Zeitschrift: Mitteilungen der Naturforschenden Gesellschaft Bern

Herausgeber: Naturforschende Gesellschaft Bern

Band: - (1850)

Heft: 193-194

Artikel: Versuche zur Vergleichung der Erfahrungswahrscheinlichkeit mit der mathematischen Wahrscheinlichkeit [Nachtrag zur vierten Versuchsreihe]

Autor: Wolf, R.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-318330

Nr. 193 und 194.

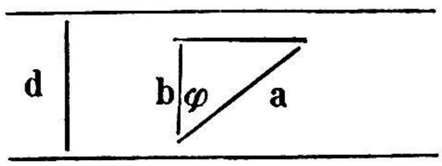
R. Wolf, Versuche zur Vergleichung der Erfahrungswahrscheinlichkeit mit der mathematischen Wahrscheinlichkeit.

Nachtrag zur vierten Versuchsreihe.

(Vorgetragen den 7. December 1850.)

Herr Professor Rudolf Merian in Basel theilte mir kurze Zeit, nachdem er meine die Zahl π betreffenden Versuche *) erhalten hatte, folgende einfache Ableitung jener merkwürdigen Formel für π mit:

„Ich behalte dieselben Buchstaben bei, und setze $b = a\operatorname{Cos}\varphi$, wo φ den Winkel bezeichnet, welchen die Nadel a mit der Senkrechten auf die Parallelen macht. Die Wahrscheinlichkeit, dass bei einem Winkel φ die Nadel mit einer der Parallelen zusammentrifft, ist offenbar



$$\frac{b}{d} = \frac{a\operatorname{Cos}\varphi}{d}$$

Die Nadel muss so geworfen werden, dass jeder Winkel φ, um den a von der Senkrechten abweicht, gleich wahrscheinlich ist; es ist also die Wahrscheinlichkeit, dass der Winkel zwischen φ und $\varphi + d\varphi$ fällt

$$\frac{d\varphi}{\frac{1}{2}\pi} = \frac{2d\varphi}{\pi}$$

und diejenige, dass in dieser Lage ein Zusammentreffen statt hat

$$\frac{a\operatorname{Cos}\varphi}{d} \cdot \frac{2d\varphi}{\pi} = \frac{2a\operatorname{Cos}\varphi d\varphi}{d\pi}$$

---

*) Vergleiche Nr. 177 der Mittheilungen.

Ist nun P die Wahrscheinlichkeit, dass bei einem willkürlichen Wurfe ein Zusammentreffen statt findet, so ist nach den bekannten Grundregeln der Wahrscheinlichkeitsrechnung

$$P = \int_{o}^{\frac{\pi}{2}} \frac{2a\mathrm{Cos}\varphi d\varphi}{\pi d} = \frac{2a}{\pi d} \qquad \underline{1}$$

oder, weil bei wiederholten Versuchen $P = \lim\cdot\frac{p}{q}$ ist,

$$\frac{p}{q} = \frac{2a}{\pi d} \quad \text{oder} \quad \pi = \frac{2aq}{pd} \qquad \underline{2}$$

»Diese Rechnung setzt voraus, dass $a < d$. Wenn dies nicht der Fall, so setze ich $d = a\mathrm{Cos}\alpha$. So lange nun $\varphi > \alpha$, so ist das Zusammentreffen gewiss, und demnach hat man für $a > d$

$$P = \int_{o}^{\alpha} \frac{2d\varphi}{\pi} + \int_{\alpha}^{\frac{\pi}{2}} \frac{2a\mathrm{Cos}\varphi d\varphi}{\pi d} =$$

$$= \frac{2\alpha}{\pi} + \frac{2a}{\pi d}(1 - \mathrm{Sin}\,\alpha) \qquad \underline{3}$$

Das obige Gesetz hat also nicht mehr statt, — es fängt erst mit $\alpha = o$ oder $d = a$ an gültig zu werden, wo dann $\frac{\pi}{2} = \frac{q}{p}$.«

Herr Professor Merian fügte dann seiner Ableitung noch folgende Bemerkung bei:

»In der von Ihnen citirten Notiz heisst es: L'erreur sera la plus petite possible pour un nombre donné d'épreuves, lorsque $a = \frac{\pi d}{4}$, d. h. mit andern Worten, wenn $P = \frac{1}{2}$, oder wenn die Wahrscheinlichkeit des Zusammentreffens und des Nichtzusammentreffens gleich ist, so ist die Wahrscheinlichkeit, dass bei der gleichen Anzahl von Würfen die Differenz $P - \frac{p}{q}$ zwischen gewissen Grenzen eingeschlossen ist, am grössten. Diesen Satz halte ich für falsch; es scheint mir, dass eine um so grössere Uebereinstimmung zwischen Rechnung und Beobachtung statt finden sollte, je grösser P gemacht wird, — also die grösste Uebereinstimmung für $a = d$ oder für $P = \frac{2}{\pi}$.«

Dieser Bemerkung kann ich nicht beipflichten; denn einerseits scheint es mir jeder Erfahrung zu widersprechen, dass der beste Werth an der Grenze der überhaupt möglichen Werthe liege, — anderseits steht ihr eine neue Versuchsreihe entgegen, die ich seither zu diesem Zwecke machte. Das alte System von Parallelen im Abstande von 45^{mm} beibehaltend, wählte ich nämlich zu den Versuchen eine Nadel von ebenfalls 45^{mm} Länge, so dass mir nach Herrn Merians Ansicht ein ganz besonders befriedigendes Resultat in Aussicht stand. Ich machte wieder wie früher 50 Versuchsreihen von je 100 Würfen und fand aus ihnen

$$p = \frac{1}{50}\begin{bmatrix} 57+58+59+5\cdot60+2\cdot61+4\cdot62+8\cdot63+3\cdot64+2\cdot65 \\ +3\cdot66+5\cdot67+5\cdot68+4\cdot69+2\cdot70+2\cdot71+73+74 \end{bmatrix}$$
$$= 64{,}96 \pm 0{,}56$$

so dass ich

$$\frac{p}{q} = 0{,}6496 \text{ statt } P = 0{,}6366 \text{ oder } P - \frac{p}{q} = -0{,}0130$$

fand, während die frühern Versuche

$$\frac{p}{q} = 0{,}5064 \text{ statt } P = 0{,}5093 \text{ oder } P - \frac{p}{q} = +0{,}0029$$

gegeben hatten, also mehr als 4mal engere Grenzen zogen. Eine hierauf nochmals vorgenommene Untersuchung der Nadel und des angewandten Systemes von Parallelen zeigte mir, dass die Nadel genau 45^{mm} lang war und die

Parallelen nur innerhalb $^1/_{10}$^{mm} von 45^{mm} varirten, und zwar ziemlich gleichmässig in + und in —. Würde ich aber auch im ungünstigsten Falle $d=44,9^{mm}$ annehmen, so würde $\alpha = \text{ArcCos}\,\frac{d}{a} = 3^0 49' = 0,0666$ werden, und nach $\underline{3}$

$$P=0,6367 \quad \text{was immer noch} \quad P-\frac{p}{q}=-0,0129$$

entsprechen würde, also beinahe so viel wie vorhin. Wie sollte es sich nun erklären, dass mit gleichem Material, bei derselben Vorsicht und von demselben Beobachter gerade unter günstigern Umständen ein so viel schlechteres Resultat erzielt worden wäre? Sieht man dagegen das Verhältniss, unter dem diese Versuche gemacht wurden, als ein ungünstiges an, so erklärt sich die grosse Abweichung von selbst, — es wären in einem solchen Falle eben weit mehr Versuche nöthig gewesen. Dass auch bei diesen Versuchen ein Oscilliren nach dem Richtigen da war, ergiebt sich daraus, dass

die	10	ersten Versuchsreihen	0,6570
—	20	— —	0,6520
—	30	— —	0,6510
—	40	— —	0,6530
—	50	— —	0,6496

ergaben, — aber da zufällig die erste Ocillation ein wenig gross und dagegen die reglirende Kraft kleiner war, so konnte die Ruhelage in 50 Schwingungen noch nicht erreicht werden. Von den 50 Zahlen, aus denen p als Mittel hervorgieng, waren nämlich 22 zu klein und 28 zu gross, — bei den 10 ersten dagegen nur 4 zu klein und 6 zu gross, und zwar gieng die kleinste nicht unter 60, während die grösste 73 war.