Zeitschrift: Mitteilungen der Naturforschenden Gesellschaft Bern
Herausgeber: Naturforschende Gesellschaft Bern
Band: - (1884)
Heft: 2 : 1083-1091

Artikel: Ueber bestimmte Integrale
Autor: Graf, J.H.
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-318988

von den 0,169 gr. des im Objekte vorhandenen Magans 0,1685 gr., welches Resultat nun als befriedigend angesehen werden konnte.

Völlig reine Nikellösung wird durch den Ozonstrom unter keiner Bedingung afficirt, ein Gemenge beider Lösungen wieder mit bekanntem Mangangehalte ergab den letzteren mit der wünschenswerthen Genauigkeit, so dass die Methode bei Einhaltung der nöthigen Vorsichtsmassregeln brauchbar ist. Es soll aber die Bemerkung nicht unterdrückt werden, dass das Verfahren weder sehr expeditiv, noch billig ist, wesshalb auch Niemand dasselbe zur Bestimmung des Mangans in reinen Lösungen verwenden wird, zu Trennungen aber, bei welchen alle übrigen Methoden nur sehr mangelhafte Ergebnisse liefern, kann es unter Umständen unentbehrlich werden.

Dr. J. H. Graf.

Ueber bestimmte Integrale.

Theilweise vorgetragen in der Sitzung vom 24. Mai 1884.

Einleitung.

Zum Gedächtniss meines verstorbenen Kollegen und Freundes, Herrn Prof. *J. J. Schönholzer* *), wage ich es, diese kleine Arbeit über „**Einige bestimmte Integrale**“ zu veröffentlichen. Nach dem unerwartet raschen Hinscheide des Genannten setzte ich eine Vorlesung über Γ-Funk-

*) Ueber sein Leben siehe die Schrift « Zum Andenken an *J. J. Schönholzer* », in Kommission Dalp'sche Buchhandlung, Bern.

tionen fort, die *Schönholzer* angefangen hatte und wurde so wieder gezwungen, mich mit diesem schönen Gebiete zu befassen. Da vermuthet werden konnte, es finde sich unter den nachgelassenen Papieren des Verstorbenen noch Einiges, was der Veröffentlichung werth wäre, so übernahm ich auch die Durchsicht derselben. Jedoch zeigte es sich, dass nur Einzelnes hiefür geeignet war. *Schönholzer*'s Bedeutung als Mathematiker lag nicht im schöpferischen Schaffen, sondern in der Methode und Behandlung des Gegebenen. Allerdings trug er sich oft mit dem Gedanken, einzelne Gebiete, wie die Bessel'schen Funktionen, angefeuert von unserm Altmeister und hochverdienten Lehrer, Herrn Prof. Dr. *Schläfli*, nach eigenen Ansichten und Methoden zu behandeln. Eine aufreibende Lehrthätigkeit aber, der er sich mit jugendlicher Begeisterung hingab, und wohl auch schon ein beginnendes Unwohlsein hinderten ihn, jenen Gedanken auszuführen.

Mögen diese nachfolgenden wenigen Zeilen in uns das Andenken an ihn neu beleben.

Ich schmeichle mir nicht, viel Neues zu bieten, jedoch glaube ich, da bei der Ausmittelung bestimmter Integrale die Umformung des Integrationsweges immer noch viel zu wenig angewendet wird, durch Vorführung einiger Beispiele das Interesse für dieses kurze und oft überraschend einfache Verfahren zu wecken.

Ich werde zuerst einen kurzen, einfachen Beweis von

$$\Gamma(a)\,\Gamma(1-a) = \frac{\pi}{\sin a\pi}$$

geben, hierauf einige zusammengehörige Integrale behandeln und endlich länger bei

$$\int e^{-x^2}\,dx$$

verweilen.

§ 1.

Das *Euler*'sche Integral erster Art

$$\int_0^1 x^{a-1} (1-x)^{b-1} dx = \frac{\Gamma(a)\,\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}$$

geht bekanntlich dadurch, dass als Spezialfall $a + b = 1$ gesetzt wird, über in

$$S = \int_0^1 x^{a-1} (1-x)^{-a} dx = \Gamma(a)\,\Gamma(1-a),$$

da $\Gamma(1) = 1$ ist.

Hieraus folgt durch Integration die vielfach angewandte Grundgleichung

$$\Gamma(a)\,\Gamma(1-a) = \frac{\pi}{\sin a\pi},\ 0 < a < 1.$$

Die Richtigkeit dieser Formel kann auf mannigfache Art und Weise gezeigt werden, am einfachsten und schönsten gestalten sich die Beweise durch Integration des obigen Integrals S mittelst Umformung des Integrationsweges. Ich verweise hiebei auf einen Aufsatz von Herrn Prof. Dr. *Schläfli* in den „Mittheilungen der Naturforschenden Gesellschaft" von Bern vom Jahre 1862, pag. 261 u. ff., im Fernern auf einen ähnlichen Beweis, den Prof. *J. J. Schönholzer* in seiner Hauptarbeit, betitelt „Ueber die Auswerthung bestimmter Integrale mit Hülfe von Veränderungen des Integrationsweges", Bern 1877, gegeben hat. Beide Verfahren scheinen mir aber noch nicht einfach genug zu sein.

$S = \int_0^1 x^{a-1} (1-x)^{-a} dx$ kann durch Substitution von $x = \frac{y}{1+y}$ in $\int_0^\infty \frac{y^{a-1}}{1+y} dy$ übergeführt werden, so dass also zur Betrachtung vorliegt, wenn wieder statt y die Variable x geschrieben wird:

$$S = \int_0^{\infty} \frac{x^{a-1}}{1+x} dx, \quad 0 < a < 1.$$

Als Unstetigkeitspunkte kommen in Betracht 0, — 1, ∞.

Im Nullpunkt verhält sich S wie $\int x^{a-1} dx = \frac{1}{a} x^a$, also ganz convergent.

Am Horizont verhält sich

S wie $\int x^{a-2} dx = \frac{1}{a-1} x^{a-1} = \frac{1}{a-1} \cdot \left(\frac{1}{x}\right)^{1-a}$,

ist also ebenfalls stetig und convergent.

I. Wir führen den Weg von Null nach Osten, fügen die südliche Hälfte des Horizonts bei, befestigen den Faden im Westen und ziehen an, so dass nun der Weg, — 1 südlich ausweichend, von Null nach Westen geht. Dann ist x durch $e^{-i\pi}x$ zu ersetzen und es ist

$$S = \int_0^{-\infty} \frac{e^{-i\pi a} \cdot e^{i\pi} x^{a-1} \cdot e^{-i\pi} dx}{1 + e^{-i\pi} x} = e^{-i\pi a} \int_0^{-\infty} \frac{x^{a-1}}{1-x} dz$$

Der Punkt — 1 ist zugänglich, da nun der Pol bei + 1 ist. Wir erhalten somit

$$e^{i\pi a} S = \int_0^{-\infty} \frac{x^{a-1} dx}{1-x} \tag{1.}$$

II. Wir führen das Integral von Null nach Osten, schalten die nördliche Hälfte des Horizonts ein und befestigen im Westen und ziehen an, so dass der Weg nun von Null nach Westen — 1 nördlich ausweicht, dann ist x in $e^{i\pi}x$ übergegangen, also

$$S = e^{i\pi a} \int_0^{-\infty} \frac{e^{-i\pi}\, x^{a-1} \cdot e^{i\pi}\, dx}{1 + e^{i\pi} x}$$

$$= e^{i\pi a} \int_0^{-\infty} \frac{x^{a-1}\, dx}{1 - x}, \text{ somit}$$

$$e^{-i\pi a}\, S = \int_0^{-\infty} \frac{x^{a-1}}{1 - x}\, dx \tag{2.}$$

Der Punkt -1 ist zugänglich, da der Pol nun bei $+1$ ist.

Wir subtrahiren nun (2.) von (1.)

$$\left(e^{i\pi a} - e^{-i\pi a}\right) S = \int_0^{-\infty} \frac{x^{a-1}}{1 - x}\, dx - \int_0^{-\infty} \frac{x^{a-1}}{1 - x}\, dx$$

$$= \int_0^{-\infty} \frac{x^{a-1}}{1 - x}\, dx + \int_{-\infty}^{0} \frac{x^{a-1}}{1 - x}\, dx$$

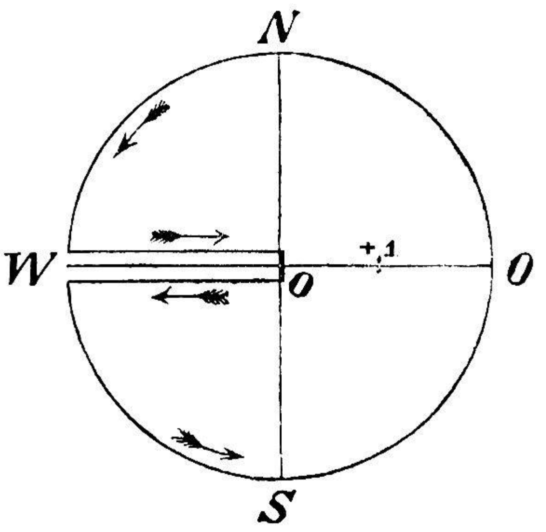


Fig. 1.

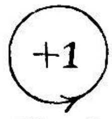


Fig. 2.

Da die Variation des Integrals längs des Horizonts $= 0$ ist, so fügen wir (Fig. 1) den Horizont über Süden, Osten, Norden, Westen bei und ziehen auf einen rechtläufig durchlaufenen Kreis um + 1 zusammen (Fig. 2) und werthen nach Cauchy aus, dann ist

$$2\,i\,\sin a\pi \cdot S = \int_{(+1)} \frac{x^{a-1}}{1-x}\,dx = 2\,i\pi \cdot (+1)^{a-1}$$
$$= 2\,i\pi$$

somit $\qquad S = \frac{\pi}{\sin a\pi}$, demnach

$$\Gamma(a)\,\Gamma(1-a) = \frac{\pi}{\sin a\pi}$$

Dieser Beweis scheint mir desshalb einfacher zu sein gegenüber dem *Schönholzer*'schen, weil einige Kunstgriffe mit Potenzen von e vermieden sind, auch ist er einfacher als derjenige, der von Herrn *Schläfli* 1862 gegeben worden ist.

§ 2.

Es sei

$$S = \int_0^1 \frac{x^{2n}}{\sqrt{1-x^2}}\,dx\,,\quad x^2 = z\,,\quad x = z^{1/2}$$

$$x^{2n} = z^n,\quad \sqrt{1-x^2} = (1-z)^{1/2}$$

$$dx = {}^1/_2\,\frac{dz}{z^{1/2}}$$

$$S = {}^1/_2 \int_0^1 z^n\,(1-z)^{-1/2} \cdot z^{-1/2}\,dz$$

$$= {}^1/_2 \int_0^1 z^{n-1/2}\,(1-z)^{-1/2}\,dz,$$ ist nach *Euler I*

$$= \tfrac{1}{2}\,\frac{\Gamma\,(n + \tfrac{1}{2})\;\Gamma\,(\tfrac{1}{2})}{\Gamma\,(n + 1)}$$

$$= \tfrac{1}{2}\,\frac{1/2 \cdot 3/2 \cdot 5/2 \ldots\ldots \frac{2\,n - 1}{2} \cdot \left(\Gamma\,(\tfrac{1}{2})\right)^2}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots\ldots\ldots\ldots n}$$

$$\Gamma\,(\tfrac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$$

Also erhalten wir die bekannte Formel

$$S = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots\ldots (2\,n - 1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \ldots\ldots 2\,n} \cdot \frac{\pi}{2}$$

Setzen wir $x = \sin z$, $dx = \cos z \; dz$

$$x^{2\,n} = \sin^{2\,n} z, \; \sqrt{1 - \sin z^2} = \cos z$$

Die Grenzen 0 und 1 werden zu 0 und $\frac{\pi}{2}$, dann ist

$$\int_0^1 \frac{x^{2\,n}}{\sqrt{1 - x^2}}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^{2\,n} z}{\cos z} \cdot \cos z \; dz$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2\,n} z \; dz$$

Oder wir setzen $x = \cos z$, $dx = -\sin z \; dz$

Grenzen 0 und 1 werden $\frac{\pi}{2}$ und 0, dann ist

$$\int_0^1 \frac{x^{2\,n}}{\sqrt{1 - x^2}}\,dx = -\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \frac{\cos^{2\,n} z}{\sin z} \cdot \sin z \; dz$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2\,n} z \; dz$$

Es ist somit:

$$\int_0^1 \frac{x^{2\,n}}{\sqrt{1 - x^2}}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2\,n} x \; dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2\,n} x \; dx$$

$$= \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots . (2n - 1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \ldots \ldots 2n} \cdot \frac{\pi}{2}$$

Schönholzer behandelt das vorliegende Integral auf folgende Weise:

$$S = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} x \, dx, \text{ wir substituiren } z = \text{tg} x$$

$$\sin x = \frac{\text{tg } x}{\sqrt{1 + \text{tg}^2 x}} = \frac{z}{\sqrt{1 + z^2}}$$

$$\sin^{2n} x = \frac{z^{2n}}{(1 + z^2)^n}, \quad \frac{1}{\cos^2 x} \, dx = dz,$$

$$dx = \frac{1}{1 + \text{tg}^2 x} \cdot dz = \frac{1}{1 + z^2} \cdot dz$$

Die Grenzen sind 0 und ∞, dann ist

$$S = \int_0^{\infty} \frac{z^{2n}}{(1 + z^2)^{n+1}} \, dz = {}^1/_2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(1 + z^2)^{n+1}} \, dz$$

Wir können hier verschiedene Wege einschlagen. Setzen wir z. B.

$$z^2 = t, \; 2z \, dz = dt$$

$$dz = {}^1/_2 \frac{dt}{z}$$

$$= {}^1/_2 \frac{dt}{t^{1/2}}$$

so wird
$$S = {}^1/_2 \int_0^{\infty} \frac{t^{n - 1/2}}{(1 + t)^{n+1}} \, dt$$

welches Integral folgendermassen behandelt werden kann.

Wir führen die neue Variable $y = \dfrac{t}{1 + t}$ ein.

Wenn $t = 0$, ist auch $y = 0$
$t = \infty$, $y = 1$, also sind die Grenzen des neuen Integrals 0 und 1.

$$y + ty = t$$

$$t = \frac{y}{1-y}, \quad dt = \frac{1 - y + y}{(1-y)^2}\, dy = \frac{dy}{(1-y)^2}$$

$$1 + t = \frac{1}{1-y}, \text{ somit ist}$$

$$S = {}^1/_2 \int_0^1 y^{n-{}^1/_2} \cdot (1-y)^{-n+{}^1/_2} \cdot (1-y)^{n+1} \cdot (1-y)^{-2}\, dy$$

$$= {}^1/_2 \int_0^1 y^{n-{}^1/_2} (1-y)^{-{}^1/_2}\, dy$$

$$= {}^1/_2 \cdot \frac{\Gamma(n + {}^1/_2)\, \Gamma({}^1/_2)}{\Gamma(n+1)} = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \ldots\ 2n} \cdot \frac{\pi}{2},$$

somit erhalten wir

$${}^1/_2 \int_0^\infty t^{n-{}^1/_2} (1+t)^{-n-1}\, dt = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \ldots\ 2n} \cdot \frac{\pi}{2}$$

Schönholzer gibt folgendes Verfahren an:

Es sei also $S = {}^1/_2 \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(1+z^2)^{n+1}}\, dz$

Wir fügen den Horizont von Ost über Nord nach Westen hin zu und ziehen den Weg auf einen Kreis zusammen, der + i rechtläufig umgibt (Fig. 3).

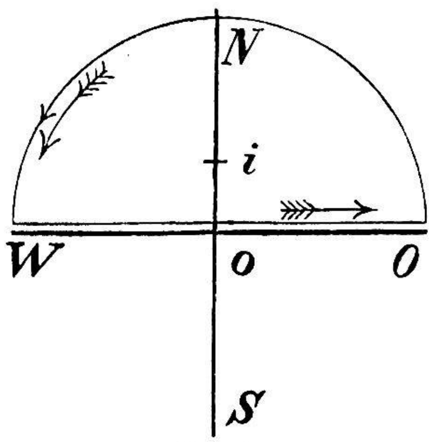


Fig. 3.

Wir erhalten sodann

$$S = {}^1/_2 \int\limits_{+i} \frac{z^{2n}}{(z+i)^{n+1}\,(z-i)^{n+1}}\, dz$$

Der weiter von *Schönholzer* verfolgte Weg führt zu einem falschen Resultat; jedoch kann man sich auf folgende Weise helfen:

Wir setzen $z - i = t$, $z = i + t$, $z + i = (2i + t)$ also

$$S = {}^1/_2 \int\limits_{i} \frac{(i+t)^{2n}\, dt}{(2i+t)^{n+1}\, t^{n+1}}, \text{ wir setzen } t = iu$$

$$S = \frac{1}{2^{n+2}} \cdot \frac{1}{i} \int \frac{(1+u)^{2n}}{(1+{}^1/_2 u)^{n+1}} \cdot \frac{du}{u^{n+1}}$$

und dies ist nach Cauchy

$$= \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{2^n} \cdot \text{Coeff. von } u^n \text{ in der Entwicklung von}$$

$$(1+u)^{2n}\,(1+{}^1/_2 u)^{-n-1}$$

$$= \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{2^n} \cdot \sum_0^n \binom{2n}{n-\lambda} \binom{-n-1}{\lambda} \left(\frac{1}{2}\right)^\lambda$$

$$= \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{2^n} \cdot \sum_0^n (-1)^\lambda \binom{2n}{n-\lambda} \binom{n+\lambda}{\lambda} \left(\frac{1}{2}\right)^\lambda$$

$$= \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{2^n} \cdot \sum_0^n (-1)^\lambda \cdot \frac{(2n)!\,(n+\lambda)!}{(n+\lambda)!\,(n-\lambda)!\,\lambda!\,n!} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^\lambda$$

$$= \frac{\pi}{2} \cdot \frac{(2\,n)!}{2^n \cdot n!} \cdot \sum_0^n \left(-1\right)^\lambda \cdot \frac{1}{(n-\lambda)!\;\lambda!} \left(\frac{1}{2}\right)^\lambda,$$

aber $\frac{1}{(n-\lambda)!\;\lambda!} = \binom{n}{\lambda} \cdot \frac{1}{n!}$, somit

$$= \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots . (2\,n-1)}{n!} \sum_0^n \left(-1\right)^\lambda \binom{n}{\lambda} \left(\frac{1}{2}\right)^\lambda$$

Nun ist, wenn n positiv ganz

$$\left(x - {}^1/_2\, a\right)^n = \sum_0^n \left(-1\right)^\lambda \binom{n}{\lambda} x^{n-\lambda} \left(\frac{a}{2}\right)^\lambda$$

$x = a = 1$ ges. folgt

$$\left(\frac{1}{2}\right)^n = \sum_0^n \left(-1\right)^\lambda \binom{n}{\lambda} \left(\frac{1}{2}\right)^\lambda$$

$$= \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots . 2n-1}{n!\; 2^n}$$

$$= \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots . 2n-1}{2 \cdot 4 \cdot 6 \ldots . \quad 2n}$$

Wir betrachten ferner

$$S = \int_0^1 \frac{x^{2n+1}}{\sqrt{1-x^2}}\, dx, \quad x^2 = z, \quad x^{2n} = z^n$$

$$x = z^{1/2}, \quad x^{2n+1} = z^{n+1/2}$$

$$dx = {}^1/_2\, \frac{dz}{z^{1/2}}$$

$$S = \int_0^1 z^{n+1/2} (1-z)^{-1/2} \cdot {}^1/_2\, z^{-1/2}\, dz = {}^1/_2 \int_0^1 z^n (1-z)^{-1/2}\, dz$$

$$= {}^1/_2 \frac{\Gamma(n+1)\,\Gamma({}^1/_2)}{\Gamma(n+{}^3/_2)}$$

$$= {}^1/_2 \cdot \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \; \ldots \; n \cdot \Gamma({}^1/_2)}{1/2 \cdot 3/2 \cdot 5/2 \; \ldots \; \frac{2n+1}{2} \cdot \Gamma({}^1/_2)}$$

$$= \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \; \ldots\ldots \; n}{3/2 \cdot 5/2 \; \ldots\ldots\ldots \; \frac{2n+1}{2}}$$

$$= \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \; \ldots\ldots \; 2n}{3 \cdot 5 \cdot 7 \; \ldots\ldots \; (2n+1)}$$

Wie früher folgt durch Substitution von $x = \cos z$
und $x = \sin z$

schliesslich die Reihe

$$\int_0^1 \frac{x^{2n+1}}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n+1}x\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1}x\,dx$$

$$= \frac{2 \cdot 4 \; \ldots\ldots \; 2n}{3 \cdot 5 \; \ldots\ldots \; (2n+1)}$$

Man kann auch hier von $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1}x\,dx$ ausgehen.

Es sei

$$S = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1}x\,dx = \int_0^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(1+z^2)^{n+{}^3/_2}}\,dz, \text{ wenn } z = \operatorname{tg} x$$

Nun sei $z^2 = t$, $dz = \dfrac{dt}{2\,t^{{}^1/_2}}$

$$S = {}^1/_2 \int_0^{\infty} t^n\,(1+t)^{-n-{}^3/_2}\,dt,$$

sodann wird $y = \dfrac{t}{1+t}$ substituirt

$$t = \frac{y}{1-y}, \quad 1 + t = \frac{1}{1-y}, \quad dt = \frac{dy}{(1-y)^2}$$

$$S = {}^1/_2 \int_0^1 y^n (1-y)^{-1/2} \, dy$$

$$= {}^1/_2 \, \frac{\Gamma(n+1)\,\Gamma(^1/_2)}{\Gamma(n+{}^3/_2)} = \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \,\ldots\ldots\, 2n}{3 \cdot 5 \cdot 7 \,\ldots\ldots\, 2n+1}$$

Dieses Integral lässt sich nicht mittelst Umformung des Integrationsweges behandeln.

Betrachten wir

$$S = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[n]{1-x^n}}, \quad x^n = z, \quad x = z^{\frac{1}{n}}$$

$$dx = \frac{1}{n} \cdot \frac{dz}{z^{1-\frac{1}{n}}}, \text{ dann ist}$$

$$S = \frac{1}{n} \int_0^1 \frac{dz}{z^{1-\frac{1}{n}} (1-z)^{\frac{1}{n}}} = \frac{1}{n} \int_0^1 z^{\frac{1}{n}-1} (1-z)^{-\frac{1}{n}} \, dz$$

$$= \frac{1}{n} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{1}{n}\right) \Gamma\left(\frac{n-1}{n}\right)}{\Gamma(n)} = \frac{\pi}{n} \cdot \frac{1}{\sin\frac{\pi}{n} \cdot \Gamma(n)},$$

$$\text{da } \Gamma\left(\frac{1}{n}\right) \Gamma\left(\frac{n-1}{n}\right) = \frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{n}} \text{ ist.}$$

Setzen wir z. B. $n = 2$, dann lässt sich $\Gamma(^1/_2)$ berechnen. Es sei

$$S = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = {}^1/_2 \, \frac{\left(\Gamma(^1/_2)\right)^2}{\Gamma(2)} = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{\sin\frac{\pi}{2} \cdot \Gamma(2)}$$

Da aber bekanntlich

$$\Gamma(2) = 1 \cdot \Gamma(1) = 1,$$

so hat man sofort

$$\left(\Gamma\left(\tfrac{1}{2}\right)\right)^2 = \pi, \quad \Gamma\left(\tfrac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$$

Dies wird bestätigt durch

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \Big\{\arc\sin x\Big\}_0^1 = \frac{\pi}{2}, \text{ also auch hier}$$

$$\tfrac{1}{2}\left(\Gamma\left(\tfrac{1}{2}\right)\right)^2 = \frac{\pi}{2}, \quad \Gamma\left(\tfrac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$$

§ 3.

Laplace hat unter seinen grossartigen Problemen über Geburtsstatistik und Sterblichkeit etc. auch die Aufgabe hinterlassen, die Wahrscheinlichkeit zu bestimmen, dass eine Nadel von gegebener Länge auf eine eingetheilte Ebene geworfen irgend eine Grenzlinie treffe.

Wenn a = Anzahl der Treffer,
b = Anzahl der Nichttreffer,
so ist a + b = n Anzahl der Würfe.

Nach *N. Plüss*, „Aufgaben und Versuche über geometrische Wahrscheinlichkeit," Basel 1881, wird die empirische Wahrscheinlichkeit für grosse Zahlen dargestellt durch

$$R = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^p e^{-x^2} dx, \quad \text{wo } p = \varepsilon \sqrt{\frac{(a+b)^3}{2\,ab}}$$

Die verschiedenen Werthe von R können nach Tafeln gefunden werden.

Von Interesse ist die Integralfunktion

$$R = \int e^{-x^2} dx$$

Ueber dieselbe könnte wohl eine ganze Monographie geschrieben werden; versuchen wir, einige der Haupteigenschaften anzugeben.

Wählen wir vorerst die Grenzen 0 und ∞, so hat *Hattendorff*, „Partielle Differentialgleichungen," pag. 34, ausgehend von

$$A = \int_0^\infty e^{-x^2} dx = \int_0^\infty e^{-y^2} dy,$$

da es auf den Integrationsbuchstaben nicht ankommt, das Doppelintegral

$$A^2 = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-x^2 - y^2} dx\, dy$$

betrachtet und durch Integration den bekannten Werth $A^2 = \frac{\pi}{4}$, also $A = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ gefunden.

Bekannt ist auch folgender Beweis:

Es sei $A = \int_0^\infty e^{-x^2} dx$

$$A^2 = \int^\infty \int_0^\infty e^{-(x^2+y^2)} dx\, dy$$

Dieses Doppelintegral ist offenbar der vierte Theil des Rotationskörpers, den die Kurve $z = e^{-x^2}$ beschreibt, wenn sie sich um die z-Achse dreht. Nun aber ist

$$-x^2 = \text{Log. } z, \; x^2 = -\text{Log. } z,$$

daher $\qquad 4A^2 = -\pi \int_0^1 \text{Log. } z \cdot dz = \pi,$

also $\qquad A = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$

Der gewöhnlichste Weg, das Integral auszuwerthen, ist derjenige, wo man Γ-Funktionen zu Hülfe nimmt.

Nach *Euler II*

$$\Gamma(a) = \int_0^{\infty} e^{-x}\, x^{a-1}\, dx$$

folgt
$$\Gamma(1/2) = \int_0^{\infty} e^{-x}\, x^{-1/2}\, dx\,,$$

also auch
$$\int_0^{\infty} \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}\, dx = \sqrt{\pi}$$

Wir ersetzen x durch x_1^2, dann folgt

$$\int_0^{\infty} \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}\, dx = \int_0^{\infty} e^{-x_1^2}\, \frac{2\, x_1\, dx_1}{x_1} = 2\int_0^{\infty} e^{-x_1^2}\, dx_1 = \sqrt{\pi}$$

Lassen wir also die Accente weg, so folgt wieder

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2}\, dx = {}^1/_2\, \sqrt{\pi} \qquad (1.)$$

Es gehe nun x in — x über, dann führt der Weg von Null nach Westen und es folgt

$$-\int_0^{-\infty} e^{-x^2}\, dx = +\int_{-\infty}^{0} e^{-x^2}\, dx = {}^1/_2\, \sqrt{\pi} \qquad (2.)$$

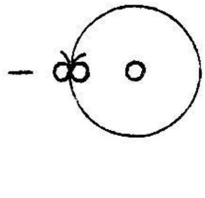
Wir addiren (1.) und (2.), dann ist

$$\int_{-\infty}^{0} + \int_0^{\infty} = \int_{-\infty}^{\infty} = \sqrt{\pi}$$

also
$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\, dx = \sqrt{\pi} \qquad (3.)$$

Schönholzer untersucht den Zusammenhang zwischen

$$A = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\, dx \text{ und } \frac{1}{2\, i\, \pi} \int e^{y}\, y^{-1/2}\, dy$$



Der Weg des 2. Integrals ist, wie aus der unter das Integral gestellten Figur ersichtlich, eine rechtläufig von Westen um Null geworfene Schleife.

Wir zerreissen A und setzen

$$A = \int_{-\infty}^{0} e^{-x^2}\, dx + \int_{0}^{\infty} e^{-x^2}\, dx$$

Nun setzen wir $x^2 = -y$

$$x = -i\, y^{1/2},\quad dx = -\frac{i}{2}\, y^{-1/2}\, dy$$

somit folgt

$$\int_{-\infty}^{0} e^{-x^2}\, dx = -\frac{i}{2} \int_{-\infty}^{0} e^{y}\, y^{-1/2}\, dy,$$

wo y die Phase $-\pi$ hat.

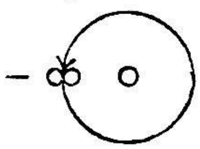
Im 2. Theil hat x die Phase 0, also, da $x = -i\, y^{1/2}$, muss y die Phase $+\pi$ haben, somit ist

$$\int_{0}^{\infty} e^{-x^2}\, dx = -\frac{i}{2} \overline{\int}_{0}^{\infty} e^{y}\, y^{-1/2}\, dy$$

Im 2. Integral übersteigt aber die Phase von y diejenige von y im 1. Integral um 2π.

Denken wir uns daher, y umlaufe das Ende des 1. Integrationsweges, so gewinnt die Phase von y gerade 2π. Wir können also die beiden Integrale zusammenheften, indem wir den Weg als eine rechtläufig von $-\infty$ um Null geworfene Schlinge betrachten. Es ist somit

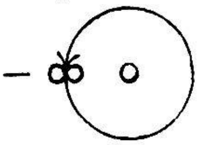
$$A = -\frac{i}{2} \int e^{y}\, y^{-1/2}\, dy = -\frac{i}{2} \cdot \frac{2\, i\, \pi}{\Gamma(1/2)}$$



$$= -\frac{i}{2} \cdot 2\, i \sqrt{\pi} = \sqrt{\pi}$$

Alles nach der Normalform von *Weierstrass* über Γ-Funktionen, welche lautet

$$\frac{1}{\Gamma(a)} = \frac{1}{2\,i\,\pi} \int e^{x}\, x^{-a}\, dx$$



Verweilen wir noch bei

$$A = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\, dx$$

Als Klippe oder Pol kann bei diesem Integral nur Unendlich in Frage kommen. In welchem Gebiet ist dieses Integral nun gültig?

$$e^{-x^2} = \mathrm{Cos}.\, x^2 - \mathrm{Sin}.\, x^2$$

Nun wächst bekanntlich

$$\mathrm{Cos}.\ x^2 \text{ von } 1 \text{ bis } \pm \infty$$
$$\mathrm{Sin}.\ x^2 \text{ von } o \text{ bis } \pm \infty$$

es sind Ausdrücke, denen bekanntlich die gleichseitige Hyperbel $x^2 - y^2 = a^2$ zu Grunde liegt. Es wird somit das Gültigkeitsgebiet begrenzt durch die Asymptoten der gleichseitigen Hyperbel, welche die Phasen $\frac{\pi}{4}$ und $-\frac{\pi}{4}$

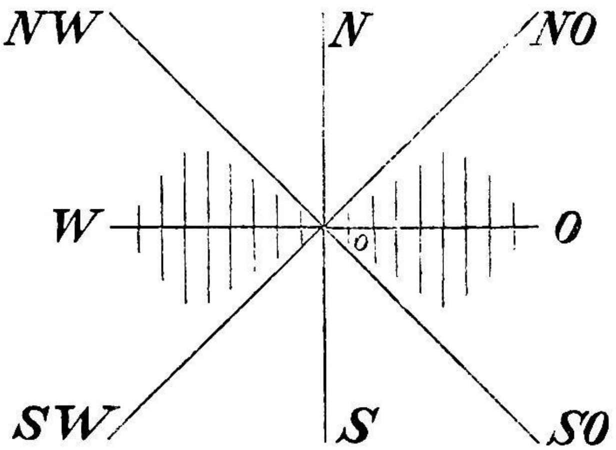


Fig. 4.

besitzen (Fig. 4). Innerhalb dieses Gebiets kann sich die Variable auch ohne Gefährde der Unendlichkeit nähern. Man darf, wie Herr Prof. Dr. *Schläfli* im Jahrgang 1862 der Mittheilungen unserer Gesellschaft angibt, den Weg auch unter den Phasen $\frac{\pi}{4}$, $-\frac{\pi}{4}$, $\frac{3\pi}{4}$, $-\frac{3\pi}{4}$ vom Nullpunkt nach dem Horizont führen.

Nehmen wir z. B.

$$B = \int_0^\infty e^{-x^2}\,dx = {}^1/_2\,\sqrt{\pi}$$

Führen wir den Weg unter der Phase $\frac{\pi}{4}$, also direkt von Null nach NO, dann haben wir offenbar x durch $x e^{i\frac{\pi}{4}}$ zu ersetzen.

$$xe^{i\frac{\pi}{4}} = x\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) = x\,(1+i)\,\sqrt{{}^1/_2}$$

x^2 wird zu $x^2\,(1+i)^2 \cdot {}^1/_2 = ix^2$, dx zu $(1+i)\,\sqrt{{}^1/_2}\,dx$

Dann ist

$$\int_0^\infty e^{-ix^2}\,(1+i)\,\sqrt{{}^1/_2}\,dx = {}^1/_2\,\sqrt{\pi}$$

Beidseitig mit $(1-i)\,\sqrt{{}^1/_2}$ multiplizirt

$$\int_0^\infty e^{-ix^2}\,dx = {}^1/_2\,\sqrt{\frac{\pi}{2}}\,(1-i) \tag{4.}$$

Hieraus folgt:

$$\int (\cos x^2 - i\sin x^2)\,dx = {}^1/_2\,\sqrt{\frac{\pi}{2}} - \frac{i}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

also:

$$\int_0^\infty \cos x^2\,dx = {}^1/_2\,\sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

$$\int_0^\infty \sin x^2 \, dx = {}^1/_2 \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

$$\int_0^\infty \cos x^2 \, dx = \int_0^\infty \sin x^2 \, dx = {}^1/_2 \sqrt{\frac{\pi}{2}} \qquad (5.)$$

Wie steht es mit der Convergenz dieser letztern Integrale?

Dass dieselben an der untern Grenze convergiren, ist für sich klar. Was die obere Grenze anbetrifft, so bedenken wir, dass

$$2 \cos x^2 = \frac{d}{dx}\left(\frac{\sin x^2}{x}\right) + \frac{\sin x^2}{x^2}$$

und

$$2 \sin x^2 = -\frac{d}{dx}\left(\frac{\cos x^2}{x}\right) - \frac{\cos x^2}{x^2}$$

gesetzt werden darf, so geht hieraus hervor, dass auch an der obern Grenze sich die Integrale convergent verhalten.*)

Nun können wir aber den Integrationsweg auch folgendermassen zusammensetzen:

Wir gehen von Null aus (Fig. 5) unter dem Azimuth $\frac{3\pi}{4}$ nach NW ab, fügen den Horizont von NW bis SW ein, kehren dann unter dem Azimuth $-\frac{3\pi}{4}$ von SW nach Null zurück und gehen von dort unter dem Azimuth $-\frac{\pi}{4}$ nach SO, fügen wieder den Horizont von SO bis NO bei und kehren endlich wieder unter dem Azimuth $\frac{\pi}{4}$ nach Null zurück. Der Weg ist nun eine geschlossene Curve,

*) Schläfli, Mittheilungen der Naturforschenden Gesellschaft in Bern, 1862.

welche ein Gebiet, das keine Pole enthält, rechtläufig umschliesst. Der Weg kann auf einen Punkt zusammengezogen werden; somit ist das Integral längs dieses ganzen Weges = 0.

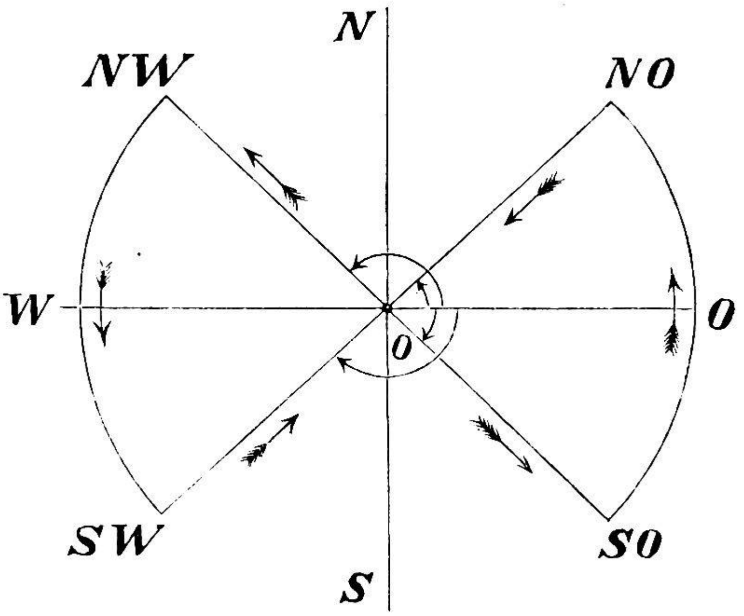


Fig. 5.

Dass dies richtig ist, unterliegt keinem Zweifel, jedoch muss es sich auch direkt aus der Formel selbst beweisen lassen.

Es ist nach (1.) $\int\limits_0^\infty e^{-x^2}\,dx = {}^1/_2\sqrt{\pi}$

I. Weg von Null nach NW.

x geht über in $xe^{i\frac{3\pi}{4}} = x\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$

$$= x\,(i - 1)\sqrt{{}^1/_2} = -\,x\,(1 - i)\sqrt{{}^1/_2}$$

x^2 wird somit zu $-\,ix^2$, somit haben wir

$$-\int\limits_0^\infty e^{ix^2}\,(1 - i)\sqrt{{}^1/_2}\,dx = {}^1/_2\sqrt{\pi}$$

Wir multipliziren beidseitig mit $(1 + i) \sqrt{1/2}$

$$\int_0^{\infty} e^{ix^2}\, dx = -\, {}^1/_2 \sqrt{\frac{\pi}{2}}\, (1 + i) \qquad (6.)$$

II. Weg von SW nach Null.

$$x \text{ geht über in } xe^{-i\frac{3\pi}{4}} = x\left(\cos\frac{3\pi}{4} - i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$$

$$= -\, x\,(1 + i)\sqrt{1/2}$$

x^2 wird zu ix^2

$$-\int_0^{\infty} e^{-ix^2} (1 + i) \sqrt{1/2}\, dx = {}^1/_2 \sqrt{\pi}$$

Wir multipliziren beidseitig mit $(1 - i) \sqrt{1/2}$ und kehren die Grenzen um

$$\int_{-\infty}^{0} e^{-ix^2}\, dx = {}^1/_2 \sqrt{\frac{\pi}{2}}\, (1 - i) \qquad (7.)$$

III. Weg von Null nach SO.

$$x \text{ geht über in } xe^{-i\frac{\pi}{4}} = x\left(\cos\frac{\pi}{4} - i\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

$$= x\,(1 - i)\sqrt{1/2},\ x^2 \text{ wird zu } -ix^2.$$

$$\int_0^{\infty} e^{ix^2} (1 - i) \sqrt{1/2}\, dx = {}^1/_2 \sqrt{\pi}$$

Beidseitig mit $(1 + i) \sqrt{1/2}$ multiplizirt

$$\int_0^{\infty} e^{ix^2}\, dx = {}^1/_2 \sqrt{\frac{\pi}{2}}\, (1 + i) \qquad (8.)$$

IV. Weg von NO nach Null.

$$\int_0^{\infty} e^{-ix^2}\, dx = {}^1/_2 \sqrt{\frac{\pi}{2}}\, (1 - i) \text{ nach } (4.)$$

$$-\int_{\infty}^{0} e^{-ix^2}\,dx = {}^1/_2 \sqrt{\frac{\pi}{2}}\,(1-i)$$

$$\int_{\infty}^{0} e^{-ix^2}\,dx = -{}^1/_2 \sqrt{\frac{\pi}{2}}\,(1-i) \qquad (9.)$$

Fassen wir nun (6.), (7.), (8.) und (9.) zusammen, so geben die linken Seiten das Integral genommen im rechtläufigen Sinn um das beschriebene Gültigkeitsgebiet, die rechten Seiten heben sich auf; es ist somit unsere Behauptung auch direkt nachgewiesen.

§ 4.

Nehmen wir Integral (3.)

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}$$

Nach *Meyer*, „Bestimmte Integrale“, pag. 117, substituiren wir statt x die Variable $x\sqrt{a}$ und erhalten

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2}\,dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

n mal nach a differenzirt gibt

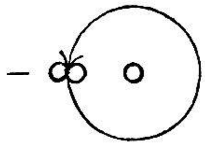
$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2}\,x^{2n}\,dx = \frac{(2n)!}{n!\,(4a)^n}\cdot\sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

$a = 1$ gesetzt

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,x^{2n}\,dx = \frac{(2n)!}{n!\,2^{2n}}\cdot\sqrt{\pi}$$

Diese Formel kann, wie auch *Schönholzer* angibt, noch auf andere Weise ausgemittelt werden. Es kann nach früherem Vorgang (§ 3)

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} x^{2n}\, dx = -\frac{i}{2} (-1)^n \int e^y\, y^{n-1/2}\, dy$$



gesetzt werden und dies ist nach der bekannten Normalform von *Weierstrass*

$$= -\frac{i}{2} \cdot \frac{2 i \pi (-1)^n}{\Gamma(1/2 - n)} =$$

$$= \pi \cdot \frac{(-1)^n \cdot \left(-\frac{2n-1}{2}\right)\left(-\frac{2n-3}{2}\right) \ldots \left(-1/2\right)}{\Gamma(1/2)}$$

$$= \sqrt{\pi} \cdot \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2n-1)}{2^n}$$

$$= \sqrt{\pi} \cdot \frac{(2n)!}{n!\, 2^{2n}}$$

Um weitere Integrale abzuleiten, gehen wir aus von (3.)

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\, dx = \sqrt{\pi}$$

Wir ersetzen x durch $x + ai$

x^2 „ $x^2 + 2ai\, x - a^2$

also folgt

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2 - 2ai\, x + a^2}\, dx = \sqrt{\pi}$$

$$e^{a^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\, e^{-2ai\, x}\, dx = \sqrt{\pi}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} (\cos 2ai\, x - \sin 2ai\, x)\, dx = e^{-a^2} \sqrt{\pi}$$

Hieraus folgen die bekannten Integrale

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} \cos 2ax \, dx = e^{-a^2} \sqrt{\pi} \tag{10.}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} \sin 2ax \, dx = o \tag{11.}$$

Nach *Hattendorff*, Differentialgleichungen, pag. 36 u. ff., kann man (10.) auch auf folgende Weise erhalten:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} \cos 2ax \, dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} \sum_{0}^{\infty} (-1)^n \frac{(2\,ax)^{2n}}{(2\,n)!} dx$$

$$= \sum_{0}^{\infty} (-1)^n \frac{(2\,a)^n}{(2\,n)!} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} x^{2n} \, dx$$

$$= \sum_{0}^{\infty} (-1)^n \frac{(2\,a)^{2n}}{(2\,n)!} \sqrt{\pi} \frac{(2\,n)!}{n!\; 2^{2n}}$$

$$= \sum_{0}^{\infty} (-1)^n \frac{a^{2n}}{n!} \sqrt{\pi} = e^{-a^2} \sqrt{\pi}$$

Aber auch (11.) kann man so behandeln:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} \sin 2ax \, dx =$$

$$\sum_{1}^{\infty} (-1)^n \frac{(2\,a)^{2n-1}}{(2\,n-1)!} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} x^{2n-1} \, dx$$

aber $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} x^{2n-1} \, dx = \int_{-\infty}^{0} e^{-x^2} x^{2n-1} \, dx +$

$$\int_{0}^{\infty} e^{-x^2} x^{2n-1} \, dx$$

Beim 1. Integral x in — x verwandelt folgt

$$= -(-1)^{2n-1} \int_{\infty}^{0} e^{-x^2} x^{2n-1}\, dx + \int_{0}^{\infty} e^{-x^2} x^{2n-1}\, dx$$

$$= -\int_{0}^{\infty} e^{-x^2} x^{2n-1}\, dx + \int_{0}^{\infty} e^{-x^2} x^{2n-1}\, dx$$

$= 0$, somit ist auch

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} \sin 2ax\, dx = 0$$

Ersetzen wir ferner in (3.)

x durch $x(a + bi)$

x^2 „ $x^2(a^2 + 2abi - b^2)$

dx also durch $(a + bi)\, dx$, dann ist

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2 a^2 + x^2 b^2 - 2abi \cdot x^2} (a + bi)\, dx = \sqrt{\pi}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2 (a^2 - b^2)} e^{-2abi x^2}\, dx = \frac{\sqrt{\pi}}{a + bi}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2 (a^2 - b^2)} (\cos 2abx^2 - i \sin 2abx^2)\, dx = \frac{(a - bi)\sqrt{\pi}}{a^2 + b^2}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2 (a^2 - b^2)} \cos 2abx^2\, dx = \frac{a\sqrt{\pi}}{a^2 + b^2}, \quad 0 < b < a \qquad (12.)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2 (a^2 - b^2)} \sin 2abx^2\, dx = \frac{b\sqrt{\pi}}{a^2 + b^2}, \quad 0 < b < a \qquad (13.)$$

Setzt man nun sowohl in (12.) als in (13.)

$$a^2 - b^2 = 1, \quad 2ab = \alpha,$$

dann ist

$$a = \sqrt{\frac{\sqrt{1+\alpha^2}+1}{2}}, \quad b = \sqrt{\frac{\sqrt{1+\alpha^2}-1}{2}},$$

$$a^2 + b^2 = \sqrt{1+\alpha^2},$$

ferner sei

$$x^2 = u, \quad dx = \frac{du}{2\sqrt{u}},$$

dann ist

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(a^2-b^2)x^2} \cos 2abx^2 \, dx^2 =$$

$$2\int_0^{\infty} e^{-(a^2-b^2)x^2} \cos 2abx^2 \, dx$$

$$= \int_0^{\infty} e^{-u} \cos \alpha u \frac{du}{\sqrt{u}} = \sqrt{\frac{\sqrt{1+\alpha^2}+1}{2(1+\alpha^2)}} \sqrt{\pi} \qquad (14.)$$

Analog wird

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(a^2-b^2)x^2} \sin 2abx^2 \, dx =$$

$$2\int_0^{\infty} e^{-(a^2-b^2)x^2} \sin 2abx^2 \, dx$$

$$= \int_0^{\infty} e^{-u} \sin \alpha u \frac{du}{\sqrt{u}} = \sqrt{\frac{\sqrt{1+\alpha^2}-1}{2(1+\alpha^2)}} \sqrt{\pi} \qquad (15.)$$

Diese Darstellung ist conform derjenigen, die am Anfang des § 3 gezeigt worden ist.*)

*) Vergleiche pag. 61.