Zeitschrift: Mitteilungen der Naturforschenden Gesellschaft Bern

Herausgeber: Naturforschende Gesellschaft Bern

Band: - (1851)

Heft: 197-199

Artikel: Versuche zur Vergleichung der Erfahrungswahrscheinlichkeit mit der mathematischen Wahrscheinlichkeit. Fünfte Versuchsreihe

Autor: Wolf, R.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-318333

Nr. 197 bis 199.

R. Wolf, Versuche zur Vergleichung der Erfahrungswahrscheinlichkeit mit der mathematischen Wahrscheinlichkeit.

Fünfte Versuchsreihe.

[Vorgelegt am 21. December 1850.]

Die fünfte Versuchsreihe entsprach durchaus der ersten, in Nr. 156 besprochenen; nur bestand sie einerseits aus 1000, anstatt aus 100 Versuchen sämmtliche Würfe zu erschöpfen, und anderseits wurden die hiezu nöthigen 97,899 Würfe noch bis auf 100,000 vermehrt, um für einzelne Resultate eine leichtere Uebersicht zu erhalten.

Zunächst wurde diesen Versuchen entnommen, wie sich die einzelnen Resultate in Beziehung auf das Eröffnen und Schliessen der Versuche verhalten. Bei den 1000 Versuchen erschien

Wurf	1·1	als	erster Wurf	25mal,	als letzter	139mal
—	2·2	—	—	30—	—	84—
—	3·3	—	—	21—	—	181—
—	4·4	—	—	31—	—	97—
—	5·5	—	—	22—	—	101—
—	6·6	—	—	26—	—	118—
Paar		—	—	155—	—	720—

(Bern. Mitth. Februar 1851.)

Wurf	1·2	als erster Wurf	56mal,	als letzter	14mal
—	1·3	— —	46—	—	32—
—	1·4	— —	55—	—	24—
—	1·5	— —	58—	—	16—
—	1·6	— —	53—	—	26—
—	2·3	— —	52—	—	14—
—	2·4	— —	60—	—	7—
—	2·5	— —	59—	—	11—
—	2·6	— —	66—	—	16—
—	3·4	— —	56—	—	20—
—	3·5	— —	51—	—	29—
—	3·6	— —	46—	—	18—
—	4·5	— —	58—	—	14—
—	4·6	— —	64—	—	19—
—	5·6	— —	65—	—	20—
Unpaar		— —	845—	—	280—

Es erschienen somit die unpaaren Würfe nahe 5=30:6mal so viel als erste, — die paaren Würfe nahe $2\frac{1}{2}$=15:6mal so viel als letzte Würfe, als je die Andern.

In zweiter Linie wurden den 1000 Versuchen die mittlern Anzahlen von Würfen entnommen, die nöthig sind, um jeden paaren, oder jeden unpaaren, oder jeden Wurf mindestens Ein Mal zu werfen.

Nennt man diese Zahlen der Reihe nach P, Q, R, so ergab sich

$$\begin{aligned}1000\,P = {} & 2\cdot19+20+2\cdot21+5\cdot22+24+4\cdot25+2\cdot26+4\cdot28+\\ & 2\cdot29+3\cdot30+3\cdot31+2\cdot32+10\cdot33+4\cdot34+35+\\ & 2\cdot36+10\cdot37+4\cdot38+4\cdot39+10\cdot40+5\cdot41+7\cdot42+\\ & 12\cdot43+9\cdot44+10\cdot45+7\cdot46+11\cdot47+7\cdot48+6\cdot49+\\ & 8\cdot50+12\cdot51+4\cdot52+11\cdot53+21\cdot54+6\cdot55+13\cdot56+\\ & 11\cdot57+17\cdot58+9\cdot59+6\cdot60+14\cdot61+15\cdot62+13\cdot63+\\ & 8\cdot64+6\cdot65+19\cdot66+12\cdot67+6\cdot68+7\cdot69+12\cdot70+\\ & 14\cdot71+15\cdot72+11\cdot73+9\cdot74+6\cdot75+10\cdot76+16\cdot77+\end{aligned}$$

$$13\cdot78+8\cdot79+12\cdot80+12\cdot81+6\cdot82+9\cdot83+15\cdot84+9\cdot85+15\cdot86+6\cdot87+11\cdot88+5\cdot89+6\cdot90+6\cdot91+9\cdot92+11\cdot93+6\cdot94+8\cdot95+9\cdot96+11\cdot97+6\cdot98+10\cdot99+9\cdot100+8\cdot101+6\cdot102+7\cdot103+6\cdot104+5\cdot105+9\cdot106+8\cdot107+7\cdot108+4\cdot109+7\cdot110+4\cdot111+6\cdot112+5\cdot113+7\cdot114+6\cdot115+2\cdot116+6\cdot117+8\cdot118+8\cdot119+3\cdot120+4\cdot121+5\cdot122+3\cdot123+2\cdot124+125+4\cdot126+7\cdot127+4\cdot128+6\cdot129+5\cdot131+2\cdot132+3\cdot133+134+3\cdot135+7\cdot136+3\cdot137+138+139+140+2\cdot141+7\cdot142+2\cdot144+145+2\cdot146+2\cdot147+4\cdot148+4\cdot149+5\cdot150+5\cdot151+2\cdot152+3\cdot153+3\cdot154+2\cdot155+3\cdot156+3\cdot157+158+6\cdot159+160+5\cdot161+2\cdot162+3\cdot163+4\cdot165+2\cdot166+167+168+2\cdot170+2\cdot171+173+3\cdot175+3\cdot176+4\cdot177+4\cdot178+179+3\cdot180+182+184+186+2\cdot188+189+190+192+196+197+198+199+2\cdot200+202+2\cdot203+3\cdot204+2\cdot208+2\cdot209+2\cdot214+218+223+225+227+231+232+233+250+254+255+259+288+302+304+323+331+341$$

$$=91265$$

$$1000\,Q=3\cdot22+2\cdot23+24+2\cdot25+4\cdot26+27+7\cdot28+4\cdot29+4\cdot30+6\cdot31+4\cdot32+9\cdot33+15\cdot34+20\cdot35+10\cdot36+12\cdot37+18\cdot38+15\cdot39+28\cdot40+25\cdot41+18\cdot42+14\cdot43+16\cdot44+19\cdot45+27\cdot46+31\cdot47+24\cdot48+20\cdot49+28\cdot50+32\cdot51+20\cdot52+23\cdot53+16\cdot54+24\cdot55+19\cdot56+23\cdot57+21\cdot58+15\cdot59+21\cdot60+13\cdot61+14\cdot62+20\cdot63+19\cdot64+18\cdot65+20\cdot66+11\cdot67+11\cdot68+5\cdot69+23\cdot70+12\cdot71+13\cdot72+13\cdot73+10\cdot74+5\cdot75+16\cdot76+10\cdot77+8\cdot78+10\cdot79+8\cdot80+7\cdot81+4\cdot82+10\cdot83+7\cdot84+7\cdot85+6\cdot86+5\cdot87+7\cdot88+5\cdot89+5\cdot90+7\cdot91+3\cdot92+5\cdot93+3\cdot94+2\cdot95+3\cdot96+6\cdot97+2\cdot98+3\cdot99+100+$$

$$
\begin{aligned}
&3\cdot101+103+2\cdot104+2\cdot106+3\cdot107+2\cdot108+110+\\
&4\cdot111+2\cdot113+2\cdot114+3\cdot115+116+117+120+\\
&122+123+128+132+2\cdot133+137+143+147+\\
&157+2\cdot169+171+219\\
&=59543\\
1000\,R&=34+35+38+4\cdot39+40+2\cdot41+2\cdot43+3\cdot44+5\cdot45+\\
&3\cdot46+3\cdot47+6\cdot48+2\cdot49+6\cdot50+8\cdot51+7\cdot52+\\
&10\cdot53+9\cdot54+3\cdot55+14\cdot56+9\cdot57+17\cdot58+2\cdot59+\\
&11\cdot60+12\cdot61+15\cdot62+15\cdot63+11\cdot64+13\cdot65+\\
&24\cdot66+14\cdot67+11\cdot68+7\cdot69+20\cdot70+16\cdot71+\\
&19\cdot72+15\cdot73+14\cdot74+8\cdot75+18\cdot76+18\cdot77+\\
&14\cdot78+9\cdot79+17\cdot80+16\cdot81+5\cdot82+12\cdot83+18\cdot84+\\
&15\cdot85+17\cdot86+7\cdot87+17\cdot88+7\cdot89+8\cdot90+12\cdot91+\\
&11\cdot92+16\cdot93+7\cdot94+10\cdot95+10\cdot96+14\cdot97+8\cdot98+\\
&9\cdot99+9\cdot100+9\cdot101+6\cdot102+7\cdot103+6\cdot104+5\cdot105+\\
&10\cdot106+10\cdot107+8\cdot108+4\cdot109+7\cdot110+7\cdot111+\\
&6\cdot112+7\cdot113+9\cdot114+8\cdot115+3\cdot116+6\cdot117+\\
&8\cdot118+8\cdot119+3\cdot120+4\cdot121+6\cdot122+3\cdot123+\\
&2\cdot124+125+4\cdot126+7\cdot127+5\cdot128+5\cdot129+5\cdot131+\\
&3\cdot132+5\cdot133+134+3\cdot135+7\cdot136+4\cdot137+138+\\
&139+140+2\cdot141+7\cdot142+143+2\cdot144+145+\\
&2\cdot146+3\cdot147+4\cdot148+3\cdot149+5\cdot150+5\cdot151+\\
&2\cdot152+3\cdot153+3\cdot154+2\cdot155+3\cdot156+4\cdot157+158+\\
&6\cdot159+160+5\cdot161+2\cdot162+3\cdot163+4\cdot165+2\cdot166+\\
&167+168+2\cdot169+2\cdot170+2\cdot171+173+3\cdot175+\\
&3\cdot176+4\cdot177+4\cdot178+179+3\cdot180+182+184+\\
&186+2\cdot188+189+190+192+196+197+198+\\
&199+2\cdot200+202+2\cdot203+3\cdot204+2\cdot208+2\cdot209+\\
&2\cdot214+218+219+223+225+227+231+232+\\
&233+250+254+255+259+288+302+304+323+\\
&331+341\\
&=97899
\end{aligned}
$$

Bedenkt man, dass die Anzahl P der paaren Würfe zwischen 6 und ∞, die Anzahl Q der unpaaren Würfe zwischen 15 und ∞, und die Anzahl R aller Würfe zwischen 21 und ∞ schwanken kann, so wird man sich über die engen Grenzen wundern, zwischen welchen sich die Versuche bewegten. Bei P findet sich keine Zahl unter 19, keine über 341, — bei Q keine unter 22, keine über 219, — bei R keine unter 34, keine über 341, und bei allen drei Zahlen ziehen sich diese Grenzen, namentlich von oben her, ungemein zusammen, wenn man nur auf die häufig wiederkehrenden Fälle Rücksicht nimmt. Ueberhaupt zeigen solche Versuche schlagend, wie sogar der sogenannte Zufall die Extreme scheut. Unter 1000 solchen Versuchen dürfte man z. B. erwarten, bald alle paaren Würfe vor dem ersten unpaaren, bald alle unpaaren Würfe vor dem ersten paaren, etc. zu erhalten; aber jede solche ausserordentliche Erscheinung zeigte sich entweder gar nie oder doch ungemein selten, obschon ich darauf aufmerksam war. Dass beim 161sten und beim 641sten Versuche die unpaaren Würfe vollständig erschienen, ehe die paaren an die Reihe kamen, ist das Einzige, was ich mir während den Versuchen hierüber notirte.

Um die drei Mittelzahlen P, Q und R auf theoretischem Wege darzustellen, gieng ich von dem Grundsatze aus, dass die Anzahl der Würfe, welche zum Hervorbringen eines bestimmten Wurfes erfordert werde, zur Wahrscheinlichkeit dieses Wurfes reciprok sei, dass so z. B. ein bestimmter unpaarer Wurf im Mittel 18 Würfe zum Hervorbringen erfordere, weil seine Wahrscheinlichkeit $^1/_{18}$ sei. Da nun

$$\frac{6}{36} \quad \frac{5}{36} \quad \frac{4}{36} \quad \frac{3}{36} \quad \frac{2}{36} \quad \frac{1}{36}$$

die Wahrscheinlichkeiten waren, einen ersten, zweiten, dritten, ... letzten paaren Wurf zu erhalten, so war nach jenem Grundsatze

$$P = \frac{36}{6} + \frac{36}{5} + \frac{36}{4} + \frac{36}{3} + \frac{36}{2} + \frac{36}{1}$$
$$= 6 + 7{,}2 + 9 + 12 + 18 + 36$$
$$= 88{,}2$$

Analog folgte aus den Wahrscheinlichkeiten

$$\frac{30}{36} \quad \frac{28}{36} \quad \frac{26}{36} \quad \cdots\cdots \quad \frac{4}{36} \quad \frac{2}{36}$$

einen ersten, zweiten, dritten, ... letzten unpaaren Wurf zu werfen

$$Q = \frac{36}{30} + \frac{36}{28} + \frac{36}{26} + \frac{36}{24} + \ldots\ldots + \frac{36}{2}$$
$$= 1{,}2 + 1{,}286 + 1{,}385 + 1{,}5 + 1{,}636 + 1{,}8 + 2 + 2{,}25 + 2{,}571 + 3 + 3{,}6 + 4{,}5 + 6 + 9 + 18$$
$$= 59{,}728$$

Die Vergleichung der Glieder, aus denen P und Q zusammengesetzt erschienen, liess mich erkennen, dass, wenn u einen unpaaren, p einen paaren Wurf bezeichne, die wahrscheinlichste Ordnung der 21 Würfe

u u u u p u u u p u u u p u u p u u p u p

sei, und hieraus folgten für ihre Wahrscheinlichkeiten

$$\frac{36}{36} \quad \frac{34}{36} \quad \frac{32}{36} \quad \frac{30}{36} \quad \frac{28}{36} \quad \frac{27}{36} \quad \frac{25}{36} \quad \frac{23}{36} \quad \frac{21}{36} \quad \frac{20}{36} \quad \frac{18}{36}$$
$$\frac{16}{36} \quad \frac{14}{36} \quad \frac{13}{36} \quad \frac{11}{36} \quad \frac{9}{36} \quad \frac{8}{36} \quad \frac{6}{36} \quad \frac{4}{36} \quad \frac{3}{36} \quad \frac{1}{36}$$

so dass

$$R = \frac{36}{36} + \frac{36}{34} + \frac{36}{32} + \frac{36}{30} + \frac{36}{28} + \frac{36}{27} + \frac{36}{25} + \frac{36}{23} + \frac{36}{21} + \frac{36}{20} + \frac{36}{18} + \frac{36}{16} + \frac{36}{14} + \frac{36}{13} + \frac{36}{11} + \frac{36}{9} + \frac{36}{8} + \frac{36}{6} + \frac{36}{4} + \frac{36}{3} + \frac{36}{1}$$
$$= 1 + 1{,}059 + 1{,}125 + 1{,}2 + 1{,}286 + 1{,}233 + 1{,}44 + 1{,}565 + 1{,}714 + 1{,}8 + 2 + 2{,}25 + 2{,}571 + 2{,}769 + 3{,}273 + 4 + 4{,}5 + 6 + 9 + 12 + 36$$
$$= 97{,}885$$

wurde. Diese berechneten drei Zahlen stimmen mit den den Versuchen entnommenen auffallend schön zusammen, namentlich Q und R; die etwas grössere Abweichung der beiden P dürfte in der darauf besonders wirksamen Differenz zwischen den mathematischen und den angewandten Würfeln zu suchen sein, welche sich im Verlaufe der gegenwärtigen Untersuchung ergeben wird. Noch mag beigefügt werden, dass Herr Professor Rudolf Merian in Basel die Güte hatte ebenfalls die Zahlen P, Q, R zu berechnen, und nach ganz andern, mehr combinatorischen und für R zu grossen numerischen Rechnungen führenden Betrachtungen

$$P=88{,}2 \qquad Q=59\,\frac{14577}{20020} \qquad R=95{,}0818$$

fand, also P und Q ganz übereinstimmend und R dagegen um etwas mehr als 2 Einheiten von meinem Werthe verschieden. Endlich erwähne ich noch der Merkwürdigkeit wegen, dass sich mir die oben benutzte Methode P, Q und R zu bestimmen schon im Sommer 1849 bei Betrachtung der ersten Versuchsreihe aufdrängte, — dass ich sie aber des durch einen Rechnungsfehler verursachten schlechten Resultates wegen glaubte verwerfen zu müssen, und nun einen ganz auf andern Grundlagen beruhenden Weg einschlug, auf den ich in einer spätern Mittheilung einzutreten gedenke; erst in den letzten Tagen kam ich bei Revision aller diese Versuche betreffenden Papiere auf jenes erste Verfahren zurück, entdeckte den Rechnungsfehler, und hatte nun alle Ursache für den vorliegenden Fall zu ihm zurückzukehren.

In dritter Linie wurden alle 100,000 Würfe nach ihrer Vertheilung auf die 21 möglichen Würfe untersucht. Es ergab sich hieraus folgende Tafel:

Wurf	Anzahl in den Würfen 1	1—10	1—100	1—1000	1—10000	10001—20000	20001—30000	30001—40000
1•1	—	—	2	23	241	255	231	240
2•2	—	—	—	34	330	310	320	336
3•3	—	—	1	20	231	204	196	194
4•4	—	1	6	33	292	322	286	289
5•5	—	—	1	32	286	272	284	328
6•6	—	—	2	22	269	281	263	270
Paar	—	1	12	164	1649	1644	1580	1657
1•2	—	—	5	71	539	585	554	545
1•3	—	—	4	46	487	499	456	442
1•4	—	—	6	53	515	558	597	541
1•5	—	—	5	53	566	549	592	575
1•6	—	1	6	54	512	512	496	482
2•3	—	—	9	54	568	550	570	619
2•4	—	2	9	57	618	615	613	643
2•5	—	1	6	70	639	677	641	683
2•6	—	2	9	63	599	536	566	590
3•4	—	2	9	51	531	551	542	487
3•5	—	—	3	45	549	550	507	492
3•6	—	—	2	45	508	487	552	490
4•5	—	—	5	61	612	592	614	678
4•6	1	1	7	63	538	529	504	496
5•6	—	—	3	50	570	566	616	580
Unpaar	1	9	88	836	8351	8356	8420	8343

Wurf	Anzahl in den Würfen 40001—50000	50001—60000	60001—70000	70001—80000	80001—90000	90001—100000	1—100000	Mathematische Wahrscheinlichkeit.
1•1	265	252	265	228	245	233	2455	
2•2	330	314	336	305	317	355	3253	
3•3	214	246	256	191	226	221	2179	0,02778
4•4	310	273	290	297	283	288	2930	
5•5	303	335	295	280	314	285	2982	
6•6	257	265	268	265	258	272	2668	
Paar	1679	1685	1710	1566	1643	1654	16467	0,16667
1•2	534	563	581	582	570	603	5656	
1•3	457	469	438	453	457	473	4631	
1•4	497	501	512	522	502	500	5245	
1•5	590	568	583	587	537	590	5737	
1•6	511	512	505	516	466	492	5004	
2•3	570	546	571	557	513	533	5597	
2•4	636	608	620	601	643	600	6197	
2•5	637	603	627	666	672	684	6529	0,05556
2•6	577	615	586	622	617	561	5869	
3•4	529	501	496	494	493	516	5140	
3•5	548	551	537	552	536	555	5377	
3•6	492	475	494	469	505	529	5001	
4•5	605	620	616	620	656	573	6186	
4•6	596	535	536	566	589	547	5436	
5•6	542	648	588	627	601	590	5928	
Unpaar	8321	8315	8290	8434	8357	8346	83533	0,83333

Aus dieser Tafel geht hervor, dass sich die paaren und unpaaren Würfe schon bei einer geringen Anzahl von Versuchen so ziemlich ins Gleichgewicht setzen; schon bei 100 Versuchen, wo bei den einzelnen Würfen noch gar kein Gesetz ersichtlich ist, stimmt bei den paaren und und unpaaren Würfen die Erfahrungswahrscheinlichkeit auf eine Decimale mit der mathematischen Wahrscheinlichkeit, — bei 1000 Versuchen, wo sich nun auch die einzelnen paaren und unpaaren Würfe bereits in bestimmten Verhältnissen zeigen, hat die Uebereinstimmung schon die Stufe erreicht, deren sie überhaupt fähig zu sein scheint. Bei den einzelnen Würfen steigt dagegen die Uebereinstimmung der Erfahrungswahrscheinlichkeit mit der mathematischen Wahrscheinlichkeit noch merklich bis zu 10000 Versuchen, — nachher wird auch sie stagnirend, und es treten nun mit Bestimmtheit die durch die Ungleichheit der Würfel bedingten Eigenthümlichkeiten der einzelnen Würfe hervor, — so dass die aus den ersten 10000 Versuchen erhaltenen Wurfzahlen bereits genauer auf die allen 100000 Versuchen entsprechenden Wurfzahlen schliessen lassen, als die mathematischen Wahrscheinlichkeiten. Die folgende Vergleichung, wo je die erste Zahl den ersten 10000 Versuchen, die zweite allen 100000 Versuchen und die dritte der mathematischen Wahrscheinlichkeit entspricht, erweist diese Behauptung wohl mit hinlänglicher Sicherheit:

1 • 1		2 • 2		3 • 3	
2410		3300		2310	
	45		47		131
2455		3253		2179	
	323		475		599
2778		2778		2778	

4 . 4		5 . 5		6 . 6	
2920		2860		2690	
2930	10	2982	122	2668	22
2778	152	2778	204	2778	110

1 . 2		1 . 3		1 . 4	
5390		4870		5150	
5656	266	4631	239	5245	95
5556	100	5556	925	5556	311

1 . 5		1 . 6		2 . 3	
5660		5120		5680	
5737	77	5004	116	5597	83
5556	181	5556	552	5556	41

2 . 4		2 . 5		2 . 6	
6180		6390		5990	
6197	17	6529	139	5869	121
5556	641	5556	973	5556	313

3 . 4		3 . 5		3 . 6	
5310		5490		5080	
5140	170	5377	113	5001	79
5556	416	5556	179	5556	555

4 . 5		4 . 6		5 . 6	
6120		5380		5700	
6186	66	5436	56	5928	228
5556	630	5556	120	5556	372

denn sie zeigt, dass die aus den 10000 Versuchen gezogenen Zahlen von den geworfenen im Mittel um 107, die aus der mathematischen Wahrscheinlichkeit gezogenen aber von den geworfenen im Mittel um 389 abweichen,— oder dass die erstern einen mittlern Fehler von 0,02242, die letztern einen mittlern Fehler von 0,08172 zeigen. Das nämliche zeigt sich, wenn man die aus Combination der Wurfzahlen der paaren Würfe entstehenden Zahlen mit den Wurfzahlen der unpaaren Würfe vergleicht, — ja, es lassen sich (wie dies schon in der Einleitung zu der ersten Versuchsreihe mit als Zweck aufgeführt wurde) aus diesen mittlern Wurfzahlen die Abweichungen des gebrauchten Würfels von dem mathematischen Würfel bestimmen. Setzt man nämlich die Wahrscheinlichkeit des Wurfes h am ersten Würfel gleich $\frac{1}{6} + p_h$ und die des Wurfes k am zweiten Würfel gleich $\frac{1}{6} + q_k$, so hat man die Wahrscheinlichkeiten eines paaren Wurfes (h, h) und eines unpaaren Wurfes (h, k), wenn die zweiten Dimensionen von p und q vernachlässigt werden,

$$\begin{aligned} w\,(h, h) &= \left(\frac{1}{6} + p_h\right)\left(\frac{1}{6} + q_h\right) \\ &= \frac{1}{36} + \frac{1}{6}\left(p_h + q_h\right) \\ &= 0{,}02778 + r_h \\ w\,(h, k) &= \left(\frac{1}{6} + p_h\right)\left(\frac{1}{6} + q_k\right) \\ &\quad + \left(\frac{1}{6} + p_k\right)\left(\frac{1}{6} + q_h\right) \\ &= \frac{1}{18} + \frac{1}{6}\left(p_h + q_h\right) \\ &\quad + \frac{1}{6}\left(p_k + q_k\right) \\ &= 0{,}05556 + r_h + r_k \end{aligned}$$

und es bestehen somit die Gleichungen

$$\begin{aligned}
0{,}02455 &= 0{,}02778 + r_1 \\
0{,}03253 &= 0{,}02778 + r_2 \\
0{,}02179 &= 0{,}02778 + r_3 \\
0{,}02930 &= 0{,}02778 + r_4 \\
0{,}02982 &= 0{,}02778 + r_5 \\
0{,}02668 &= 0{,}02778 + r_6 \\
0{,}05656 &= 0{,}05556 + r_1 + r_2 \\
0{,}04631 &= 0{,}05556 + r_1 + r_3 \\
0{,}05245 &= 0{,}05556 + r_1 + r_4 \\
0{,}05737 &= 0{,}05556 + r_1 + r_5 \\
0{,}05004 &= 0{,}05556 + r_1 + r_6 \\
0{,}05597 &= 0{,}05556 + r_2 + r_3 \\
0{,}06197 &= 0{,}05556 + r_2 + r_4 \\
0{,}06529 &= 0{,}05556 + r_2 + r_5 \\
0{,}05869 &= 0{,}05556 + r_2 + r_6 \\
0{,}05140 &= 0{,}05556 + r_3 + r_4 \\
0{,}05377 &= 0{,}05556 + r_3 + r_5 \\
0{,}05001 &= 0{,}05556 + r_3 + r_6 \\
0{,}06186 &= 0{,}05556 + r_4 + r_5 \\
0{,}05436 &= 0{,}05556 + r_4 + r_6 \\
0{,}05928 &= 0{,}05556 + r_5 + r_6
\end{aligned}$$

oder, wenn man nach Maasgabe der ersten 6 Gleichungen

$$\begin{aligned}
r_1 &= -\ 0{,}00323 + u \\
r_2 &= +\ 0{,}00475 + v \\
r_3 &= -\ 0{,}00599 + w \\
r_4 &= +\ 0{,}00152 + x \\
r_5 &= +\ 0{,}00204 + y \\
r_6 &= -\ 0{,}00110 + z
\end{aligned}$$

setzt, und die Fehler der einzelnen Gleichheiten mit α bezeichnet,

$$\alpha_1 = u$$
$$\alpha_2 = v$$
$$\alpha_3 = w$$
$$\alpha_4 = x$$
$$\alpha_5 = y$$
$$\alpha_6 = z$$
$$\alpha_7 = u + v + 0{,}00052$$
$$\alpha_8 = u + w + 0{,}00003$$
$$\alpha_9 = u + x + 0{,}00140$$
$$\alpha_{10} = u + y - 0{,}00300$$
$$\alpha_{11} = u + z + 0{,}00119$$
$$\alpha_{12} = v + w - 0{,}00165$$
$$\alpha_{13} = v + x - 0{,}00014$$
$$\alpha_{14} = v + y - 0{,}00294$$
$$\alpha_{15} = v + z + 0{,}00052$$
$$\alpha_{16} = w + x - 0{,}00031$$
$$\alpha_{17} = w + y - 0{,}00216$$
$$\alpha_{18} = w + z - 0{,}00154$$
$$\alpha_{19} = x + y - 0{,}00274$$
$$\alpha_{20} = x + z + 0{,}00162$$
$$\alpha_{21} = y + z - 0{,}00278$$

Hieraus erhält man durch Quadriren und Addiren

$$\begin{aligned}\Sigma\alpha^2 = {} & 6(u^2+v^2+w^2+x^2+y^2+z^2) \\ & + 2(uv+uw+ux+uy+uz+vw+vx+vy+vz+wx+ \\ & \quad wy+wz+xy+xz+yz) \\ & + 0{,}00002\,[14u-369v-563w-17x-1362y-99z] + \\ & \quad 0{,}00005\end{aligned}$$

folglich, da nach der Methode der kleinsten Quadrate $\Sigma\alpha^2$ ein Minimum werden soll,

$$\frac{d\Sigma\alpha^2}{du}=0=12u+2(v+w+x+y+z)+2\cdot 0{,}00014$$

$$\frac{d\Sigma\alpha^2}{dv}=0=12v+2(u+w+x+y+z)-2\cdot 0{,}00369$$

$$\frac{d\Sigma\alpha^2}{dw}=0=12w+2(u+v+x+y+z)-2\cdot 0{,}00563$$

$$\frac{d\Sigma\alpha^2}{dx}=0=12x+2(u+v+w+y+z)-2\cdot 0{,}00017$$

$$\frac{d\Sigma\alpha^2}{dy}=0=12y+2(u+v+w+x+z)-2\cdot 0{,}01362$$

$$\frac{d\Sigma\alpha^2}{dz}=0=12z+2(u+v+w+x+y)-2\cdot 0{,}00099$$

oder, wenn man der Kürze wegen

$$u+v+w+x+y+z=t$$

setzt,

$$u=-\frac{1}{5}(t+0{,}00014)$$

$$v=-\frac{1}{5}(t-0{,}00369)$$

$$w=-\frac{1}{5}(t-0{,}00563)$$

$$x=-\frac{1}{5}(t-0{,}00017)$$

$$y=-\frac{1}{5}(t-0{,}01362)$$

$$z=-\frac{1}{5}(t-0{,}00099)$$

woraus durch Addition

$$t=-\frac{1}{5}[6t-0{,}02396] \quad \text{oder} \quad t=0{,}00218$$

folgt, und somit

$$u = -\ 0{,}00041$$
$$v = +\ 0{,}00030$$
$$w = +\ 0{,}00069$$
$$x = -\ 0{,}00040$$
$$y = +\ 0{,}00229$$
$$z = -\ 0{,}00024$$

Man hat daher

$$r_1 = -\ 0{,}00364$$
$$r_2 = +\ 0{,}00505$$
$$r_3 = -\ 0{,}00530$$
$$r_4 = +\ 0{,}00112$$
$$r_5 = +\ 0{,}00433$$
$$r_6 = -\ 0{,}00124$$

in welchen Zahlen ein Maass für die Abweichungen der gebrauchten Würfel von den mathematischen liegt. Man kann diese Abweichungen gross finden, — man kann bemerken, dass wenn sorgfältiger construirte Würfel angewandt worden wären, auch die Resultate sich näher an die theoretischen Zahlen angeschlossen hätten; beides ist ganz richtig, aber ebenso richtig ist es, was bei der ersten Versuchsreihe schon bemerkt wurde, — nämlich, dass der Zweck dieser Versuche gerade gewöhnliche Würfel verlangte, — denn es handelt sich ja nicht um die Richtigkeit der Theorie, sondern um eine Vergleichung der Erfahrungen mit der Theorie, und in der Praxis kommen eben gewöhnliche Würfel, und überhaupt mit Fehlern behaftete Instrumente vor; ja, die ganze neuere Beobachtungskunst geht aus guten Gründen mehr darauf aus, den Fehlern Rechnung zu tragen, als dem Mechaniker ihre Beseitigung zuzumuthen.

Mit Benutzung dieser Werthe von r finden sich sodann nach den oben aufgestellten Beziehungen für die gebrauchten Würfel die Wahrscheinlichkeiten

$w(1,1) = 0,02414$	anstatt	2455
$w(2,2) = 0,03283$	—	3253
$w(3,3) = 0,02242$	—	2179
$w(4,4) = 0,02890$	—	2930
$w(5,5) = 0,03211$	—	2982
$w(6,6) = 0,02654$	—	2668
$w(1,2) = 0,05697$	—	5656
$w(1,3) = 0,04656$	—	4631
$w(1,4) = 0,05304$	—	5245
$w(1,5) = 0,05625$	—	5737
$w(1,6) = 0,05068$	—	5004
$w(2,3) = 0,05525$	—	5597
$w(2,4) = 0,06173$	—	6197
$w(2,5) = 0,06494$	—	6529
$w(2,6) = 0,05937$	—	5869
$w(3,4) = 0,05132$	—	5140
$w(3,5) = 0,05453$	—	5377
$w(3,6) = 0,04896$	—	5001
$w(4,5) = 0,06101$	—	6186
$w(4,6) = 0,05544$	—	5436
$w(5,6) = 0,05865$	—	5928

In vierter Linie endlich wurden die 100,000 Würfe noch darauf untersucht, wie oft jeder Wurf 2, 3, 4 .... Mal nach einander erschienen sei. Die Resultate wurden mit Beifügung der Wahrscheinlichkeiten für die mathematischen und die gebrauchten Würfel in der folgenden Tafel zusammengestellt:

Wurf.	wiederholt sich	1—10000	10001—20000	20001—30000	30001—40000	40001—50000	50001—60000	60001—70000	70001—80000	80001—90000	90001—100000	1—100000	Wahrscheinlichkeit für die mathemat. Würfel.	Wahrscheinlichkeit für die gebrauchten Würfel.
1 . 1	2	2	6	5	5	4	4	4	4	2	3	39	0,00077	0,00058
	3	—	—	—	—	1	—	—	—	—	—	1	002	001
	4	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	000	000
2 . 2	2	11	5	7	12	1	5	7	7	9	9	73	077	108
	3	1	—	—	—	—	—	—	—	—	1	2	002	004
	4	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	000	000
3 . 3	2	2	4	1	3	2	2	3	1	3	2	23	077	050
	3	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	002	001
	4	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	000	000
4 . 4	2	8	12	5	8	2	7	5	3	6	7	63	077	084
	3	—	—	1	—	—	—	—	—	—	—	1	002	002
	4	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	000	000
5 . 5	2	6	4	9	11	11	9	6	5	8	8	77	077	103
	3	—	1	—	—	—	—	—	—	—	—	1	002	003
	4	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	000	000
6 . 6	2	6	5	3	5	9	5	5	5	6	4	53	077	070
	3	—	1	—	—	—	—	—	—	—	—	1	002	002
	4	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	000	000
paar	2	35	36	30	44	29	32	30	25	34	33	328	462	473
	3	1	2	1	—	1	—	—	—	—	1	6	013	014
	4	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	000	000
1 . 2	2	27	25	22	33	25	22	30	29	25	26	264	309	325
	3	—	—	—	3	—	—	3	3	1	2	12	017	018
	4	—	—	—	1	—	—	—	—	—	—	1	001	001
1 . 3	2	22	33	19	18	18	12	14	24	16	16	192	309	217
	3	1	4	1	1	3	—	—	—	—	1	11	017	010
	4	—	1	—	—	—	—	—	—	—	—	1	001	000
1 . 4	2	26	28	33	32	12	10	15	25	16	17	214	309	281
	3	1	1	3	4	—	2	—	1	—	—	12	017	015
	4	—	—	—	—	—	1	—	—	—	—	1	001	001
1 . 5	2	28	35	29	27	28	23	20	31	22	30	273	309	316
	3	1	2	1	1	—	—	—	3	3	—	11	017	018
	4	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	001	001
1 . 6	2	32	28	24	31	28	32	30	31	20	27	283	309	257
	3	2	—	—	2	5	3	2	5	—	2	21	017	013
	4	1	—	—	—	1	—	—	—	—	—	2	001	001

Wurf.	wiederholt sich	1—10000	10001—20000	20001—30000	30001—40000	40001—50000	50001—60000	60001—70000	70001—80000	80001—90000	90001—100000	1—100000	Wahrscheinlichkeit für die Würfel.	
													mathemat.	gebrauchten
	2	24	28	28	28	37	25	16	28	20	29	263	0,00309	0,00305
2 . 3	3	—	1	1	1	2	1	—	4	1	—	11	017	017
	4	—	—	—	—	—	—	—	1	—	—	1	001	001
	2	28	35	38	41	36	41	35	21	33	26	334	309	381
2 . 4	3	1	4	—	1	6	3	2	—	2	—	19	017	024
	4	—	1	—	—	1	—	—	—	—	—	2	001	001
	2	35	46	34	48	31	28	39	43	50	47	401	309	422
2 . 5	3	1	6	2	2	2	—	1	3	1	5	23	017	027
	4	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	001	002
	2	26	24	25	47	28	27	23	30	33	36	299	309	352
2 . 6	3	2	—	2	6	3	—	2	—	1	2	18	017	021
	4	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	001	001
	2	21	31	18	31	31	23	29	27	21	37	269	309	263
3 . 4	3	—	1	—	2	3	3	1	1	—	6	17	017	014
	4	—	—	—	1	—	—	—	—	—	1	2	001	001
	2	26	24	12	25	27	32	18	20	22	37	243	309	297
3 . 5	3	2	3	—	4	2	1	—	—	—	3	15	017	016
	4	—	—	—	1	—	—	—	—	—	—	1	001	001
	2	17	22	24	21	25	22	18	21	18	21	209	309	240
3 . 6	3	1	—	2	3	—	1	1	1	—	1	10	017	012
	4	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	001	001
	2	38	37	36	36	32	27	40	42	44	25	357	309	372
4 . 5	3	1	—	2	4	1	—	5	1	4	—	18	017	023
	4	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	001	001
	2	30	34	23	23	27	18	15	22	34	27	253	309	307
4 . 6	3	—	1	—	—	2	1	—	1	1	—	6	017	017
	4	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	001	001
	2	27	26	30	38	21	33	32	32	25	33	297	309	344
5 . 6	3	3	2	3	2	—	1	3	2	—	3	19	017	020
	4	—	1	—	—	—	—	—	—	—	—	1	001	001
	2	407	456	395	479	406	375	374	426	399	434	4151	0,04630	0,04680
unp.	3	16	25	17	36	29	16	20	25	14	25	223	0257	0264
	4	1	3	—	3	2	1	—	1	—	1	12	0014	0015

Diese Tafel unterstützt offenbar die früher geäusserte Ansicht, dass die Anzahl der Versuche, welche gemacht werden muss um eine Wahrscheinlichkeit empirisch zu ermitteln, im umgekehrten Verhältnisse zu dieser letztern stehen soll; denn jetzt, wo die Wahrscheinlichkeiten kleiner geworden sind, reichen 10000 Würfe gerade noch hin, um die paaren und unpaaren Würfe von einander zu unterscheiden, — die 100000 Würfe aber noch nicht einmal völlig um die einzelnen Würfe aus den ihre zweifachen Wiederholungen zählenden Zahlen zu ordnen, geschweige aus den drei- oder vierfachen, wo noch förmliche Abnormitäten vorkommen. Im Ganzen zeigt sich, dass mit Ausnahme einiger wenigen Würfe die Wiederholungen etwas zu selten eintrafen, während man gerade das Gegentheil hätte erwarten sollen, — es mag dies wieder mit der Abneigung gegen extreme Erscheinungen zusammenhängen, welche sich wieder auffallend darin zeigte, dass kein einziger paarer Wurf viermal, kein einziger unpaarer Wurf fünfmal nach einander erschien, wie man es unter 100000 Würfen wohl hätte erwarten dürfen, um so mehr, als die Wahrscheinlichkeit jedes nahe einmal erwarten liess.

Hiemit mag wenigstens für einstweilen die Betrachtung dieser Versuchsreihe geschlossen werden. Eine einzige Bemerkung sei mir noch erlaubt, — die Grösse der Zahl 100000 betreffend: Schon 100000 gehört zu den Zahlen, deren Grösse wir uns nicht mehr deutlich bewusst sind, wenn nicht besondere Erfahrungen darauf leiten. Wer daran zweifelt, möge, wie ich es machte, die Würfel zur Hand nehmen, 100000 Würfe machen und aufzeichnen, sie mehrfach zählen und ordnen, etc. — er wird nachher gewiss eingestehen müssen, er habe sich 100000 nicht so gross, so nahe an unendlich, vorgestellt.