Zeitschrift: Mitteilungen der Naturforschenden Gesellschaft Bern

Herausgeber: Naturforschende Gesellschaft Bern

Band: - (1870)

Heft: 711-744

Artikel: Von den mathematischen Gesetzen welche sich bei'm Wachsthum der Waldbäume und Waldbestände finden lassen

Autor: Kutter

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-318840

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 02.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Kutter, Ingénieur.

Von den mathematischen Gesetzen

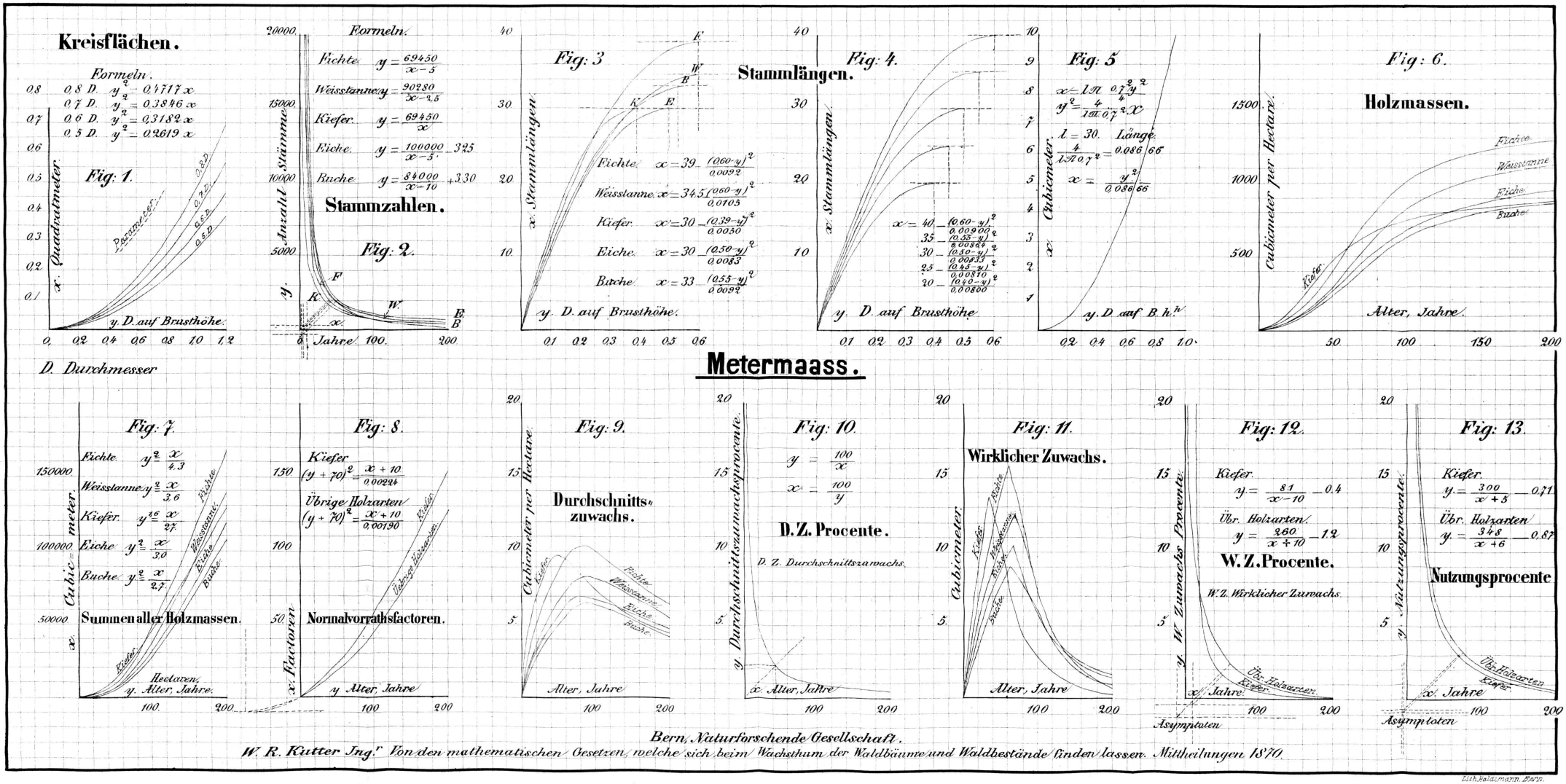
welche sich

bei'm Wachsthum der Waldbäume und Waldbestände finden lassen.

Vorgetragen den 30. April 1870.

Einleitung.

Wenn von mathematischen Gesetzen die Rede sein soll, welche bei'm Wachsthum der Waldbäume und Waldbestände vorkommen, so muss man sich auf den gleichen Standpunkt stellen, wie z. B. der Hydrauliker, welcher von Gesetzen handelt, die der gleichförmigen Bewegung des fliessenden Wassers in Kanälen und Flüssen zukommen. In beiden Fällen wird ein Ideal aufgestellt, welches in der Wirklichkeit eigentlich nicht, oder doch nicht vollkommen, vorhanden ist, so dass es bei der praktischen Anwendung der, auf normale Zustände basirten, Formeln immer nothwendig ist, sich bezüglicher Reductionsfactoren zu bedienen, oder solche in die Formeln selbst aufzunehmen. So wenig, selbst in ganz regelmässigen und künstlichen Kanälen, jeder Wassertropfen, oder jedes Wasseratom, mit der gleichen Geschwindigkeit sich vorwärts bewegt, wie alle andern, worunter man die gleichförmige Bewegung versteht, eben so wenig wird ein normaler Wald aufzufinden sein, welcher Jahr für Jahr genau den gleichen, und maximalen, Ertrag liefert. Gleichwohl strebt der Forstmann bei der Pflege des Waldes nach diesem Ziele und es ist für ihn von grossem Werthe, sich den normalen Wald, das Ziel seines Strebens, stets genau vergegenwärtigen zu können.



Bern, Naturforschende Gesellschaft.

W. R. Kutter Ing.r Von den mathematischen Gesetzen, welche sich beim Wachsthum der Waldbäume und Waldbestände finden lassen. Mittheilungen 1870.

Lith. Holzermann. Bern.

Unter der Normalität einer Waldung versteht man denjenigen Zustand, welcher die Grundbedingung der Production des maximalen Ertrages in ununterbrochener Gleichmässigkeit erfüllt. In einem normalen Waldbestande ist keine Lücke und berühren sich überall die Aeste der Bäume, so dass nur wenig, oder kein Sonnenlicht bis auf den Boden dringen kann. Nur so weit Licht und Luft auf die Bäume einwirken können, also in den Gipfeln, giebt es Aeste und Zweige; wo diese Einwirkung aufhört, da giebt es auch keine Aeste mehr. Desto vollkommener entwickelt sich aber der Wachsthum des Stammes, welcher unter diesen Umständen bedeutend mehr Länge erhält, als wenn er freisteht und viele Aeste treiben kann.

In einer normalen Waldung müssen aber von allen Altern, vom jüngsten bis zum Haubarkeitsalter, in welchem sich der höchste Ertrag ergiebt, solche normale Bestände vorhanden sein, so dass immer gleich altes Holz im bestimmten, richtigen, Haubarkeitsalter zum Hiebe kommt. Damit dieses in ganz vollständiger Weise geschehen kann, müssen Waldabtheilungen, welche geringere Productionsfähigkeit besitzen, als andere, desto mehr Ausdehnung erhalten, als diese. Die Eintheilung muss überhaupt so disponirt sein, dass, wie oben bemerkt, der Ertrag alljährlich der gleiche ist.

A. Form der Waldbäume.

In den normalen Waldbeständen erhalten die Waldbäume ihre normale Form. Sie bilden nicht Kegel, wie man vor 30 à 40 Jahren noch allgemein angenommen hatte, sondern in der Regel parabolische Kegel, deren Kubikinhalt bekanntlich gleich ist der Hälfte der Kreisfläche der Basis, multiplicirt mit der Höhe, während

der Inhalt des Kegels gleich ist einem Drittheil der Kreisfläche der Basis, multiplizirt mit der Höhe. Dem parabolischen Kegel beinahe gleich, doch etwas geringer, wird der Kubikinhalt gefunden, wenn die Kreisfläche von 0,7 der Basis mit der Höhe multiplicirt wird. Da es aber auch vollholzige Waldbäume mit mittleren Durchmessern gleich 0,8 der Basis (oder des Durchmessers auf Brusthöhe) giebt, sowie auch abholzige mit 0,6 und freistehende, kegelförmige, mit 0,5 der Basis, so hatten wir uns seiner Zeit zum Behuf unserer forstlichen Aufgaben und Waldtaxationen für diese vier Formen eingerichtet und zwar nur für diese, da man selten, oder wohl nie Bestände antrifft, welche in ausgesprochener Weise einer Zwischenstufe angehörten. Beinahe in allen Fällen wird die Formzahl 0,7 als mittlerer Durchmesser angetroffen und nur im Berner Oberlande sind wir in den Fall gekommen, die Kubiktafel für die Formzahl 0,6 anzuwenden. In normalen Waldbeständen wird der Stamm bis zum äussersten Gipfel gerechnet, mit Inbegriff der wenigen kleinen Aeste und Zweige der Krone, welche man sich am Gipfel zusammengebunden denken kann. In geschlossenen, (beinahe normalen) Buchen- und Eichen-Beständen fanden wir bei der Untersuchung die Formzahl 0,7 überall vorherrschend, ebensowohl wie bei Fichten-, Weisstannen- und Kiefer-Beständen.

Wir können also sagen, dass in der Form der Waldbäume, resp. ihrer Stämme, der parabolische Kegel vorherrscht.

B. Inhalt der Waldbäume, Kubiktafeln.

Wenn für die Berechnung des Volumens der Waldbäume die Kubiktafel nach der Formzahl 0,7 in den allermeisten Fällen gut passt, so giebt es doch Fälle, wo

andere Formzahlen vorkommen und also andere Kubiktafeln gebraucht werden müssen. In solchen Fällen würde man sich jedoch irren, wenn man annehmen wollte, der Kubikinhalt werde gefunden, wenn die Kreisfläche von z. B. 0,6 D (D Durchmesser auf Brusthöhe) mit der Länge multiplizirt wird, wie dieses bei 0,7 D geschieht. Im Gegentheil, er würde bei 0,8 D zu gross und bei 0,6 D und 0,5 D zu klein ausfallen. Wir hatten daher für 0,8 D und 0,6 D besondere parabolische Kegel construirt, Theile derselben von 3 zu 3 Meter Länge mit den entsprechenden mittlern Durchmessern als Cylinder kubirt und hieraus die richtigen mittleren Kreisflächen berechnet, welche mit den Längen bis zum Gipfel multiplizirt, die richtigen Kubikinhalte geben.

Wenn man die, einem gewissen Durchmesser zukommende, mittlere, oder maassgebende, Kreisfläche mit verschiedenen Längen multiplicirt und die so erhaltenen, Kubikinhalte der Waldbäume auf eine Coordinaten-Scala aufträgt, deren Abscissen die Stammlängen und deren Ordinaten die Kubikinkalte sind, so entsteht eine, in dem Ursprunge der Coordinatenachsen beginnende, gerade Linie und wenn man für alle vorkommende Durchmesser solche gerade Linien zieht, so entsteht ein Strahlenbüschel, welcher eine graphische Kubiktafel vorstellt und auf welchem alle vorkommende Kubikinhalte der Waldbäume direct abgelesen werden können.

Die Reihen der mittteren oder maassgebenden Kreisflächen, deren Multiplikation mit den Stammlängen bis und mit dem äussersten Gipfel die Kubikinhalte der Waldbäume giebt, sind Fig. 1 graphisch aufgetragen. Dieselben geben parabolische Curven, deren gemeinsame Achse mit der Ordinatenachse zusammenfällt, welche die Kreis-

flächen giebt. Die Parabelordinaten, oder die Abscissen, sind die Durchmesser der Waldbäume auf Brusthöhe.

Die Formeln sind folgende:

1. Für 0,8 D. $y^2 = 0{,}4717\ x$.
2. „ 0,7 D. $y^2 = 0{,}3846\ x$.
3. » 0,6 D. $y^2 = 0{,}3182\ x$.
4. » 0,5 D. $y^2 = 0{,}2619\ x$.

x sind die Kreisflächen, y die Durchmesser auf Brusthöhe.

Werden die Parameter dieser Parabeln graphisch aufgetragen, so bilden sie ebenfalls eine parabolische Curve von ähnlicher Lage, wie die vier Kreisflächen-Curven.

C. Anzahl Stämme per Hectare.

Wir haben oben von der Beschaffenheit und dem Schlusse (Dichtigkeit) der normalen Waldbestände gesprochen. Dabei entsteht die Frage, wie viel Stämme in jedem Alter per Hectare im Normalzustande durchschnittlich gezählt werden können?

Nach den badischen Auszählungsresultaten von 1836 bis 1839, und nach den, von uns selbst ausgeführten, zahlreichen, Waldtaxationen in den Kantonen Bern und Solothurn von 1840 bis 1852 und seither, ergeben sich für die fünf Holzarten Fichte, Weisstanne, Kiefer, Eiche und Buche sehr verschiedene Reihen, bezüglich welcher wir von vorneherein zn bemerken haben, dass keine derartige Reihen Anspruch auf grosse, überall maassgebende, Genauigkeit machen können, sondern dass sie hauptsächlich nur als mittlere, durchschnittliche, Werthe zu betrachten sind. Werden diese Reihen graphisch aufgetragen, (Fig. 2). so entstehen annähernd gleichseitige Hyperbeln, deren Asymptoten in der Nähe der Coordinaten liegen und mit diesen parallel sind.

Die Formeln, in welchen y, als Ordinate, die Anzahl Stämme und x, als Abscisse, die Anzahl Jahre des Alters bezeichnen, sind folgende:

1. Fichte $y = \frac{69450}{x - 5}$

2. Weisstannen $y = \frac{90280}{x - 2{,}5}$

3. Kiefer $y = \frac{69450}{x.}$

4. Eiche $y = \frac{100000}{x - 5} - 325.$

5. Buche $y = \frac{84000}{x - 10} + 330.$

D. Variation der Stammlängen.

Eine fernere Frage entsteht bezüglich der Stammlängen in geschlossenen, oder normalen, Waldbeständen. nach welchem Gesetze nimmt die Stammlänge mit der Dicke des Baumes, resp. mit dem Durchmesser auf Bruchhöhe zu?

Hier kann es sich selbstverständlich ebenfalls nur um durchschnittliche Werthe handeln, wie sie in der Regel vorkommen. Tragen wir die, aus unsern zahlreichen Messungsresultaten erhaltenen mittleren Reihen auf eine Coordinaten-Scala (Fig. 3.), so entstehen annähernd parabolische Curven, deren Achsen ungleich weit von der Ordinatenachse und deren Ordinatenachsen ungleich weit von der Abscissenachse entfernt sind. Die Werthe y sind die Durchmesser auf Brusthöhe, die Werthe x die Stammlängen.

Formeln:

1. Fichte $(0{,}60 - y)^2 = 0{,}0092 \times 39 - x;$

$$x = 39 - \frac{(0{,}60 - y)^2}{0{,}0092}$$

2. Weisstanne $(0{,}60 - y)^2 = 0{,}0105 \times 34{,}5 - x;$

$$x = 34{,}5 - \frac{(0{,}60 - y)^2}{0{,}0105}$$

3. Kiefer $(0{,}39 - y)^2 = 0{,}0050 \times 30 - x;$

$$x = 30 - \frac{(0{,}39 - y)^2}{0{,}0050}$$

4. Eiche $(0{,}50 - y)^2 = 0{,}0083 \times 30 - x;$

$$x - 39 - \frac{(0{,}50 - y)^2}{0{,}0083}$$

5. Buche $(0{,}55 - y)^2 = 0{,}0092 \times 33 - z;$

$$x = 33 - \frac{(0{,}55 - y)^2}{0{,}0092}$$

Bei der Taxation des, der Stadt Bern angehörenden, Kühlewylwaldes, bei Zimmerwald, wo beinahe abnorme Wachsthumsverhältnisse vorkommen, wie z. B. Durchmesser auf Brusthöhe bis auf 1,5 Meter und Stammlängen bis auf 50 Meter (bei Weisstannen im Alter von 180-200 Jahren), fanden sich Durchschnittsverhältnisse der Stammlängen, welche eine ganz andere Reihe und Curve geben als die gewöhnlichen, nämlich eine gleichseitige Hyperbel, deren wagrechte Asymptote 61, 8 Meter über der Abscissenachse und deren senkrechte Asymptote 0,3 Meter ausserhalb der Ordinatenachse liegt. Die Potenz der Hyperbel ist 19,6.

Formel:

$$y = 61{,}8 - \frac{19{,}6}{x - 0{,}3}$$

Fasst man die Stammlängen ganz allgemein in's Auge, ohne die Holzart, Bodenbeschaffenheit u. s. w. in Betracht zu ziehen, sondern nur von der Normalität der Waldbestände ausgehend, so lassen sich zwischen den minimalen und maximalen Maxima der Stammlängen (etwa 20 bis 40 Meter im allgemeinen Durchschnitt) regelmäs-

sige Classen eintheilen, so dass man eine betreffende Stammlängenreihe sofort kennt, wenn man die maximale Stammlänge eines Waldbestandes ausgemittelt hat. Wir geben beispielsweise hier nur für die maximalen Stammlängen zwischen 40 und 20 Meter, von 5 zu 5 Meter die Formeln, während die Curven von Meter zu Meter maximale Stammlänge aufgetragen werden könnten. (Fig. 4.)

Formeln.

1. Für 40 Meter maximale Stammlänge.

$$(0{,}60 - y)^2 = 0{,}00900 \times 40 - x;$$

$$x = 40 - \frac{(0{,}60 - y)^2}{0{,}00900}$$

2. Für 35 Meter.

$$(0{,}55 - y)^2 = 0{,}00864 \times 35 - x;$$

$$x = 35 - \frac{(0{,}55 - y)^2}{0{,}00864}$$

3. Für 30 Meter.

$$(0{,}50 - y)^2 = 0{,}00833 \times 30 - x;$$

$$x = 30 - \frac{(0{,}50 - y)^2}{0{,}00833}$$

4. Für 25 Meter.

$$(0{,}45 - y)^2 = 0{,}00810 \times 25 - x;$$

$$x = 25 - \frac{(0{,}45 - x)^2}{0{,}00810}$$

5. Für 20 Meter.

$$(0{,}40 - y)^2 = 0{,}00800 \times 20 - x;$$

$$x = 20 - \frac{(0{,}40 - y)^2}{0{,}00800}$$

Verschiedene Waldbäume von gleicher Länge können sehr verschiedene Durchmesser haben, im Gegensatze zu gleichen Durchmessern mit ungleichen Längen, welchen Fall wir soeben behandelt haben. Berechnen wir die Kubikinhalte einer Anzahl Wald-

bäume z. B. von 30 Meter Länge, aber mit verschiedenen Durchmessern auf Brusthöhe, nach der Formzahl 0,7 D, so erhalten wir eine Reihe, welche, graphisch aufgetragen, wieder eine parabolische Curve giebt, und zwar eine solche, deren Achse mit der Ordinatenachse zusammenfällt, welche die Kubikinhalte angiebt, und deren Parabelordinaten die Durchmesser auf Brusthöhe sind. (Fig. 5.)

Die Formel, worin l die Länge = 30 Meter ausdrückt, ist folgende:

$$x = \frac{\pi\, 0{,}7^2\, y^2}{4}$$

$$y^2 = \left(\frac{4}{\pi\, 0{,}7^2}\right) x;$$

$$\frac{4}{\pi\, 0{,}7^2} = 0{,}08666$$

$$x = \frac{y^2}{0{,}08666}$$

In Obigem ist nun ungefähr dasjenige enthalten, was wir von mathematischen Gesetzen bei'm Wachsthum der Waldbäume wahrnehmen konnten, wobei es sich von selbst versteht, dass der Nachweis und die Ableitung um gar viel umständlicher abgehandelt werden könnten, als es hier geschehen ist und dass noch mehrere solcher Gesetze vorhanden sein werden, ohne dass wir sie wahrgenommen haben, wie es denn auch z. B. für die Ermittlung des Holzvorrathes der Bestände auch noch andere Methoden giebt, als die von uns angewandte.

E. Etwas über die Waldbestände.

Bevor wir zu den mathematischen Gesetzen übergehen, welche bei'm Wachsthum der Waldbestände sich finden lassen, müssen wir noch einmal einen Blick auf den Normalzustand einer Waldung werfen. Die Normalität bedingt also den maximalen Ertrag in voll-

kommener Gleichmässigkeit und dieser maximale Ertrag, quantitativ genommen, findet im normalen, oder richtigen, Haubarkeitsalter statt. Dieses Haubarkeitsalter, resp. das Alter, in welchem der maximale Durchschnittszuwachs, der Normalbetrag, sich ergiebt, abgesehen von Abweichungen aus andern Rücksichten, als denjenigen des quantitativen Ertrags, muss also genau ausgemittelt werden können und dieses geschieht durch reihenweise Berechnung des Durchschnittszuwachses per Hectare von Alter zu Alter. Zu diesem Zwecke ist aber ferner noch erforderlich, dass die vorhanden sein sollende Holzmasse per Hectare von Alter zu Alter bekannt sei, in welche mit dem Alter dividirt wird, um den Durchschnittszuwachs zu erhalten. Es ist also nothwendig, eine hinlängliche Menge zuverlässiger Taxationsresultate von möglichst normalen Waldbeständen und in möglichst verschiedenen Altersabstufungen zu besitzen, um daraus Taxationstabellen für normale Waldungen und zwar vorerst mit reinen, nicht gemischten, Holzbeständen, aufstellen zu können, welche gleichsam das Bild eines normalen Waldes in Zahlen darstellen und alles dasjenige enthalten, was dem Forstmanne in dieser Hinsicht zugleich wichtig und interessant ist. Eine normale Waldung kann man sich am einfachsten und besten vor Augen führen, wenn man sich vorstellt, eine Waldfläche von überall gleicher Bodenbeschaffenheit und Productionsfähigkeit, sei in so viele gleiche Theile getheilt, als das Haubarkeitsalter Jahre zählt und es sei ein Theil mit einjährigem Holz bestanden, ein Theil mit zweijährigem, ein Theil mit dreijährigem u. s. f. so dass der letzte Theil das Haubarkeitsalter besitzt, der vorletzte Theil ein Jahr später, der vorvorletzte Theil zwei Jahre später, etc. in's Haubarkeitsalter vorrückt, in welchem Falle alle Jahre gleich altes Holz, gleichviel und das maximale Quantum zum Hiebe kommt.

F. Taxationstabellen.

Eine Taxationstabelle soll also das getreue Bild einer solchen Waldung darstellen, wobei es aber genügt, Altersklassen von 10 zu 10 Jahren anzunehmen, die Rechnung jedoch gleichwohl nach obigem Principe zu führen, so dass die Summe aller Holzmassen in einem gewissen Alter die Summe aller einzelnen Holzmassen per Hectare und, vom einjährigen Holze hinweg, bis zum angenommenen Alter, von Jahr zu Jahr ausmacht. Die Taxationstabelle enthält daher für je eine Holzart, nebst allgemeinen Angaben über Boden, Lage etc. 1) die Alter von 10 zu 10 Jahren, 2) die Stammzahlen, Anzahl Stämme per Hectare, 3) die Holzmasse per Hektare, 4) die Summe aller Holzmassen, von eben so viel Hectaren, als das betreffende Alter Jahre zählt, 5) den Durchschnittszuwachs per Hectare, 6) die Durchschnittszuwachsprocente, 7) den wirklichen jährlichen Zuwachs, 8) die Procente des wirklichen Zuwachses, 9) die Nutzungsprocente nach der sogenannten rationellen Methode von Hundeshagen und 10) die Normalvorrathsfactoren, zur einfachen Berechnung der Summe aller Holzmaasse (fundus instructus bei der österreichischen Kameraltaxation). Wir haben aus den Resultaten unserer, während 30 Jahren von Zeit zu Zeit ausgeführten, Forsttaxationen fünf Taxationstabellen für normale Fichten-, Weisstannen-, Kiefern-, Eichen- und Buchenwaldungen auf bestem Boden und in bester Lage (Westschweiz) aufgestellt, welche als durchschnittliche Erfahrungsergebnisse von einigem Werthe sein mögen und fügen dieselben hier bei.

D. Z. bedeutet Durchschnittszuwachs,

W. Z. wirklicher, jährlicher, Zuwachs.

N. V. Normalvorrathsfactoren.

Holzart: Fichte. Höhe über Meer: 300 bis 800.m

Bonität: Sehr gut, bester Boden und Lage; Productionsfähigkeit: 1,0.

Alter, Jahre.	per Hectare. Stammzahl	per Hectare. Holzmasse. Cm.	Summe aller Holzmasse. Cm.	per Hectare D. Z. Cm.	D. Z. Procent.	per Hectare W. Z. Cm.	W. Z. Procent.	Nutzungs Procent.	N. V. factor.
10	14000	30,0	150	3,00	10,00	3,37	11,25	20,00	4
20	4650	86,2	731	4,31	5,00	6,15	7,13	12,30	8
30	2780	165,0	1987	5,50	3,33	8,62	5,23	8,43	12
40	2000	277,5	4200	6,94	2,50	11,25	4,50	6,65	15
50	1550	412,5	7650	8,25	2,00	12,69	3,28	5,41	18
60	1260	570,0	12562	9,50	1,66	15,75	2,76	4,55	22
70	1070	712,5	18975	10,18	1,43	14,25	2,00	3,76	26
80	930	825,0	26662	10,31	1,25	12,22	1,48	3,09	32
90	820	937,5	35475	10,42	1,11	9,75	1,04	2,64	38
100	730	1012,5	45225	10,12	1,00	7,92	0,76	2,24	44
110	660	1080,0	55687	9,72	0,91	6,00	0,55	1,94	51
120	600	1125,0	66712	9,37	0,83	4,65	0,41	1,68	59
130	550	1152,5	78150	8,92	0,77	3,75	0,32	1,48	67
140	510	1192,5	89925	8,47	0,71	3,00	0,25	1,33	75
150	480	1218,7	101981	8,10	0,66	2,47	0,20	1,19	83
160	450	1237,5	114262	7,72	0,62	2,02	0,16	1,80	92
170	420	1256,2	126731	7,35	0,59	1,57	0,13	0,99	101
180	400	1267,5	139350	7,05	0,55	1,27	0,10	0,91	110
190	370	1275,0	152062	6,67	0,52	0,97	0,08	0,84	119
200	340	1282,5	164850	6,27	0,50	0,75	0,06	0,78	128

Holzart: Weisstanne. Höhe über Meer 300 bis 800.m

Bonität: Sehr gut, bester Boden und Lage; Productionsfähigkeit: 1,0.

Alter, Jahre.	per Hectare. Stammzahl.	per Hectare Holzmasse. Cm.	Summe aller Holzmasse. Cm.	per Hectare. D. Z. Cm.	D. Z. Procent.	per Hectare. W. Z. Cm	W. Z Procent.	Nutzungs Procent.	N. V. factor.
10	14000	26,0	130	2,60	10,00	2,77	10,57	20,00	4
20	5500	67,5	600	3,37	5,00	5,02	7,44	11,76	8
30	3300	127,5	1575	4,25	3,33	6,97	5,47	8,23	12
40	2400	217,5	3300	5,44	2,50	8,85	4,07	6,64	15
50	1900	315,0	5932	6,30	2,00	10,27	3,26	5,33	18
60	1570	431,2	9664	7,19	1,66	11,55	2,70	4,47	22
70	1340	555,0	14695	7,93	1,43	12,37	2,23	3,81	26
80	1170	652,5	20632	8,16	1,25	11,25	1,72	3,16	31
90	1030	750,0	27645	8,33	1,11	9,22	1,23	2,71	37
100	930	825,0	35520	8,25	1,00	7,50	0,91	2,32	43
110	840	885,0	44070	8,02	0,91	6,00	0,68	2,01	50
120	770	932,5	53182	7,80	0,83	4,87	0,52	1,76	57
130	710	975,0	62745	7,50	0,77	3,75	0,38	1,55	64
140	660	1005,0	72645	7,20	0,71	3,07	0,30	1,38	72
150	610	1031,2	82826	6,90	0,66	2,62	0,25	1,25	80
160	570	1057,5	93270	6,60	0,62	2,25	0,21	1,13	88
170	540	1080,0	103957	6,37	0,59	1,95	0,18	1,04	96
180	510	1098,7	114989	6,07	0,55	1,72	0,16	0,96	105
190	480	1110,0	125932	5,85	0,52	1,57	0,14	0,89	114
200	460	1125,0	137107	5,62	0,50	1,50	0,13	0,83	122

Holzart: **Kiefer.** Höhe über Meer: 300 bis 800.m

Bonität: Sehr gut, bester Boden und Lage; Productionsfähigkeit: 1,0.

Alter, Jahre.	per Hectare. Stammzahl.	per Hectare. Holzmasse Cm.	Summe aller Holzmasse. Cm.	per Hectare. D. Z. Cm.	D. Z. Procent.	per Hectare. W. Z. Cm.	W. Z. Procent.	Nutzungs Procent.	N. V. factor.
10	7000	45,0	225	4,50	10,00	4,50	10,00	20,00	4
20	3400	120,0	1050	6,00	5,00	9,00	7,50	11,94	8
30	2300	247,5	2887	8,25	3,00	12,75	5,15	8,71	12
40	1740	375,0	6000	9,37	2,50	12,75	3,40	6,29	16
50	1400	487,5	10312	9,75	2,00	10,50	2,15	4,75	21
60	1160	470,0	15600	9,50	1,66	8,25	1,45	3,66	27
70	1000	637,5	21637	9,11	1,43	6,15	0,96	2,95	34
80	870	682,5	28237	8,53	1,25	4,50	0,66	2,42	41
90	770	720,0	35250	8,00	1,11	3,60	0,50	2,05	49
100	700	750,0	42600	7,50	1,00	2,85	0,38	1,77	57
110	630	780,0	50250	7,05	0,91	2,25	0,29	1,55	65
120	580	795,0	58125	6,60	0,83	1,80	0,22	1,37	73
130	530	810,0	66150	6,22	0,77	1,50	0,18	1,22	81
140	500	825,0	74325	5,85	0,71	1,20	0,14	1,11	89
150	460	840,0	82650	5,62	0,66	0,97	0,11	1,02	98
160	430	855,0	91125	5,32	0,62	0,82	0,09	0,94	107
170	400	862,5	99712	5,10	0,59	0,67	0,08	0,86	116
180	380	870,0	108375	4,87	0,55	0,52	0,06	0,80	125
190	360	877,5	117187	4,64	0,52	0,45	0,05	0,75	134
200	340	881,2	127977	4,35	0,50	0,37	0,04	0,70	143

Holzart: **Eiche.** Höhe über Meer 300 bis 800.m

Bonität: Sehr gut, bester Boden und Lage; Productionsfähigkeit: 1,0.

Alter, Jahre.	per Hectare. Stammzahl.	per Hectare Holzmasse. Cm	Summe aller Holzmasse. Cm.	per Hectare. D. Z. Cm.	D. Z. Procent.	per Hectare W. Z. Cm.	W. Z. Procent.	Nutzungs Procent.	N. V. factor
10	19700	22,5	112	2,25	10,00	2,62	11,66	20,00	4
20	6400	60,0	525	3,00	5,00	4,50	7,50	11,94	8
30	3700	120,0	1387	4,05	3,33	6,00	5,33	8,24	12
40	2500	195,0	2925	4,87	2,50	7,50	3,84	6,72	15
50	1900	277,5	5287	5,55	2,00	8,77	3,17	5,27	19
60	1500	375,0	8550	6,25	1,66	9,75	2,60	4,40	23
70	1200	472,5	12787	6,75	1,43	9,75	2,06	3,70	27
80	1000	555,0	17925	6,94	1,25	8,25	1,49	3,10	32
90	850	622,5	23812	6,92	1,11	6,75	1,09	2,62	38
100	750	675,0	30300	6,75	1,00	5,77	0,85	2,23	44
110	600	727,5	37312	6,60	0,91	4,72	0,65	1,95	51
120	550	765,0	44775	6,37	0,83	4,12	0,54	1,71	58
130	470	802,5	52612	6,15	0,77	3,38	0,44	1,52	65
140	400	832,5	60787	5,92	0,71	3,15	0,38	1,37	72
150	360	862,5	69262	5,70	0,66	2,77	0,32	1,24	80
160	320	885,0	78000	5,55	0,62	2,47	0,28	1,13	88
170	280	908,5	86962	5,32	0,59	2,25	0,24	1,05	96
180	250	932,0	96150	5,17	0,55	2,02	0,21	0,97	104
190	210	945,0	105385	4,95	0,52	1,80	0,19	0,89	112
200	175	958,0	115050	4,80	0,50	1,65	0,17	0,83	120

Holzart: **Buche.** Höhe über Meer 300 bis 800.m

Bonität: Sehr gut, bester Boden und Lage; Productionsfähigkeit: 1,0.

Alter, Jahre.	per Hectare. Stammzahl.	per Hectare. Holzmasse. Cm.	Summe aller Holzmasse. Cm.	per Hectare. D. Z. Cm.	D. Z. Procent.	per Hectare. W. Z Cm.	W. Z. Procent	Nutzungs Procent.	N. V. factor.
10	30000	18,7	94	1,87	10,00	2,25	12,00	20,00	4
20	7330	52,5	450	2,62	5,00	3,75	7,14	12,17	8
30	3830	105,0	1237	3,50	3,33	5,25	5,00	8,61	12
40	2660	172,5	2625	4,31	2,50	6,75	3,91	6,62	15
50	2080	247,5	4725	4,95	2,00	7,87	3,18	5,26	19
60	1730	337,5	7650	5,62	1,66	8,92	2,64	4,42	23
70	1500	420,0	11437	6,00	1,43	8,62	2,05	3,67	27
80	1330	502,5	16050	6,28	1,25	7,87	1,57	3,13	32
90	1200	577,5	21450	6,42	1,11	7,05	1,22	2,69	37
100	1110	637,5	27525	6,37	1,00	6,00	0,94	2,32	43
110	1030	682,5	34125	6,22	0,91	4,87	0,71	2,00	50
120	970	720,0	41117	6,00	0,83	3,97	0,55	1,75	57
130	910	750,0	48487	5,77	0,77	3,15	0,42	1,55	64
140	870	776,2	56119	5,55	0,71	2,62	0,34	1,38	72
150	830	795,0	63975	5,32	0,66	2,10	0,26	1,24	80
160	790	813,7	72019	5,10	0,62	1,72	0,21	1,13	88
170	770	828,7	80250	4,87	0,59	1,42	0,17	1,03	96
180	740	840,0	88594	4,65	0,55	1,20	0,14	0,95	105
190	720	851,2	97050	4,42	0,52	1,05	0,12	0,88	114
200	700	862,5	105619	4,27	0,50	0,97	0,11	0,82	122

G. Die Holzmassen per Hectare.

Wir behandeln nunmehr die mathematischen Gesetze, welche bei Waldbeständen sich ergeben und betrachten vorerst die Holzmassen per Hectare.

Werden dieselben auf eine Coordinatenscala aufgetragen, deren Abscissen die Altersjahre und deren Ordinaten die Holzmassen per Hectare sind, (Fig. 6.), so entstehen vermittelnde sog. S Curven, für die wir jedoch keine Formeln aufzustellen im Stande waren.

H. Die Summe aller Holzmassen.

Nehmen wir die Summen aller Holzmassen für so viele Hectaren, als das angenommene Alter Jahre zählt, und tragen diese auf die Coordinatenscala (Fig. 7.), so erhalten wir für alle Holzarten Parabeln, deren gemeinschaftliche Achse mit der Ordinatenachse zusammenfällt, welche die Kubikmassen angiebt, während die Parabelordinaten die Anzahl Jahre des Alters und die Anzahl Hectare sind. Die Summen aller Holzmassen sind von 10 zu 10 Jahr berechnet worden, nach der Formel

$$\frac{10\,m}{2} + \frac{10\,(m + m')}{2} + \frac{10\,(m' + m'')}{2} + \ldots \frac{10\,(m^{n} + m^{o})}{2}$$

worin m die Holzmasse per Hectare bezeichnet.

Zu den erhaltenen fünf Reihen passen ungefähr folgende Ausdrücke:

1. Fichte $y^2 = \frac{x}{4{,}3}$;

$x = 4{,}3\ y^2$

2. Weisstanne $y^2 = \frac{x}{3{,}6}$;

$x = 3{,}6\ y^2$

3. Kiefer $^{1,6} = \frac{x}{2{,}7}$;

$x = 27\ y^{1,6}$

4. Eiche $y^2 = \frac{x}{3,0}$;

$x = 3,0\ y^2$

5. Buche $y^2 = \frac{x}{2,7}$;

$x = 2,7\ y^2$

1. Die Normalvorrathsfactoren.

Bei diesem Anlasse wollen wir zugleich die Normalvorrathsfactoren näher in's Auge fassen, welche zwar die letzte Columne der Taxationstabellen bilden. Diese Factoren dienen dazu, um durch einfache Multiplication der Holzmasse per Hectare im Haubarkeitsalter, oder des Normalertrags, die vorhanden sein sollende Summe aller Holzmassen (den fundus instructus) direkt zu berechnen, was z. B. bei der Vergleichung des gegenwärtigen Waldzustandes mit dem normalen, also bei Betriebsregulirungen, Servitutablösungen, Waldabtretungen u. s. w. von Wichtigkeit ist.

Schon bei den Reihen der Holzmassen per Hectare, nach den Altersabstufungen, dann bei den Reihen der Summen aller Holzmassen und auch hier bei den Reihen der Normalvorrathsfactoren finden wir eine auffallende Abweichung der Reihe der Kiefer von den Reihen der übrigen Holzarten. Die Kiefer wächst in ihrer Jugend verhältnissmässig viel stärker, und viel mehr zu, als andere Waldbäume, während sie im höhern Alter im Zuwachse zurückbleibt. Die Reihe der Normalvorrathsfactoren der Kiefer weist bedeutend höhere Werthe auf, als diejenigen der übrigen Holzarten, welche wenigstens sehr nahezu in eine und dieselbe Reihe zusammenfallen (Fig.8).

Beide Curven sind Parabeln, deren gemeinsame Achse 70 (Anzahl Jahre) rückwärts der Ordinatenachse liegt, welche die Normalvorrathsfactoren giebt. Die Ordi-

naten y, deren Anfangspunkt um 10 Einheiten der Normalvorrathsfactoren ausserhalb des Ursprunges der Abscissenachse liegt, sind die Altersjahre.

Die Formeln für diese parabolischen Curven sind folgende:

1. Kiefer $$(y + 70)^2 = \frac{x - 10}{0{,}00224};$$
$$x = 0{,}00224\,(y + 70)^2 - 10.$$

2. Uebrige Holzarten $$(y + 70)^2 = \frac{x + 10}{0{,}00190};$$
$$x = 0{,}00190\,(y + 70)^2 - 10.$$

K. Der Durchschnittszuwachs.

Der Durchschnittszuwachs wird berechnet durch Division des Alters in die vorhandene Holzmasse per Hectare. Der Durchschnittszuwachs im Haubarkeitsalter, multiplicirt mit der Anzahl Hectare, ist der Normalertrag der ganzen Waldung, wenn normale Waldzustände vorausgesetzt werden. Die Durchschnitte des Durchschnittszuwachses, wie sie annähernd aus unsern Taxationen von ziemlich normalen Waldbeständen hervorgingen, bilden, auf eine Coordinatenscala aufgetragen, Curven, welche offenbar einem mathematischen Gesetze folgen, welches wir aber nicht zu entdecken vermochten und welches jedenfalls einen höchst complicirten Ausdruck erhalten muss. Auch hier geht die Kiefer ihren abweichenden eigenen Gang. Jedenfalls nimmt man mit Leichtigkeit wahr, in welchen Altersperioden das quantitative Maximum des Durchschnittszuwachses, oder des Normalertrages, fällt, was von grosser Wichtigkeit ist, wenn es sich um die Bestimmung des Haubarkeitsalters (der sog. Umtriebszeit) handelt. (Fig. 9.)

Wenn wir die Durchschnittszuwachsprocente nehmen, so entstehen natürlich die Quotienten von 100,

dividirt durch die Alter und diese bilden, graphisch aufgetragen, eine gleichseitige, auf ihre Asymptoten bezogene, Hyperbel, deren Abscissen die Altersjahre und deren Ordinaten die Procente sind, welche sich auf die Holzmassen per Hectare beziehen. (Fig. 10.)

Die Formel ist einfach folgende:

$$y = \frac{100}{x};$$

$$x = \frac{100}{y};$$

L. Der wirkliche, jährliche Zuwachs.

Wir gelangen nun zu den Reihen des wirklichen, von Jahr zu Jahr stattfindenden, Zuwachses (Fig. 11.) und stossen hier auf wunderliche Erscheinungen, welche indess, graphisch dargestellt, dem Auge doch ein einfaches Bild von den Verhältnissen der Zunahme, des Culminationspunktes und der Abnahme des Zuwachses gewähren, wobei man aber nicht annehmen darf, dass die Altersperiode, in welcher der grösste, wirkliche, jährliche Zuwachs vorkommt, das richtige Haubarkeitsalter sei; dieses kann nur bei den Reihen des Durchschnittszuwachses in Betracht gezogen werden. Welchem mathematischen Gesetze diese, in gewissen Punkten plötzlich abgebrochenen, Curven angehören mögen, ist uns unmöglich zu bestimmen, wir müssen dieses den Gelehrten überlassen und bemerken nur noch, dass auch hier die Reihe der Kiefer ihre sehr ausnahmsweise Stellung einnimmt.

Die Procente des wirklichen Zuwachses lassen sich ziemlich gut in regelmässige Curven bringen. Sie stellen den wirklichen jährlichen Zuwachs von je 100 Kubikmeter der vorhandenen Holzmasse per Hectare vor und ihre Reihen bilden annähernd gleichseitige Hy-

perbeln, deren Asymptoten von den Coordinatenachsen etwas abstehen. Die Kiefer geht natürlich auch hier ihren besondern Weg, während die Reihen der übrigen Holzarten so ziemlich zusammenfallen, resp. durch nur eine Curve rspräsentirt werden können. (Fig. 12.)

Die Formeln sind folgende:

1. Kiefer $y = \frac{81}{x - 10} - 0{,}4$

2. Uebrige Holzarten $y = \frac{260}{x + 10} - 1{,}2$

M. Die Nutzungsprocente.

Wenn wir endlich noch die Reihen der Nutzungsprocente in's Auge fassen, welche durch Division der Summe aller Holzmassen in die Hundertfachen der Holzmassen per Hectare berechnet werden und nach der Hundeshagen'schen, sogenannten rationellen Methode der Betriebsregulirung dazu dienen, den jährlichen Abgabesatz einer Waldung zu bestimmen, welche dem Normalzustande entgegengeführt werden soll, so wäre es wohl zweckmässig, über die Anwendung des Nutzungsprocentes überhaupt und über die dabei vorzunehmenden Modificationen etwas näher einzutreten; allein wir beschäftigen uns hier nicht mit den verschiedenen Taxations- oder Betriebsregulirungsmethoden, sondern nur mit unserer Aufgabe.

Die Nutzungsprocente, wie sie sich aus den Taxationstabellen ergeben, bilden Reihen, welche der Form nach gleichseitigen Hyperbeln ähnlich sind, jedoch nicht ganz mit solchen zusammen fallen. Diejenigen gleichseitigen Hyperbeln, welche den Reihen am nächsten kommen und an den Anfangs- und Endpunkten mit denselben genau zusammenfallen, haben wir (Fig. 13) graphisch aufgetragen und geben hier noch die daherigen Formeln.

Die horizontalen Asymptoten liegen nicht ganz um ein Nutzungsprocent tiefer, als die Abscissenachse, welche die Altersjahre giebt und die senkrechten Asymptoten liegen etwas ausserhalb der Ordinatenachse, welche die Nutzungsprocente enthält.

1. Kiefer $y = \frac{300}{x + 5} - 0{,}71$

2. Uebrige Holzarten $y = \frac{248}{x + 6} - 0{,}87$

N. Schlussbemerkung.

Aus dieser gedrängten Uebersicht über die, bei'm Wachsthum der Waldbäume und der normalen Waldbestände vorkommenden mathematischen Gesetze ergiebt sich, dass diese Gesetze bei den sehr wichtigen Reihen der Holzmassen, des Durchschnittszuwachses und des wirklichen jährlichen Zuwachses per Hectare, wenigstens uns noch unbekannt sind und dass es in dieser Beziehung für uns noch zu lernen gibt. Welche mathematischen Gesetze aber bei den nicht normalen Waldbeständen, wie wir sie überall antreffen, vorkommen mögen, könnten wir zwar untersuchen, allein eine solche Untersuchung würde sehr weit führen; jedenfalls ist hier die Variation gross, wenn nicht unendlich. Das Verfahren zur Bestimmung der mathematischen Gesetze bei gemischten und unregelmässigen Waldbeständen wäre übrigens ganz dasselbe, wie bei bei den normalen; nur könnte ein bezügliches Resultat schwerlich von grossem, praktischem, Werthe sein. Aus den Ergebnissen der Untersuchung normaler Waldverhältnisse geht indess hervor, dass die meisten Reihen der Grundform und Hauptsache nach den Parabeln, oder den Hyperbeln angehören.