Die Fundamentalgleichungen der Function (x)

Autor(en): **Kinkelin, Hermann**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Mitteilungen der Naturforschenden Gesellschaft Bern**

Band (Jahr): **- (1857)**

Heft 385-386

PDF erstellt am: **19.05.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-318648

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

Nr. 385 und 386.

Hermann Kinkelin, die Fundamentalgleichungen der Function $\Gamma(x)$.

(Vorgetragen den 13. Dec. 1856.)

I.

Die Euler'sche Integralfunction

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} dt$$

und ihre Eigenschaften hat schon seit Langem die Geometer beschäftigt. Nach Euler hat sich besonders Legendre derselben angenommen und den unten folgenden Lehrsatz zuerst auf dem Wege der Induction entdeckt, ohne dafür einen analytischen Beweis zu geben. Einen solchen hat nun Dirichlet aufgestellt, abgeleitet aus den Eigenthümlichkeiten der dieselben erzeugenden Integrale. Auch hat Kummer denselben auf eigenthümliche Weise vermittelst der Fourier'schen Reihe bewiesen. Denselben Gedankengang wie Kummer verfolgte ich in einer Abhandlung im 23. Theil des Grunert'schen Archivs, wo ich ähnliche Relationen für eine ganze Klasse von Functionen herleitete. Von der Ueberzeugung ausgehend, dass die genannte Function nicht sowohl den unentwickelbaren Integralen, als den analytischen Functionen angehört, versuchte ich nun die entsprechenden Grundsätze festzustellen. Folgendes ist das Resultat dieses Versuches.

II.

Wenn die Aufgabe gestellt ist, eine Function $\varphi(x)$ zu finden von der Eigenschaft, dass

$$\varphi(x+1) = x\,\varphi(x), \qquad 1)$$

so kann dieselbe auf unendlich viele verschiedene Arten gelöst werden. Unter allen diesen Lösungen gibt es aber eine, die ich die „einfache“ nenne, weil sie den einfachsten analytischen Ausdruck besitzt. Es ist diess diejenige, die man erhält, wenn man vorerst x eine ganze Zahl vorstellen und hernach den gefundenen analytischen Ausdruck auch für beliebige Werthe von x gelten lässt.

Um im vorliegenden Fall die einfache Lösung zu finden, lasse man in 1) x allmälig die Werthe x, x—1 x—2, ... 2,1 annehmen, multiplizire die entstehenden Gleichungen mit einander und nehme noch der Einfachheit wegen

$$\varphi(1) = 1 \qquad 2)$$

an, so erhält man

$$\varphi(x+1) = 1.2.3....x \qquad 3)$$

Dieser Ausdruck lässt sich aber nicht auf beliebige Werthe von x ausdehnen, und es kann in der That durch ein umgekehrtes Verfahren noch ein anderer gefunden werden.

Aus 1) ist nämlich

$$\varphi(x) = \frac{\varphi(x+1)}{x}$$

Ertheilt man nun hier dem x nach und nach die Werthe x, x+1, x+2, ... x+k—1, wo k eine unendlich wachsende Zahl bedeutet, so kommt

$$\varphi(x) = \frac{\varphi(x+k)}{x.(x+1)(x+2)....(x+k-1)}$$

oder, da wegen 3)

$$\varphi(x+k) = 1.2.3....k.(k+1)(k+2)....(k+x-1)$$

und sich in dem Product rechterhand die Folge $(k+1)$ $(k+2)\ldots.(k+x-1)$ als aus einer endlichen Zahl Factoren bestehend und somit gleich k^{x-1} herausstellt, so ist

$$\varphi(x) = \frac{1.2.3\ldots k.k^{x-1}}{x(x+1)(x+2)\ldots.(x+k-1)} \quad 4)$$

Lässt man in diesem Ausdruck x eine beliebige Zahl bedeuten, so hat man die einfache Lösung der Gleichung 1), welche für ganze positive x mit 3) identisch ist. Die Convergenz desselben gegen eine bestimmte Grenze lässt sich für alle reellen endlichen Werthe von x, die negativen ganzen ausgenommen, unschwer nachweisen. Für ganze positive folgt die Convergenz aus der Art der Herleitung, für ganze negative wird die Convergenz von $\frac{1}{\varphi(x)}$ abhängen von der Convergenz eines Ausdruckes von der Form

$$\frac{\left(1-\frac{x}{m}\right)^{\frac{1}{k}}}{\left(\frac{1}{k}\right)^{x}}$$

wo $\infty > m > x$ ist. Dieser ist aber nach den Regeln der Differenzialrechnung gleich

$$\frac{\log\left(1-\frac{x}{m}\right)}{x}.\frac{\left(1-\frac{x}{m}\right)^{\frac{1}{k}}}{\left(\frac{1}{k}\right)^{x-1}}$$

Für ganze x wird der Nenner hier zuletzt gleich ∞, also dieser Ausdruck $= 0$. Da nun $\frac{1}{\varphi(x)}$ eine continuirliche Function und für ganze positive oder negative Werthe von x endlich ist, so wird sie es auch für gebrochene sein, wodurch die Richtigkeit obiger Behauptung dargethan ist.

III.

Es ist also für alle reellen x

$$\frac{1}{\varphi(x)} = \frac{1.2.3\ldots k.k^{x-1}}{x(x+1)(x+2)\ldots.(x+k-1)}$$

und

$$\frac{1}{\varphi(1-x)} = \frac{1.2.3\ldots.k.k^{-x}}{(1-x)(2-x)(3-x)\ldots.(k-x)}$$

Multiplizirt man die Ausdrücke rechterhand mit einander, so ist das Product gleich

$$x\left(1-\frac{x^2}{1^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{2^2}\right)\ldots\left(1-\frac{x^2}{(k-1)^2}\right)$$

was bekanntlich gleich $\frac{\text{Sin.}\,\pi x}{\pi}$ ist. Sonach haben wir als neue Fundamentalgleichung:

$$\varphi(x)\cdot\varphi(1-x) = \frac{\pi}{\text{Sin.}\,\pi x} \qquad 5)$$

die für alle reellen Werthe von x besteht.

IV.

Die oben gefundene Gleichheit bietet uns die Mittel, den in I. berührten Lehrsatz zu finden. Euler stellte nämlich in seiner Introd. in anal., §. 240, den Satz auf:

$$\text{Sin.}\,n\pi x = 2^{n-1}\cdot\text{Sin.}\,x\cdot\text{Sin.}\,\pi\left(x+\frac{1}{n}\right)\cdot$$
$$\text{Sin.}\,\pi\left(x+\frac{2}{n}\right)\ldots\ldots\text{Sin}\,\pi\left(x+\frac{n-1}{n}\right)$$

wonach sich für $\varphi(nx)$ folgende Gleichung ergibt

$$\varphi(nx)\cdot\varphi(-nx) = (2\pi)^{\frac{1-n}{2}}\cdot\varphi(x)\cdot\varphi\left(x+\frac{1}{n}\right)\ldots.$$
$$\ldots\varphi\left(x+\frac{n-1}{n}\right)\cdot\frac{(2\pi)^{\frac{1-n}{2}}}{n}\cdot\varphi(-x)$$
$$\cdot\varphi\left(-x+\frac{1}{n}\right)\ldots\varphi\left(-x+\frac{n-1}{n}\right)$$

und man darf setzen

$$\varphi(nx) = (2\pi)^{\frac{1-n}{2}} \cdot \varphi(x) \cdot \varphi\left(x + \frac{1}{n}\right) \ldots \varphi\left(x + \frac{n-1}{n}\right) \cdot f(x, n) \qquad \alpha)$$

$$\varphi(-nx) = (2\pi)^{\frac{1-n}{2}} \cdot \varphi(-x) \cdot \varphi\left(-x + \frac{1}{n}\right) \ldots\ldots \varphi\left(-x + \frac{n-1}{n}\right) \cdot \frac{1}{n\, f(x, n)}$$

wo $f(x, n)$ eine nun zu bestimmende Function von x und n bedeutet. Beim Uebergang von x in $-x$ müssen diese beiden Gleichungen in einander übergehen, so dass

$$f(x, n) . f(-x, n) = \frac{1}{n}$$

woraus für $x = 0$,

$$f(o, n) = n^{-\frac{1}{2}} \qquad \beta)$$

Man lasse ferner in $\alpha)$ x in $x + \frac{1}{n}$ übergehen, so ergibt sich

$$\varphi(nx) = (2\pi)^{\frac{1-n}{2}} \varphi(x) \cdot \varphi\left(x + \frac{1}{n}\right) \ldots\ldots \varphi\left(x + \frac{n-1}{n}\right) \cdot \frac{f\left(x + \frac{1}{n}, n\right)}{n}$$

und also $\quad f\left(x + \frac{1}{n}, n\right) = n f(x, n).$

Setzt man hier für x: $x + \frac{1}{n}$, $x + \frac{2}{n}, \ldots x + \frac{\lambda - 1}{n}$ und multiplizirt die entstehenden Gleichungen, so kommt

$$f\left(x + \frac{\lambda}{n}, n\right) = n^{\lambda} f(x, n), \qquad \gamma)$$

wo λ eine beliebige positive ganze Zahl ist. Die Annahme

$\lambda = yn$, wo y eine positive ganze Zahl ist, und $x = 0$, gibt

$$f(y, n) = n^{ny}\ f(o, n)$$

oder wegen β) gleich $n^{ny-\frac{1}{2}}$, also für ganze x

$$f\left(x + \frac{\lambda}{n}, n\right) = n^{\left(x + \frac{\lambda}{n}\right) - \frac{1}{2}} \qquad \delta)$$

welche aber leicht als auch für Werthe von x von der Form $m + \frac{v}{n}$, wo m und v ganz sind, als gültig erkannt wird. Für solche x ist also

$$\varphi(nx) = \varphi(x) \cdot \varphi\left(x + \frac{1}{n}\right) \cdot \varphi\left(x + \frac{2}{n}\right) \cdot \cdot \cdot \cdot$$

$$\varphi\left(x + \frac{n-1}{n}\right) \cdot (2\pi)^{\frac{1-n}{2}} n^{nx - \frac{1}{2}} \qquad \varepsilon)$$

Wird hier für n nq, wo q ebenfalls ganz ist, gesetzt, ordnet man sodann die Factoren und nimmt α) zu Hülfe, so hat man

$$\varphi(nqx) =$$

$$\frac{\varphi(nx) \cdot \varphi\left(nx + \frac{1}{q}\right) \ldots\ldots \varphi\left(nx + \frac{q-1}{q}\right) \cdot (2\pi)^{\frac{1-q}{2}} q^{qnx - \frac{1}{2}} n^{(q-1)nx}}{f\left(x + \frac{1}{qn}, n\right) \cdot f\left(x + \frac{2}{qn}, n\right) \ldots\ldots f\left(x + \frac{q-n}{qn}, n\right)}$$

für alle x von der Form $m + \frac{v}{nq}$, und also wegen ε)

$$f\left(x + \frac{1}{qn}, n\right) \cdot f\left(x + \frac{2}{qn}, n\right) \ldots\ldots f\left(x + \frac{q-1}{qn}, n\right)$$

$$= n^{(q-1)nx} \qquad \xi)$$

Setzt man hier $x + \frac{2}{qn}$ für x, so kommt

$$f\left(x + \frac{3}{qn}, n\right) \ldots\ldots f\left(x + \frac{q-1}{qn}, n\right) \cdot f\left(x + \frac{1}{n}, n\right) \cdot$$

$$f\left(x + \frac{1}{n} + \frac{1}{qn}, n\right) = n^{(q-1)n\left(x + \frac{2}{qn}\right)}$$

oder, wenn die Gleichung γ) benutzt wird

$$f\left(x+\frac{3}{qn}, n\right)\ldots\ldots f\left(x+\frac{q-1}{qn}, n\right)\cdot f\left(x+\frac{1}{qn}, n\right)$$
$$= n^{(q-1)n\left(x+\frac{2}{qn}\right)}$$

Setzt man nun wieder $x+\frac{1}{qn}$ für x und wiederholt diess, sowie die eben vollführte Reduction mehrere Male hintereinander, so gelangt man einmal auf

$$f\left(x+\frac{\lambda+1}{qn}, n\right)\cdot f\left(x+\frac{\lambda+2}{qn}, n\right)\ldots\ldots f\left(x+\frac{q-1}{qn}, n\right).$$
$$f\left(x+\frac{1}{n}, n\right)\cdot f\left(x+\frac{1}{qn}, n\right)\ldots f\left(x+\frac{\lambda-1}{qn}, n\right) =$$
$$n^{(q-1)n\left(x+\frac{\lambda}{qn}\right)-\lambda+1}$$

wo λ eine ganze Zahl $< q$ bedeutet. Dividirt man die Gleichung ξ) durch die eben gefundene, so kommt

$$\frac{f\left(x+\frac{\lambda}{qn}, n\right)}{f\left(x+\frac{1}{n}, n\right)} = n^{\frac{\lambda}{q}-1} \qquad \eta)$$

Es ist nun zu zeigen, dass diese Bestimmung für alle beliebigen ganzen λ bestehe. Es gibt immer solche Werthe $\lambda^1 < q$, die so sind, dass $\lambda + \lambda^1 > q$. Man setze daher für x: $x+\frac{\lambda^1}{qn}$ und nehme γ) zu Hülfe, so erhält man

$$f\left(x+\frac{\lambda+\lambda^1}{qn}, n\right) = n^{\frac{\lambda+\lambda^1}{q}-1}\cdot f\left(x+\frac{1}{n}, n\right)$$

wodurch dargethan ist, dass η) auch für Werthe von $\lambda > q$ gültig ist. Auf gleiche Weise wird nun successive bewiesen, dass sie für $\lambda > 2q, > 3q, \ldots\ldots > kq$

gelte, wo k eine beliebige ganze Zahl ist, so dass sie nun für alle beliebigen λ gilt. Nimmt man jetzt x als ganze Zahl an und benützt die Bestimmung δ), so ist

$$f\left(x+\frac{\lambda}{qn}, n\right) = n^{n\left(x+\frac{\lambda}{qn}\right)-\frac{1}{2}}$$

Aus γ) ist aber, wenn statt x: $x+\frac{k}{p}$, wo k und p beliebige ganze Zahlen sind, gesetzt wird

$$f\left(x+\frac{k(p+n)}{pn}\right) = n^{k} f\left(x+\frac{k}{p}, n\right)$$

welche, mit der vorhergehenden durch die Annahme $\lambda = k(p+n)$ verbunden, endlich die Bestimmung gibt

$$f\left(x+\frac{k}{p}, n\right) = n^{n\left(x+\frac{k}{p}\right)-\frac{1}{2}} \qquad 5)$$

$\frac{k}{p}$ ist ein beliebiger Bruch, $\varphi(x)$ ist ferner eine continuirliche Function; daraus folgt also für alle positiven reellen x

$$f(x, n) = n^{nx-\frac{1}{2}}$$

und

$$f(-x, n) = \frac{1}{n.f(x, n)} = n^{-nx-\frac{1}{2}}$$

die von der vorigen nur durch das Zeichen von x verschieden ist, so dass nunmehr für alle reellen x der Lehrsatz besteht

$$\varphi(nx) = \varphi(x)\cdot\varphi\left(x+\frac{1}{n}\right)\cdot\varphi\left(x+\frac{2}{n}\right)\cdot\ldots\ldots$$

$$\varphi\left(x+\frac{n-1}{n}\right)\cdot(2\pi)^{\frac{1-n}{2}} n^{nx-\frac{1}{2}} \qquad 6)$$

V.

Es bleibt uns noch zu zeigen übrig, wie man $\varphi(x)$ durch ein bestimmtes Integral ausdrücken kann. Man nehme an

$$\varphi(x+1) = \int_0^\infty \psi(t) \cdot \vartheta(t, x) \cdot dt,$$

wo $\psi(t)$ und $d(tx)$ zu bestimmende Functionen sind, so kommt durch partiale Integration

$$\varphi(x+1) = \left[\int_0^\infty \psi(t)\, dt \cdot \vartheta(t, x)\right]$$

$$- \int_0^\infty \left(\int \psi(t)\, dt\right) \cdot \frac{d \cdot \vartheta(t, x)}{dt} \cdot dt$$

Da aber $\varphi(x+1) = x \cdot \varphi(x)$ ist, so muss dieser Ausdruck gleich sein

$$x \int_0^\infty \psi(t) \cdot \vartheta(t, x-1)\, dt$$

Abgesehen vorerst vom ersten konstanten Term in $\varphi(x+1)$, kann man nun über $\psi(t)$ beliebig verfügen. Wir setzen

$$\int \psi(t)\, dt = -\psi(t) \text{ oder } \psi(t) = -\frac{d\psi(t)}{dt}$$

woraus durch Integration

$$\psi(t) = e^{-t} \qquad \iota)$$

folgt, so dass nun

$$\varphi(x+1) = \int_0^\infty e^{-t} \cdot \vartheta(t, x)\, dt = \left[e^{-t} \cdot \vartheta(t, x)\right]_0^\infty +$$

$$\int_0^\infty e^{-t} \frac{d \cdot \vartheta(t, x)}{dt} = x \int_0^\infty e^{-t} \cdot \vartheta(t, x-1) dt$$

woraus sich die weitere Bestimmung ergibt

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d.\vartheta(t,x)}{dt} = x.\vartheta(t,x-1) \\ &\text{und} \\ &\Big[e^{-t}\vartheta(t.\ x)\Big]_0^\infty = 0 \end{aligned}\right\} \varkappa)$$

Aus den ersten dieser Gleichungen folgt

$$\frac{d^k.\vartheta(t,x)}{dt^k} = x.(x-1)(x-2)\ldots(x-k+1)\,\vartheta(t,x-k) \qquad \lambda)$$

wo k eine beliebige ganze Zahl ist. Nimmt man nun' um die einfache Lösung zu finden, x als ganze Zahl an und setzt x = k, so ist

$$\frac{d^x.\vartheta(t,x)}{dt^x} = x\,(x-1)\,(x-2)\ldots.2.1.\vartheta\,(t,\ o)$$

Um $\vartheta(t,\ o)$ zu bestimmen, so ist ebenso

$$\frac{d^{x+1}\vartheta(t,\ x)}{dt^x} = 0, \text{ woraus sich } \frac{d^x\vartheta(t,\ x)}{dt^x} = \text{Const},$$

also von t unabhängig ergibt; es ist also $\vartheta(t,\ o)$ eine Konstante gleich C. Nun ist

$$\varphi\,(1) = \int_0^\infty e^{-t}\cdot\vartheta(t,\ o)\,dt = \vartheta(t,\ o)\int_0^\infty e^{-t}\cdot dt = C,$$

welches wegen 2) gleich 1 sein muss, so dass nun

$$\frac{d^x.\vartheta(t,x)}{dt^x} = x.(x-1)(x-2)\ldots..2.1$$

und hieraus durch Integration

$$\vartheta(t,\ x) = t^x + \alpha\cdot t^{x-1} + \beta\cdot t^{x-2} + \ldots.\mu t + \nu,$$

wo α, β, ... μ, ν Integrationsconstanten sind, die noch x enthalten können. Die zweite Bestimmung ($\varkappa$) sagt aber aus, dass

$$\vartheta(o,\ x) = 0$$

werde, d. h. dass $\vartheta(t,\ x)$ kein konstantes Glied ohne t enthalten darf, ebensowenig also $\vartheta(t,\ x-1)$,...$\vartheta(t,\ x-k)$,... also wegen λ) auch

$$\frac{d.\vartheta(t, x)}{dt}, \frac{d^2.\vartheta(t, x)}{dt^2}, \ldots\ldots \frac{d^k.\vartheta(t, x)}{dt^k}, \ldots\ldots$$

Die Konstanten $\alpha, \beta, \gamma, \ldots\ldots \mu, \nu$ müssen sonach alle verschwinden und es bleibt nur noch

$$\vartheta(t, x) = t^x$$

und es besteht daher als einfache Lösung der Gleichung 1)

$$\varphi(x+1) = \int_0^\infty e^{-t} t^x \, dt \qquad 7)$$

welches in der That die gewöhnlich mit $\Gamma(x+1)$ bezeichnete Function ist. Da dieses Integral aber nur für positive x einen Sinn hat, so gelten alle für $\varphi(x)$ bewiesenen Gleichungen auch für $\Gamma(x)$, wenn in $\varphi(x)$ x positiv reell ist.

M. Schiff, über die Function der hintern Stränge des Rückenmarkes.

(Vorgetragen den 24. Januar 1857.)

Im Jahre 1853 habe ich der hiesigen naturforschenden Gesellschaft eine Reihe von neuen Resultaten meiner Versuche über die einzelnen Theile des Rückenmarkes eingesandt, welche in den Mittheilungen von 1853, pag. 336, veröffentlicht wurden.

Kurze Zeit darauf habe ich auch der französischen Akademie der Wissenschaften einen Theil dieser Ergebnisse, soweit sie sich auf die Leitung der Empfindungen beziehen, vorgelegt, und ich hatte das Vergnügen, die auffallendsten meiner Resultate nicht nur durch die von der Akademie ernannte Kommission, sondern auch von Seiten eines der ausgezeichnetsten und tüchtigsten Forscher, des Herrn Brown-Sequard, bestätigt zu sehen,