

**Zeitschrift:** Mitteilungen der Naturforschenden Gesellschaft Bern  
**Herausgeber:** Naturforschende Gesellschaft Bern  
**Band:** - (1858)  
**Heft:** 415-416

**Artikel:** Erzeugung der Cardioide aus zwei ungleichen Kreisen  
**Autor:** Brändli  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-318667>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 16.03.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

In ähnlicher Weise wird bei dreifachen Reihen verfahren. Der Convergenczsatz heisst:

Die dreifache Reihe  $\Sigma \Sigma \Sigma u_{x, y, z}$  convergirt, wenn die Doppelreihen

$$\Sigma \Sigma u_{x, y, z}, \quad \Sigma \Sigma u_{x, q, z}, \quad \Sigma \Sigma u_{p, y, z},$$

und die einfache

$$\Sigma \sqrt[3]{u_{x, mx, nx}}$$

sämmtlich convergiren; im entgegengesetzten Fall divergirt sie.

Ich halte es für unnöthig, die entsprechenden Sätze für die Convergencz von mehr als dreifachen Reihen, so wie von mehrfachen bestimmten Integralen aufzustellen, da dieselben aus den obigen Entwicklungen ohne grosse Mühe erhalten werden können.

---

### **Brändli; Erzeugung der Cardioide aus zwei ungleichen Kreisen.**

---

1) Gegeben zwei Kreise, deren Centra F und G und deren Halbmesser  $DF = a$ ;  $DG = b$ , und die einander schneiden in den Punkten D und P; durch den einen Durchschnittspunkt D unendlich viele, beiden Kreisen gemeinsame Sehnen, wie  $ADB = S$ ; an den Peripheriepunkten A und B derselben Tangenten an jeden betreffenden Kreis, nämlich AC an den Kreis F, und BC an den Kreis G: zu suchen den Ort C des Treffpunktes der beiden Tangenten.

2) Ziehen wir noch durch D die Sehne LDI parallel zur Centralaxe FG der beiden Kreise, so geben die Tangenten IM und LM an ihren Peripheriepunkten den Treffpunkt M als einen ausgezeichneten Punkt der Ortscurve. Wählen wir nun den andern Durchschnittspunkt P der beiden Kreise als Pol und PM als Axe der Polarcoordinaten, und suchen zu bestimmen zunächst den Ablenkungswinkel  $BDI = ADL = \frac{1}{2} \delta$  zwischen der Parallelsehne LDI und der allgemeinen Sehne ADB, und zwar diesen Winkel im Verhältniss zum Coordinatenwinkel CPM zwischen Radius-Vector CP und der Polaraxe PM.

3) Nun ist nicht nur das Viereck PIML aus den Kreistangenten IM und LM und ihren Berührungshalbmessern IGP und LFP, sondern auch KBCA aus gleichen Gründen eckcentrisch, ja sogar PBCA erfreut sich derselben Eigenschaft. Beweis der letzten Behauptung:

$CBP = R - \frac{1}{2} \delta$ ;  $CAP = R + \frac{1}{2} \delta$ ;  $CAP + CBP = 2R$ ,  
das heisst: zwei Gegenwinkel des Vierecks CBPA in Summe gleich zwei Rechten oder supplementär, und das Viereck eckcentrisch, wie behauptet wurde.

4) Daraus folgt weiter:

$$CBA = CPA = BPD = \beta - \frac{1}{2} \delta;$$

$$CPL = CPA = LPA - LPA = \beta - \frac{1}{2} \delta - \frac{1}{2} \delta = \beta - \delta;$$

$$MPL = MIL = \beta;$$

$$MPC = MPL - CPL = \beta - (\beta - \delta) = \delta,$$

das heisst: der Coordinatenwinkel CPM zwischen Polaraxe und Radius-Vector ist doppelt so gross, wie der Ablenkungswinkel BDI zwischen der Parallelsehne LDI und der allgemeinen Sehne ADB.

5) Weil sowohl  $CAK = R$  als auch  $CBK = R$ , so ist CK = N der Durchmesser des um CAKB beschriebenen Kreises, eines Berührungskreises, wenn auch nicht

des Krümmungskreises unserer Ortscurve zum Punkte C, oder CK die Normale im Punkte C und eine Senkrechte dazu Curventangente, in der Figur CT.

6) Untersuchen wir noch den Winkel PCK zwischen Radius-Vector PC und Normale CK, so folgt sofort:

$$PCK = PBK = \frac{1}{2}\delta,$$

das heisst: der Winkel zwischen Radius-Vector PC und Normale PK halb so gross, wie der Coordinatenwinkel zwischen Polaraxe PM und Radius-Vector PC.

Beweis. Weil KABC und PABC eckcentrisch, so ist auch PACK ein solches, und zwar alle drei Vierecke eckcentrisch zu demselben Centrum, wozu sich noch als viertes gesellt PCBK, worin  $CBK = R$ , daher auch der Gegenwinkel  $CPK = R$  und  $PCK = PBK = \frac{1}{2}\delta$ .

7) Gleichung unserer Ortscurve. Zunächst ist zu setzen

$$DF = a; DG = b; PM = 4r = \frac{2a}{\text{Cos. } \beta} = \frac{2b}{\text{Cos. } \alpha}$$

aus den rechtwinkeligen Dreiecken PMI und PML, worin  $PMI = PLI = R - \alpha$ , und ebenso  $PML = PIL = R - \beta$ , wegen der Eckcentricität des Vierecks PIML; Radius-Vector  $CP = \rho$ ; Anfangspunkt der Coordinaten P;  $CK = N$  oder Normale.

$$\rho = N \text{Cos. } \frac{1}{2}\delta; N = \frac{\rho}{\text{Cos. } \frac{1}{2}\delta}; PB = 2b \text{Cos. } \frac{1}{2}\delta = N \text{Cos. } \alpha;$$

$$N = \frac{2b \text{Cos. } \frac{1}{2}\delta}{\text{Cos. } \alpha} = 4r \text{Cos. } \frac{1}{2}\delta; \frac{\rho}{\text{Cos. } \frac{1}{2}\delta} = 4r \text{Cos. } \frac{1}{2}\delta;$$

$\rho = 4r \text{Cos. } 2\frac{1}{2}\delta = 2r(1 + \text{Cos. } \delta)$ , oder Gleichung der Cardioide. Der Halbmesser, der sonst zur Erzeugung der Cardioide gebrauchten zwei gleichen Kreise ist  $r = \frac{1}{4}PM$ ; das Centrum des festen Erzeugungskreises auf PM, und zwar  $\frac{1}{4}PM$  von P entfernt.

8) **Merkwürdige Punkte der Curve.** Erstens: der Pol oder Doppelpunkt P. Zweitens: das Maximum vom Radius-Vector  $\rho = 2r(1 + \text{Cos. } \delta)$  ist auf der Richtung PM oder der angenommenen Axe, wo  $\text{Cos. } \delta = 1$  oder  $\delta = 0$ ; und  $\rho = 4r = PM$ , also M der höchste Curvenpunkt. Drittens: Curvenpunkt Q auf der verlängerten Chordale PD der beiden Kreise, welche mit der Polaraxe PM den Winkel  $MPD = \alpha - \beta = \gamma$  bildet, welcher in die Curvengleichung gesetzt gibt  $\rho = PQ = 2r(1 + \text{Cos. } \gamma) = \frac{1}{2}PM + \frac{1}{2}PM \text{Cos. } \gamma$ , d. h. man trage auf der Richtung PD zuerst auf die Hälfte der Polaraxe PM, und dazu noch die Projektion dieser Hälfte auf PD. Viertens: Einschnittpunkte unserer Curve in die gegebenen Kreise F und G. Diese Punkte sind eben so leicht gefunden. Man ziehe nämlich an beide Kreise Tangenten zum Durchschnittspunkte D, so spielt jede eine doppelte Rolle, nämlich sowohl als gemeinsame Sehne beider Kreise, wie auch als Tangente; der Punkt, wo jede dieser Tangenten die andere Kreisperipherie schneidet, zu der sie nicht Tangente ist, der Punkt ist ein Einschnittpunkt unserer Curve in den geschnittenen Kreis, in unserer Figur die Punkte X und Y und die Tangenten DX und DY.

9) Strenger analytischer Beweis der Behauptung, dass in unserer Curve der Winkel zwischen Radius-Vector und Normale halb so gross, als der Winkel zwischen Radius-Vector und Polaraxe, oder dass die Curve dieser Eigenschaft die Cardioide ist, und daher in unserer Figur CK wirklich, wie oben behauptet, der Durchmesser eines Berührungskreises oder die Normale der Curve. Es sei also in unserer Figur, abgesehen von der obigen Entwicklung, PM die Polaraxe und zugleich die X-Axe rechtwinkliger Coordinaten, P der Anfangspunkt, PC ein beliebiger Radius-Vector,  $\rho$  und  $CPM = \delta$  der Coordinatenwinkel,

ferner CK die Normale, und nach der Voraussetzung PCK  $= \frac{1}{2}\delta$ , dann ist CT, im rechten Winkel zu CK, die Tangente zu demselben Curvenpunkt C, und TCP  $= R \pm \frac{1}{2}\delta$  als Winkel zwischen Tangente und Radius-Vector, und  $u = R \pm \frac{1}{2}\delta$  der Winkel, den die Tangente mit der Abscissenaxe bildet. Diese Voraussetzungen geben nach und nach  $x = \rho \text{ Cos. } \delta$ ;  $y = \rho \text{ Sin. } \delta$  als rechtwinklige Coordinaten, woraus

$$\text{tgu} = \frac{dy}{dx} = \frac{d\rho \text{ Sin. } \delta + \rho d\delta \text{ Cos. } \delta}{d\rho \text{ Cos. } \delta - \rho d\delta \text{ Sin. } \delta},$$

oder Zähler und Nenner mit  $d\rho$  dividirt:

$$\text{tgu} = \frac{\text{Sin. } \delta + \rho \frac{d\delta}{d\rho} \text{ Cos. } \delta}{\text{Cos. } \delta - \rho \frac{d\delta}{d\rho} \text{ Sin. } \delta}, \text{ und daraus}$$

$$\begin{aligned} \rho \frac{d\delta}{d\rho} &= \frac{\text{tgu} - \text{tg}\delta}{1 + \text{tgu} \text{tg}\delta} = \text{tg}(u - \delta) = \text{tg}(R + \frac{1}{2}\delta) \\ &= -\text{Cotg } \frac{1}{2}\delta, \end{aligned}$$

$$\frac{d\rho}{\rho} = -\frac{d\delta}{\text{Cotg } \frac{1}{2}\delta}; \quad d\delta = 2d\frac{1}{2}\delta; \quad \frac{1}{2} \cdot \frac{d\rho}{\rho} = -\frac{d\frac{1}{2}\delta}{\text{Cotg } \frac{1}{2}\delta};$$

$$\frac{1}{2} \lg \rho = \lg \text{Cos. } \frac{1}{2}\delta + \text{Const.}; \quad \lg \rho = \lg \text{Cos.}^2 \frac{1}{2}\delta + \lg 4r;$$

$$\rho = 4r (1 + \text{Cos. } \delta), \text{ wie behauptet wurde.}$$

Danach ist zu berichtigen: „Franke, Lehrbuch der höhern Mathematik. Hannover, 1851.“ Seite 605, zweites Alignement.



