Zeitschrift: Mitteilungen der Naturforschenden Gesellschaft Bern

Herausgeber: Naturforschende Gesellschaft Bern

Band: - (1885)

Heft: 1103-1142

Artikel: Mathematische Untersuchungen über die Farben dünner Gypsblättchen im polarisirten Lichte

Autor: Jonquière, Alfred

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-319623

Alfred Jonquière.

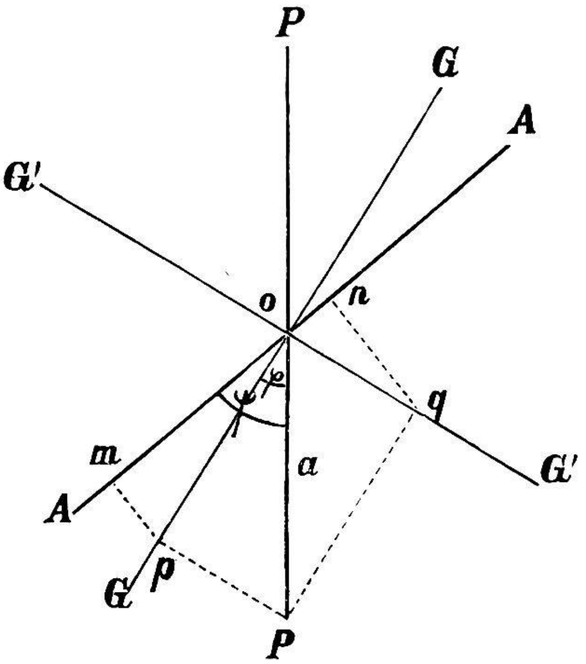
Mathematische Untersuchungen über die Farben dünner Gypsblättchen im polarisirten Lichte.

Vortrag gehalten in der Sitzung vom 14. März 1885.

Die Erscheinungen, welche an dünnen Gypsblättchen im polarisirten Lichte auftreten, gehören wohl zu den schönsten und lehrreichsten der gesammten Optik. Es gibt wohl kaum Thatsachen, die für die Anschauungen über das Wesen des Lichts von so grosser Bedeutung sind und deren Erklärung so sehr für die Richtigkeit der Undulationstheorie spricht, wie die Farbenerscheinungen doppeltbrechender Krystallplatten im polarisirten Lichte. Von den einfachen Prinzipien der Undulationstheorie ausgehend, ist es möglich, die verwickeltsten Erscheinungen der Optik mit mathematischer Sicherheit vorauszubestimmen, bevor sie noch durch das Experiment bestätigt sind. Die vorliegende kleine Arbeit hat zum Zwecke, zu zeigen, wie es möglich ist, die an dünnen Gypsblättchen im polarisirten parallelen Lichte auftretenden Erscheinungen mit Hülfe der reinen Mathematik unabhängig vom Experimente mit Sicherheit zu bestimmen.

Lässt man einen durch einen beliebigen Polarisator polarisirten Lichtstrahl senkrecht durch ein dünnes Gypsblättchen treten, dessen beide optischen Achsen in der Schnittebene liegen, und betrachtet man das Blättchen durch ein Nicol'sches oder Foucault'sches Prisma, den sog.

Analysator, so sieht man im Allgemeinen eine mehr oder weniger deutlich ausgeprägte Farbe. Sind Analysator und Polarisator entweder in paralleler oder in gekreuzter Stellung und dreht man das Gypsblättchen um den Strahl als Axe, so ändert sich die Intensität der Färbung; dreht man dagegen bei unveränderlicher Stellung des Blättchens den Analysator, so ändert sich die Färbung selbst. Es ist wohl sehr schwierig, wenn nicht geradezu unmöglich, ohne Anwendung von Mathematik eine Erklärung dieser Erscheinungen zu geben, welche nicht nur für einige spezielle Fälle passt, sondern alle denkbaren Fälle in sich schliesst. Bei Zuhülfenahme des mächtigen Hülfsmittels der Mathematik gestaltet sich dagegen die Sache ziemlich einfach und übersichtlich.



Es stelle in nebenstehender Figur die Zeichnungsebene die Ebene des Gypsblättchens dar. In o sei die Eintrittsstelle des senkrecht einfallenden Strahls, dessen Schwingungsebene in PP zur geraden Linie verkürzt erscheint. Im Krystall sind Schwingungen nur nach zwei zu einander senkrechten Richtungen GG und G'G' möglich; der einfallende in der Richtung PP schwingende Strahl muss daher in 2 Strahlen zerlegt werden, von denen der eine nach GG, der andere nach G'G' schwingt. Nehmen wir an, die Strecke oP stelle der Grösse nach die Vibrationsintensität des einfallenden

Strahls dar, d. h. die Geschwindigkeit, mit welcher ein unter dem Einflusse dieses Strahls schwingendes Aethertheilchen die Gleichgewichtslage passirt; dann erhalten wir die Vibrationsintensitäten der beiden Strahlen im Krystall, indem wir die Strecke $oP = a$ auf GG und G′G′ projiciren. Bezeichnen wir dann den Winkel, den die beiden Richtungen PP und GG mit einander bilden, mit φ, so haben wir

$$po = a \,.\, \cos\varphi; \qquad qo = a \sin\varphi.$$

Mit diesen Vibrationsintensitäten treten die beiden Strahlen aus dem Krystall. Da aber die Elastizität des Aethers im Blättchen nach der Richtung GG eine andere ist, als nach der Richtung G′G′, so pflanzen sich auch die beiden Strahlen im Krystall mit ungleicher Geschwindigkeit fort und es wird ein Strahl dem andern um eine bestimmte Strecke voraneilen. Nach dem Austritt aus dem Blättchen werden die beiden Strahlen einen absoluten Gangunterschied $\varkappa$ oder einen in Wellenlängen ausgedrückten Gangunterschied $\frac{\varkappa}{\lambda}$ haben, wenn wir mit λ die Wellenlänge des einfallenden Lichtes bezeichnen.

Die beiden bei o austretenden Strahlen können nicht interferiren, weil ihre Schwingungsebenen rechtwinklig zu einander stehen, die Interferenz wird aber zu Stande kommen, wenn die Schwingungen der austretenden Strahlen auf die Schwingungsebene des Analysators reduzirt werden.

A A sei die Schwingungsebene des Analysators. Sie bilde mit der Schwingungsebene P P des Polarisators den Winkel ψ. Die Projektionen mo und no von po und qo stellen die Vibrationsintensitäten der beiden Strahlen nach der Reduktion auf die Schwingungsebene A A des Analysators dar und wir haben offenbar

$$mo = po \, . \cos(\psi - \varphi) = \mathrm{a} \cos\varphi \, . \cos(\psi - \varphi)$$
$$no = - \, qo \, . \sin(\psi - \varphi) = - \, \mathrm{a} \sin\varphi \, . \sin(\psi - \varphi)$$

und zwar ist *no* negativ zu nehmen, weil es der als positiv angenommenen Richtung *om* entgegengesetzt ist.

Diese beiden Componenten *mo* und *no* kommen nun zusammen zur Interferenz. Wir kennen die Vibrationsintensitäten der beiden interferirenden Strahlen, die des einen ist $= \mathrm{a} \cos\varphi \cos(\psi - \varphi)$, diejenige des andern $= - \, \mathrm{a} \sin\varphi \sin(\psi - \varphi)$; ihr Gangunterschied beträgt, wie wir gesehen haben, $\frac{\varkappa}{\lambda}$ Wellenlängen. Aus diesen Daten lässt sich leicht die Vibrationsintensität des aus den beiden Strahlkomponenten resultirenden Strahls berechnen. Es ist nämlich nach einer bekannten Formel der mathematischen Optik

$$\mathrm{V} = \sqrt{\mathrm{u}^2 + \mathrm{v}^2 + 2 \, \mathrm{u} \cdot \mathrm{v} \cdot \cos 2\pi \cdot \mathrm{w}}$$

wo u und v die Vibrationsintensitäten zweier interferirender Strahlen, w ihren in Wellenlängen ausgedrückten Gangunterschied, V die Vibrationsintensität des resultirenden Strahls bedeutet. Unter Anwendung dieser Formel erhalten wir für unsern Fall

$$\mathrm{V} = \sqrt{\left[\mathrm{a}^2 \cos^2\varphi \cos^2(\psi - \varphi) + \mathrm{a}^2 \sin^2\varphi \sin^2(\psi - \varphi) \right.}$$
$$\left. - \, 2\mathrm{a}^2 \cos\varphi \cos(\psi - \varphi) \sin\varphi \sin(\psi - \varphi) \cos 2\pi \frac{\varkappa}{\lambda} \right]$$

Die Lichtintensität J ist bekanntlich proportional dem Quadrate der Vibrationsintensität V, kann also einfach $= \mathrm{V}^2$ gesetzt werden. Es ist somit

$$\mathrm{J} = \mathrm{a}^2 \left[\cos^2\varphi \cos^2(\psi - \varphi) + \sin^2\varphi \sin^2(\psi - \varphi) \right.$$
$$\left. - \, 2 \cos\varphi \cos(\psi - \varphi) \sin\varphi \sin(\psi - \varphi) \cos 2\pi \frac{\varkappa}{\lambda} \right]$$

$$= a^2 \left[\cos^2\varphi \left\{1 - \sin^2(\psi-\varphi)\right\} + \sin^2\varphi \sin^2(\psi-\varphi) - \frac{1}{2}\sin 2\varphi \sin 2(\psi-\varphi) \cos 2\pi\frac{\varkappa}{\lambda}\right]$$

$$J = a^2 \left[\cos^2\varphi - \cos 2\varphi \sin^2(\psi-\varphi) - \frac{1}{2}\sin 2\varphi \sin 2(\psi-\varphi) \cos 2\pi\frac{\varkappa}{\lambda}\right]$$

Alle Erscheinungen, welche an dünnen Gypsblättchen im polarisirten Lichte auftreten, lassen sich aus dieser Formel ableiten. Man muss dieselbe nur gehörig untersuchen und die in mathematischer Form gewonnenen Resultate richtig interpretiren, um die bei allen denkbaren Stellungen des Analysators und des Gypsblättchens sich zeigenden Erscheinungen vollständig zu erklären.

Die Formel enthält 4 Variable

φ, d. h. die Stellung des Gypsblättchens,

ψ oder die Stellung des Analysators,

$\varkappa$ eine Grösse, die, wie wir später sehen werden, hauptsächlich von der Dicke des Blättchens abhängt; endlich

λ, d. h. die Farbe des einfallenden Lichts.

In Bezug auf diese 4 Variablen lassen sich verschiedene Fälle unterscheiden:

1. ψ, $\varkappa$, λ seien konstant, φ variabel, d. h. das Gypsblättchen werde gedreht. Wir fragen uns, welche Lage wir dem Gypsblättchen geben müssen, damit es in seiner grössten oder kleinsten Helligkeit erscheint. Der erste Differentialquotient des Ausdruckes für J in Beziehung auf φ liefert uns, wenn wir ihn $= 0$ setzen, diejenigen Werthe von φ, für welche wir entweder ein Maximum oder ein Minimum von Helligkeit haben. Welches von

beiden der Fall ist, entscheidet der zweite Differentialquotient, indem bekanntlich einem positiven Vorzeichen des zweiten Differentialquotients ein Minimum, einem negativen Vorzeichen dagegen ein Maximum entspricht.

Wir finden durch Differentiation

$$J'_\varphi = a^2 \Big[-\sin 2\varphi + 2\sin 2\varphi \sin^2(\psi-\varphi) + \cos 2\varphi \sin 2(\psi-\varphi)$$

$$-\cos 2\varphi \sin 2(\psi-\varphi) \cos 2\pi \frac{\varkappa}{\lambda} + \sin 2\varphi \cos 2(\psi-\varphi) \cos 2\pi \frac{\varkappa}{\lambda} \Big]$$

$$J'_\varphi = a^2 \Big[-\sin 2\varphi \cos 2(\psi-\varphi) + \cos 2\varphi \sin 2(\psi-\varphi)$$

$$+ \sin 2(2\varphi-\psi) \cos 2\pi \frac{\varkappa}{\lambda} \Big]$$

$$J'_\varphi = -a^2 \left(1 - \cos 2\pi \frac{\varkappa}{\lambda}\right) \sin 2(2\varphi-\psi) = 0$$

$$\sin 2(2\varphi-\psi) = 0$$

$$2(2\varphi-\psi) = n\pi$$

$$\varphi = \frac{n\pi}{4} + \frac{\psi}{2}$$

wo n eine beliebige ganze Zahl bedeutet. Für den zweiten Differentialquotienten findet man unmittelbar den Ausdruck

$$J''_\varphi = -4a^2 \left(1 - \cos 2\pi \frac{\varkappa}{\lambda}\right) \cos 2(2\varphi-\psi)$$

$$= -4a^2 \left(1 - \cos 2\pi \frac{\varkappa}{\lambda}\right) \cos n\pi$$

woraus man sofort ersieht, dass man Maxima für gerade, Minima für ungerade n hat. Wir haben also

Maxima für $\varphi = \frac{\psi}{2},\ \frac{\pi}{2} + \frac{\psi}{2},\ \pi + \frac{\psi}{2},\ \frac{3\pi}{2} + \frac{\psi}{2}$

Minima für $\varphi = \frac{\pi}{4} + \frac{\psi}{2},\ \frac{3\pi}{4} + \frac{\psi}{2},\ \frac{5\pi}{4} + \frac{\psi}{2},\ \frac{7\pi}{4} + \frac{\psi}{2}$

Sind Analysator und Polarisator gekreuzt, so ist

$\psi = \frac{\pi}{2}$ und wir haben dann

für $\varphi = 45^0, 135^0, 225^0, 315^0$ grösste Helligkeit
für $\varphi = 90^0, 180^0, 270^0, 360^0$ absolute Dunkelheit.

Beim Drehen des Gypsblättchens ändert sich also, wie wir soeben gesehen haben, die Helligkeit. Es fragt sich nun noch, ob die Intensität aller Farben sich in gleichem Masse verändert, d. h. ob das Blättchen stets dieselbe Farbe zeigt, oder ob auch diese einer Veränderung unterworfen ist. Auch hierüber gibt uns unsere Formel Aufschluss.

Wir sehen zunächst, dass alle Farben mit derselben Intensität auftreten für alle diejenigen Werthe von φ, für welche das Glied $\sin 2\varphi \sin 2(\psi - \varphi) \cos 2\pi \frac{\varkappa}{\lambda}$ verschwindet.

In diesem Falle erscheint das Blättchen farblos und zwar je nach dem Werthe von ψ mehr oder weniger hell. Der genannte Fall tritt offenbar ein für die folgenden Werthe von φ:

$$\varphi = 0,\ \psi,\ \frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2} + \psi,\ \pi,\ \pi + \psi,\ \frac{3\pi}{2},\ \frac{3\pi}{2} + \psi$$

In der Mitte zwischen je 2 solchen Stellungen, wo das Blättchen farblos erscheint, befinden sich die Stellungen grösster und kleinster Helligkeit. Schon der Umstand, dass der Uebergang von einem Maximum zu einem Minimum von Intensität durch Farblosigkeit hindurchgeht, lässt als wahrscheinlich erscheinen, dass das Blättchen in den Maximum-Stellungen eine andere Farbe zeigt, als in den Minimum-Stellungen. Diess bestätigt auch unsere Formel. Setzen wir nämlich einmal $\varphi = (2n + 1)\frac{\pi}{4} + \frac{\psi}{2}$, das andere Mal $\varphi = \frac{n\pi}{2} + \frac{\psi}{2}$, so erhalten wir für die Minimum-Stellungen:

$$J = a^2 \left[\cos^2\left\{(2n+1)\frac{\pi}{4} + \frac{\psi}{2}\right\} - \cos\left\{(2n+1)\frac{\pi}{2} + \psi\right\}\right.$$
$$\left. \times \sin^2\left\{\frac{\psi}{2} - (2n+1)\frac{\pi}{4}\right\} + \frac{1}{2}\cos^2\psi \cos 2\pi\frac{\varkappa}{\lambda}\right];$$

für die Maximum-Stellungen:

$$J = a^2 \left[\cos^2\left(n\frac{\pi}{2} + \frac{\psi}{2}\right) - \cos(n\pi + \psi)\sin^2\left(\frac{\psi}{2} - \frac{n\pi}{2}\right)\right.$$
$$\left. - \frac{1}{2}\sin^2\psi \cos 2\pi\frac{\varkappa}{\lambda}\right]$$

In den Minimum-Stellungen werden diejenigen Farben am meisten hervortreten, für welche $\cos 2\pi\frac{\varkappa}{\lambda}$ am grössten ist, dagegen werden diejenigen Farben am wenigsten sichtbar sein, für welche $\cos 2\pi\frac{\varkappa}{\lambda}$ sich seinem kleinsten Werthe nähert. Gerade das Umgekehrte tritt bei den Maximum-Stellungen ein. Bei diesen sind diejenigen Farben, für welche $\cos 2\pi\frac{\varkappa}{\lambda}$ gross ist, schwach, diejenigen, für welche $\cos 2\pi\frac{\varkappa}{\lambda}$ klein ist, stark vertreten. Es folgt daraus, dass die Farbe, welche das Blättchen in seinen Maximum-Stellungen zeigt, zu der den Minimum-Stellungen entsprechenden Farbe in einem ähnlichen Verhältnisse steht, wie eine Farbe zu ihrer komplementären. Obschon die beiden Farben im Allgemeinen nicht genau komplementär sind, so erscheinen sie doch dem Auge als nahezu komplementär. Es ist leicht zu sehen, wie sich die Sache gestaltet, wenn Polarisator und Analysator gekreuzt sind. An Stelle der Farblosigkeit tritt dann vollkommene Dunkelkeit und die Minimum-Stellungen fallen mit den Stellungen vollkommener Dunkelheit zusammen. Das Blättchen zeigt dann beim Drehen nur *eine* Farbe.

2. φ, $\varkappa$, λ seien konstant, ψ variabel, d. h. der Analysator werde gedreht. Wir fragen uns, welche Stellung wir dem Analysator geben müssen, um ein Maximum oder Minimum von Intensität zu erhalten. Durch Differentiation in Bezug auf ψ finden wir:

$$J'_{\psi} = -a^2 \left[\cos 2\varphi \sin 2(\psi-\varphi) + \sin 2\varphi \cos 2(\psi-\varphi) \cos 2\pi\frac{\varkappa}{\lambda}\right]$$

$$\operatorname{tg} 2(\psi-\varphi) + \operatorname{tg} 2\varphi \cdot \cos 2\pi\frac{\varkappa}{\lambda} = 0$$

$$\operatorname{tg}(2\psi-2\varphi-n\pi) = -\operatorname{tg} 2\varphi \cos 2\pi\frac{\varkappa}{\lambda}$$

$$\psi = \frac{1}{2} \operatorname{arc\,tg}\left[-\operatorname{tg} 2\varphi \cos 2\pi\frac{\varkappa}{\lambda}\right] + \varphi + \frac{n\pi}{2}$$

Für den zweiten Differentialquotienten erhält man den Ausdruck

$$J''_{\psi} = -2a^2\left[\cos 2\varphi \cos 2(\psi-\varphi) - \sin 2\varphi \sin 2(\psi-\varphi) \cos 2\pi\frac{\varkappa}{\lambda}\right]$$

$$= -2a^2 \cos 2\varphi \cos 2(\psi-\varphi)\left[1 - \operatorname{tg} 2\varphi \operatorname{tg} 2(\psi-\varphi) \cos 2\pi\frac{\varkappa}{\lambda}\right]$$

$$= -2a^2\left[1+\operatorname{tg}^2 2(\psi-\varphi)\right] \cos 2\varphi \cos 2(\psi-\varphi)$$

Wie wir sehen, sind die Werthe von ψ, für welche die Intensität ein Maximum oder Minimum ist, abhängig von φ, der Lage des Blättchens, $\varkappa$, der Dicke desselben, und λ, der Farbe des einfallenden Lichts; ebenso hängt das Vorzeichen von J''_{ψ} von diesen 3 Grössen ab. Für jede Lichtsorte sind die Werthe von ψ, für welche Maxima oder Minima eintreten, andere. Umgekehrt wird einem bestimmten Werthe von ψ, d. h. einer bestimmten Stellung des Analysators, im Allgemeinen nur eine oder wenigstens eine beschränkte Anzahl von Farben entsprechen, welche in grösster Helligkeit erscheinen. Bei jeder neuen Stellung des Analysators tritt auch eine neue Farbe in den

Vordergrund und das Blättchen muss daher beim Drehen des Analysators nothwendig seine Farbe verändern.

Setzen wir in J''_ψ $\psi + \frac{\pi}{2}$ an Stelle von ψ, so ändert der Faktor $\cos 2(\psi - \varphi)$ und mit ihm J''_ψ das Vorzeichen, d. h. wenn für eine bestimmte Stellung des Analysators eine bestimmte Farbe in grösster Helligkeit auftrat, so hat man für dieselbe Farbe nach Drehen des Analysators um 90^0 ein Minimum und umgekehrt.

Substituiren wir in unserer Hauptformel für J $\psi + \frac{\pi}{2}$ an Stelle von ψ, so ergibt sich

$$J_1 = a^2 \Big[\cos^2 \varphi - \cos 2\varphi \cos^2 (\psi - \varphi) + \frac{1}{2} \sin 2\varphi \sin 2(\psi - \varphi) \cos 2\pi \frac{\varkappa}{\lambda}\Big]$$

$$J + J_1 = a^2 [2\cos^2 \varphi - \cos 2\varphi] = a^2$$

Die beiden Intensitäten ergänzen sich zu a^2, d. h. zur grössten Intensität, welche überhaupt möglich ist. Da diess für alle Farben gilt, so wird nach Drehung des Analysators um 90^0 jede Farbe in der komplementären Intensität auftreten. Das Blättchen muss daher in der Komplementärfarbe erscheinen.

Setzen wir schliesslich in der Hauptformel

$$\varphi = \frac{\pi}{4} \text{ und } \psi = \frac{n\pi}{2} + \frac{\pi}{4}, \text{ so ist}$$

$$J = a^2 \Big[\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \sin n\pi \cdot \cos 2\pi \frac{\varkappa}{\lambda}\Big] = \frac{a^2}{2}$$

Die gefundene Intensität ist ganz unabhängig von der Farbe des Lichts. Wenn also eine der Schwingungsrichtungen im Krystall mit der Schwingungsebene des Polarisators einen Winkel von 45^0 macht und die Schwingungsebene des Analysators parallel oder rechtwinklig zu dieser

Stellung ist, so zeigen sich alle Farben in derselben Intensität $\frac{a^2}{2}$ und das Resultat wird somit sein, dass das Blättchen farblos hell erscheint.

3. Nachdem wir den Einfluss der Stellung des Gypsblättchens und des Analysator's kennen gelernt haben, bleibt uns zunächst übrig, zu untersuchen, inwiefern die Dicke des Blättchens die Erscheinungen beeinflusst. Zu dem Zwecke müssen wir vorerst die Bedeutung der Grösse $\varkappa$ genau feststellen. Ist λ die Wellenlänge einer bestimmten Farbe, sind ferner λ_1 und λ_2 die Wellenlängen derselben Farbe für die beiden Strahlen im Krystall und n und n′ die bezüglichen Brechungsexponenten, so ist, wenn wir die Dicke des Blättchens mit d bezeichnen:

$$\frac{\lambda}{\lambda_1} = n; \ \frac{\lambda}{\lambda_2} = n'; \text{ oder } \lambda_1 = \frac{\lambda}{n}; \ \lambda_2 = \frac{\lambda}{n'}$$

Auf die Dicke des Blättchens gehen daher für den einen Strahl $\frac{dn}{\lambda}$, für den andern $\frac{dn'}{\lambda}$ Wellenlängen. Nach dem Austritt aus dem Krystall haben die beiden Strahlen einen Gangunterschied von $\frac{d(n-n')}{\lambda}$ Wellenlängen. Dieser Gangunterschied ist aber nach Früherem $= \frac{\varkappa}{\lambda}$. Wir haben somit die einfache Beziehung: $\varkappa = d\,(n-n')$.

Wenn wir den gefundenen Werth von $\varkappa$ in die Formel für J einsetzen und J nach d differenziren, so erhalten wir

$$J'_d = \frac{a^2 \pi (n-n')}{\lambda} \sin 2\varphi \sin 2(\psi-\varphi) \sin 2\pi \frac{d(n-n')}{\lambda}$$

$$\sin 2\pi \frac{d(n-n')}{\lambda} = o; \ 2\pi \frac{d(n-n')}{\lambda} = r\pi$$

wo r eine beliebige ganze Zahl bedeutet

$$d = \frac{r}{2} \cdot \frac{\lambda}{n-n'}$$

Berücksichtigt man, dass $2\pi \frac{d(n-n')}{\lambda} = r\pi$ ist, so ergibt sich der zweite Differentialquotient

$$J_d'' = \frac{2a^2 \pi^2 (n-n')^2}{\lambda^2} \sin 2\varphi \sin 2(\psi-\varphi) \cos r\pi$$

Das Vorzeichen von J_d'' hängt ab vom Faktor
$\sin 2\varphi \sin 2(\psi-\varphi)$ und von r.

Ist $\sin 2\varphi \sin 2(\psi-\varphi)$ positiv (was z. B. bei gekreuzten Polarisatoren der Fall ist), so hat man

$$\text{Maxima für } d = \frac{1}{2} \cdot \frac{\lambda}{n-n'}, \frac{3}{2} \cdot \frac{\lambda}{n-n'}, \frac{5}{2} \cdot \frac{\lambda}{n-n'}, \ldots.$$

$$\text{Minima für } d = \frac{\lambda}{n-n'}, \frac{2\lambda}{n-n'}, \frac{3\lambda}{n-n'}, \ldots.$$

Umgekehrt wird das Verhältniss, wenn $\sin 2\varphi \sin 2(\psi-\varphi)$ negativ ist (bei parallelen Polarisatoren).

Dreht man den Analysator um 90^0, so ändert der Faktor $\sin 2\varphi \sin 2(\psi-\varphi)$ sein Vorzeichen und wir haben dann Maxima für dieselben Dicken, für welche wir früher Minima hatten, und umgekehrt.

Die Brechungsexponenten n und n' sind ausser von der Beschaffenheit des Krystalls nur noch abhängig von λ, von der Farbe des Lichts. Die obigen Werthe von d sind also nur Funktionen von λ.

---

4. Es bliebe nun schliesslich noch übrig, zu untersuchen, welche Farbe bei einer bestimmten Stellung des Gypsblättchens und des Analysators und bei gegebener Dicke des Blättchens im Maximum oder Minimum von Helligkeit auftritt. Zu diesem Zwecke sollte man die Intensität J nach λ differenziren. Diese Differentiation ist jedoch nur ausführbar, wenn man n und n' als Funktionen von λ kennt. Da jedoch eine mathematische Beziehung

zwischen den beiden Brechungsexponenten n und n′ und der Wellenlänge λ kaum bekannt ist, so sind wir genöthigt, auf diese Untersuchung zu verzichten.

Zum Schlusse können wir uns noch folgende Frage zur Beantwortung vorlegen:

Es sei eine bestimmte Lichtsorte von der Wellenlänge λ und eine bestimmte Stellung ψ des Analysators gegeben. Wir fragen uns, welche Dicke das Blättchen haben muss und welche Lage wir dem Gypsblättchen geben müssen, damit die betreffende Farbe im Maximum der Intensität erscheint.

Nach Früherem haben wir für ein Maximum folgende Bedingungen:

$$\varphi = \frac{n\pi}{2} + \frac{\psi}{2}$$

$$d = \frac{r}{2} \cdot \frac{\lambda}{n-n'}$$

Wir wissen jedoch noch nicht. ob r gerade oder ungerade sein soll.

Es war $J''_d = \text{Const.} \times \sin 2\varphi \sin 2(\psi-\varphi) \cos r\pi$

Setzen wir $\varphi = \frac{n\pi}{2} + \frac{\psi}{2}$, so wird

$$\sin 2\varphi \sin 2(\psi-\varphi) = \sin(n\pi+\psi) \sin(\psi-n\pi) = \sin^2\psi$$

Somit $J''_d = \text{Const.} \times \sin^2\psi . \cos r\pi$

Damit J''_d negativ wird, muss r ungerade sein; im Fall eines Maximums muss also die Dicke d die folgenden Werthe haben:

$$d = \frac{1}{2} \cdot \frac{\lambda}{n-n'}, \frac{3}{2} \cdot \frac{\lambda}{n-n'}, \frac{5}{2} \cdot \frac{\lambda}{n-n'}, \ldots$$

Wenn die Dicke des Blättchens ein ungerades Vielfaches von $\frac{1}{2} \cdot \frac{\lambda}{n-n'}$ ist und wenn wir dem Blättchen eine solche Stellung geben, dass eine seiner Schwingungsrichtungen parallel oder rechtwinklig zur Halbirungslinie des Winkels ψ ist, so erscheint die betreffende Farbe von der Wellenlänge λ im Maximum der Intensität. Dieses Maximum selbst finden wir, wenn wir in der Hauptformel für J $\frac{n\pi}{2} + \frac{\psi}{2}$ statt φ und $\frac{r}{2} \cdot \frac{\lambda}{n-n'}$ statt d einsetzen, wo r eine ungerade Zahl bedeutet. Man gelangt dann nach mehreren Reduktionen zu dem merkwürdigen Resultate, dass $J = a^2$ ist, also ganz unabhängig von der Stellung des Analysators. Wenn man nur dem Gypsblättchen eine solche Lage gibt, dass eine seiner Schwingungsrichtungen parallel oder rechtwinklig zur Halbirungslinie von ψ ist, so wird stets, wenn die Dicke des Blättchens ein ungerades Vielfaches von $\frac{1}{2} \cdot \frac{\lambda}{n-n'}$ ist, die betreffende Farbe in der grössten Intensität a^2, welche überhaupt möglich ist, auftreten.

Auf ganz ähnliche Weise gelangt man zu dem Resultate, dass, wenn eine der Schwingungsrichtungen im Blättchen einen Winkel von 45^0 mit der Halbirungslinie von ψ macht, und wenn die übrigen Bedingungen dieselben sind, wie oben, die betreffende Farbe die Intensität 0 hat, d. h. vollständig fehlt.