Zeitschrift: Mitteilungen der Naturforschenden Gesellschaft Bern

Herausgeber: Naturforschende Gesellschaft Bern

Band: - (1862)

Heft: 505-508

Artikel: Elementare Bestimmung der Beschleunigung der elliptischen Planetenbewegung

Autor: Schläfli, L.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-318713

Nr. 505 — 508.

L. Schläfli.

Elementare Bestimmung der Beschleunigung der elliptischen Planetenbewegung. (Mit 1 Tafel.)

(Vorgetragen den 2. Nov. 1861.)

Wenn die Summe der zwei Strahlen r und R (Fig. 1), die von den zwei festen Punkten F und G aus nach dem beweglichen Punkt P hingehen, constant ist, so beschreibt dieser Punkt P eine Curve, die Ellipse heisst.

Die zwei festen Punkte F, G heissen deren Brennpunkte, ihr Abstand FG = 2c heisst die ganze Eccentricität, dessen Mitte O das Centrum, OF = c die halbe Eccentricität. Es sei R + r = 2a, dann ist klar, dass a > c sein muss. [Wenn a = c ist, so kann der Punkt P nur in der Geraden, welche F und G verbindet, sich bewegen. — Wenn a < c ist, so ist das Dreieck FGP nur dann möglich, wenn man R — r = 2a setzt; die vom Punkt P in diesem Falle beschriebene Curve heisst Hyperbel.]

Ohne die Gestalt des Dreiecks FGP zu verändern, kann man es umkehren, so dass G nach F und F nach G kömmt, und dass P oben bleibt, aber so weit nach rechts zu liegen kömmt als es jetzt links liegt. Man kann aber auch das Dreieck FGP und seine Basis FG umlegen, so dass dann P ebensoweit unten ist, als jetzt oben, aber nach links hin in derselben Lage. Wenn man daher durch F, G eine unbegrenzte Gerade, und auf diese senkrecht durch das Centrum O eine andere unbegrenzte Gerade zieht, so theilt jede von diesen die Curve in zwei symmetrische Hälften, durch beide wird sie in vier congruente Quadranten zerschnitten. Diese zwei Geraden heissen die Hauptaxen der Curve. Wir wollen sehen, wie weit die Punkte vom Centrum entfernt sind, in denen diese Hauptaxen von der Curve geschnitten werden.

Wenn der bewegliche Punkt P (Fig. 2) links in die Hauptaxe kömmt, welche durch die Brennpunkte F, G geht, so ist $GP = R$, $FP = r$ und $R + r = 2a$; man mache rechts $GQ = r$, so ist $PQ = 2a$. Da aber O die Mitte von FG und die Ansätze PF, GQ links und rechts einander gleich sind, so ist O auch die Mitte von PQ. Folglich ist $OP = a$. Da die Curve sowohl durch P als durch Q geht, so ist 2a die Länge des horizontalen Durchmessers.

Wenn der bewegliche Punkt P (Fig. 3) in die senkrechte Hauptaxe kömmt, so ist er nach einem bekannten Satze von beiden Brennpunkten F und G gleich weit entfernt, d. h. es ist $R = r$. Da aber $R + r = 2a$ ist, so folgt $r = a$. Wenn wir nun $OP = b$ setzen, so folgt aus dem pythagoreischen Satze $a^2 = b^2 + c^2$, also $b^2 = a^2 - c^2$. Daher ist $b < a$. Man nennt a die grosse und b die kleine Halbaxe der Ellipse; 2a und 2b heissen als Längen des horizontalen und des verticalen Durchmessers der Ellipse die grosse Axe und die kleine Axe derselben.

Da $c < a$ ist, so ist, wenn wir $c = ea$ setzen, e ein ächter Bruch (für die Ellipse); man hat dann $c^2 = e^2 a^2$, daher $b^2 = (1 - e^2) a^2$, und endlich $b = a\sqrt{1 - e^2}$.

Es sei (Fig. 4) $FP + PG = FQ + QG$, man mache $HG = GQ$ und $FK = FP$, und ziehe PK, QH und PQ. Es folgt $FP + PH + HG = FK + KQ + QG$, und wenn man hievon $FP + HG = FK + QG$ subtrahirt, so bleibt $PH = KQ$. Die Dreiecke FPK und GHQ sind gleichschenklig; wenn man die Punkte P und Q nahe genug zusammenrückt, so werden diese Dreiecke so schmal als man nur will, und die Winkel an ihren Grundlinien werden sich dann von Rechten so wenig unterscheiden als man nur will. Die Dreiecke PQH und QPK können daher als solche betrachtet werden, die bei H und K rechte Winkel haben, mit einem Fehler, den man so klein werden lassen kann als man nur will, und der auf die endlich bleibenden Verhältnisse der Seiten eines jeden dieser zwei Dreiecke einen ebenfalls verschwindenden Einfluss ausübt. Sehen wir daher von diesem Fehler ab, so haben die zwei Dreiecke die Hypotenuse PQ gemein und die Katheten PH und QK gleich, sind daher congruent und haben also die den gleichen Katheten anliegenden Winkel gleich, d. h. es ist $\angle GPT = \angle FQU$, wenn die Strecke PQ verschwindet.

Nehmen wir jetzt F, G als Brennpunkte und $FP + PG = 2a$ als Werth der grossen Axe einer Ellipse an, so ist die verschwindend kleine Strecke PQ ein Bogen der Ellipse und dessen Verlängerung UT ihre Tangente. Wir haben daher den Satz:

Wenn durch einen Punkt P der Ellipse eine Tangente an dieselbe gezogen wird, so bilden die aus den Brennpunkten F und G nach diesem Punkte P gehenden Strahlen mit der Tangente gleiche Winkel. Daher wird Licht, das vom einen Brennpunkt ausgeht, an der Curve so zurükgeworfen, dass es durch den andern Brennpunkt geht und davon tragen diese Punkte ihren Namen.

Die Gerade, welche durch den Berührungspunkt senkrecht auf die Tangente gezogen wird, heisst Normale. Diese halbirt also den Winkel FPG, den die zwei Strahlen aus den Brennpunkten mit einander bilden. Wir wollen den halben Winkel derselben fortan mit ϑ bezeichnen.

Es seien F, G, O (Fig. 5) die Brennpunkte und das Centrum, P irgend ein Punkt der Ellipse, OM die Richtung der kleinen Axe, PNM die Normale in P; $PN = n$, $PM = m$, $FP = r$, $GP = R$. Durch die drei Punkte P, F, G kann ein Kreis gelegt werden. Da die kleine Axe mitten auf der Sehne FG senkrecht steht, so halbirt sie den zu dieser Sehne gehörenden Kreisbogen, und die Gerade, welche P mit der Mitte dieses Bogens verbindet, muss dann auch den Peripheriewinkel FPG halbiren, kann also keine andere als die Normale sein. Folglich ist M die Mitte des Kreisbogens. Hiedurch ist bewiesen, dass die vier Punkte F, G, P, M auf einem und demselben Kreise liegen. Daher ist $\angle MFG = \angle MPG = \vartheta$, weil beide Peripheriewinkel auf demselben Bogen (der zur Sehne MG gehört) stehen.

Man fälle aus M resp. MH und MK senkrecht auf PF und auf PG; die rechtwinkligen Dreiecke MHP und MKP sind dann congruent, weil sie die Winkel bei P gleich und die Hypotenuse m gemein haben. Also ist $MH = MK$, $PH = PK$. Nun sind aber auch die Dreiecke FOM, GOM congruent, weil sie die Kathete OM gemein und die Katheten OF, OG gleich haben; daher $FM = GM$. Die zwei Dreiecke FHM und GKM haben also bei H, K rechte Winkel, die Hypotenusen FM, GM gleich und die Katheten MH, MK auch gleich, sind daher congruent; folglich ist auch $FH = KG$, daher

$$PF + PG = PF + FH + PG - KG = PH + PK = 2PH,$$

weil $PH = PK$, wie schon bewiesen. Da nun $PF + PG = 2a$, so hat man $2PH = 2a$, also $PH = a$, d. h. $(\cos \vartheta) . m = a$. Man nennt PM die grosse, PN die kleine Normale, hat also den Satz:

Die Projection der grossen Normale auf einen der zwei Brennstrahlen ist gleich der grossen Halbaxe.

Die Dreiecke PFM und PNG sind einander ähnlich, weil ihre Winkel bei P einander gleich sind (jeder $= \vartheta$) und ihre Winkel bei M und G als Peripheriewinkel, die auf demselben (zur Sehne FP gehörenden) Bogen stehen, so dass sie also zwei Winkel gleich haben. Daher verhalten sich ihre den Winkeln bei M und G gegenüber liegenden Seiten zu einander, wie die den Winkeln bei F und N gegenüber liegenden, d. h. $r : n = m : R$, also $mn = rR$, das Produkt der grossen und kleinen Normale ist gleich dem Produkt der zwei Brennstrahlen.

Nach einem bekannten Satz ist $\frac{FN}{r} = \frac{NG}{R}$, also auch $= \frac{FN + NG}{r + R} = \frac{2c}{2a} = \frac{c}{a} = e$; folglich $FN = er$, $NG = eR$, $FN \times NG = e^2rR$. Da aber FG und PM Sehnen desselben Kreises sind, so ist $FN \times NG = PN \times NM = n(m-n) = e^2rR$, $mn - n^2 = e^2rR$, $mn = n^2 + e^2rR$, $n^2 = mn - e^2rR$; es war aber $mn = rR$; folglich ist $n^2 = (1-e^2)rR = (1-e^2)mn$, und wenn man beide Seiten dieser Gleichung durch n dividirt, $n = (1-e^2)m$, also $mn = (1-e^2)m^2$, d. h. $rR = (1-e^2)m^2$, $(\cos \vartheta)^2 rR = (1-e^2)(\cos \vartheta)^2 m^2 = (1-e^2)([\cos \vartheta] m)^2$; aber $(\cos \vartheta) m = a$ und $(1-e^2) a^2 = b^2$; also ist $(\cos \vartheta)^2 rR = b^2$,
das Produkt der Projectionen beider Brennstrahlen auf die Normale ist gleich dem Quadrat der kleinen Halbaxe.

Unter Winkel wollen wir diejenige reine Zahl verstehen, welche anzeigt, wie viel Mal der entsprechende Kreisbogen so gross ist als der Radius, mit andern Worten, diejenige Zahl, welche die Länge des Bogens ausdrückt, wenn der Radius des Kreises als Einheit des Längenmaasses gewählt wird. Der Kreisbogen ist dann (Mittelpunktwinkel) $\times$ Radius. Der dem Halbkreise entsprechende Winkel, den man sonst mit 180 Graden bezeichnet, ist dann gleich der Zahl $\pi = 3{,}1415927$; also 1 Grad $= \frac{\pi}{180} = 0{,}0174533$, $\left(\sin \frac{\pi}{180}\right) = (\sin 0{,}0174533) = 0{,}0174524$, $(\cos\ 0{,}0174533) = 0{,}9998477$. Hier ist der Winkel klein von der Ordnung $\frac{1}{100}$, sein Cosinus kleiner als 1 um eine kleine Zahl von der Ordnung $\frac{1}{10000} = \left(\frac{1}{100}\right)^2$, und sein Sinus kleiner als er selbst um eine kleine Zahl von der Ordnung $\frac{1}{1000000} = \left(\frac{1}{100}\right)^3$. Ueberhaupt, wenn x einen sehr kleinen posit. Winkel bezeichnet, so ist $\operatorname{tang} x > x > \sin x$, also $1 > \frac{\sin x}{x} > \frac{\sin x}{\operatorname{tang} x}$. Aber da $\frac{\sin x}{\operatorname{tang} x} = \cos x$, so hat man $1 > \frac{\sin x}{x} > \cos x$. Da man nun das ganze Intervall $1 - \cos x$ so klein machen kann als man nur will, so muss um so mehr der erste Theil desselben $1 - \frac{\sin x}{x}$ der Null so nahe gebracht werden können als man nur will. Wenn man dann $\sin x = x$ setzt, so ist der Fehler von einer höhern Ordnung als x. Da nämlich $1 - \frac{\sin x}{x} < 1 - \cos x$, so ist $x - \sin x < x(1 - \cos x)$, jener Fehler also von derselben Ordnung mit $x(1 - \cos x)$. Von welcher Ordnung ist nun aber $1 - \cos x$? Aus $(\cos x)^2 + (\sin x)^2 = 1$ folgt $1 - (\cos x)^2 = (\sin x)^2$, d. h. $(1 - \cos x)(1 + \cos x) = (\sin x)^2$, $1 - \cos x = \frac{(\sin x)^2}{1 + \cos x} = \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 \cdot \frac{1+1}{1+\cos x} \cdot \frac{x^2}{2}$ und da die zwei Brüche $\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2$ und $\frac{1+1}{1+\cos x}$ der Einheit ohne Ende sich nähern, wenn x gegen Null zu sinkt, so hat man $1 - \cos x = \frac{1}{2} x^2$ mit einem Fehler höherer Ordnung als x^2 (er ist von der Ordnung x^4). Also ist nun $x - \sin x < \frac{1}{2} x^3$, d. h. wenn man $\sin x = x$ setzt, so begeht man einen Fehler von der Ordnung x^3, und wenn man $\cos x = 1$ setzt, einen von der Ordnung x^2.

Wenn (Fig. 6) im obern Theil der Ellipse der bewegliche Punkt P von links nach rechts eine sehr kleine Strecke σ zurücklegt, so dreht sich auch die Tangente um einen sehr kleinen Winkel φ vorwärts, in demselben Sinn wie auch die zwei Brennstrahlen um die sehr kleinen Winkel f und g sich vorwärts drehen. Man nennt σ das E l e m e n t der Curve, φ den entsprechenden Contingenzwinkel. Wir suchen jetzt ihr Verhältniss. Es ist klar, dass auch die Normale sich um φ vorwärts gedreht hat. Da nun die Normale den Winkel der zwei Brennstrahlen halbirt, so folgt $\varphi = \frac{f+g}{2}$. Wenn nämlich die zwei Brennstrahlen mit irgend einer festen Richtung, z. B. der horizontalen nach links, die Winkel α, β bilden, so muss die Normale als mittlere Richtung mit jener festen den Winkel $\frac{\alpha+\beta}{2}$ bilden; und wenn α, β im vorliegenden Fall in $\alpha + f$, $\beta + g$ übergehen, so geht $\frac{\alpha+\beta}{2}$ in

$\frac{(\alpha + f) + (\beta + g)}{2} = \frac{\alpha + \beta}{2} + \frac{f + g}{2}$ über, d. h. die Normale hat sich um $\frac{f + g}{2}$ vorwärts gedreht.

Oder auch so: Die Geraden PK, QK (Fig. 6) mögen die Winkel FPG und FQG halbiren, und es sei $\angle$ PFQ $= f$, $\angle$ PGQ $= g$, $\angle$ PKQ $= \varphi$. Nun ist die doppelte Summe aller Winkel des Dreiecks PKQ gleich der Summe aller Winkel beider Dreiecke PFQ und PGQ zusammen; d. h. $2\varphi + 2 \angle KPQ + 2 \angle KQP = f + g + \angle FPQ + \angle GPQ + \angle FQP + \angle GQP$; aber $2 \angle KPQ = \angle FPQ + \angle GPQ$, $2 \angle KQP = \angle FQP + \angle GQP$; folglich $2\varphi = f + g$; $\varphi = \frac{f + g}{2}$.

(Fig. 7.) Es sei F der eine Brennpunkt, Q ein Punkt der Ellipse, PQ $= \sigma$ das Element der Curve, QN die Normale, FP $= r$ der Brennstrahl, $\angle$ PFQ $= f$. Man mache FK $=$ FP, so hat das Dreieck PQK bei K einen rechten Winkel und $\angle$ QPK $= \angle$ FQN $= \vartheta$; folglich ist PK $= (\cos \vartheta) \cdot \sigma$, aber zugleich ist PK $= f \cdot r$, folglich $f = (\cos \vartheta) \frac{\sigma}{r}$; ebenso $g = (\cos \vartheta) \frac{\sigma}{R}$; Daher

$$\varphi = \tfrac{1}{2} \left((\cos \vartheta) \frac{\sigma}{r} + (\cos \vartheta) \frac{\sigma}{R} \right) = \tfrac{1}{2} (\cos \vartheta) \cdot \sigma \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{R} \right)$$

$= \frac{1}{2} (\cos \vartheta) \cdot \sigma \cdot \frac{r + R}{rR}$, und da $r + R = 2a$ ist, endlich

$$\varphi = (\cos \vartheta) \cdot \frac{a\sigma}{rR},$$

welche Gleichung die gegenseitige Abhängigkeit zwischen Curvenlement und Contingenzwinkel ausdrückt.

Fig. 1.

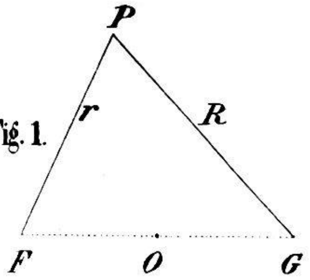


Fig. 2.

Fig. 3.

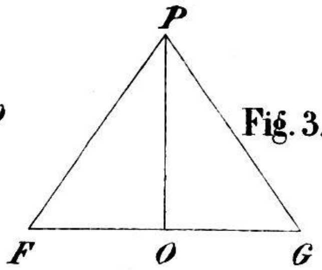


Fig. 4.

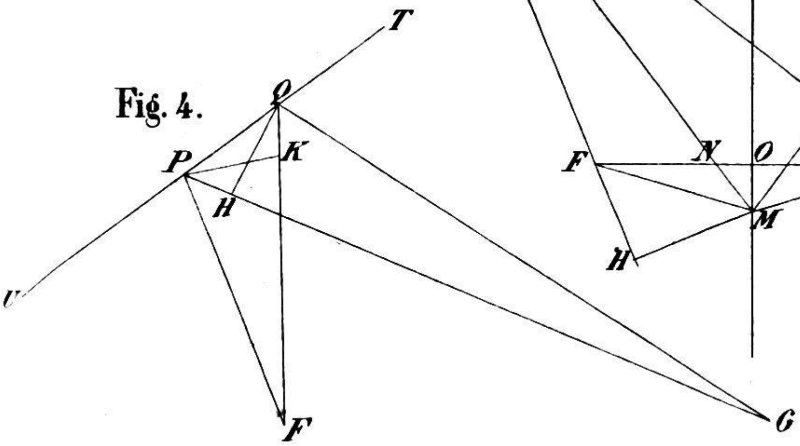


Fig. 5.

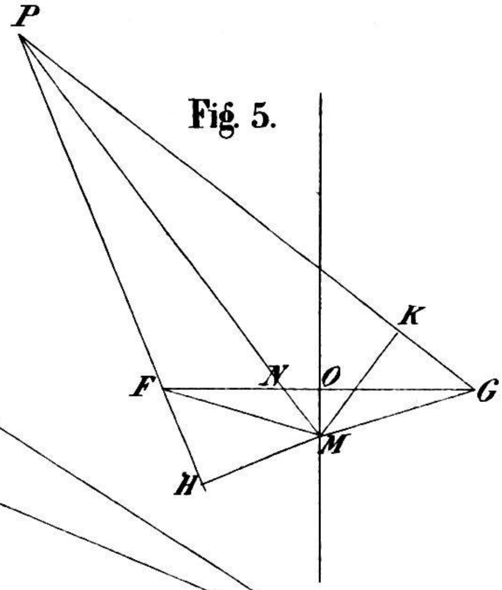


Fig. 6.

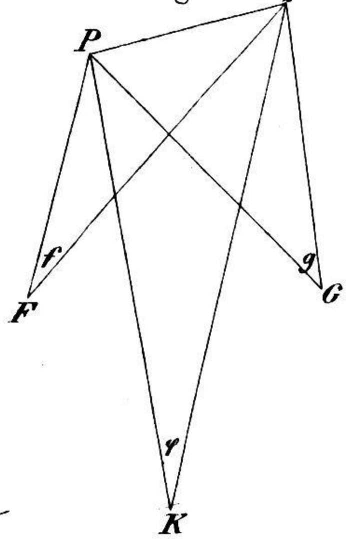


Fig. 7.

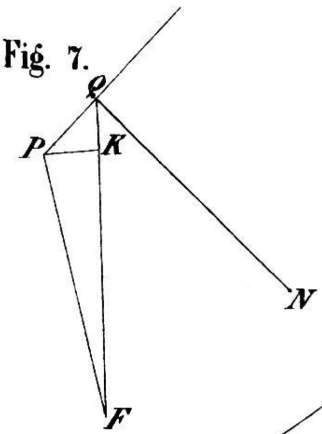


Fig. 8.

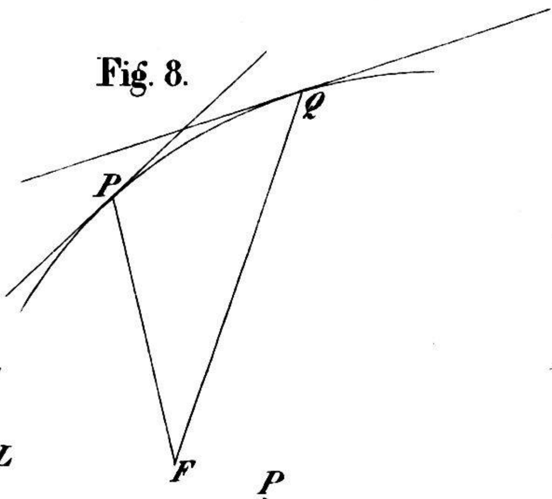


Fig. 9.

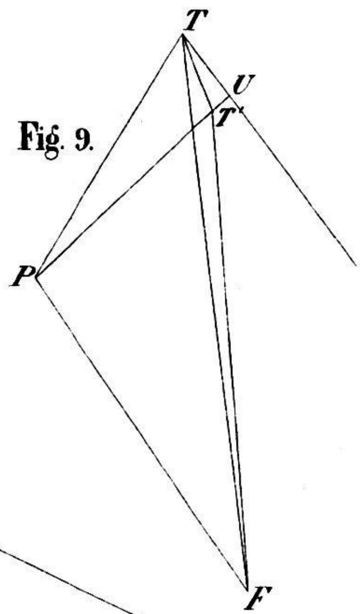


Fig. 10.

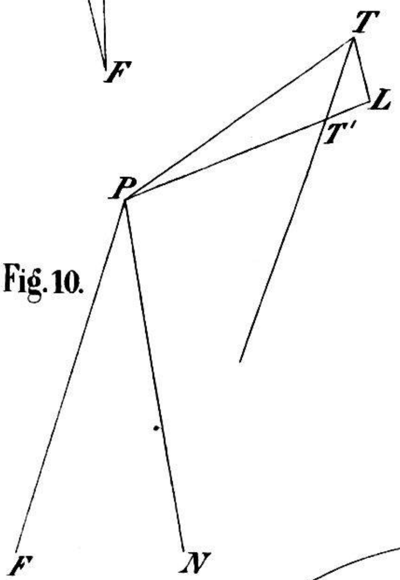


Fig. 11.

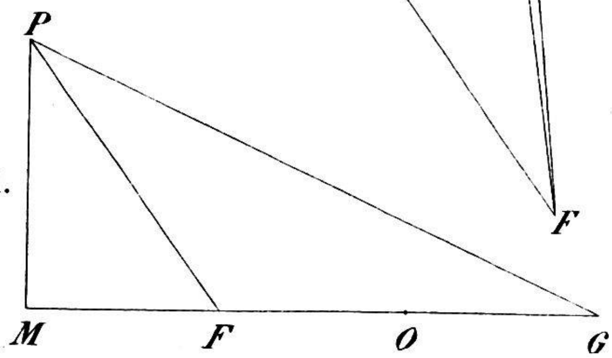


Fig. 12.

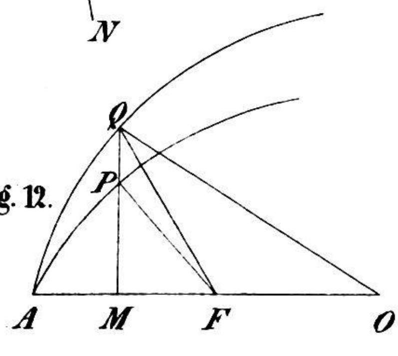
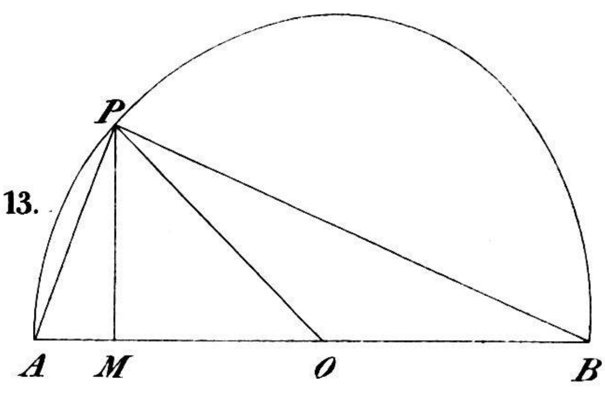


Fig. 13.



Ein sehr kleiner Körper P, den wir im Vergleich mit seiner Entfernung von einem festen Punkte F als Punkt betrachten dürfen, bewege sich in einer durch F gelegten Ebene so, dass der Leitstrahl $FP = r$ in gleichen Zeiten gleiche Flächenräume (Sectoren) beschreibt; wenn t die verflossene Anzahl von Sekunden bedeutet, so sei der von r durchlaufene Sector gleich $\frac{1}{2}$ Ct; der während jeder Secunde durchlaufene stets an Inhalt sich gleich bleibende Sector $\frac{1}{2}$ C heisst dann die Flächengeschwindigkeit. Bedeutet τ einen sehr kleinen Bruch, v die Geschwindigkeit des Körpers P, so hat er während der sehr kurzen Zeit von τ Secunden das Curvenelement $\sigma = v\tau$, und sein Leitstrahl den Sector $\frac{1}{2} C\tau$ durchlaufen. Aber dieser sehr schmale Sector kann nun als Dreieck gefasst werden, das σ zur Basis und das aus F auf die Tangente gefällte Perpendikel h zur Höhe hat, dessen Inhalt also $\frac{1}{2}\,h\sigma$ beträgt. Also ist nun $\frac{1}{2}\,C\tau = \frac{1}{2}\,h\sigma = \frac{1}{2}\,hv\tau$, und wenn man mit $\frac{1}{2}\,\tau$ dividirt, $C = hv$.

Das Perpendikel h bildet aber mit dem Leitstrahl r denselben Winkel, wie die Normale ihn mit r bildet; diesen bezeichneten wir mit ϑ; folglich ist $h = (\cos\vartheta)r$

$$v = \frac{C}{(\cos\vartheta)\,r}.$$

Es seien P, Q (Fig. 8) zwei nahe auf einander folgende Punkte der Bahn des Körpers, in beiden ziehen wir die Tangenten der Bahn, und setzen wieder $PQ = \sigma$ (Element der Curve). Wenn nun σ sehr klein ist, so wird P nur um eine Grösse zweiter Ordnung (von der Ordnung σ^2) von der zweiten Tangente abstehen. Denn wenn man in P nnd Q die Normalen zieht, ihren Durchschnitt K nennt, $KQ = \varrho$ setzt und aus dem Centrum K mit dem Radius ϱ einen Kreis beschreibt, so wird dieser die zweite Tangente in Q berühren und die Normale KP äusserst nahe bei P schneiden (in P). Ist dann x der sehr kleine Winkel PKQ, so ist σ nahe $= \varrho x$ und P' steht um $\varrho(1 - \cos x) = \frac{1}{2} \varrho x^2$ von der zweiten Tangente ab. Da aber ϱ endlich ist, so ist ϱx^2 von derselben Ordnung mit σ^2. Also steht P um eine Grösse von der Ordnung σ^2 von der zweiten Tangente ab; wir wollen sie mit η bezeichnen. Die aus F auf die erste und zweite Tangente gefällten Perpendikel seien h, h', die entsprechenden Geschwindigkeiten in P und Q seien v, v'. Zieht man durch P eine Parallele mit der zweiten Tangente, so ist das aus F auf diese Parallele gefällte Perpendikel $h' - \eta$; und da $C = hv = h'v'$ ist, so hat man $(h' - \eta)v' = C - \eta v'$.

Man trage nun von P an (Fig. 9) die Strecken PT, PT' auf, welche die Geschwindigkeiten v, v' nach Richtung und Grösse darstellen. Dann wird die kleine Strecke TT' (erster Ordnung) in der Richtung von T nach T' dasjenige darstellen, was zur Geschwindigkeit v hinzukommen musste, um die in Q stattfindende Geschwindigkeit v' hervorzubringen; und wenn w die Beschleunigung bedeutet, so ist $TT' = w \cdot \tau$. Zieht man FT, FT', so entstehen zwei Dreiecke PFT und PFT', deren Inhälte nach dem vorigen $\frac{1}{2}$ C, $\frac{1}{2}(C - \eta v')$ sind, sich also nur um eine Grösse zweiter Ordnung unterscheiden. Sie haben aber PF = r zur gemeinschaftlichen Seite, und wenn man nun diese als Basis betrachtet, so werden ihre auf diese aus den Spitzen T, T' senkrecht gezogenen Höhen sich auch nur um $\eta \dfrac{v'}{r}$, eine Grösse zweiter Ordnung voneinander unterscheiden, und wenn man TU parallel mit PF, und T'U senkrecht auf TU zieht, so ist T'U

$= \eta \frac{v'}{r}$ eine Grösse zweiter Ordnung; folglich $\angle UTT^1 = \frac{T^1U}{TT^1} = \frac{v'}{wr} \cdot \frac{\eta}{\tau}$ eine Grösse erster Ordnung. (Nämlich wegen $\sigma = v\tau$ sind σ, τ von der gleichen Ordnung der ersten, η war von der Ordnung σ^2, ist also auch von der Ordnung τ^2; daher ist $\frac{\eta}{\tau}$ von der Ordnung $\frac{\tau^2}{\tau} = \tau$.) Das heisst aber: die Richtung der Beschleunigung w weicht von der Richtung PF nur um einen Winkel ab der zugleich mit dem Zeitelement τ verschwindet. Daher der Satz:

Wenn ein materieller Punkt P sich in einer ebenen Curve bewegt, ein fester Pol sich in der Ebene dieser Curve auf ihrer hohlen Seite befindet und der von ihm nach jenem P entsendete Leitstrahl in gleichen Zeiten gleiche Flächenräume durchläuft, so ist der materielle Punkt P stets nach dem festen Pol F hin beschleunigt; er bewegt sich also so, als ob er von F angezogen würde.

Läge F auf der erhabenen Seite der Bahn, so wäre P in der geraden Richtung von F weg beschleunigt, bewegte sich also so, als ob er von F abgestossen würde.

Also auch umgekehrt: wenn ein materieller Punkt von einem festen Pol angezogen oder abgestossen wird, ohne dass irgend eine andere Kraft auf ihn wirkt, so durchläuft er eine ebene Curve, deren Ebene durch den Pol geht, und der von diesem nach jenem entsendete Leitstrahl durchläuft in gleichen Zeiten gleiche Flächenräume; mit andern Worten, die Flächengeschwindigkeit des materiellen Punkts in Bezug auf den Kraftpol ist constant; daher die wirkliche Geschwindigkeit stets mit dem Abstand des Pols von der Tangente der Bahn verkehrt proportional. Die Bahn ist gegen den Pol zu hohl, so lange Anziehung, erhaben, so lange Abstossung stattfindet, endlich gerade, wenn die Kraft aufgehört hat.

Für den Fall, wo die Bahn eine Ellipse ist, wollen wir jetzt die Beschleunigung w berechnen. Es sei F (Fig. 10) derjenige Brennpunkt, um den der Leitstrahl $FP = r$ in gleichen Zeiten gleiche Sectoren durchläuft, PN die Normale, also $FPN = \vartheta$; $PT = v$, $PT^1 = v'$ die zu Anfang und Ende des Zeitelements τ statthabenden Geschwindigkeiten, also $\angle\ TPT^1 = \varphi$ der Contingenzwinkel, $TT^1 = w\tau$ parallel mit dem Leitstrahl PF. Man verlängere PT^1 nach L und ziehe TL senkrecht auf PT, also mit der Normale parallel. Im $\triangle\ TLT^1$ ist dann $\angle\ T = \vartheta$, und $\angle\ L$ darf als Rechter betrachtet werden. Folglich ist $TL = (\cos\vartheta)\, w\tau$; aber zugleich darf TL als Kreisbogen betrachtet werden, der aus dem Centrum P mit dem Radius v beschrieben ist; also ist $TL = v\varphi$, und $(\cos\vartheta)\, w\tau = v\varphi$. Nun war aber $\varphi = (\cos\vartheta)\frac{a\sigma}{rR} = (\cos\vartheta)\frac{av}{rR}\tau$, also ist $(\cos\vartheta)\, w\tau = (\cos\vartheta)\frac{\alpha v^2}{rR}\tau$, und wenn man mit $(\cos\vartheta)\tau$ dividirt, $w = \frac{av^2}{rR}$. Ferner war $v = \frac{C}{(\cos\vartheta)\, r}$, also $v^2 = \frac{C^2}{(\cos\vartheta)^2 r^2}$, $w = \frac{aC^2}{r^2}\cdot\frac{1}{(\cos\vartheta)^2 rR}$. Da nun $(\cos\vartheta)^2 rR = b^2$ war, so haben wir $w = \frac{aC^2}{b^2 r^2}$, d. h. die Beschleunigung ist mit dem Quadrat des Leitstrahls verkehrt proportional. Setzt man $r^2 w = M$, so ist M constant und darf als die Zahl betrachtet werden, welche die Masse des in F befindlichen anziehenden

Körpers ausdrückt, wofern diejenige des angezogenen Körperchens P dagegen verschwindend gering ist. Man hat dann $C^2 = \frac{b^2}{a} M = Ma(1-e^2)$, also Flächengeschwindigkeit $C = \sqrt{Ma(1-e^2)}$, Anziehung $w = \frac{M}{r^2}$.

Wenn T die Anzahl der Secunden bezeichnet, welche der materielle Punkt P braucht, um die ganze Bahn zu durchlaufen, so ist $\frac{1}{2}$ CT der Inhalt der ganzen von der Ellipse umschlossenen Fläche. Wir müssen also zuerst diesen Inhalt kennen, wenn wir die Flächengeschwindigkeit C oder auch die Masse M des anziehenden grossen Körpers mittelst der Umlaufzeit T und der Bestimmungsstücke a, e der Ellipse ausdrücken wollen. Um diesen Zweck zu erreichen, wollen wir die Beziehung zwischen den rechtwinkligen Coordinaten des materiellen Punktes P aufsuchen.

Es sei F (Fig. 11) der Ort des grossen anziehenden Körpers (der Kraftpol), G der andere Brennpunkt, O das Centrum, P der materielle Punkt; aus diesem fälle man auf die Richtung der grossen Axe die Senkrechte PM und setze $OF = OG = ea = c$, $OM = x$, $MP = y$, $FP = r$, $GP = R$, $r + R = 2a$. Dann ist $FM = x - c$, $GM = x + c$, also $\overline{FM}^2 = x^2 - 2cx + c^2$, $\overline{GM}^2 = x^2 + 2cx + c^2$, $\overline{GM}^2 - \overline{FM}^2 = 4cx = 4eax$, und nach dem pythagoreischen Satze $r^2 = \overline{FM}^2 + y^2$, $R^2 = \overline{GM}^2 + y^2$, daher $R^2 - r^2 = \overline{GM}^2 - \overline{FM}^2 = 4eax$. Aber $R^2 - r^2 = (R + r)(R - r) = 2a(R - r)$; also $2a(R - r) = 4eax$, und wenn man mit 2a dividirt, so hat man das System der zwei Gleichungen

$$\left\{\begin{array}{l} R + r = 2a, \\ R - r = 2ex, \end{array}\right\}$$

aus denen sich durch Addition und Subtraction $R = a + ex$,

$r = a - ex$ ergibt. Aber aus $R^2 = \overline{GM}^2 + y^2$ folgt $y^2 = R^2 - \overline{GM}^2$, $y^2 = (a+ex)^2 - (x+ea)^2 = a^2+2eax+e^2x^2 - x^2 - 2eax - e^2a^2 = (1-e^2)a^2 - (1-e^2)x^2 = (1-e^2)(a^2-x^2)$; also $y^2 = (1-e^2)(a^2-x^2)$, und, wenn man diese Gleichung durch $b^2 = a^2(1-e^2)$ dividirt,

$$\frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{x^2}{a^2}; \text{ also auch } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

in welcher Form man gewöhnlich die Gleichung der Ellipse darstellt. Setzt man darin $y = \frac{b}{a} z$, so bekömmt sie die Gestalt $\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{a^2} = 1$, also $x^2 + z^2 = a^2$, und dieses ist die Gleichung eines Kreises, der aus dem Centrum O mit dem Radius a (der grossen Halbaxe der Ellipse) beschrieben ist; z ist die Ordinate des Kreises, die zur Abscisse x gehört, und daher der Richtung nach mit der Ordinate y der Ellipse zusammenfällt; nur ist y kürzer als z, nämlich $\frac{b}{a}$ mal so gross. Man denke die zahllosen Ordinaten z des obern Halbkreises alle gezogen und verkürze sie nun in dem Verhältniss $\frac{b}{a}$, so wird man alle Ordinaten y der obern Hälfte der Ellipse erhalten. Die Ellipse ist ein bloss in einer Richtung überall gleichmässig verkürzter Kreis. Man überziehe die Fläche des Kreises mit einem Netz oder Gewebe, dessen Faden die Coordinatenrichtungen haben, so wird dieses Netz aus lauter sehr kleinen Rechtecken bestehen, und beim Uebergang vom Kreis zur Ellipse werden die mit der grossen Axe parallelen Grundlinien dieser Rechtecke (gleichsam der Zettel des Gewebes) ungeändert bleiben, aber die mit der kleinen Axe parallelen Höhen (der Eintrag) sich sämmtlich auf ihre

$\frac{b}{a}$ fachen Werthe verkürzen; also sind dann diese Rechtecke auch ihrem Inhalte nach sämmtlich das $\frac{b}{a}$ fache geworden dessen, was sie früher waren. Daher muss auch jedes aus der Fläche des Kreises beliebig herausgeschnittene Stück (das eine ungeheure Menge von jenen Rechtecken enthält) beim Uebergang zur Ellipse im selben Verhältniss $\left(\frac{b}{a}\right)$ kleiner werden. Die ganze vom Kreise umschlossene Fläche ist bekanntlich πa^2; folglich ist die ganze von der Ellipse umschlossene Fläche πab. Also ist $\frac{1}{2}CT = \pi ab$, $CT = 2\pi ab$, $C^2T^2 = (2\pi)^2a^2b^2 = (2\pi)^2a^4(1-e^2)$. Oben war $C^2 = Ma(1-e^2)$; also ist $Ma(1-e^2)T^2 = (2\pi)^2a^4(1-e^2)$, daher $M = (2\pi)^2\frac{a^3}{T^2}$.

Wenn verschiedene materielle Punkte $P, P', P'', \ldots$ einen einzigen grossen Centralkörper F umkreisen, und man die grossen Halbaxen ihrer Bahnen und ihre Umlaufszeiten durch Accente unterscheidet, so muss der vorliegende Ausdruck für jeden einzelnen materiellen Punkt die Masse des einen und selben Centralkörpers darstellen. Man wird daher

$$\frac{a^3}{T^2} = \frac{a'^3}{T'^2} = \frac{a''^3}{T''^2} = \frac{a'''^3}{T'''^2} = \cdots$$

haben, d. h. die Curven der grossen Halbaxen werden sich wie die Quadrate der Umlaufszeiten verhalten. Für die Planeten (und Kometen) unsers Sonnensystems ist dieser Satz zuerst von Keppler auf erfahrungsmässigem Wege aus den Beobachtungen abgeleitet worden und führt daher den Namen des dritten Keppler'schen Gesetzes. (Die zwei andern Keppler'schen Gesetze sagen aus, dass jeder Planet eine Ellipse durchläuft, in deren einem Brennpunkt sich die Sonne befindet, und dass der von dieser nach dem Planet gehende Lichtstrahl in gleichen Zeiten gleiche Sectoren beschreibt.)

Es sei O (Fig. 12) das Centrum, F derjenige Brennpunkt der Ellipse, in dem sich der grosse anziehende Körper befindet, A das Ende der grossen Halbaxe (das Perihel), P der materielle Punkt, PM = y dessen Ordinate, AQ der dem elliptischen Bogen AP entsprechende Kreisbogen, also QM = z, der entsprechende Mittelpunktswinkel $\angle$ AOQ = u (eccentrische Anomalie), der Winkel um den sich in der Ellipse der Leitstrahl FP (= r) von der Richtung nach dem Scheitel (oder Perihel) A entfernt hat, $\angle$ AFP = φ (wahre Anomalie), endlich t die Zeit (in Secunden), welche der Lichtstrahl r gebraucht hat, um den elliptischen Sector AFP zu beschreiben. Dann ist dieser $\frac{b}{a}$ mal so gross als das Stück AFQ der Kreisfläche, und dieses gleich dem Kreissector AOQ weniger das Dreieck FOQ. Aber Sector AOQ $= \frac{1}{2} a^2 u$, $\triangle$ FOQ $= \frac{1}{2} ea \cdot z$, und, da $z = (\sin u) \cdot a$, $\triangle$ FOQ $= \frac{1}{2} a^2 \cdot e \sin u$. Also Kreisstück AFQ $= \frac{1}{2} a^2 (u - e \sin u)$; daher elliptischer Sector AFP $= \frac{1}{2} ab (u - e \sin u) = \frac{1}{2} a^2 \sqrt{1 - e^2} (u - e \sin u)$; dieser Sector ist zugleich $\frac{1}{2}$ Ct; also $Ct = a^2 \sqrt{1 - e^2} (u - e \sin u)$. Nun war aber $C = \sqrt{Ma(1 - e^2)} = \sqrt{M} \sqrt{a} \sqrt{1 - e^2}$.

Folglich ist $u - e \sin u = \sqrt{\frac{M}{a^3}} \cdot t$.

Der mit der Zeit proportionale Ausdruck rechts heisst die mittlere Anomalie; sie würde den Centriwinkel des Kreises AQ darstellen, wenn dieser vom Planet mit gleichförmiger Geschwindigkeit in derselben Zeit T durchlaufen würde, wie die ganze Ellipse. Der Factor $\sqrt{\frac{M}{a^3}}$ wird gewöhnlich mit n bezeichnet und heisst die mittlere Geschwindigkeit des Planeten (es ist eine Winkelgeschwindigkeit gemeint). Man hat also

$$n = \sqrt{\frac{M}{a^3}} = \frac{2\pi}{T} \; .$$

Da die Form der Gleichung $u - e \sin u = nt$ transscendent ist, so ist ihre Auflösung, wenn die Zeit t gegeben ist und die eccentrische Anomalie u gesucht werden soll, schwierig; sie führt den Namen der Keppler'schen Aufgabe. Weil jedoch e bei den Planeten ein kleiner Bruch ist, so hat man in erster roher Annäherung $u = nt$ als nächste Verbesserung folgt dann aus $u = nt + e \sin u$ der corrigirte Werth $u_1 = nt + e \sin(nt)$, dann $u_2 = nt + e \sin u_1$, $u_3 = nt + e \sin u_2$, u. s. f., bis in der Reihe $nt, u_1, u_2, u_3, \ldots$ die letzten Glieder sich um weniger von einander unterscheiden, als der Fehler beträgt, den man zulassen will.

Da $z = (\sin u)\, a$ ist, so hat man auch $y = (\sin u) b$. Sobald also u berechnet ist, findet man die Coordinaten des Planeten P mittelst der Gleichungen $x = a \cos u$, $y = b \sin u$. Aus $r = a - ex$ folgt dann $r = a(1 - e \cos u)$. Für die Anwendung ist es auch wünschbar, eine bequeme Formel für die Berechnung der wahren Anomalie φ zu haben.

Im $\triangle$ FPM ist $FM = x - ea = a(\cos u - e)$ und zugleich $= r \cos\varphi$; $MP = b \sin u = r \sin\varphi$; also

$$r + r\cos\varphi = a(1 - e\cos u) + a(\cos u - e) =$$
$$a(1 - e + \cos u - e \cos u) = a(1 - e)(1 + \cos u);$$ also $r(1 + \cos\varphi) = a(1 - e)(1 + \cos u)$, und, wenn man mit dieser Gleichung in die andere $r \sin\varphi = a\sqrt{1 - e^2} \cdot \sin u$

dividirt, erhält man: $\frac{r \sin \varphi}{r(1+\cos \varphi)} = \frac{a\sqrt{1-e^2}}{a(1-e)} \cdot \frac{\sin u}{1+\cos u}$;
aber $1-e^2 = (1+e)(1-e)$, $\sqrt{1-e^2} = \sqrt{1+e} \cdot \sqrt{1-e}$,
$1-e = \sqrt{1-e} \cdot \sqrt{1-e}$, daher $\frac{\sqrt{1-e^2}}{1-e} = \frac{\sqrt{1+e}}{\sqrt{1-e}} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}}$
Die Gleichung reducirt sich hierdurch auf

$$\frac{\sin \varphi}{1+\cos \varphi} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \cdot \frac{\sin u}{1+\cos u}.$$

(Fig. 13.) Es seien $OA = OB = OP = 1$ Radien eines Kreises, $\angle AOP = \varphi$, so ist $AB = 2$, $\angle ABP = \frac{1}{2}\varphi$ als Peripheriewinkel, der auf den Bogen AP steht, $MP = \sin \varphi$, $OM = \cos \varphi$, $BM = 1 + \cos \varphi$, also $\frac{\sin \varphi}{1+\cos \varphi} = \frac{MP}{BM} = \operatorname{tang} \frac{\varphi}{2}$, da im Dreieck BMP in Bezug auf $\angle B = \frac{\varphi}{2}$ die Seite MP gegenüberliegende und BM anliegende Kathete ist. Die Gleichung, mittelst welcher die wahre Anomalie aus der eccentrischen gefunden werden kann, reducirt sich hiedurch auf

$$\operatorname{tang} \frac{\varphi}{2} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \cdot \operatorname{tang} \frac{u}{2}.$$

Wenn M eine der Sonnenmasse entsprechende für alle Planeten und Kometen gleiche Zahl, a die grosse Halbaxe der Bahn eines Planeten oder Kometen, e das Eccentricitätsverhältniss, r die Entfernung von der Sonne, t die seit dem Durchgang durchs Perihel verflossene Zeit, u die eccentrische, φ die wahre Anomalie, T die Umlaufszeit bedeutet, so ist die elliptische Bewegung durch folgendes System von Gleichungen ausgedrückt:

$$\sqrt{\frac{M}{a^3}} = \frac{2\pi}{T} = n, \quad u - e \sin u = nt, \quad r = a(1 - e \cos u),$$

$$\operatorname{tang} \frac{\varphi}{2} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \operatorname{tang} \frac{u}{2}.$$