Zeitschrift: Mitteilungen der Naturforschenden Gesellschaft Bern

Herausgeber: Naturforschende Gesellschaft Bern

Band: - (1871)

Heft: 745-791

Artikel: Geschichtliche Mittheilungen aus dem Gebiete der mechanischen Wärmetheorie

Autor: Cherbuliez

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-318862

Knöspchen ein Laubbl.; alle folgenden waren zur Niederblattknospe geschlossen. — In der Enge bei Bern finden sich 2 ungefähr gleich alte Buchen neben einander, die eine mit glatter Rinde, die andere mit rissiger, wie bei der Eiche.

Dr. Cherbuliez.

Geschichtliche Mittheilungen aus dem Gebiete der mechanischen Wärmetheorie.

(Vorgetragen den 4. und den 18. November 1871.)

1. Es ist allgemein bekannt, dass die Anschauungsweise, nach welcher die Wärme in Bewegungen, sei es der kleinsten Theile der Körper, sei es der Moleküle des sogenannten Aethers besteht, nichts weniger als neu ist: sie wurde zu allen Zeiten, wo man sich überhaupt mit Hypothesen zur Erklärung der physikalischen Erscheinungen abgab, vertreten; namentlich bei den Physikern, welche in der zweiten Hälfte des 17. und der ersten Hälfte des 18. Jahrhunderts sich zu den kartesianischen Ideen bekannten, findet man dieselbe mehr oder weniger systematisch ausgebildet; erst in der zweiten Hälfte des 18. Jahrhunderts wurde sie, je länger je mehr, durch die Annahme eines Wärmestoffs verdrängt, wenn sie gleich noch immer vereinzelte Anhänger zählte.

Nach dem glänzenden Aufschwung, welchen in unserer Zeit die mechanische Wärmetheorie durch die Arbeiten englischer und deutscher Physiker, namentlich durch die genialen Leistungen Clausius, genommen, ist es nicht ohne Interesse auf die ersten Anfänge derselben zurückzugehen, und zu untersuchen, in welcher Weise einige Gelehrten des 18. Jahrhunderts diesen Gegenstand physikalisch-mathematisch auffassten und behandelten.

Die folgenden Mittheilungen sind der Betrachtung der Arbeiten dreier Männer gewidmet, welche nicht nur eine bestimmte dynamische Hypothese über das Wesen der Wärme und der luftförmigen Körper aufstellten, sondern auch die Folgerungen derselben auf mathematischem Wege, mehr oder weniger vollständig ableiteten und den Grund zu einer dynamischen Theorie der Gaze legten. Diese Männer sind die Basler Jakob Hermann, Daniel Bernoulli und Euler.

2) Hermann, Jakob (geb. 1678 - gest. 1733 Basel), ein Schüler Jakob Bernoulli's I., hat uns seine Ansichten über die Wärme in seinem berühmten, 1716 zu Amsterdam herausgegebenen Werke, *Phoronomia, sive de Viribus et Motibus corporum solidorum et fluidorum libri duo. Amstel.* 1716. 4^{0}, hinterlassen. Das 24. Kapitel des 2. Buches dieses Werkes (Seite 376), betitelt „Ueber die innere Bewegung der Fluida“ (De motu intestino fluidorum), enthält folgende Definition: «Unter diesem Namen (innere «Bewegung) wird hier nicht die innere Bewegung der »Moleküle jeder Flüssigkeit im natürlichen Zustande, son- »dern diejenige Bewegung verstanden, welche in den »flüssigen Körpern durch äussere und zufällige Ursachen »angeregt zu werden pflegt, und auf welche die Wärme »hauptsächlich zurückzuführen ist (quo calor praesertim »est referendus), die ohne Zweifel durch eine lebhaftere »Bewegung der Theilchen in dem warmen Körper in Folge »äusserer Ursachen erzeugt wird. So sehr unregelmässig »auch eine innere Bewegung dieser Art sein mag, so »kann nichts destoweniger eine genügend genaue physi- »kalische Regel zur Bestimmung ihres mittleren Masses »angegeben werden.«

3. Was Hermann unter der inneren Bewegung der Moleküle jeder Flüssigkeit im natürlichen Zustande versteht, scheint nicht ganz klar zu sein, lässt sich jedoch mit Hülfe einer anderen Stelle vielleicht begreifen, die uns zugleich über den Geist, in welchem der Basler seine mathematisch-physikalischen Untersuchungen führte, eine interessante Auskunft giebt. Diese Stelle befindet sich im 1. Kapitel des gleichen Buches; (lib. II., Nr. 239 u. 240) und lautet wie folgt: »Indem wir uns vornehmen, über „die Kräfte der Flüssigkeiten zu reden, haben wir nicht „die Meinung, als ob wir die Figuren der Theilchen oder „der Elemente definiren und, so zu sagen, mit dem Fin„ger zeigen könnten, und daher werde ich nicht zu „fleissig diese Figuren der Elemente der Körper unter„suchen, weil dieselben zu sehr verschieden zu sein „pflegen, um bequem unter mathematische Begriffe ge„bracht werden zu können; denn nichts hindert, glaube „ich, dass die Theilchen einer und derselben Flüssigkeit, „in Beziehung auf ihre Grösse sowohl als auf ihre Ge„stalt, von einander in unendlichen Weisen verschieden „sein können. Die Untersuchung der Figuren, unter „welchen die Theilchen jeder Flüssigkeit begrenzt sein „müssen, werde ich daher den Physikern überlassen; „mir genügt es zu wissen, dass diese Gestalten der Theil„chen einer jeden Flüssigkeit, wie sie auch beschaffen „sein mögen, der Beweglichkeit derselben nichts entgegen„setzen, weil sie eben, nach Voraussetzung, Theilchen „einer Flüssigkeit, daher äusserst beweglich sind.“

„Ebenso gehört es nicht in unsere Aufgabe, ängst„lich zu untersuchen, ob die Meinung derjenigen wahr „sei, welche allen Flüssigkeiten eine gewisse Bewegung, „die sie innere nennen, zuschreiben, wodurch die Theil„chen der Flüssigkeit, in verschiedenen unregelmässi-

„gen Bewegungen, hin und her geworfen zu werden „gedacht werden, zur Unterscheidung von der fort„schreitenden Bewegung der Flüssigkeit, wobei ihre ganze „Masse von einem Orte in einen andern übergeführt „wird... Zum Beispiel, die Bewegung, welche, bei dem „Fliessen eines Stromes, das Wasser im Strombette nach „den unteren Theilen führt, ist eine fortschreitende; die „Bewegung hingegen des warmen Wassers, das heisst „die innere Bewegung seiner Moleküle, wird innere Be„wegung genannt; das Beispiel des warmen Was„sers führe ich an, weil es sicher ist, dass „seine Theilchen durch eine innere Bewegung „dieser Art erschüttert sind, wenngleich dieselbe „in die Augen nicht fällt und also die ganze Masse des „Wassers zu ruhen scheint. Ob nun alle Flüssigkeiten „durch eine solche innere Bewegung afficirt sind, will „ich ebenso den Philosophen zu erforschen überlassen, „denn es ist nicht meine Absicht, mich in irgend einer „Weise in philosophischen Kontroversen zu verwickeln."

Diese innere Bewegung der Theilchen jeder Flüssigkeit, deren Vorhandensein oder Nichtvorhandensein Hermann den Philosophen zu untersuchen anheimstellt, ist also, denken wir, diejenige die er von der von ihm als Wärme erkannten, in der zuerst angeführten Stelle, unterscheidet. Wir sehen zugleich von welchem nüchternen, wahrhaft modernen Standpunkte aus, der Basler Mathematiker seine wissenschaftliche Aufgabe betrachtet.

4) Nachdem nun die Wärme als Bewegung definirt worden ist, geht Hermann zu folgendem Satz über:

Die Wärme in homogenen Körpern (in corporibus similis texturæ) ist in zusammengesetztem Verhältniss der Dichtigkeit des warmen

Körpers und des Quadrates der Bewegung (Agitatio) seiner Theilchen.

Geben wir noch den Beweis dieses Satzes in möglichst treuer Uebersetzung.

„Die Bewegung der Theilchen ist die mittlere Ge„schwindigkeit der einzelnen Geschwindigkeiten, womit „die Theilchen des warmen Körpers sich bewegen. Es „sei V diese mittlere Geschwindigkeit, und D die Dich„tigkeit des Körpers. Da nun die Wärme in einer leb„hafteren Bewegung der Theilchen besteht, wird sie den „Stössen (impressiones) der Theilchen des warmen Kör„pers auf irgend einen entgegengehaltenen, Wärme auf„nehmenden Körper proportional sein; diese Stösse aber „sind dem Produkte des Quadrats der Geschwindigkeiten „in die Densitäten, d. h. DV^2 proportional. Also ist die „Wärme ebenfalls DV^2 proportional."

Zur Bestimmung dieser Geschwindigkeit schlägt Hermann einen Versuch vor, der ungefähr in Folgendem besteht: man konstruire ein Heberbarometer, dessen kürzerer Schenkel die Gestalt eines Cylinders habe, mit einem im Verhältniss zu demjenigen des 2. Schenkels bedeutenden Durchmesser; ist das Barometer mit Quecksilber gefüllt, so beobachte man, bei kalter Witterung, die Höhe der Quecksilbersäule, verschliesse dann den offenen Schenkel, so dass die in demselben abgeschlossene Luft mit der äusseren durchaus keine Verbindung mehr habe. Es werde nun diese Luft erwärmt, sie wird sich ausdehnen, und, in Folge dessen, die Quecksilbersäule im Barometer zunehmen. — Nach Hermann wird der Quecksilberdruck dem Luftdruck auf die Quecksilberoberfläche im kürzeren Barometerschenkel gleich, und dieser letztere, nach seinem Satze, dem Produkte V^2D proportional sein. Kennt man daher die Durchmesser c und b des längeren und des kürzeren Schenkels, die ursprüngliche Höhe a der Quecksilbersäule, die Steigung x derselben im längeren Schenkel und die ursprüngliche Höhe e der Luftsäule vor der Erwärmung im kürzeren Schenkel, so lässt sich eine Zahl berechnen, mit welcher V proportional sein müsste. — Die Formel, welche Hermann findet, führen wir hier nicht an; denn die ganze Sache ist an und für sich werthlos und hat nur geschichtliches Interesse. —

5) Clausius, in seinen berühmten Abhandlungen über die Wärme, (2. Abth., Abhandlung XIV., S. 231) führt eine Stelle von Lesage an, in welchem dieser Gelehrte das Werk Hermann's unter denjenigen aufzählt, worin dynamische Meinungen über das Wesen der Luft ausgesprochen werden. Lesage führt aber dabei nicht das soeben besprochene Kapitel der Phoronomia über die innere Bewegung der Flüssigkeiten, sondern ein ganz anderes, das 6e an, welches den Titel führt: Ueber die elastische Kraft der Luft. In diesem Kapitel, in welchem Hermann vorzüglich die Wirkung der Luftpumpe auf mathematischem Wege untersucht, berührt derselbe allerdings die Hypothesen über die Beschaffenheit der Luft; er bespricht namentlich diejenige von Parent; in derselben wäre die elastische Kraft der Luft durch die Wirkung der ætherischen Materie verursacht, welche mit grosser Geschwindigkeit durch alle Zwischenräume zwischen den Luftmolekülen hindurchströmt. — Hermann (S. 182) sagt: er habe sich vor mehreren Jahren eine ähnliche Hypothesis erdacht, dieselbe hingegen aufgegeben, weil sie auf den Schluss führen würde, dass nicht nur die Gaze, sondern auch alle flüssigen Körper elastische Kraft besitzen. — Seine Betrachtungen über dieses Thema schliesst Herrmann mit folgender Bemerkung (Seite 183):

„Was auch die physische Ursache der Elasticität der Luft sein möge, so genügt es für unseren Zweck, dass dieselbe in der Luft vorhanden sei etc.“ In dem folgenden Kapitel VII., über die elastische Kraft der Luft, mit den Densitäten derselben verglichen, treffen wir (Seite 189, Nr. 339) eine Bemerkung, aus der einige Einsicht in die Anschauungsweise Hermann's gewonnen werden kann:
„Da die Elasticität der Luft, sagt er, in denjenigen Wir„kungen besteht, welche in den Luftmolekülen das Be„streben sich von einander zu entfernen erzeugen, so „ist es klar, dass der Druck, den irgend eine Ebene, wo„durch die Ausdehnung der Luft verhindert wird, von den „an derselben anliegenden Luftheilchen erleidet, gleich „ist der Gesammtkraft der einzelnen drückenden Molekülen.“ —

So viel über Hermann's Leistungen auf dem Gebiete der mechanischen Wärmetheorie; freilich sind sie von geringem Umfang; zeigen uns jedoch, dass dieser Gelehrte ganz klare Begriffe über das Wesen der Wärme hatte und dass er, namentlich, mit voller Sicherheit ein mechanisches Maass derselben erfasst hatte.

6) Euler's Ansichten über das Wesen der Wärme, sowie einen Versuch einer mechanischen Theorie der Gaze resp. der athmosphärischen Luft, finden wir schon in einer seiner allerersten Abhandlungen, in der dritten nämlich, welche er in den Memoiren der Petersburger Akademie veröffentlichte. Diese Abhandlung trägt die Ueberschrift: Versuch einer Erklärung der Erscheinungen der Luft;*) sie wurde der Akademie im September 1727 mitgetheilt und ist daher von Euler wahrscheinlich am

*) Comment. academiae scient. imper. petropol. Bd. II. Pag. 347. *Tentamen explicationis plaenomenorum aeris.*

Schlusse seines 20. Lebensjahres (geboren in Basel 1707, gest. in Petersburg 1783) verfasst worden; diese Thatsache ist erwähnenswerth, weil sie uns einen Beweis geben wird von der Beständigkeit, mit welcher Euler, während seines ganzen Lebens, die physikalischen Theorien Kartesianischer Abstammung vertheidigte.

Nach Euler besteht die Luft aus einer Menge unendlich kleiner Kügelchen, in welchen die sogenannte dünne Materie (materia subtilis) in einer Drehungsbewegung begriffen ist; die aus dieser Drehungsbewegung entstehende Centrifugalkraft, hat das Bestreben, die Kügelchen auszudehnen, und dehnt sie auch, wenn die einer solchen Ausdehnung entgegenwirkenden Hindernisse beseitigt werden, wirklich aus. Ausserdem denkt sich Euler jedes Kügelchen mit einem dünnen wässerigen Häutchen (Pellicula) überzogen, das sich aus den in der Luft vorhandenen Dämpfen bildet.

„Auf diese Art, sagt Euler (Seite 349), besteht die „Luft aus einer unendlichen Anzahl sehr kleiner Blasen, „deren äussere Kruste von Wasser gebildet wird, und, je „nach dem Stande der Athmosphäre, mehr oder weniger „dick ist; innerhalb dieser Kruste rotirt die subtile Ma„terie mit einer gewissen Geschwindigkeit, welche ausser„dem von einer anderen noch feineren Materie, die alle „Poren durchdringt, Beschleunigungen erhält, damit die „Bewegung nicht schliesslich verbraucht werde und ver„schwinde. — Es ist in der That sicher, dass die Luft „die einmal aufgenommene Wärme nach und nach ver„liert; da aber die Luft durch die Wärme verdünnt wird, „so folgt daraus, dass die subtile Materie durch die Wärme „in einen heftigeren Bewegungszustand versetzt wird; „nimmt also die Wärme ab, so ist es ein Zeichen, dass „die Bewegung der Materie verzögert wird.“

Diese Stelle zeigt uns, dass, für Euler, zwischen dem Bewegungszustand der Materie in den Luftkügelchen und der denselben innewohnenden Wärme ein inniger Zusammenhang vorhanden ist, ja, dass Wärme und Bewegung identisch sind.

Aus der soeben angedeuteten Beschaffenheit der Luft, folgt ihre in's Unendliche gehende Ausdehnbarkeit, wenn keine Widerstände vorhanden sind; ein solcher aber entsteht aus der Gravität. Andererseits wird man die Luft nicht über eine gewisse Grenze hinaus zusammendrücken können; denn bei der Ausdehnung bilden sich im Inneren der Kügelchen leere Räume; werden nun dieselben durch Zusammendrücken schliesslich auf Null reducirt, so hat man die Grenze erreicht, über welche hinaus keine weitere Volumenverminderung möglich ist. — Die Geschwindigkeit der rotirenden Theilchen der subtilen Materie ist, nach Euler, für alle Theilchen dieselbe.

7) Im Zustande der höchsten Zusammendrückung besteht also jedes Luftkügelchen aus einem Kerne von subtiler Materie mit dem Radius h, und aus einer kugelförmigen Schale von Wasser; ist h_1 der äussere Radius dieser Schale, so ist h_1-h ihre Dicke; im Ausdehnungszustand findet man in jedem dieser Luftkügelchen:

1. einen inneren leeren Raum vom Radius c;
2. eine Kugelschale, die durch die subtile Materie gebildet wird; ihr innerer Radius ist c, während der äussere mit b bezeichnet werden mag;
3. eine äussere Kugelschale, welche aus Wasser besteht, ihr innerer Radius ist b, während der äussere Radius mit a bezeichnet wird.

Wenn nun unter

m das specifische Gewicht des Wassers;
n „ „ „ der subtilen Materie;
i „ „ „ der Luft, d. h. das Verhältniss des ganzen Gewichts des Kügelchens zum Gewicht des gleichen Wasservolumens

v die Geschwindigkeit der Theilchen der subtilen Materie,
g die Beschleunigung der Schwerkraft,

verstanden werden, so erhält Euler für den Ausdruck der Centrifugalkraft auf die äussere Oberfläche der Kugelschale von subtiler Materie:

$$\frac{2\pi n v^2}{g} \cdot [b^2 - c^2]$$

Diese Centrifugalkraft ist nun die Kraft, welche die Ausdehnung des Theilchens bewirkt, d. h. sie ist die elastische Kraft der Luft. —

Durch eine Reihe von sinnreichen Transformationen wird dieser Ausdruck auf die Form gebracht,

$$\frac{2\pi n v^2 a^2}{g\sqrt[3]{[m - pm + pn}} \left\{ \sqrt[3]{[m - i + pi - pm + pn]^2} - \sqrt[3]{[m - pm + pn - i]^2} \right\}$$

$$\text{wobei } p = \frac{h}{h_1}$$

Auf die Flächeneinheit vertheilt, erhält man also für die elastische Kraft E:

$$E = \frac{n v^2 a^2}{2g\, b^2} \left\{ \sqrt[3]{\left[\frac{m - i + pi - pm + pn}{m - pm + pn}\right]^2} - \sqrt[3]{\left\{\frac{m - pm + pn - i}{m - pm + pn}\right\}^2} \right\}$$

Diese Kraft ist demnach proportional dem Quadrate der Geschwindigkeit der rotirenden Theilchen, ein Resultat, welches Clausius z. B. in den mathematischen Zusätzen zu seiner Abhandlung XIV. (Bd. II., Seite 251) 130 Jahre später ebenfalls findet.

Euler betrachtet nun den Fall, wo der Wasserdampfantheil null ist, wo daher

$$m = o \quad h = h_1 \quad \text{und } p = 1 \quad \text{ist,}$$
$$a = b$$

die Formel geht dann über in:

$$E = \frac{nv^2}{2g}\left\{\sqrt[3]{1} - \sqrt[3]{\left[\frac{n-i}{n}\right]^2}\right\} \quad \text{oder:}$$

$$E = \frac{v^2 . \sqrt[3]{n}}{2g}\left\{\sqrt[3]{n^2} - \sqrt[3]{[n-i]^2}\right\}$$

Ist nun die Luft beinahe im Zustande der grössten Kondensation, d. h. ist beinahe $i = n$, so wird

$E = \frac{v^2 . n}{2g}$ beinahe, d. h. in einer schon bedeutend komprimirten Luft wird die elastische Kraft nicht mehr bedeutend geändert werden können; (freilich könnte dabei durch Zunahme von v ein anderes Ergebniss herauskommen).

Ist hingegen i gegen n sehr klein, d. h. ist die Luft vom Zustand der Maximalkondensation bedeutend entfernt, so lässt sich $\sqrt[3]{[n-i]^3}$ wie folgt schreiben:

$$\sqrt[3]{[n-i]^2} = n^{\frac{2}{3}} - \frac{2}{3} n^{-\frac{1}{3}} . i + \left[\begin{matrix}\frac{2}{3} \\ 2\end{matrix}\right] n^{-\frac{4}{3}} . i^2 + \cdots\cdots$$

und bei Vernachlässigung der Glieder, welche die höheren Potenzen von i enthalten:

$$E = \frac{v^2 \sqrt[3]{n}}{2g}\left\{\frac{2}{3}\frac{i}{\sqrt[3]{n}}\right\} = \frac{v^2}{3g} i.$$

Das heisst, für den vorausgesetzten Luftzustand ist die elastische Kraft der Dichtigkeit der Luft proportional, was nichts anders als das von Boyle und von Mariotte entdeckte, und nach dem letzteren (1679) genannte Gesetz ist: eben weil dieses Gesetz für die Luft im gewöhnlichen Zustande stattfindet, schliesst daraus Euler, dass unsere Luft von dem Zustande höchster Kondensation weit entfernt sei.

Will man das Glied noch berücksichtigen, welches die 2. Potenz von i enthält, so erhält man:

$$E = \frac{v^2 \sqrt[3]{n}}{2g} \left[\frac{2}{3} \frac{i}{n^{1/3}} + \frac{1}{9} \cdot \frac{i^2}{n^{4/3}} \right\} \text{ oder}$$

$$E = \frac{v^2}{2g} \left\{ \frac{6ni + i^2}{9 \sqrt[3]{n^4}} \right\}$$

Euler sucht dann, durch Benutzung der Versuche Boyle's über die Zunahme der elastischen Kraft der Luft mit der Kompression, aus dieser Gleichung das Verhältniss von $\frac{n}{i}$ zu berechnen. —

8) Im Weiteren berechnet Euler die Höhe f der Quecksilbersäule, die eine Luftblase im gegebenen Zustande tragen kann: wenn ν das specifische Gewicht des Quecksilbers ist, so ist der Druck der Säule f auf die halbe Oberfläche des Luftkügelchens vom Radius a,

$$P = 2\pi a^2 \nu f.$$

Die elastische Kraft auf der gleichen Fläche ist:

$$E = \frac{\pi n v^2 a^2}{g \sqrt{(m-pm+pn)^3}} \left\{ \sqrt[3]{[m-i+pi-pm+pn]^2} - \sqrt[3]{[m-pm+pn-i]^2} \right\}$$

und also ergibt sich die Gleichung;

$$f = \frac{nv^2}{2g.\nu}\left[\frac{\sqrt[3]{(m-i+pi-pm+pn)^2} - \sqrt[3]{[m-pm+pn-i]^2}}{\sqrt[3]{[m-pm+pn]^2}}\right\}$$

Ist i klein gegen n, d. h. betrachtet man die Luft in einem von demjenigen der Maximalkondensation bedeutend abweichenden Zustande, so findet man durch Entwicklung des ersten Wurzelausdrucks im Zähler annähernd:

$$f = \frac{n.v^2.p.i}{3\,\nu[m-pm+pn]g}$$

Ist die Luft frei von Wasserdämpfen, so ist $p = 1$, $m = o$ und

$$f = \frac{i.v^2}{3.\nu.g}$$

Ist Wasserdampf vorhanden, so ist $p < 1$ und zwar um so mehr von 1 verschieden, als der Wasserdampfgehalt bedeutender ist; man setze daher $p = 1 - q$, so ist

$$f = \frac{v^2 i}{3\nu.g}\left\{1 - \frac{qm}{qm + n\,[1 - q]}\right\}$$

Der Bruch $\frac{qm}{qm + n\,[1 - q]}$ nimmt mit q zugleich zu und ab; es wird daher, sagt Euler, die Quecksilbersäule, resp. die Barometersäule steigen, wenn q abnimmt, und fallen, wenn q, d. h. wenn der Feuchtigkeitsgehalt der Luft zunimmt.

„Und das ist, denke ich, fährt er (Seite 366) fort, der „Grund, warum das Steigen des Quecksilbers im Baro„meter meistens einen reinen Himmel (resp. schön Wet„ter), das Fallen desselben hingegen Regen und eine un„günstige Witterung anzeigt.“

Bei trockener Luft hat man gefunden: $f = \frac{i.v^3}{3\nu.g}$

Daraus ergiebt sich $v^2 = 3f. \frac{\nu}{i}$ oder $o = \sqrt{f \frac{\nu}{i} g.} \sqrt{3}$

Da $\frac{\nu}{i}$, g und f Beobachtungsgrössen sind, so lässt sich aus dieser Formel die Geschwindigkeit v berechnen, dieses führt auch Euler aus, und findet:

$$v = 1518', 5 \text{ Rhein.}$$

unseres Wissens die erste nummerische Bestimmung dieser Art.

Setzt man in diese Formel

$$f = o^m,760 \quad g = 9^m,81 \quad \frac{\nu}{i} = 10470$$

so ergibt sich

$$v = 484^{m.} = 1542' \text{ Rhein.}$$

In der schon angeführten Abhandlung hat Clausius, im Jahre 1857, für die Geschwindigkeit der fortschreitenden Bewegung der Moleküle von Sauerstoff und Stickstoff gefunden (Seite 256):

für Stickstoff 492 $^{\text{meter}}$
für Sauerstoff 461 $^{\text{meter.}}$

Das arithmetische Mittel beider Zahlen, wenn man dieselben proportional der chemischen Zusammensetzuag der athmosphärischen Luft nach dem Gewichte [$N = 0,77$ $0 = 0,23$] berücksichtigt, ergibt: $484^m,87 = 1545'$ Rheinl. eine Zahl, welche mit der vorhin aus der Euler'schen Formel berechneten beinahe übereinstimmt.

Nimmt man einfach das arithmetische Mittel beider Zahlen, so ergibt sich $476,5^m$ oder $1518',2$ Rhein., eine Zahl, welche mit der Euler'schen wiederum fast ganz genau zusammenfällt. —

Seine Arbeit schliesst Euler mit den Worten: „Hier

„schliesse ich diese Abhandlung, da genaue Versuche „fehlen, woraus die noch wünschbaren Bestimmungen ge- „macht werden könnten und welche diese Theorie voll- „ständiger bestätigten. Das Verhältniss von n : i ist noch „unsicher. Ich werde zur Erforschung desselben durch „Veranstaltung geeigneter, genauer Versuche mit Fleiss „arbeiten. Hätte man nämlich die Grösse n, so liessen „sich die von uns gefundenen Formeln auf die Praxis „leicht anwenden, und mit Hülfe anderer geeigneter In- „strumente zu jeder Zeit die Menge des in der Luft ent- „haltenen Wassers angeben."

Diese Versuche scheint Euler nicht ausgeführt zu haben, was man leicht begreift, wenn man an die kolossale Arbeit denkt, welcher er sich von nun an auf dem Gebiete der reinen Mathematik, der Mechanik und der physischen Astronomie hingab.

9) Auf die Euler'sche Arbeit folgt in chronologischer Reihenfolge das klassische Werk Daniel Bernoulli's I., die berühmte Hydrodynamik.*)

Daniel Bernoulli I. (1700. Gröningen — 1782. Basel) hatte seine Hydrodynamik von 1730 bis 1734 ausgearbeitet;**) der Druck rückte hingegen so langsam vorwärts, dass das Werk erst 1738 in den Buchhandel kam. —

In der 10. Section dieses Buches ***), welche von

---

*) Danielis Bernoulli etc. hydrodynamica sive de viribus et motibus fluidorum commentarii. Argentorati. 1738. 4°.

**) Hierüber vide unter anderen: Wolf's Biographien zur Kulturgeschichte der Schweiz. Bd. III., Seite 168 u. ff. —

***) Hydrodynamica. Sectio decima, pag. 200. De affectionibus atque motibus fluidorum elasticorum, præcipue autem aëris. — Im Band 107 (Seite 490—494) von Poggendorf's Annalen findet man eine Uebersetzung der 6 ersten Paragraphen dieser Section der Hydrodynamica.

den Eigenschaften und den Bewegungen der Gaze, namentlich der Luft, handelt, finden wir die sehr deutlich ausgesprochene Ansicht Daniel Bernoulli's über das Wesen dieser Körper. Man denke sich, sagt er, (Seite 200, § 2) einen verticalen, von einem mit dem Gewichte P belasteten Kolben geschlossenen Cylinder; es befinden sich im Innern desselben sehr kleine, mit einer sehr grossen Geschwindigkeit hin und her gehende Körperchen; diese Körperchen, indem sie gegen den Kolben stossen, und denselben durch ihre fortwährend wiederholten Stösse unterstützen, bilden ein elastisches Fluidum, das sich, bei Verminderung oder Entfernung des Gewichts P, ausdehnen, und das, bei Vermehrung desselben, zusammengedrückt wird: dieses Fluidum gravitirt gegen den Boden des Cylinders, nicht anders, als wenn es keine elastische Kraft hätte: denn, mögen die Körperchen ruhen oder in Bewegung begriffen sein, ihre Schwere wird nicht geändert, so dass der Boden sowohl das Gewicht, als die Elasticität des Fluidums zu tragen hat. Ein solches Fluidum, da es mit den Haupteigenschaften der elastischen Fluida im Einklang steht, denken wir uns an der Stelle der Luft (subsituemus aeri) und werden auf diese Weise schon bekannte Eigenschaften derselben erklären, sowie andere noch nicht genügend erforschte Erscheinungen beleuchten.

Es bezeichnet nun Bernoulli mit P den athmosphärischen Druck, mit 1 die diesem Druck entsprechende Höhe des Luftcylinders; die Luft werde so comprimirt, dass die Höhe der nunmehrigen Luftsäule s sei; es sei endlich n die Anzahl der Theilchen, deren Geschwindigkeit, vor und nach der Kondensation, als gleich angenommen wird. Nach der Kondensation wird der Druck gegen den Kolben zugenommen haben, weil mehr Theilchen als vorher gegen denselben stossen, und weil die

Stösse der einzelnen Theilchen häufiger geworden sind: es sei endlich $\frac{1}{\sqrt[3]{m}}$ das Verhältniss der mittleren Entfernung der Mittelpunkte der als Kugeln gedachten Körperchen zum Durchmesser derselben; Bernoulli leitet auf höchst einfachem Wege für die elastische Kraft π der Luft nach der Kondensation, die Formel ab:

$$\pi = P \frac{1 - \sqrt[3]{m}}{s - \sqrt[3]{ms^2}}$$

Es bemerkt aber Bernoulli weiter, dass „die Elasticität der Luft nicht allein durch Kondensation vermehrt „werde, sondern auch durch Zunahme der Wärme, und „weil es feststeht, dass die Wärme überall durch Zu„nahme der innern Bewegung der Theilchen vermehrt „wird, so folgt daraus, dass, wenn die Elasticität der Luft „bei unverändertem Volumen zunimmt, dieses ein Zeichen „einer intensiveren Bewegung der Lufttheilchen ist, was „mit unserer Hypothese übereinstimmt;" Bernoulli weist nach, dass der Druck, für den er den obigen Ausdruck gefunden hat, ausserdem noch dem Quadrate der Geschwindigkeit v der Lufttheilchen proportional sein muss, so dass schliesslich:

$$\pi = P. \frac{1 - \sqrt[3]{m}}{s - \sqrt[3]{m.s^2}} v^2.$$

10) Die Erscheinungen zeigen, dass man die natürliche Luft beinahe auf ein unendlich kleines Volumen zusammendrücken kann; man darf daher, sagt Bernoulli, die Grösse m annähernd gleich null setzen, und somit für

natürliche, sowie für dünnere als die natürliche Luft setzen:

$$\pi = \frac{P.v^2}{s}$$

Ob diese letztere Formel für komprimirte Luft noch gültig sei, halte er (D. Bernoulli) für nicht genügend untersucht; Versuche mit der hier zu verlangenden Genauigkeit seien noch nicht angestellt worden; ein einziger wäre zur Bestimmung von m nöthig; er sollte aber sehr genau und mit stark komprimirter Luft ausgeführt werden; den Grad der Wärme in der komprimirten Luft müsse man aber dabei sorgfältig unveränderlich unterhalten.

Diese Formel nun, bei konstant bleibendem v, drückt einfach das Mariott'sche Gesetz aus; sie schliesst auch durch die Proportionalität des Drucks π mit dem Quadrate v^2 das Gay-Lussac'sche Gesetz in sich; in der That, man denke sich Luft unter dem Volumen s, dem Druck P und dem Wärmezustand, den die Geschwindigkeit v charakterisirt; es ist also $\pi = \frac{Pv^2}{s}$

Es werde, ohne Volumenveränderung, v um Δv vermehrt; die elastische Kraft nimmt um $\Delta\pi$ zu und man hat

$$\Delta\pi = \frac{P}{s}\left\{2\,\Delta v + \Delta v^2\right\}$$

Es werde nun das gleiche Luftquantum bei der durch v definirten Temperatur auf das Volumen $\frac{s}{\nu}$ zusammengedrückt; die elastische Kraft wird:

$$\pi_1 = \frac{Pv^2}{s}.\nu$$

Bei unverändertem Volumen nehme nun v wieder um Δv zu, so ist die Zunahme der elastischen Kraft

$$\Delta\pi_1 = \frac{P}{s}\nu.\left\{2\Delta v + \Delta v^2\right]$$

Woraus folgt $\frac{\Delta\pi}{\Delta\pi_1} = \frac{1}{\nu} = \frac{\frac{s}{\nu}}{s}$

Oder die Zunahmen der Elasticitäten, welche gleiche Wärme-Zunahmen erzeugen, sind den Volumina umgekehrt, also auch den Dichtigkeiten direkt proportional. — Dieses ist aber eine direkte Folge des Gay-Lussac'schen Gesetzes. *) Das gleiche Resultat hätte sich auch aus der schon behandelten Euler'schen Formel ergeben. Der Unterschied ist aber, dass, während Euler diesen Umstand nicht beachtet hatte, Daniel Bernoulli den Satz aufstellte und sich nach experimenteller Bestätigung desselben umsah; ausserdem schlug er vor, den Wärmegrad der Luft (Seite 204, § 8) der Elasticität desselben proportional zu setzen, was soviel hiess, als die Temperatur durch die Grösse [Konstante .V v^2] zu messen.

„Dieses Theorem, sagt B. (§ 7, Seite 203), durch „welches angezeigt wird, dass in jeder Luft von irgend „welcher Densität, aber von gleichem Wärmegrade, die „Elasticitäten sich wie die Dichtigkeiten verhalten, und, „dass selbst die Zunahmen der Elasticitäten, die aus glei-„chen Wärmezunahmen entstehen, den Dichtigkeiten pro-„portional sind, ist durch Amontons auf dem Wege der

---

*) Es sei nämlich ein Volumen V von Luft unter dem Druck P und bei der Temperatur t; es ist also $P.V = Const. [1 + \alpha t]$ der Ausdruck des Mariotte-Gay-Lussac'schen Gesetzes; nehmen bei konstantem Volumen die Temperatur um Δt und der Druck um ΔP zu, so ist: $\Delta P.V = Const.\ \alpha.\Delta t$;

Es sei unter dem Druck P_1, das Luftvolumen V_1, bei der Temperatur t; es ist wieder $P_1 V_1 = Const.\ [1 + \alpha t]$, es nehme wieder t um Δt, also P_1 um ΔP_1 zu; man hat: $\Delta P_1.V_1 = Const.\ \alpha.\Delta t$; und folglich:

$$\frac{\Delta P.V}{\Delta P_1.V_1} = 1 \text{ oder } \frac{\Delta P}{\Delta P_1} = \frac{V_1}{V} \text{ wie oben.}$$

„Erfahrung gelehrt und von ihm in den Mémoires de „l'Acad. de Paris pour l'année 1702 berichtet worden."

11) Ohne uns bei den Betrachtungen aufzuhalten, welche D. Bernoulli über den Zustand der Athmosphäre und die Aenderungen derselben anstellte, wollen wir noch eines Versuches der Ableitung einer Formel zur Bestimmung des athmosphärischen Drucks in einer gegebenen Höhe erwähnen (Hydrodyn. Sectio 10 — Seite 213 u. ff.) der, wenngleich verfehlt, immerhin von der genialen Auffassung D. Bernoulli's zeugt, und als erste Anwendung der dynamischen Theorie der Gaze auf die barometrische Höhenmessung von geschichtlichem Interesse ist.

Schon Mariotte *) hatte eine Regel gesucht zur Bestimmung der Höhen durch Barometerbeobachtungen obgleich er aber das richtige Princip, welches zu Grunde zu legen war, kannte, liess er sich zu einer ganz falschen Berechnungsregel verleiten, so dass der Engländer Halley (1656—1724) es war, welcher 1686 **) die erste richtige Theorie der hypsometrischen Barometerformel zuerst lieferte. Die Formel, zu welcher er gelangt, ist:

$$x = \frac{900}{0,0144765} \cdot \log \frac{30}{h} \text{ engl. Fuss.}$$

wobei x die zu berechnende Höhe und h die Barometerhöhe am betreffenden Ort, in engl. Zoll ausgedrückt, sind. Daniel Bernoulli nahm 4 Barometer-Beobachtungen an Orten von bekannten Höhen über dem Meeresspiegel, und berechnete aus denselben die jedesmalige Elasticität E

*) Fischer. Geschichte der Physik. Göttingen 1802. Bd. II., Seite 589 u. ff.

**) Philosoph. Transactions für 1686. Discourse of the Rule of the decrease of the heigt of the Mercury in the Barometer, according as places are elevated above the surface of the Earth. etc.

der Luft, diejenige am Meeresspiegel = 1 gesetzt; dann, für die Annahme x = Const. log. $\frac{1}{E}$, [welche also der Halley'schen Theorie entspricht], suchte er für diese 4 Beobachtungen E aus der Formel zu ermitteln.

Nach der 1. Beobachtung war in einer Höhe von 1070′ Pariser Fuss über dem Meeresspiegel die Barometersäule von 28″,4‴$\frac{2}{3}$ [Stand am Meeresspiegel] um 16‴$\frac{1}{3}$ gefallen; nimmt man die Elasticität der Luft am Meeresspiegel als 1 an, so ist dann für diesen Fall, nach dem Mariotte'schen Gesetze, E = 0,9520; diese Werthe für x und E in die vorige Formel eingesetzt, geben:

$$\text{Const.} = \frac{x}{\log \frac{1}{E}} = \frac{1070}{-\log 0{,}9520} = 50194 .$$

Diese Formel wird nun $x = 50194 \log \frac{1}{E}$ [1]

wendet man sie auf die übrigen 3 Beobachtungen an, so ergibt sich Folgendes:

Höhe über dem Meeresspiegel.	Höhe des Barometers am Meeresspiegel.	Barometrische Depression.	Werthe von E aus den Beobachtungen.	Werth von E aus der Formel: $\log E = -\frac{x}{50194}$	Differenz.
Pariser Fuss					
1542′	28″, 2.‴	21‴$\frac{1}{2}$	E = 0,9364	E = 0,9317.	+0,0047
13158′.	27″,10‴	10″,5‴	E = 0,6257	E = 0,5469	+0,0788
65′	28″.	1‴	E = 0,9970	E = 0,9973	–0,0003.

Diese Abweichungen zwischen den Ergebnissen der Beobachtungen und denjenigen der Rechnung veranlassen D. Bernoulli die Formel [1], d. h. das Gesetz der Proportionalität der Elasticität der Luft in verschiedenen Höhen mit den Dichtigkeiten zu verwerfen, und anzunehmen, dass, in verschiedenen Höhen der mittlere Wärmezustand auch verschieden sei. —

„Das wirkliche Gesetz, sagt er Seite 216, welches die „Natur befolgt, zu finden, ist, glaube ich, kaum zu hoffen: denn wer wird anders als mit Hülfe von schwachen „Muthmassungen zu dem Gesetze der mittleren Geschwindigkeiten der Theilchen der Luft gelangen; ich bin je„doch vielleicht auf eine gewisse Hypothesis gefallen, „welche den Erscheinungen nicht übel entspricht; zuerst „werde ich die Gleichung (eigentlich die Curve) für jedes „beliebige Gesetz der Geschwindigkeiten geben, und dann „zu dieser speziellen Hypothesis übergehen.«

Es seien:

a	die mittlere Geschwindigkeit der Lufttheilchen;	am Meeresspiegel;
b	„ „ Dichtigkeit der Luft;	
c	„ Elasticität der Luft;	
v	„ mittlere Geschwindigkeit der Lufttheilchen;	in der Höhe x über dem Meeresspiegel.
z	„ mittlere Dichtigkeit der Luft;	
y	„ Elasticität der Luft;	

Nach dem weiter oben angeführten Satze hat man:

$$\frac{y}{c} = \frac{v^2.z}{a^2.b}$$

Und man gelangt bald zu der Differential-Gleichung:

$$-\frac{dy}{y} = \frac{a^2 b\, dx}{n.c.\, v^2}$$

wobei n eine Konstante ist.

Kennt man v als Funktion von x, so ergibt die Integration y als Funktion von x, also auch x als Funktion von y; nimmt man v = Const = a, so kommt:

$$\log \frac{c}{y} = \frac{b}{n.c} \,.\, x$$

d. h. man fällt auf das Halley'sche Gesetz wieder, welches

D. Bernoulli verwirft. Er versucht nun für v die Beziehung $v^2 = a^2 + m\,x$; wobei m eine Konstante bezeichnet.

Es ist dann

$$-\frac{dy}{y} = \frac{a^2 b\ dx}{nc\,[a^2 + mx]} \text{ woraus } \log\frac{c}{y} = \frac{a^2 b}{mnc}\log\frac{a^2+mx}{a^2}.$$

Bernoulli setzt nun, wegen der Willkürlilchkeit von

m und n: $\frac{a^2 b}{mnc} = 1$, so dass schliesslich:

$$\frac{y}{c} = \frac{a^2}{a^2 + mx}$$

d. h. die Elasticitäten verhalten sich umgekehrt wie die Quadrate der Geschwindigkeiten der Lufttheilchen. Den erwähnten Beobachtungen zu befriedigen, muss man

$\frac{a^2}{m} = 22000$ nehmen; es ist dann:

$$\frac{y}{c} = \frac{22000}{22000 + x} \text{ und } \frac{z}{b} = \left[\frac{22000}{22000 + x}\right]^2$$

Die Höhe x wäre demnach ausgedrückt durch die Formel:

$$x = 22000.\ \frac{c - y}{y}$$

Die Formel $\frac{y}{c}$, auf die 4 vorigen Beobachtungen angewendet, gibt:

Höhen über dem Meere.	$\frac{y}{c}$ aus den Beobachtungen	$\frac{y}{c}$ nach der Formel $\frac{22000}{22000+x}$	Differenz.
1070′	0,9520	0,9536	— 0,0016
1.542′	0,9364	0,9345	+ 0,0019
13158′	0,6257	0,6257	0.0000
65′	0,9970	0,99705	— 0,00005

Diese Formel genügte also, wie man sieht, besser als die vorige, den angegebenen Beobachtungen; mit derselben betrachtete übrigens D. Bernoulli die Frage durchaus nicht als erledigt; sagt er ja (Seite 217): „unterdessen „betrachte ich selbst diese Sache nicht anders als wie „eine precäre Hypothese, und die Rechnung habe ich „aus keiner andern Ursache vorausgeschickt, als um einen „Grund anzugeben, wie es geschehen kann, dass die „verticalen Höhen den Logarithmen der barometrischen „Höhen nicht entsprechen, wie es der Fall sein müsste, „wenn die Wärme durch die ganze Athmosphäre gleich„mässig wäre.“ D. Bernoulli hatte dabei die Haupteinwendung gegen das Gesetz $v^2 = a^2 + mx$ nicht übersehen, die nämlich, dass, nach demselben, die Wärme mit der Höhe über der Oberfläche des Meeres zunehmen müsse, während alle Erfahrungen das Gegentheil zeigen. Er meint, da er bloss von der mittleren Wärme in der freien Athmosphäre rede, so könne wohl für dieselbe das erwähnte Gesetz wahr sein, während aus anderen Ursachen die reelle Wärme (calor realis) in den Bergen nicht zunehme.

Aus dieser Auseinandersetzung der Bernoulli'schen Anschauungsweise über die Wärme und die Beschaffenheit der Gaze sieht man, dass er in den Resultaten eigentlich nicht weiter als Euler gegangen war: seine Hypothese hat aber vor der Euler'schen den Vorzug, weit allgemeiner und einfacher zu sein, sowie seine Ableitung der Formel für die elastische Kraft der Luft viel natürlicher ist. Im Ganzen vertritt Bernoulli mehr den nüchternen Standpunkt des eigentlichen Physikers, (abgesehen von der Barometerformel) der sich der Mathematik als eines Hülfsmittels bedient, während Euler eher der Mathematiker ist, welcher in seinen physikalischen Betrachtungen ein

Thema zu seinen mathematischen Ableitungen erblickt, und daher, auf dem Gebiete der physikalischen Hypothesen, weniger bedenklich ist. —

12) Zum Schluss nun gehen wir zur Betrachtung einer der letzten Abhandlungen Euler's über; sie befindet sich in den Memoiren der Petersburger Academie für 1779 *) und ist eigentlich eine Bearbeitung der Abhandlung von 1727. — In dieser Arbeit bezieht sich Euler auf die vor 50 Jahren veröffentlichte Theorie, deren Mängel er der damals lückenhaften Theorie der Flüssigkeiten zuschreibt; die Grundideen hält er indessen fest, ohne sie desshalb als in Uebereinstimmung mit der Natur zu halten; es kann jedoch geschehen, sagt er, dass eine gewisse Hypothese zur Erklärung mehrerer Naturerscheinungen »ebenso gut genügt, als wenn uns die wahre Ursache »derselben bekannt wäre; auf diese Art, zum Beispiel »pflegen fast alle Bewegungen der Himmelskörper mi »dem glücklichsten Erfolge aus der Hypothese der all»gemeinen Anziehung bestimmt zu werden, obgleich »diese Hypothese selbst aus der Physik gänz»lich verworfen werden sollte.« Diese letzten Worte zeigen uns auch, wie sehr Euler bis zu seinem Lebensende Cartesianer geblieben oder wenigstens, wie wenig er Newtonianer geworden war.

Die Luft besteht also wieder, in dieser neuen Arbeit Euler's, aus kleinen Kügelchen, in welchen 3 Theile zu unterscheiden sind: 1. ein innerer Raum mit Gewichtslosem Aether gefüllt; 2. eine aus dem eigentlichen, in heftiger Drehungs-Bewegung begriffenen Luftstoff

---

*) Acta Academiæ scientiarium imper. Petrop. Bd. III. Pars prior. Petrop. 1783, 4°. Conjectura circa naturam aeris pro explicandis phænomenis in athmosphæra observatis. (Seite 162—187).

bestehende Kugelschale, um welche herum 3. eine durch den in der Luft vorhandenen Wasserdampf gebildete dünne Kugelschale von Wasser liegt.

Die durch die drehende Bewegung der Luftstoffmoleküle erzeugte Centrifugalkraft dehnt die Kügelchen aus und darin liegt die Ursache der Elasticität der Luft. — Unter den Gründen zur Annahme einer solchen drehenden Bewegung führt Euler folgendes Argument an: »Ausserdem, sagt er, da man schon zur Genüge die »Ueberzeugung hat, dass die Wärme in einer gewissen »Bewegung des Aethers besteht, so muss dieser Luftstoff »in den Kügelchen davon (d. h. in Folge der Bewegung des »im inneren Kerne befindlichen Aethers) schon eine gewisse »Bewegung erhalten, welche, in einem so engen Raume »eingeschlossen, nicht anders als in Form einer wirbeln»den Bewegung fortgesetzt werden kann; dieses ist um »so wahrscheinlicher, als, bei zunehmender Wärme und »daher auch vermehrter wirbelnder Bewegung, die Elas»ticität der Luft zunimmt; woher es klar ist, dass die »drehende Bewegung in den Luftkügelchen »mit der Ursache der Wärme auf das Engste »zusammenhängt.«

Die Ableitung des durch die Centrifugalkraft hervorgebrachten Drucks findet in anderer Weise, als bei der 1. Abhandlung, statt, und führt unter der Annahme, dass der Luftstoff gleiche Dichtigkeit wie Wasser [also 1] hat, für den Druck in der Entfernung x vom Mittelpunkt des Luftkügelchens, auf den Ausdruck:

$$p = \frac{c^2}{g} \log x + \text{Const.}$$

wobei c die allen Theilchen des Luftstoffes gemeinsame Geschwindigkeit, g die Beschleunigung der Schwerkraft und p die Höhe einer Wassersäule bezeichnen, deren

Gewicht dem Druck an der betreffenden Stelle gleich wäre; (p ist also die Höhe des Wasserbarometers an der betreffenden Stelle); ist t der innere, s der äussere Radius der Kugelschale von Luftstoff, so muss an der inneren Oberfläche derselben, oder für $x = t$, der Druck null sein, woraus $C = \frac{c^2}{g} \log t$; und folglich an der äussern Oberfläche, oder für $x = s$, hat man:

$$p = \frac{c^2}{g} \log \frac{s}{t}$$

Dieser Ausdruck lässt sich leicht auf die Form bringen:

$$p = \frac{c^2}{3g} \log \frac{1 - \lambda q}{1 - q}$$

wobei λ den Bruchtheil der Masse des ganzen Luftkügelchens, den die Kugelschale von Wasser bildet oder den hygrometrischen Bruch bezeichnet, und q die mittlere Dichtigkeit der Luft (nicht des Luftstoffs) in Beziehung auf Wasser, also bei gewöhnlicher Luft ungefähr $\frac{1}{800}$ ist. Wegen der Kleinheit von q kann man den Log. in eine Reihe entwickeln, und erhält mit genügender Genauigkeit:

$$p = \frac{c^2}{3g} \left\{ [1 - \lambda]\, q + \tfrac{1}{2} [1 - \lambda^2]\, q^2 + \tfrac{1}{3} [1 - \lambda^3]\, q^3 \right]$$

13. Diese Formel zeigt zunächst, dass, unter gleichen Umständen, p, bei zunehmendem hygrometrischen Bruch, abnimmt; beschränkt man sich auf das erste Glied in der Klammer, so wird sie

$$[A] \qquad p = \frac{c^2}{3g} [1 - \lambda]\, q,$$

worin der Ausdruck des Mariotte'schen und des Gay-Lussac'schen Gesetzes enthalten ist; aus derselben hat man

$$c = \sqrt{\frac{3pg}{[1 - \lambda]\, q}}$$

Letzteren Ausdruck*) wendet Euler sofort auf die Bestimmung von c, für den höchsten und den geringsten in der freien Luft beobachteten Wärmegrad, an; diese beiden Wärmegrade sind am Delisle'schen Thermemeter**) mit den Zahlen 100° und 200° bezeichnet; [diese Temperaturen wären ungefähr gleich + 33° Celsius und — 34° Celsius].

Für die erste Temperatur findet Euler $c = 1790$ Rh. F. wobei $\lambda = o$ $p = 34'$ und $q = \frac{1}{1000}$ angenommen werden. Für die zweite Temperatur findet Euler $c = 1430$ Rh. Fuss, wobei $\lambda = o$ $p = 31'$ $q = \frac{1}{700}$ angenommen werden.

Es wäre also ein Leichtes, sagt Euler, für die verschiedenen Grade dieses Thermometers die entsprechenden Geschwindigkeiten, und überhaupt die irgend einem Wärmezustand der Luft entsprechende Geschwindigkeit zu berechnen; »diese Geschwindigkeit, fährt er fort, soll »nicht nur als bloss für die Luft geltend betrachtet wer»den, deren kleinste Theile wirklich mit einer so grossen »Geschwindigkeit bewegt werden müssen, sondern auch »sie scheint ebenfalls fast in allen Körpern stattzufinden. »Alle Naturforscher sind auch in dem Punkte einig, dass »die Ursache der Wärme in einer gewissen sehr schnellen »Bewegung der kleinsten Theilchen besteht. Diese Mei»nung ist also nicht nur mit unserer Theorie sehr über»einstimmend, sondern auch vermögen wir die Geschwin»digkeit selbst, die irgend einem Grade von Wärme ent»spricht, anzugeben. Obgleich diese Geschwindigkeit

*) Dieser Ausdruck ist für $\lambda = o$ mit demjenigen der ersten Abhandlung Euler's [Seite 304] identisch, denn die in dieser letzteren vorkommende Grösse f, die Höhe der Quecksilbersäule, ist gleich $\frac{p}{\nu}$, und was darin i war, ist hier q.

**) Ueber das Delisle'sche Thermometer, vide die vortreffliche Schrift von Dr. F. Burkhardt: Die wichtigsten Thermometer des XVIII. Jahrhunderts. Basel. 1871. 4.

»ungeheuer erscheint, muss man jedoch bedenken, dass »in der Natur noch unvergleichlich grössere Geschwindig-»keiten gegeben sind; eine solche ist z. B. die Geschwin-»digkeit der Lichtstrahlen; da nun in denselben die »Ursache aller Wärme zu suchen ist, so ist es nicht »merkwürdig, dass daraus ein so grosser Grad von »Geschwindigkeit erzeugt werden könne.«

Im Weiteren löst Euler die Gleichung

$$p = \frac{c^2}{3g} \log \frac{1 - q\lambda}{1 - q}$$

nach den verschiedenen in derselben vorkommenden Grössen, λ, q, und $\frac{c^2}{3g}$ auf, wobei wir nur hervorheben wollen, dass er $\frac{c^2}{3g}$ den Wärme-Grad nennt und somit, wie D. Bernoulli, die mechanische Definition der Temperatur festsetzt. Ein anderer Abschnitt ist einer Untersuchung über die Zusammendrückung der Luft und die Abweichungen vom Mariott'schen Gesetze gewidmet; wir treten auf dieselbe nicht ein, da sie für unsern Zweck ohne Interesse ist, und gehen zum letzten Abschnitt der Abhandlung über; welcher die Ueberschrift trägt: *De variatione status aeris per universam Athmosphaeram.*

14. In diesem Abschnitt sucht Euler eine Beziehung zwischen dem Zustand der Athmosphäre in einer Höhe z über der Erdoberfläche und demselben an der Erdoberfläche abzuleiten.

Es seien nun:

die Höhe des Wasserbarometers,	die Dichtigkeit der Luft,	der Hygrometrische Bruch,	die Geschwindigkeit der Drehungsbewegung in den Luftkügelchen,
auf der Erdoberfläche:			
p_1	q_1	λ_1	c_1
in der Höhe z über der Erdoberfläche:			
p	q	λ	c

Die Formel [A] (Seite 317) giebt:

$$p = [1 - \lambda]\, q. \frac{c^2}{3g}$$

Es ist ferner $d\,p = -\,q\,d\,z$, also hat man:

$$d\,p = -\,\frac{3g.\,p}{c^2\,[1-\lambda]}\,d\,z,$$

dieselbe Differentialgleichung, die schon Bernoulli gefunden; und endlich:

$$\log \frac{p_1}{p} = 3g \int \frac{d\,z}{[1-\lambda]\,c^2}$$

Würde man λ und c als Funktionen von z haben, so ergäbe sich das Integral.

Nimmt man $\lambda = \lambda_1$ und $c = c_1 =$ Constante, so findet man:

$$z = [1 - \lambda_1]\,\frac{c^2}{3g}\,\log \frac{p_1}{p}$$

Die Geschwindigkeit wird aber kaum eine konstante sein dürfen, da alle Beobachtungen eine Abnahme der Temperatur mit zunehmender Höhe über der Erdoberfläche nachweisen; Euler versucht daher das Gesetz $c^2 = \frac{{c_1}^2}{1 + \frac{z}{f}}$, so dass f die Höhe wäre, in welcher die Temperatur um die Hälfte ihres Betrages an der Erdoberfläche abgenommen hätte; bleibt λ_1 unveränderlich, so hat man nach ausgeführter Integration;

$$\log \frac{p_1}{p} = \left[z + \frac{z^2}{2f}\right] \frac{3g}{[1-\lambda_1]\,{c_1}^2} \qquad [B]$$

Wäre f bekannt, so könnte man durch eine einfache Barometerbeobachtung in der Höhe z, wenn ausserdem p_1 λ_1 und c_1 an der Erdoberfläche beobachtet worden sind, die Altitude z aus dieser Formel berechnen. — Da man für jeden Grad des Thermometers c berechnen kann, so lässt sich auch z ermitteln, ohne dass man f gerade kennen muss. In der That aus der hypothetischen Formel

$$c^2 = \frac{c_1^2}{1 + \frac{z}{f}} \text{ findet man } f = \frac{z\,c^2}{c_1^2 - c^2}$$

und dieser Werth in [B] eingesetzt gibt:

$$[C] \qquad z = \frac{2.\,[1 - \lambda_1]\,c^2.\,c_1^2}{[c^4 + c_1^2]\,3\,g} \log \frac{p_1}{p}$$

Hat man also an der Erdoberfläche und in der Höhe z, p_1 und p durch Barometer- c_1 und c aus Thermometerbeobachtungen ermittelt, so wird man, wenn noch λ_1 bekannt ist, aus der Formel [C] die Altitude z berechnen können.

Euler hat nicht versucht seine Formel auf bestimmte Fälle anzuwenden; da es nicht ganz ohne Interesse sein mag, dieselbe mit den gegenwärtig bestehenden zu vergleichen, ersetzen wir c^2 und c_1^2 durch ihre Werthe, nach der Formel $c = \frac{3\,g\,p}{q}$, wobei also $\lambda = o$ angenommen wird; ausserdem ist zu berücksichtigen, dass in der Formel [C] der $\log \frac{p_1}{p}$ ein hyperbolischer ist und die Barometerhöhen sich auf das Wasserbarometer beziehen; mit Berücksichtigung aller dieser Umstände findet man; ohne Mühe:

$$[D] \quad z = \frac{2.\,h_0.\,\nu_0}{q_0} \cdot \frac{1 + \alpha\,[t + t_1] + \alpha^2 t t_1}{2 + \alpha\,[t + t_1]} \; 2{,}302585 \log \frac{h_1}{h}$$

wobei:

α der Ausdehnungscoefficient für atmosphärische Luft,

h_0 der Druck einer Atmosphäre $= 0{,}760^{\mathrm{m}}$,

$\frac{\nu_0}{q_0}$ das Verhältniss der Dichtigkeiten des Quecksilbers und der Luft für den Druck h_0 und bei der Temperatur 0^0 C.,

t_1 die Lufttemperatur an der unteren Station; nach Celsius,
t „ „ „ „ „ oberen „ „ „
h_1 Quecksilber-Barometerstand an der unteren Station,
h „ „ „ „ oberen „

Für $h = 0,^{m}760 \ \frac{\nu_0}{q_0} = 10470$. [nach Eisenlohr] erhält man [für Metermaass]:

$$[E] \qquad z = 36644, \ \frac{1 + \alpha\,[t + t_1]\,t + \alpha^2\,tt_1}{2 + \alpha\,[t + t_1]} \log \frac{h_1}{h}$$

$\alpha = 0{,}003666$.

15. Wenden wir nun diese Formel auf einige Beispiele an, welche wir aus dem bekannten Werke Ramond's über die Laplace'sche Barometerformel entnehmen:

1. Höhe des Chimboraço:

	Barometerstand. Par. L.	Lufttemperatur.
An der unteren Station Meeresufer an der Südsee	$h_1 = 337{,}79$	$t_1 = 25^0{,}3$ R. $= 31^0{,}625$ C.
Auf dem Chimboraço	$h = 167{,}2$	$t = -1^0{,}6$ R. $= -2{,}^0$ C.

Höhe des Chimboraço:

nach der Euler'schen Formel $5879{,}^{m}7$

„ „ Laplace'schen „ $5876{,}^{m}65$

ohne Berücksichtigung der Schwere und der geographischen Breite,

2. Höhe des „Pic du midi" in den Pyrenäen über Tarbes:

	Barometerstand. Par. L.	Lufttemperatur.
In Tarbes	$h_1 = 327{,}66$	$t_1 = 20^0{,}3$ R. $= 25^0{,}375$ C.
Auf dem Berge	$h = 241{,}05$	$t = 8^0{,}3$ R. $= 10^0{,}375$ C.

Höhe des „Pic du midi":

nach der Euler'schen Formel $2600{,}^{m}97$

„ „ Laplace'schen „ $2614{,}^{m}27$

3. Höhe über Paris, welche Gay-Lussac bei seiner bekannten Luftfahrt [1804] erreichte;

	Barometerstand.	Lufttemperatur.
In Paris	$h_1 = \overset{mm}{622{,}21}$	$t_1 = 30{,}8$ R. $= 38^0{,}5$ C.
Im Aerostat	$h = \overset{mm}{328{,}80}$	$t = -9{,}5$ R. $= -10^0{,}872$ C.

Höhe, welche das Luftschiff erreichte:

nach der Euler'schen Formel $\overset{mm}{6999{,}10}$

„ „ Laplace'schen „ $\overset{m}{6979{,}35}$

Diese Beispiele mögen genügen, um den Werth der Euler'schen Ableitung zu würdigen; zu einer Zeit, wo das Werk de Luc's*) das beste über die barometrischen Höhenmessungen war, hatte Euler von seiner dynamischen Anschauung über die Natur der Gaze und das Wesen der Wärme ausgehend, freilich unter der nicht näher begründeten Vorausaussetzung des durch die Formel $c^2 = \frac{c_1^2}{1 + \frac{z}{f}}$ ausgedrückten Gesetzes der Abnahme der Temperatur mit zunehmender Höhe, eine Formel abgeleitet welche, wie man soeben gesehen, Resultate liefert, die, wenn gleich ungenügend, doch eine nicht unbedeutende Annäherung an der Wahrheit darbieten; es ist kaum nöthig hervorzuheben, wie sehr diese Formel der Bernoulli'schen überlegen ist, und sie ist, unseres Wissens, nach dieser letzteren, im 18. Jahrhundert der einzige Versuch einer, auf dem mechanischen Begriff der Wärme begründeten, barometrischen Höhenmessung.

Hiemit schliessen wir diese Mittheilungen; aus dem Gesagten geht hervor, dass wir Hermann, D. Bernoulli und

*) De Luc. Recherches sur les modifications de l'athmosphère. Genève. Tom. I. et II. 1772. 4°.

Euler mit Recht als die Vorläufer derjenigen Mathematico-Physiker bezeichnen dürfen, welche, in unserem Jahrhundert, die mechanische Wärmetheorie gegründet haben; wir betrachten diese drei Basler blos als Vorläufer, nicht als Erfinder oder als Begründer dieser Theorie; in der That, den grossen Grundsatz der Aequivalenz von Wärme und mechanischer Arbeit, das eigentliche Grundprincip, stellten sie nicht auf, und daher mussten ihre Leistungen auf diesem Gebiete, zwar geniale, aber unfruchtbare, nur auf Einzelnheiten, nicht auf allgemeine Resultate führende Versuche bleiben.

NB. In diesen Mittheilungen hätten auch die Arbeiten von Lesage [1724—1803] einen Platz finden sollen; aber abgesehen davon, dass ich mir seine Arbeit [in: deux traités de mécanique, publiés par P. Prewost, comme simple éditeur du premier et comme auteur du second] nicht verschaffen konnte, kommt er chronologisch, [den Zeitpunkt der Reife seiner theoretischen Ansichten über die Gaze verlegt er auf den 1. Dez. 1759] nach unseren drei Baslern, und so muss diese Betrachtung auf eine spätere Arbeit verschoben werden. Ueber Lesage siehe übrigens die vortreffliche Darstellung seines Lebens und Wirkens in Wolf's Biographien zur Kulturgeschichte der Schweiz. Bd. IV. Seite 173.