Zeitschrift: Mitteilungen der Naturforschenden Gesellschaft Bern
Herausgeber: Naturforschende Gesellschaft Bern
Band: - (1884)
Heft: 3 : 1092-1101

Artikel: Zur Theorie der Winkeldreitheilung
Autor: Moser, C.
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-318992

tera, Cymodocea u. A.) gebildet. Aehnlich geformte aber festsitzende Bälle bildet auch die zu den Liphoneen gehörende Meeralge, Codium Bursa Ag., bei welcher die röhrigen, scheidewandlosen Verzweigungen des Thallus zu einem rundlichen, zuletzt hohlen Körper verflochten sind; die äusseren Verzweigungen bilden in palissadenartiger Vereinigung die peripherische Schicht desselben.

C. Moser, cand. phil.

Zur Theorie der Winkeldreitheilung.

Vorgelegt in der Sitzung vom 22. November 1884.

Einleitung.

Die Aufgabe der Winkeldreitheilung gehört mit zu denjenigen Aufgaben der Mathematik, welche in ihrer Ausführung eine grosse Mannigfaltigkeit darbieten. Dies kann wohl nur bei solchen Problemen der Fall sein, deren Lösung mit der Lösung von vielen andern Aufgaben in engem Zusammenhange steht. Die vielfache Verknüpfung der Trisection auch mit der elementaren Geometrie macht es erklärlich, dass schon alle diejenigen Völker des Alterthums, welche die Mathematik gepflegt haben, ihre Aufmerksamkeit der Winkeldreitheilung schenkten *). — Ein ferneres Moment kommt der Aufgabe der Winkeltrisection zu: sie ist eine Umkehrungsaufgabe. Es sind auch gerade

*) Ueber die Geschichte der Trisection des Winkels v.: M. Curtze: Reliquiæ Copernicanæ, Leipzig 1875; L'algèbre d'Omar Alkhayyâmi, traduite par F. Wöpcke. Paris MDCCCI.

diese Aufgaben, welche meist ein nicht zu verachtendes Interesse darbieten, zumal viele unter ihnen bekanntlich wesentlich zur Erweiterung der mathematischen Begriffe beigetragen haben; so langen auch zur Ausführung der Trisection, Spezialfälle ausgenommen, die gerade Linie und der Kreis nicht mehr aus.

Zur Lösung der Winkeldreitheilung erscheint wohl der Weg der natürlichste, der eben berücksichtigt, dass man es mit einer Umkehrungsaufgabe zu thun hat. Man wird also zuerst nach einer allgemeinen Construction fragen, die den dreifachen Winkel aus dem einfachen aufbaut, dann Beziehungen beachten, welche sich an die Verdreifachung anknüpfen, um unter Benutzung derselben wieder zurückzuschliessen auf die Trisection, bezw. auf Curven, welche dazu verwendet werden können.

Die dargelegte Auffassungsweise scheint noch wenig Berücksichtigung gefunden zu haben. Dies gab denn auch den Muth zur Veröffentlichung der vorliegenden Arbeit, soweit sie sich auf die Lösung der Winkeldreitheilung bezieht.

Die nachstehend aufgeführten, an die Verdreifachung des Winkels sich reihenden Beziehungen, lehnen sich in der Hauptsache an eine Curve dritten Grades an, welche folgenden allgemeinen Ursprung hat: Man denke sich auf der Kreisperipherie zwei bewegliche Punkte B und D und suche den Schnitt C der den Kreis in B berührenden mit der durch D und das Kreiscentrum gehenden Geraden (Fig. 1). Je nach dem Gesetze, welchem die gegenseitige Bewegung der beiden Punkte unterliegt, wird auch der Ort von C ausfallen und verschiedenen Graden angehören können.

Der Versuch, pag. 62, die in der analytischen Geometrie so fruchtbare Anwendung der Determinante zur

Darstellung von Werthen auch zur direkten Veranschaulichung von geometrischen Beziehungen zu gebrauchen, fusst auf der durch die Winkelverdreifachung gegebenen speziellen Lage der dort aufgeführten 9 Schnittpunkte.

Verdreifachung des Winkels und der Ort des Punktes C.

Sei (Fig. 2) $S_1AD = \alpha$ irgend ein Winkel, wobei S_1 und D auf einem Kreise um A mit dem Radius R liegen, so trage man R von S_1 aus als Sehne zweimal nach einander ab nach Z_3 und S_2, verbinde S_1 mit S_2 und ziehe von Z_3 aus durch den Schnitt von AD mit $S_1 S_2$ eine Gerade, dann gibt dieselbe auf der Kreisperipherie einen Punkt B so an, dass Bogen $BD = 3$ Bogen $S_1 D$. Eine ganz elementare Betrachtung wird uns sofort von der Richtigkeit überzeugen. Es sei die Figur in der Weise vervollständigt, dass $S_1 S_2 S_3$ ein inbeschriebenes gleichseitiges Dreieck darstellt. Eür dasselbe ist A der Durchschnitt der 3 Höhen (Perpendikel von den Ecken auf die Gegenseiten). Die in der Mitte der Kreisbogen über den Dreieckseiten liegenden Zwischenpunkte Z_1, Z_2 und Z_3 sind die Symmetriepunkte von A in Bezug auf die Seiten des Dreiecks. Die Schnittpunkte von AD mit den Gegenseiten von S_1, S_2, S_3 seien bez. mit u, v, w benannt. Zieht man $Z_1 u$, $Z_2 v$, $Z_3 w$, so entstehen dadurch die gleichschenkligen Dreiecke Z_1uA, Z_2vA und Z_3wA. Da sich die Winkel DAZ_3 und S_1AD zu 60^0 ergänzen, so ist auch $\angle AZ_3w + \angle AZ_1u = 60^0 = \angle S_1S_2S_3$. Der Kreisbogen unter letzterem Winkel ist desshalb so gross wie die Summe der Kreisbogen unter den Winkeln AZ_1u und AZ_3w. Jener Kreisbogen hat aber mit diesen die Endpunkte S_1 und S_3 gemeinsam, daher vereinigen sich Z_1u, Z_3w und analog auch Z_2v in einem nämlichen Punkte B der Kreisperipherie. Da α auch gleich $\angle AZ_1u$, so ist

Bogen $BS_1 = 2$ Bogen S_1D, also in der That Bogen $BD = 3$ Bogen S_1D.

Ist $\alpha = o$, so fällt auch B mit S_1 zusammen. Bei veränderlichem α bewegt sich B mit doppelter und entgegengesetzter Geschwindigkeit auf dem Kreise wie der Punkt D.

Suchen wir den Ort des Schnittpunktes C der Tangente in B mit der Geraden AD. Es bezeichne a die trig. Tangente von α. A sei der Anfangspunkt eines rechtwinkligen Coordinatensystems. $A S_1$ die positive X-Axe. Der Punkt B hat dann die Coordinaten

$$x_b = \frac{1-a^2}{1+a^2} R \text{ und } y_b = -\frac{2\,a}{1+a^2} R$$

Aus den beiden Gleichungen für die Geraden BC und AD

$$x \frac{1-a^2}{1+a^2} R - y \frac{2\,a\,R}{1+a^2} = R^2 \quad \text{und}$$

$$y = a x \quad \text{ist a zu eliminiren.}$$

$$x \frac{1-\left(\frac{y}{x}\right)^2}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2} - 2\,y \frac{\frac{y}{x}}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2} = R$$

$$x^3 = R x^2 + 3\,x y^2 + R y^2$$

$$y = x \sqrt{\frac{x-R}{3\,x+R}}$$

Wie man aus dieser Gleichung entnimmt, verläuft der Ort von C symmetrisch zur X-Axe und wird für

$$-\frac{R}{3} < x < R$$

im Allgemeinen imaginär. Man bemerke jedoch, dass der Coordinatenanfang ein isolirter Punkt ist.

Wir wollen nicht näher auf diese Curve als solche eintreten, da sie uns im Folgenden nur die Bewegung des Punktes C veranschaulichen soll. Es sei aber noch gestattet, die Gleichung in Polarcoordinaten anzufügen. Dieselbe muss offenbar für A als Pol und AS_1 als Anfangsrichtung lauten

$$r = R \sec 3\alpha$$

Eine ganze Umdrehung von B entspricht einer Aenderung von o bis 3π für 3α. Die Curve besitzt demnach drei congruente Aeste, von denen jeder den Kreis berührt und in's Unendliche geht. Die Berührungspunkte mit dem Kreise sind da, wo $3\alpha = n\pi$, also $\alpha = n\frac{\pi}{3}$, d. h. in den Eckpunkten des Dreiecks $S_1 S_2 S_3$. r wird dann ∞ gross, wenn

$$3\alpha = \frac{\pi}{2} + n\pi$$

$$\alpha = \frac{\pi}{6}(2n + 1), \text{ somit wenn}$$

$$\alpha = 30^0;\ 210^0$$

$$\alpha = 90^0;\ 270^0$$

$$\alpha = 150^0;\ 330^0 \text{ etc.}$$

Die drei reellen Asymptoten stehen um $\frac{R}{3}$ vom Coordinatenanfange ab. Der Krümmungsradius nimmt in den Berührungspunkten der Curve mit dem Kreise, wie sich durch Ableitung der beiden ersten Differentialquotienten auf einfache Weise ergibt, den Werth $\frac{R}{8}$ an.

Indem B die Kreisperipherie einmal durchläuft, durcheilt C die ganze Curve, jedem Punkte B entspricht ein Punkt C.

Scheitel- und Curvendreieck.

Nimmt man (Fig. 3) irgend einen Punkt C der Curve als Mittelpunkt und schlägt mit der Strecke $\overline{CB}$ der

Tangente einen Kreis, so schneidet derselbe den ursprünglichen rechtwinklig. Jede Gerade durch B wird somit von beiden Kreisen Bogen abschneiden, deren Centriwinkel-Summe oder -Differenz 180^0 ausmacht; es stehen auch zwei zum Punkte B perspectivisch liegende Sehnen rechtwinklig zu einander.

Man construire in dem zweiten Kreise das zum Dreieck $S_1 S_2 S_3$ analoge Dreieck, so dass seine Ecken in einem Drittel des Bogens D′B liegen (wo D′ den Schnittpunkt des Kreises CB mit der Geraden AC bedeutet, für welchen D′B dem Centriwinkel $90^0 - 3\alpha$ entspricht).

Die gestellte Forderung bedingt die perspectivische Lage der beiden Dreiecke. In der That: seien die Eckpunkte des neuen Dreiecks so bezeichnet, dass Bogen $(D'F_2, D'F_3, D'F_1) = \frac{1}{3}$ Bogen $(D'B, D'B + 2\pi, D'B + 4\pi)$, so ist der dem Bogen BF_3 entsprechende Centriwinkel $= 120^0 - 2(30^0 - \alpha) = 60^0 + 2\alpha$ das Supplement zu dem Centriwinkel, welcher BS_3 entspricht und gleich $120^0 - 2\alpha$ ist. Dies und die Lage der Bogen berücksichtigend ergibt, dass S_3 und F_3 auf einer Geraden durch B liegen und analog auch die Punktenpaare S_2, F_2 und S_1, F_1.

Der Kürze des Ausdruckes wegen möge es gestattet sein, das ursprüngliche Dreieck $S_1 S_2 S_3$, das die Scheite der Curve verbindet, als *Scheiteldreieck* zu bezeichnen, während das Dreieck $F_1 F_2 F_3$, dessen Mittelpunkt C stets auf der Curve sich bewegt, und welches durch die Angabe des Curvenpunktes bestimmt ist, als *Curvendreieck* benannt werden möge. Wir haben uns, vorläufig wenigstens, das Scheiteldreieck als constant vorzustellen, das Curvendreieck aber als variabel. Beide Dreiecke stehen nach obigem aber immer rechtwinklig zu einander, gleich wie auch der constante *Scheitelkreis* und der variable *Curvenkreis* sich orthogonal schneiden.

Zufolge der perspectivischen Lage der beiden Dreiecke befinden sich die drei Schnittpunkte der sich rechtwinklig durchsetzenden Seiten auf einer geraden Linie, der perspectivischen Axe.

Aus Fig. 2 wollen wir noch entnehmen, dass die Perpendikel B (p_1, p_2, p_3) von B aus auf die Seiten des Dreiecks $S_1 S_2 S_3$, wo p_1, p_2 und p_3 die Schnittpunkte mit den bez. Dreieckseiten bezeichnen, ähnliche Dreiecke zu den als gleichschenklig erkannten Dreiecken A u Z_1, A v Z_2 und A w Z_3 bilden helfen. Wenn auf diesen Perpendikeln

$$p_1 p_1' = B p_1$$
$$p_2 p_2' = B p_2 \text{ und}$$
$$p_3 p_3' = B p_3 \text{ gemacht wird, so liegen}$$

die Punkte p_1', p_2', p_3' auf A C. Der nämliche Schluss hat auch Geltung für die Perpendikel B (q_1, q_2, q_3) auf die Seiten des Dreiecks $F_1 F_2 F_3$, daher nach Grösse und Richtung (Fig. 3)

$$q_1 q_1' = B q_1$$
$$q_2 q_2' = B q_2$$
$$q_3 q_3' = B q_3$$

vorausgesetzt, die Punkte q_1', q_2', q_3' auch auf A C liegen.

Es bilden die Punkte p_1', B, q_1' ein rechtwinkliges Dreieck, somit ist $\angle B q_1' p_1'$ das Complement zu $\angle q_1' p_1' B$ also auch zu $p_1' B u$, das heisst $\angle u B q_1' = \angle u p_1' B$. $F_2 F_3$ wird mithin A C ebenfalls in u schneiden. Analog finden wir, dass die Schnittpunkte von $F_3 F_1$ mit $S_3 S_1$ und von $F_1 F_2$ mit $S_1 S_2$ zusammenfallen mit v und w.

In unserem Falle ist also die dem Punkte B als Pol entsprechende perspectivische Axe der beiden Dreiecke identisch mit A C.

Drei Gerade durch je drei Schnittpunkte.

Das Scheiteldreieck schneidet irgend ein Curvendreieck in 9 Punkten so, dass zehn mal je drei auf einer Geraden liegen.

Diese Geraden sind: die 6 Dreieckseiten, die vorhin genannte perspectivische Axe und dann *noch 3 Gerade, welche durch ein und denselben Punkt des Scheitelkreises gehen.*

Wenn man die 9 Schnittpunkte von S_1 aus in der Richtung, in welcher B läuft, nummerirt, erhält man (Fig. 4):

Schnitt	von	$S_1 S_3$	mit	$F_3 F_2$	. . . 1
„	„	„	„	$F_2 F_1$	. . . 2
„	„	„	„	$F_1 F_3$	. . . 3
„	„	$S_3 S_2$	„	$F_1 F_3$	. . . 4
„	„	„	„	$F_3 F_2$	. . . 5
„	„	„	„	$F_2 F_1$	. . . 6
„	„	$S_2 S_1$	„	$F_2 F_1$	. . . 7
„	„	„	„	$F_1 F_3$	. . . 8
„	„	„	„	$F_3 F_2$	. . . 9

Es ist zu beweisen, dass 1, 4, 7; 2, 5, 8; 3, 6, 9 je auf einer Geraden liegen. Es möge dies hier für 1, 4, 7 dargethan werden.

Weil die Punkte u, v, w zusammenfallen mit 5, 3 und 7, so entspringen in 3 und 5 zwei harmonische Strahlsysteme (Schenkel eines Winkels und seine Halbirungslinien), nämlich 3 (B, 1, 5, 4) und 5 (B, 1, 3, 4). Der eine Strahl ist gemein, somit liegen 4 und 1 mit B auf derselben geraden Linie, welche, da 1 der Höhendurchschnitt des Dreieckes $S_3\,4\,F_3$ ist, senkrecht zu $S_3 F_3$ steht, also liegen auch 7 und Z_3 auf ihr. Die Punkte B, 1, 7, 4 liegen harmonisch.

Es sei noch bemerkt, dass man aus den beiden Dreiecken $B\,4\,S_3$ und $B\,4\,F_3$ sofort die Relation ablesen kann:

$$\operatorname{tg}\alpha : \operatorname{tg} 3\alpha = \operatorname{tg}(30^0 - \alpha) : \operatorname{tg}(60^0 - \alpha),$$ weil

$\angle B 4 S_3 = 30^0 - \alpha$, $\angle B 4 F_3 = \alpha$, $\overline{S_3 B} = 2 R \sin(60^0 - \alpha)$, $\overline{B F_3} = 2 R \operatorname{tg} 3\alpha \cos(60^0 - \alpha)$, also

$$\frac{\operatorname{tg}(30^0 - \alpha)}{\operatorname{tg}\alpha} = \frac{2 R \sin(60^0 - \alpha)}{2 R \operatorname{tg} 3\alpha . \cos(60^0 - \alpha)} \text{ oder}$$

$$\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg} 3\alpha} = \frac{\operatorname{tg}(30^0 - \alpha)}{\operatorname{tg}(60^0 - \alpha)}$$

Auf ähnliche Weise folgt, dass auch B, 2, 5, 8 mit Z_1 und B, 3, 6, 9 mit Z_2 je auf einer Geraden liegen. (Mehrfache perspectivische Lage von $S_1 S_2 S_3$ und $F_1 F_2 F_3$.)

Bewegt sich der Curvenpunkt C, so bleiben die Punkte Z_1, Z_2, Z_3 fest. Die vier veränderlichen Punkte — B und drei Schnittpunkte — auf jeder Geraden haben stets eine harmonische Lage.

Daraus ergibt sich:

Legt man in einem, einem gleichseitigen Dreieck umschriebenen Kreise durch die Mitte des Bogens über einer Seite einen beliebigen Strahl, so sind der zweite Schnittpunkt mit dem Kreise und der Schnittpunkt mit jener Seite harmonisch zugeordnet zu den Schnittpunkten mit den zwei andern Seiten; oder: *Zieht man eine beliebige Kreissecante B Z (B und Z Punkte des Kreises) und legt eine Ecke eines regulären inbeschriebenen Dreieckes durch den Gegenpunkt von Z, so sind auf der Secante B und die drei Schnitte mit den Dreieckseiten harmonisch gelegen;* umgekehrt:

Zieht man durch einen der drei, zum Mittelpunkte eines regelmässigen Dreiecks in Bezug auf die Seiten symmetrisch gelegenen Punkt einen Strahl und bestimmt auf demselben den zu den drei Schnittpunkten mit den Dreieckseiten harmonisch gelegenen, dem Schnittpunkte der bez. Dreieckseite zugeordneten Punkt B, so ist sein Ort ein Kreis.

Der oben bewiesene Satz über die Beziehungen der neun Schnittpunkte zu einander kann auch in folgender Weise ausgesprochen werden: *Ist einem Kreise ein gleichseitiges Dreieck eingeschrieben, und zieht man von irgend einem Punkte B des Kreises Strahlen nach den Mitten* Z_1, Z_2, Z_3 *der Bogen über den Seiten, so liegen von den Schnittpunkten mit den Dreieckseiten zehn mal je drei auf einer Geraden.* Diese sind: *Die drei Dreieckseiten, die drei Strahlen durch* Z_1, Z_2, Z_3, *drei weitere Gerade, welche ebenfalls ein gleichseitiges Dreieck* $F_1 F_2 F_3$ *bilden, das zum vorigen rechtwinklig und perspectivisch liegt und endlich eine zu jenem Punkte B gehörende perspectivische Axe der beiden Dreiecke.*

Für diese Umkehrung möge noch folgende Ueberlegung beigefügt werden:

Beachten wir die drei durch B und S_3 gehenden Kegelschnitte:

a) den Kreis A,

b) die zwei Geraden $B Z_3$ und $S_1 S_3$,

c) „ „ „ $B Z_2$ „ $S_2 S_3$

und gründen uns auf den Satz: Wenn drei Kegelschnitte durch zwei Punkte gehen, so gehen die Verbindungslinien der übrigen Schnittpunkte durch ein und denselben Punkt, so folgt:

zweiter Schnitt von a) mit b) . . .	Punkte S_1	und Z_3
„ „ „ a) „ c) . . .	„ S_2	„ Z_2
„ „ „ b) „ c) . . .	„ 3	„ 4

Die Geraden $S_1 Z_3$, $S_2 Z_2$ und 34 müssen sich somit in einem Punkte vereinigen. $S_1 Z_3$ und $S_2 Z_2$ sind parallel, folglich muss auch 34 dazu parallel sein, also auf $S_1 S_3$ senkrecht stehen.

In Bezug auf die durch B und S_1 gehenden Kegelschnitte:

a) den Kreis A,

b) die zwei Geraden $S_1 S_2$ und $B Z_2$,

c) „ „ „ $S_1 S_3$ „ $B Z_1$

machen wir ganz die nämlichen Schlüsse, woraus resultirt, dass 3 8 auf $S_1 S_3$ ebenfalls senkrecht steht, somit wirklich 4 3 8 eine Gerade senkrecht zu $S_1 S_3$ ist, und in derselben Weise:

7 2 6 „ „ „ „ $S_1 S_2$,
5 1 9 „ „ „ „ $S_2 S_3$.

Sechs Gerade und sechs constante Punkte.

Fassen wir die sechs nicht auf der erzeugenden Geraden A C liegenden Schnittpunkte in's Auge, so gilt:

Von den Verbindungslinien zweier nicht schon auf einer nämlichen der obgenannten Geraden liegenden Schnittpunkte geht jede, wenn der Punkt C auf der Curve variirt, durch einen constanten Punkt ausserhalb des Kreises A.

Ohne die Punkte auf A C bleiben uns noch 1, 2, 4, 6, 8, 9; davon liegt z. B. 4 schon auf den vorhandenen Geraden 4 6, 4 8 und 4 1; es können somit von 4 aus noch 4 2 und 4 9 construirt, überhaupt im Ganzen noch $\frac{2 \cdot 6}{2} = 6$ Verbindungslinien gezogen werden. Dieselben sind

1 6, 4 9, 1 8, 4 2, 2 9, 6 8.

Denken wir uns den Punkt C, somit auch das Curvendreieck $F_1 F_2 F_3$ veränderlich, so werden natürlich die obigen 6 Punkte andere Lagen (1', 2' ...., 1'', 2'' .... etc.) annehmen und damit auch die 6 Geraden. Nach voriger Behauptung soll aber Gerade 1 6, 1' 6', 1'' 6'' u. s. f. durch ein und denselben Punkt gehen, ferner 1 8, 1' 8', 1'' 8'' u. s. f. durch einen andern constanten Punkt u. s. w. Es sei genügend, dies für 4 2 darzuthun.

a) der Kreis A,
b) die Geraden $B Z_3$ und $S_1 S_3$,
c) „ „ $B Z_1$ „ $S_2 S_3$

sind drei Kegelschnitte durch B und S_3, demnach vereinigen sich die Linien $S_1 Z_3$, $S_2 Z_1$ und 4 2 in einem Punkte N. $S_1 Z_3$ und $S_2 Z_1$ sind aber constante Gerade, also ist auch Punkt N fest. Er ist von Z_3 und S_2 je um den Radius R entfernt.

Berücksichtigt man die vorn angegebene harmonische Lage des Punktes B, so folgt, dass die eben erwähnten Verbindungslinien *harmonisch zu den drei schon durch einen Punkt gehenden Strahlen liegen und zwar je einer Seite des Scheitel- oder des Curvendreiecks zugeordnet sind* (Beispiel: 4 9 mit 4 6 harmonisch zugeordnet zu 4 3 und 4 B).

In den Punkten Y_1, Y_2, Y_3, in welchen A C von den Geraden B (S_1, S_2, S_3) geschnitten wird, müssen sich demnach je zwei der 6 Verbindungslinien schneiden.

Bestimmt man auch zu den Punkten 3, 5, 7 einen vierten harmonischen Punkt, so fallen die 3 Lösungen zusammen mit den Punkten Y_1, Y_2, Y_3 und umgekehrt.

Es liegen ebenfalls harmonisch

$$B, S_1, Y_1, F_1,$$
$$B, S_2, Y_2, F_2,$$
$$B, S_3, Y_3, F_3,$$

so dass zu B jeweilen einer der Punkte Y zugeordnet ist:

Durchsetzen sich zwei Kreise rechtwinklig in B und B_1, so sind die Strahlen von B aus nach den Punkten, welche den Drittel der Bogen BB_1 abgrenzen, so gelegen, dass auf ihnen B und der Durchschnitt mit dem beiden Kreisen gemeinsamen Durchmesser harmonisch zugeordnet sind zu den zweiten Schnitten mit den Kreisen.

Beziehungen zu der Determinante dritten Grades.

Die dargelegten Eigenschaften, welche in der gegenseitigen Lage der neun Schnittpunkte von Scheitel- und Curvendreieck auftreten, können übersichtlich dargestellt werden, wenn man sich der Anordnung der Schnittpunkte in Determinantenform bedient. Es soll also die Determinante nicht zur Darstellung von Werthen, sondern zur direkten Darstellung von Lagenbeziehungen gebraucht werden.

Seien die neun Schnittpunkte in das Schema gebracht

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}, \text{ so folgt:}$$

1. *Nicht nur die Punkte einer nämlichen Zeile, sondern auch diejenigen einer nämlichen Spalte liegen je auf einer Geraden.*

2. *Positive Terme: Constanz der Richtung.*

Die positiven Terme 1 5 9, 2 6 7, 3 4 8 stellen je drei Punkte auf den Seiten des Curvendreieckes dar. Diese Seiten haben bei variirendem Curvenpunkte C stets eine constante Richtung (je senkrecht zu den Seiten des Scheiteldreieckes).

3. *Negative Terme: Constanz je eines Punktes.*

Jeder der negativen Terme bestimmt 3 Gerade:

1 6 8	:	1 6, 1 8, 6 8
2 4 9	:	2 4, 2 9, 4 9
3 5 7	:	3 5, 3 7, 5 7

Von diesen Geraden geht jede bei veränderlichem Curvenpunkte C durch einen festen, im Endlichen liegenden Punkt, durch denselben ein Strahlenbüschel bildend.

Die drei Geraden, welche der Term 3 5 7 (die negative Diagonale der Determinante) darstellt, fallen in eine einzige Gerade zusammen, weil die Punkte 3, 5, 7 auf der perspectivischen Axe (AC) von Scheitel- und Curvendreieck liegen. Diese dreht sich um den Mittelpunkt A des Scheitelkreises.

4. *Wird irgend ein Element der Determinante durch cyklische Vertauschung zum ersten gemacht, so bestimmen die drei ihm angehörigen Stücke* (Zeile, Diagonale, Spalte) *die drei ihm angehörigen Geraden* (Seite des Scheiteldreiecks, Seite des Curvendreiecks, durch B gehende Gerade).

Will man z. B. wissen, welche Geraden durch 8 gehen, so wird 8 durch cyklische Vertauschung zum ersten Punkte gemacht:

$$\begin{vmatrix} 8 & 9 & 7 \\ 2 & 3 & 1 \\ 5 & 6 & 4 \end{vmatrix},$$

woraus entnommen werden kann:

8 9 7 Scheiteldreieckseite durch 8,
8 3 4 Curvendreieckseite durch 8,
8 2 5 Gerade durch B.

5. *Mit den drei durch Zeile, Diagonale und Spalte angegebenen Strahlen durch einen Punkt tritt jeder der beiden übrigen durch diesen Punkt noch angebbaren Strahlen zu einem harmonischen Viergestrahle zusammen.*

Beispiel: Zu den Strahlen 8 9 7, 8 3 4 und 8 2 5 ist 8 1 oder 8 6 ein vierter harmonischer Strahl.

Diese vierten harmonischen Strahlen gehören sämmtlich zu den unter 3. aufgeführten Geraden, welche durch die negativen Terme dargestellt werden.

Zusammenhang mit Kegelschnitten.

Halten wir ein bestimmtes *Curvendreieck fest*, so stehen die obigen Linien in inniger Beziehung mit bestimmten Kegelschnitten, für welche ein Brennpunkt der Punkt B und die dazu gehörige Leitlinie A C ist.

Bedeutet m das constante Verhältniss der Abstände eines Kegelschnittpunktes vom Brennpunkte und von der Leitlinie, oder die Excentricität, so ist bekanntlich für $m \overset{<}{\underset{>}{=}} 1$ der Kegelschnitt bez. eine Ellipse, Parabel oder Hyperbel.

Es sei der Zusammenhang an den Beispielen $m = 1, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{2}{3}, \frac{2}{\sqrt{3}}, 2$ gezeigt (Fig. 5).

$m = 1$*). Da von B aus die Fusspunkte der Perpendikel auf die Seiten von Scheitel- und Curvendreieck in einer Geraden liegen und je zwei der Seiten sich rechtwinklig auf A C schneiden, so berühren die sechs Seiten eine Parabel, deren Brennpunkt B und deren Leitlinie A C ist. Wird der Brennpunkt B und die Leitlinie festgehalten, so ändert sich der wesentliche Charakter des Gebildes nicht, wenn die Punkte A und C auf der Leitlinie sich so bewegen, dass die Strecke A C von B aus stets unter rechtem Winkel erscheint. — *Für die Construction von Parabeltangenten,* wenn der Brennpunkt B und die Leitlinie gegeben sind, folgt hieraus unter *Benutzung der Bogendreitheilung: Man wähle irgend einen Punkt A der Leitlinie als Centrum, schlage mit* $\overline{AB}$ *einen*

---

*) Ueber der Parabel umschriebene Tangenten etc., vgl.: Jakob Steiner: Theorie der Kegelschnitte in elementarer Darstellung, bearbeitet von Dr. C. F. Geiser. Leipzig 1875.

Kreisbogen, der die Leitlinie in D treffen möge, und theile den Bogen DB in drei gleiche Theile. Ist S_1 der erste Theilpunkt von D aus, so ziehe man durch S_1 zwei zu dem Radius S_1A unter $\pm 30^0$ geneigte Strahlen, so sind dieselben Tangenten an die Parabel. Zieht man durch B Gerade, die mit der Sehne BS_1 bezüglich die Winkel $\pm 60^0$ bilden, so gehen diese durch die Berührungspunkte der obigen Tangenten. In gleicher Weise:

Die Ecken eines der Parabel umschriebenen gleichseitigen Dreieckes liegen mit dem Brennpunkte so auf einem Kreise, dass sie auf diesem den Drittel des Bogens zwischen der Leitlinie und dem Brennpunkte angeben.

Legt man den Scheitel eines rechten Winkels in den Brennpunkt einer Parabel, schlägt zwei Kreise, deren Radien die Abschnitte AQ nnd CR der Schenkel zwischen der Leitlinie und der Scheiteltangente sind, und deren Mittelpunkte sich in den Schnitten A und C der Schenkel mit der Leitlinie befinden, und zieht an jeden dieser Kreise die mit der Parabel gemeinsamen Tangenten, mit Ausschluss derjenigen zwei, welche sich sofort als Senkrechte zu den Schenkeln construiren lassen, so bilden diese Tangenten das Scheitel- und das Curvendreieck mit ihren gegenseitigen Beziehungen. Dabei treten besonders noch sechs *gleichschenklige, einander ähnliche Dreiecke* hervor. Es sind dies die Dreiecke (Fig. 6):

$$S_1\ 1\ 9\ ,\ F_1\ 4\ 6,$$
$$S_2\ 4\ 8\ ,\ F_2\ 1\ 2,$$
$$S_3\ 2\ 6\ ,\ F_3\ 8\ 9.$$

Seien die Radien AQ und CR der beiden Kreise mit ϱ und ϱ' bezeichnet, so dass man hat $\varrho' = \varrho \operatorname{tg} 3\,\alpha$, so folgt nach einigen kleinen Rechnungen für den *Inhalt* der Dreiecke:

$\triangle\, S_1\, 1\, 9 = \varrho^2 \sqrt{3}.\ \mathrm{tg}^2\, \alpha;\ \triangle\, F_1\, 4\, 6 = \varrho^2 \sqrt{3}.\ \mathrm{tg}^2 (60^0 + \alpha)$
$\mathrm{tg}^2\, (60^0 - \alpha)$

$\triangle\, S_2\, 4\, 8 = \varrho^2 \sqrt{3}.\ \mathrm{tg}^2 (60^0 + \alpha);\ \triangle\, F_2\, 1\, 2 = \varrho^2 \sqrt{3}.\ \mathrm{tg}^2\, \alpha.$
$\mathrm{tg}^2\, (60^0 - \alpha)$

$\triangle\, S_3\, 2\, 6 = \varrho^2 \sqrt{3}.\ \mathrm{tg}^2 (60^0 - \alpha);\ \triangle\, F_3\, 8\, 9 = \varrho^2 \sqrt{3}.\ \mathrm{tg}^2\, \alpha.$
$\mathrm{tg}^2\, (60^0 + \alpha).$

Für das *Produkt der Inhalte je zweier Dreiecke*, die auf der nämlichen Zeile stehen, findet man unter Berücksichtigung der Relation $\frac{\mathrm{tg}\, \alpha}{\mathrm{tg}\, 3\, \alpha} = \frac{\mathrm{tg}\, (30^0 - \alpha)}{\mathrm{tg}\, (60^0 - \alpha)}$ *stets den Werth:*

$$(\varrho^2 \sqrt{3})^2\, \mathrm{tg}^2\, 3\, \alpha$$
$$= 3\, (\varrho \varrho')^2$$

$m = \frac{1}{\sqrt{3}}$. Nach Früherem (pag. 61) schneiden sich die sechs Verbindungslinien 16, 49; 18, 42 und 29, 68 in Punkten, welche mit den Schnitten von B (S_1, S_2, S_3) mit A C zusammenfallen. Ebenso bilden die sechs Geraden ein *Brianchon'sches Sechsseit.* Bedenkt man ferner, dass von einem Brennpunkte aus der Strahl nach dem Schnittpunkte zweier Tangenten den Winkel halbirt zwischen den Strahlen nach den Berührungspunkten und dass, wenn der Schnittpunkt der Tangenten auf der Leitlinie liegt, die Berührungssehne durch den zugehörigen Brennpunkt geht, so finden wir, dass der Kegelschnitt, der jene sechs Geraden berührt, A C zur Leitlinie und B zum zugehörigen Brennpunkte hat. Lassen wir A auf der Leitlinie in's Unendliche rücken, so folgt sofort, dass für diesen Kegelschnitt $m = \mathrm{tg}\, 30^0 = \frac{1}{\sqrt{3}}$ ist.

Von den 15 Schnittpunkten des angeführten Sechsseits befinden sich drei auf der Leitlinie A C, sechs (die Punkte 1, 2, 6, 4, 8, 9) sind so gelegen, dass von ihnen aus die Parabel unter 150^0, resp. 30^0, erscheint, sie liegen also auf einer Hyperbel, hingegen die noch übrigen sechs, ein Pascal'sches Sechseck bildend, auf einer Ellipse:

$m = \frac{2}{\sqrt{3}}$. Wenn wir den Grenzfall, wo A in's Unendliche rückt, in's Auge fassen, so bildet 8 mit C und B ein rechtwinkliges Dreieck mit den Katheten $\overline{8B} = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \overline{CB}$ und $\overline{CB} = \overline{CB}$; $m = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \overline{CB} : \overline{CB} = \frac{2}{\sqrt{3}}$. Der Ort eines Punktes der Ebene, von welchem aus eine Parabel unter 150^0, resp. 30^0, erscheint, ist eine Hyperbel mit der Excentricität $\frac{2}{\sqrt{3}}$.

$m = \frac{2}{3}$. In dem erwähnten Grenzfalle bilden 24, 86 und AC ein Dreieck, für welches jede Seite gleich $2\sqrt{3} \cdot \overline{CB}$ ist, somit die Höhe des Dreieckes $h = 3\,\overline{CB}$ und $m = \frac{3\,\overline{CB} - \overline{CB}}{3\,\overline{CB}} = \frac{2}{3}$ wird.

$m = 2$.*) Endlich liegen auch die Ecken des Scheitel- und des Curvendreiecks auf einem Kegelschnitte, dessen Brennpunkt B und dessen Leitlinie AC ist, weil von ihnen aus die Parabel unter 120^0, resp. 60^0, erscheint. Da diese Punkte je in einem Drittel (pag. 55) eines Kreisbogens liegen, der von der Leitlinie (zu der er senkrecht steht) und vom Brennpunkt begrenzt ist, so wird $m = 2$.

Von dem Kegelschnitte $m = \frac{2}{3}$ ausgegangen, kommt:

---

*) Man vgl. über Eigenschaften dieser Hyperbel besonders: Prof. Dr. G. Sidler: Zur Dreitheilung eines Kreisbogens. Bern. 1876 auch: Prof. S. Günther: Winkeltheilung. Programm Delitzsch. 1877. Broager: Vinklens Tredeling og den indskrevne Firkant. Tidsskrift for Mathematik, udgivet af C. Tychsen. Kopenhagen. IV. 113.

Man lege durch den Brennpunkt B einer Ellipse, deren Excentricität $m = \frac{2}{3}$, *drei Gerade so, dass jede mit der unmittelbar nachfolgenden einen Winkel von* 60^0 *ausmacht. Diese Geraden begrenzen sechs einzelne Bogen in der Weise, dass die bezüglichen sechs Bogensehnen eine Ellipse* $m = \frac{1}{\sqrt{3}}$ *berühren und dass von den durch die Sehnen gebildeten fünfzehn Schnittpunkten, von denen sechs die Endpunkte der Bogen sind und drei auf der Leitlinie liegen, die restirenden sechs auf einer Hyperbel* $m = \frac{2}{\sqrt{3}}$ *sich befinden. Die noch möglichen sechs nicht durch B gehenden Verbindungslinien der letztern Punkte tangiren eine Parabel und bilden zwei gleichseitige, einer nämlichen Hyperbel* $m = 2$ *einbeschriebene Dreiecke. Die Mittelpunkte dieser und der Punkt B sind die Ecken eines rechtwinkligen Dreiecks, für welches der durch die Hypotenuse und eine Kathete gebildete Winkel vermittelst der Strahlen nach den Eckpunkten des bezüglichen regulären Dreiecks trisecirt wird.*

Wie man bei der Verdreifachung des Bogens aus drei gleichwerthigen Punkten des Kreises auf den nämlichen Punkt B geführt wurde, so ist umgekehrt für die Angabe des Drittels wohl zu berücksichtigen, dass drei Werthe auftreten müssen, die sich um $\frac{1}{3} 2 n \pi$ unterscheiden (n ganz, positiv oder negativ).

Im Nachstehenden seien einige Verfahren zur Trisection des Bogens, bezw. Winkels, die sich sofort aus Fig. 4 ablesen lassen, gegeben.

Trisection mit der Curve $r = a \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} + b$.

1.) Die Punkte 5, 3, 7 (Fig. 4) stehen von A ebenso weit ab, wie beziehungsweise von Z_1, Z_2, Z_3. Die letztern können desshalb als Schnitt des Scheitelkreises mit einer Curve aufgefasst werden, welche entsteht, indem man durch B einen variabeln Strahl l legt und vom Schnittpunkte L dieses Strahls mit der festen Geraden AD aus auf demselben je die Strecke LZ und LZ′ gleich LA abträgt.

Damit die Curve direkt die Punkte S_1, S_2, S_3 angebe, ist sie offenbar nur für A und B als feste Punkte und für eine feste Gerade t, welche in A senkrecht auf AD steht zu construiren.

Sei B der Pol und BJ (Fig. 7 a) die mit der Richtung AT der festen Geraden t übereinstimmende Anfangslage von l, wird ferner der Abstand des Punktes B von t gleich a gesetzt, und bedeutet b die Projektion von $\overline{BA}$ auf BJ, so ist

$$r = BL \mp AL$$

$$BL = \frac{a}{\sin \varphi}$$

$$AL = \frac{a}{\operatorname{tg} \varphi} - b$$

$$r = \frac{a}{\sin \varphi} \mp \frac{a}{\operatorname{tg} \varphi} \pm b$$

$$r = a \frac{1 \mp \cos \varphi}{\sin \varphi} \pm b,$$

woraus unter Berücksichtigung der obern Zeichen folgt

$$r = a \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} + b$$

und mit Rücksicht auf die untern Zeichen

$$r = a \operatorname{cotg} \frac{\varphi}{2} - b$$

Es genügt, nur die eine der beiden Gleichungen zu berücksichtigen, da

$$-\left(a \operatorname{tg} \frac{180^0 + \varphi}{2} + b\right) = a \operatorname{cotg} \frac{\varphi}{2} - b \text{ ist.}$$

Die Dreitheilung eines beliebigen Bogens D B (Fig. 8), der einem Kreise A mit dem Radius 1 angehört, lässt sich daher folgendermassen ausführen: *Durch den Punkt B als Pol und mit der zu AD senkrechten Anfangsrichtung AT lege man eine Curve, deren Polargleichung*

$r = a \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} + b$ ist, wobei a den Cosinus und b den Sinus des zu theilenden Bogens darstellt.

Wählt man A (Fig. 7 a) zum Coordinatenanfang und die feste Gerade AT zur Y-Axe, so hat der Punkt B in diesem System die Coordinaten a und b. Für Z ist dann

$$\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} = \frac{y}{x}$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{a}{\frac{1}{2} \sqrt{x^2 + y^2} : \sin \frac{\varphi}{2} - b}$$

Eliminirt man φ aus beiden Gleichungen, so kommt

$$y = x \frac{\sqrt{a^2 + b^2 - x^2} + b}{x + a}$$

Die Curve ist also nur für diejenigen x reell, für welche auch der Kreis, dessen Bogen zu triseciren sind, reelle Punkte hat. Ist der zu theilende Bogen $\frac{\pi}{2}$, so zerfällt die Curve in eine Gerade

$$x = o$$

und einen Kreis

$$x^2 + (y - b)^2 = b^2$$

J. R. Vaňaus*) ist von der Gleichung

---

*) ČASOPIS ČESKÝCH MATHEMATIKŮ. Prag, 1881. X. 153.

$$A x^3 + B y^3 + C x y^2 + D y x^2 + E x^2 + F y^2 + G x y = o$$

durch Setzung von

$$\begin{aligned} A &= C = -c, \\ B &= D = 1, \\ E &= -F = 2rc \\ \text{und } G &= -4r \end{aligned}$$

zu der Gleichung

$$[y^2 (2r + x) - x^2 (2r - x)]\, c = y\, (y^2 + x^2 - 4rx)$$

gelangt und hat für den geometrischen Ort M, der durch diese Gleichung dargestellt ist, eine Construction und eine Anwendung zur Trisection gegeben. Die Curve selbst nennt er die Trisectorie.

Die Construction ist die folgende:

Ueber einer Strecke $\overline{OP} = 2r$ werde ein Kreis geschlagen, durch P eine Secante geführt, welche mit OP einen gegebenen Winkel γ bildet [$\operatorname{tg} \gamma = c$]. Von O aus ziehe man einen beliebigen Strahl, der den Kreis in K und die Secante in H treffen möge und mache auf demselben $KM = -KH$.

Wenn man die Gleichung $y = x \dfrac{\sqrt{a^2 + b^2 - x^2} + b}{x + a}$ so transformirt, dass AB als positive X-Axe dient, so erhält man nach ausgeführter Reduktion

$$-\frac{a}{b} x^3 + y^3 - \frac{a}{b} x y^2 + y x^2 + \frac{a}{b} \sqrt{a^2 + b^2}\; x^2$$
$$-\frac{a}{b} \sqrt{a^2 + b^2}\; y^2 - 2 \sqrt{a^2 + b^2}\; x y = o$$

Diese Gleichung genügt den obigen Bedingungen. Es wird $c = \dfrac{a}{b}$ und $r = \dfrac{1}{2} \sqrt{a^2 + b^2}$. Die vorstehend abgeleitete Hülfscurve ist somit mit der Trisectorie identisch. Die Constructionen müssen sich desshalb auch in einander überführen lassen. In der That: Eine Gerade

BH (Fig. 7 b), welche parallel zu der festen Geraden t gelegt wird, schneide den Strahl AZ in H; dann ist das Dreieck ZBH ähnlich zum gleichschenkligen Dreieck ZLA. Das Perpendikel BK von B aus auf AZ trifft AZ desshalb in einem Punkte K, welcher von Z und H gleich weit entfernt ist. Der Ort von K aber ist ein Kreis mit $\overline{AB}$ als Durchmesser, woraus die Vaňaus'sche Construction folgt.

Es sei noch erwähnt, dass vielleicht die Trisectorie den arabischen Mathematikern bekannt gewesen sein mag (vgl. in der Seite 50 genannten Uebersetzung Wöpcke's: Addition E. pag. 117).

2.) Es liegen (Fig. 4) die Punkte B, S_1, Y_1, F_1 ebenso B, F_2, Y_2, F_2 und B, S_3, Y_3, F_3 harmonisch, so dass jeweilen die Punkte Y_1, Y_2, Y_3 dem Punkte B zugeordnet sind.

Führt man also durch B ein Strahlenbüschel, das den Kreis AB in den Punkten S und den Kreis CB in F trifft und bestimmt den geometrischen Ort des zu B, S und F harmonischen und B zugeordneten Punktes Y, so sind durch den Schnitt des Ortes Y mit der Geraden AC die Punkte Y_1, Y_2 und Y_3 gegeben, und die Dreitheilung ist gelöst.

Um die Punkte Y zu construiren, kann man (Fig. 9) eine feste Gerade $B_2 B_3$ bestimmen, wo B_2 und B_3 auf den Kreisen AB und CB diejenigen Punkte darstellen, welche von B um die Strecke $\overline{BB_1}$ entfernt sind und nicht mit B_1 zusammenfallen.

Die Gerade $B_2 B_3$ geht offenbar auch durch B, weil die Kreise AB und CB sich rechtwinklig schneiden.

Man ziehe aus B_1 nach dieser festen Geraden einen beliebigen Strahl $B_1 L$ und mache auf demselben LY = LB.

In der That: Zieht man $\overline{BY}$, wodurch die zugehörigen Punkte S und F erhalten werden, so gilt die Relation

$$\frac{1}{\overline{BY}} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\overline{BS}} + \frac{1}{\overline{BF}}\right),$$

denn wenn $\angle B_1 L B = \varphi$, und wenn 3α wie oben den Winkel C A B bezeichnet, so ist

$$\overline{BY} = 2\,\overline{BL}\sin\frac{\varphi}{2}$$

$$\overline{BL} = \overline{BB_1}\,\frac{\sin(6\alpha + \varphi)}{\sin\varphi}$$

$$\overline{BY} = 2\,\overline{BB_1}\,\frac{\sin(6\alpha + \varphi)}{\sin\varphi}.\sin\frac{\varphi}{2}$$

$$\overline{BY} = \overline{BB_1}\,\frac{\sin(6\alpha + \varphi)}{\cos\frac{\varphi}{2}}$$

$$\frac{1}{\overline{BY}} = \frac{1}{\overline{BB_1}}\,\frac{\cos\frac{\varphi}{2}}{\sin(6\alpha + \varphi)};$$

ferner

$$\overline{BS} = \overline{BB_1}\,\frac{\cos\left(3\alpha + \frac{\varphi}{2}\right)}{\sin 3\alpha}$$

$$\overline{BF} = \overline{BB_1}\,\frac{\sin\left(3\alpha + \frac{\varphi}{2}\right)}{\cos 3\alpha}$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\overline{BS}} + \frac{1}{\overline{BF}}\right) = \frac{1}{2.\,\overline{BB_1}}\left(\frac{\sin 3\alpha}{\cos\left(3\alpha + \frac{\varphi}{2}\right)} + \frac{\cos 3\alpha}{\sin\left(3\alpha + \frac{\varphi}{2}\right)}\right)$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\overline{BS}}+\frac{1}{\overline{BF}}\right)=\frac{1}{\overline{BB_1}}\;\frac{\cos\frac{\varphi}{2}}{\sin(6\,\alpha+\varphi)}$$

also wirklich

$$\frac{1}{\overline{BY}}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\overline{BS}}+\frac{1}{\overline{BF}}\right)$$

Damit ist gezeigt, wie die unter 1.) aufgeführte Curve auch als Ort eines harmonischen Punktes angesehen werden kann.

Bezeichnen S und F die Peripherien zweier Kreise, die sich in den Punkten B und B_1 rechtwinklig treffen, so schneidet der Ort des Punktes Y, welcher auf einem durch B gelegten veränderlichen Strahle $B\,S_j\,F_j$ zu den drei Punkten B, S_j, F_j harmonisch liegt und B zugeordnet ist, den gemeinsamen Durchmesser beider Kreise in drei Punkten Y_i so, dass S_i und F_i die Bogen $B\,B_1$ triseciren.

Trisection mit der Kreisconchoïde.

Die Verwendung der von den Griechen schon zur Trisection benutzten Kreisconchoïde lässt sich aus Fig. 4 ebenfalls entnehmen. Das Scheiteldreieck ist als gleichseitiges Dreieck einem zum Scheitelkreise concentrischen Kreise mit halb so grossem Radius umschrieben. Analoges gilt auch vom Curvendreieck. In den Punkten 3, 5, 7 treffen sich die senkrecht zu einander stehenden Seiten der beiden Dreiecke. Wir wollen uns desshalb den geometrischen Ort denken, der durch den Schnittpunkt (G) zweier sich unter 90^0 treffenden Geraden s und f (Fig. 7 c) entsteht, wenn zwei feste Kreise bezw. von s und f berührt werden. Der so gebildete Ort von Punkten stellt bekanntermassen zwei Kreisconchoïden dar*). Jeder der

---

*) Sur la cardioïde et le limaçon de Pascal par M. Weill, prof. de Mathématiques. Nouvelles Annales de Mathématiques. XX, 1881, pag. 160.

Schnitte B und B_1 von Scheitel- und Curvenkreis wird ein Doppelpunkt, weil man von jenen Punkten aus die Strecke $\overline{AC}$ unter 90^0 und die beiden oben erwähnten Kreise mit den Radien $\frac{\overline{AB}}{2}$ und $\frac{\overline{CB}}{2}$ unter gleichem Winkel von 60^0 sieht. Die Berührungspunkte der beiden Conchoïden mit den zwei festen Kreisen liegen in zwei Geraden parallel zu A C. Es geht auch unmittelbar aus der Definition hervor, wie die Berührungspunkte erhalten werden können. Beide Conchoïden müssen zufolge der Symmetrie die Punkte 3, 5, 7 gemein haben. Es genügt also nur eine, etwa diejenige mit dem Doppelpunkte in B, zu berücksichtigen. Die zwei einbeschriebenen Kreise können bekanntlich ohne ihre Eigenschaft als Berührungskreise einer Conchoïde zu verlieren, sich verändern, jedoch so, dass sie von B aus unter dem Winkel von 60^0 erscheinen und hre Mittelpunkte auf dem durch A B C gehenden Kreise liegen, welcher für die Conchoïde der Grundkreis wird*). An diesen Kreis lehnt sich auch die ursprüngliche Definition der Conchoïde an, nach welcher sie entsteht, indem man von einem Punkte aus einen veränderlichen Strahl nach einer Curve zieht und von den Durchschnittspunkten aus auf dem Strahle eine constante Strecke abträgt.

Ist ein rechtwinkliges Dreieck A B C gegeben (Fig. 11), und wünscht man den Drittel eines jeden an der Hypotenuse liegenden Winkels zu kennen, so lege man durch die Ecken A, B, C einen Kreis als Grundkreis einer Conchoïde, welche ihren Doppelpunkt im Scheitel B des rechten Winkels hat. Dieselbe schneidet die Hypotenuse

---

*) Trisection eines Kreisbogens und die Kreisconchoïde von Prof. Dr. G. Sidler. Bern. Mittheil. 1873.

ausser im Mittelpunkte M des Grundkreises in drei Punkten, 3, 5, 7, von welchen aus man an zwei Kreise mit den Centren A uud C und den halben Katheten als Radien, diejenigen Tangenten lege, welche zwei gleichseitige Dreiecke bilden. Von A und C aus sieht man die Ecken je des zugehörigen Dreiecks in Richtungen, die mit der Hypotenuse die verlangten Winkel bilden. Ist die Conchoïde gegeben, so beachte man, dass $\angle$ M A B = $\angle$ A B M.

Es würde nicht schwer fallen, daraus die verschiedenen Anwendungen der Kreisconchoïde zur Trisection darzuthun.

Bevor wir die Kreisconchoïde verlassen, sei doch noch erwähnt, dass man aus Fig. 4 noch auf andere Weise auf diese Curve stösst, indem man nämlich in Erwägung zieht, dass die Fusspunkte der Perpendikel von B aus auf die Seiten des Scheiteldreiecks in einer Geraden parallel A D liegen, und dass diese Gerade die Strecke B A halbirt.

Das dreitheilende Cartesische Blatt.

Die Punkte 5, 3, 7 (Fig. 4) können als Schnitte der Geraden B (Z_1, Z_2, Z_3) mit den in der Mitte der Radien A (Z_1, Z_2, Z_3) auf denselben errichteten Senkrechten $S_2 S_3$, $S_3 S_1$ und $S_1 S_2$ angesehen werden:

Sei (Fig. 7 d) *B ein fester, P ein veränderlicher Punkt eines Kreises A, Q die Mitte von A P, Q E die Senkrechte auf A P, welche die Sehne B P in E schneidet, so kann der Ort von E zur Lösung der Trisection dienen.*

Ist B Pol und B A Anfangsrichtung, und bedeutet ϱ = A Q den halben Kreisradius, so ist

$$
\begin{aligned}
r &= BE \\
&= BP - EP \\
&= 4\varrho\cos\varphi - \frac{\varrho}{\cos\varphi} \\
&= 2\varrho\left(2\cos\varphi - \frac{1}{2\cos\varphi}\right)
\end{aligned}
$$

Möge für ein rechtwinkliges Coordinatensystem A B zur positiven X-Axe und B zum Anfangspunkte der Coordinaten gewählt werden, so resultirt

$$
\begin{aligned}
\sqrt{x^2 + y^2} &= 2\varrho\left(\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{2x} - \frac{2x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) \\
(x^2 + y^2)\, 2x &= 2\varrho\,(y^2 + x^2 - 4x^2) \\
y^2(\varrho - x) &= x^2(3\varrho + x) \\
y &= x\sqrt{\frac{3\varrho + x}{\varrho - x}}
\end{aligned}
$$

In dieser Gleichung spricht sich auch noch ein gewisser Zusammenhang aus mit der Gleichung der anfänglich vorgekommenen Curve

$$y = x\sqrt{\frac{x - R}{3x + R}}$$

Da die beiden Geraden E A und E B mit der Geraden A B nach derselben Seite hin Winkel im Verhältniss von 1 : 3 bilden, so ist der Ort von E identisch mit derjenigen Curve, welche v. Wasserschleben zur Trisection abgeleitet hat*). — Die oben gegebene Construction dürfte zum Aufbau der Curve wohl nicht ungeeignet sein (vgl. auch die von Emsmann gegebenen Constructionen in Hoffmann's Zeitschrift VII, 1876, pag. 113). Aus der Polargleichung ist ersichtlich, dass die Curve *unabhängig*

---

*) Zur Theilung des Winkels, v. Wasserschleben. Grunert's Archiv. LVI. 335 und (über die Bezeichnung): A. Radicke. Grunert's Archiv. LXIII. 328.

ist von der Grösse des zu theilenden Winkels und ihre Anwendung sich desshalb sehr einfach gestaltet. Es ist (Fig. 4) $\angle Z_1 B S_1 = 90^0$. Eine Parallele durch A zu 5 B steht also senkrecht zu der Sehne $B S_1$, halbirt mithin den Bogen $B S_1$ und schneidet vom Bogen B D den dritten Theil ab. Die Geraden B (3, 5, 7) theilen den Winkelraum um B in gleiche Theile. *Wird die Curve* (Fig. 12) *in Bezug auf den Kreis A und den festen Peripheriepunkt B construirt und wenn A B der eine feste Schenkel des Winkels und A D der veränderliche, so ziehe man nach den Schnittpunkten 5, 7, 3 der Geraden A D mit der Curve die Radien vektoren B (5, 7, 3) und dazu aus A die parallelen Geraden A (U_1, U_2, U_3), so ist der Winkel B A D dreigetheilt*, und zwar gilt dies, wenn man die Gleichstimmigkeit oder Ungleichstimmigkeit des Parallelismus nicht in Betracht zieht, überhaupt von den Winkeln, welche die Geraden B A und D A mit einander bilden.

Trisection mit der Hyperbel, deren Excentricität gleich 2.

Um auch noch aus Fig. 4 die Anwendung eines Kegelschnittes zur Dreitheilung zu zeigen, werde die Hyperbel benutzt, auf welcher die Punkte S_1, S_2, S_3 und F_1, F_2, F_3 liegen. Mit Zuhülfenahme des pag. 67 Gesagten ergibt sich folgendes Verfahren: *Man lege den Winkel, dessen Drittel bestimmt werden soll, mit einem Schenkel so an die eine Leitlinie einer Hyperbel mit der Excentricität 2, dass der andere durch den zugehörigen Brennpunkt geht und schlage dann durch diesen Brennpunkt und mit dem Scheitel des Winkels als Mittelpunkt einen Kreis, so geht dieser Kreis durch einen Scheitel der Hyperbel. Die andern drei Schnitte der Hyperbel liefern uns sofort die gesuchten Punkte* (Fig. 13).

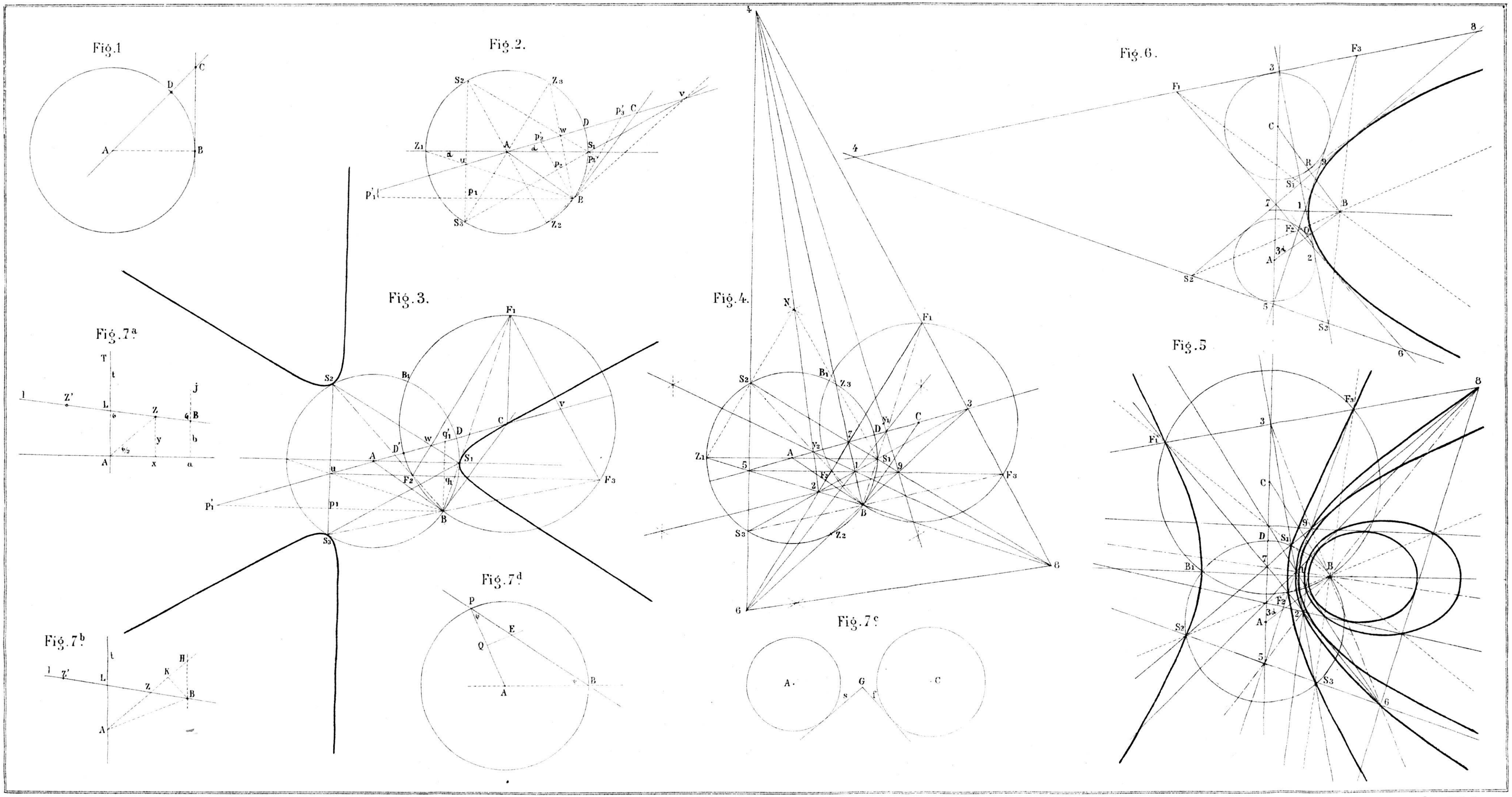
Fig. 1
Fig. 2.
Fig. 3.
Fig. 4.
Fig. 5
Fig. 6.
Fig. 7.a
Fig. 7.b
Fig. 7.c
Fig. 7.d

Fig. 8.

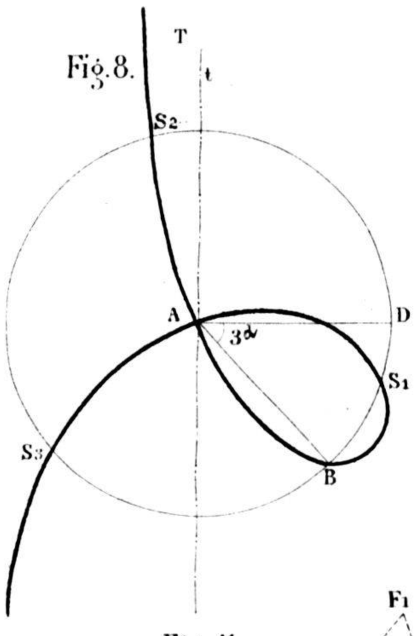

Fig. 9.

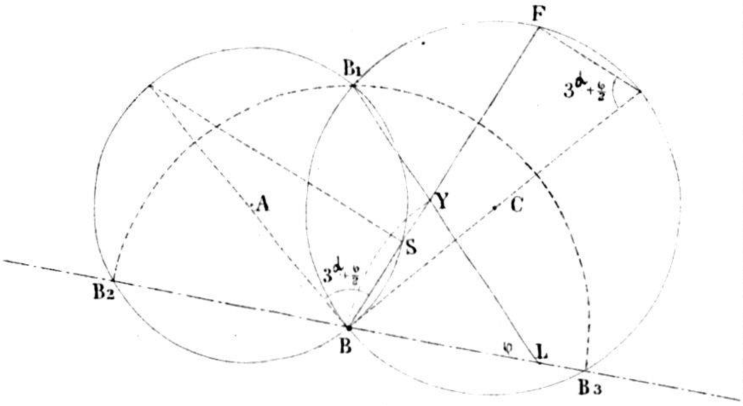

Fig. 11.

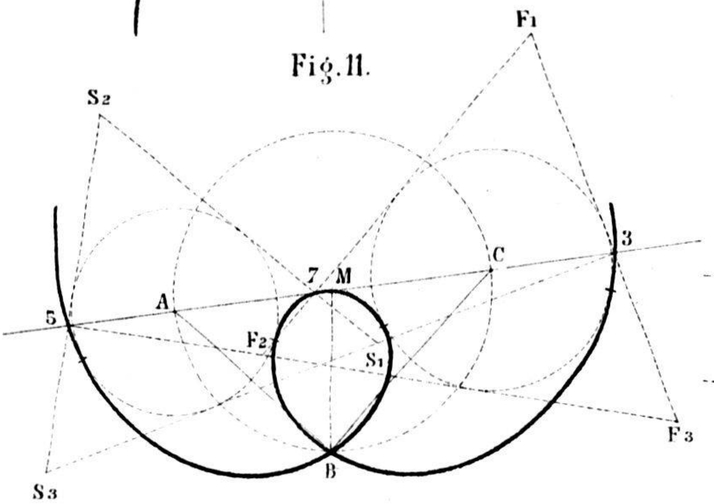

Fig. 10

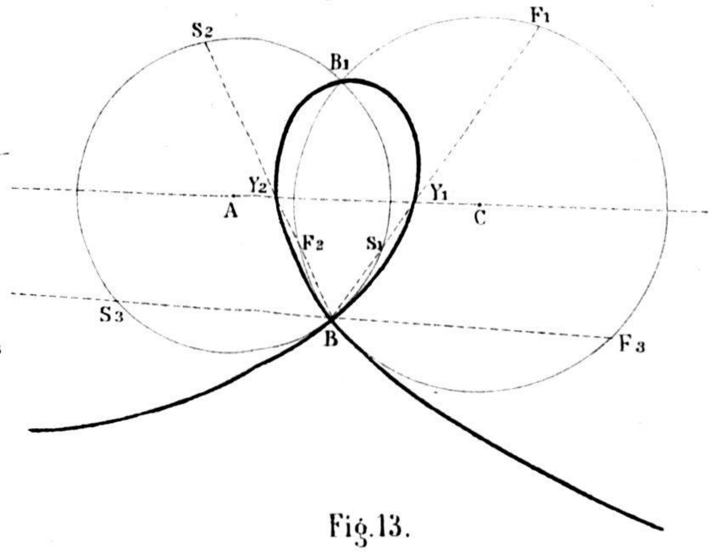

Fig. 12.

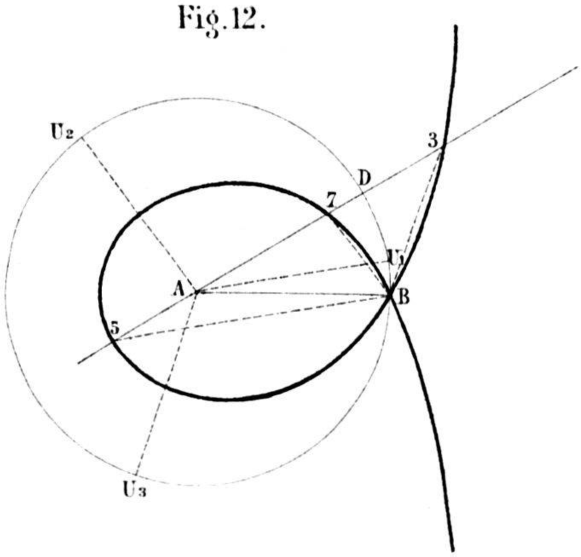

Fig. 13.