(S+i)^{1-\frac{\alpha}{2}}-(S-i)^{1-\frac{\alpha}{2}}}{i\sqrt{(A-i\,s}}\cdot\frac{d\,s}{s^{\frac{\alpha}{2}}}$$

$$=\int_0^\infty\frac{i\,e^{\frac{-i\pi\alpha}{2}}(1+T)^{1-\frac{\alpha}{2}}+i\,(1+T)^{1-\frac{\alpha}{2}}}{\sqrt{\Pi(A+u)}}\cdot\frac{d\,u}{u^{\frac{\alpha}{2}}};$$

ferner ist

$$\log(S_1+i)=\log(1+T)+\frac{i\pi}{2},\ \log(S_1-i)=\log(1-T)-\frac{i\pi}{2},$$

also auch

$$\int_0^\infty \frac{(S_1+i)^{1-\frac{\alpha}{2}} - (S_1-i)^{1-\frac{\alpha}{2}}}{i\sqrt{\Pi(A+is)}} \cdot \frac{ds}{s^{\frac{\alpha}{2}}} =$$

$$\int_0^\infty \frac{-i(1+T)^{1-\frac{\alpha}{2}} - ie^{\frac{-i\pi\alpha}{2}}(1-T)^{1-\frac{\alpha}{2}}}{\sqrt{\Pi(A+u)}} \cdot \frac{du}{u^{\frac{\alpha}{2}}},$$

folglich

$$\int_0^\infty \frac{(S+i)^{1-\frac{\alpha}{2}} - (S-i)^{1-\alpha}}{i\sqrt{\Pi(A-is)}} \cdot \frac{ds}{s^{\frac{\alpha}{2}}} + \int_0^\infty \frac{(S_1+i)^{1-\frac{\alpha}{2}} - S_1-i)^{1-\frac{\alpha}{2}}}{i\sqrt{(A+is)}} \cdot \frac{ds}{s^{\frac{\alpha}{2}}}$$

$$= 2\sin\frac{\alpha\pi}{2} \int_0^\infty \frac{(1-T)^{1-\frac{\alpha}{2}}}{\sqrt{\Pi(A+u)}} \cdot \frac{du}{u^{\frac{\alpha}{2}}},$$

und somit

$$7) \qquad V = \frac{\pi^{3/2}\sqrt{ABC}}{\Gamma\left(\frac{1+\alpha}{2}\right)\Gamma\left(2-\frac{\alpha}{2}\right)} \times$$

$$\times \int_0^\infty \frac{\left(1-\left(\frac{a^2}{A+u}+\frac{b^2}{B+u}+\frac{c^2}{C+u}\right)\right)^{1-\frac{\alpha}{2}}}{\sqrt{(A+u)(B+u)(C+u)}} \cdot \frac{du}{u^{\frac{\alpha}{2}}}.$$