Ueber die einfachste Art, die Differentialgleichungen erster Ordnung, durch welche die Störungen der elliptischen Elemente einer Planetenbahn bestimmt sind, auszudrücken

Autor(en): **Schläfli, L.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Mitteilungen der Naturforschenden Gesellschaft Bern**

Band (Jahr): **- (1848)**

Heft 131-132

PDF erstellt am: **16.01.2021**

Persistenter Link: http://doi.org/10.5169/seals-318273

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

L. Schläfli, Ueber die einfachste Art, die Differentialgleichungen erster Ordnung, durch welche die Störungen der elliptischen Elemente einer Planetenbahn bestimmt sind, auszudrücken.

(Vorgetragen den 3. Juni.)

Wenn μ die Summe der Massen der Sonne und des gestörten Planeten, m', m'' etc. die Massen der störenden Planeten, r, r', r'' .... die Entfernungen des gestörten und der störenden Planeten von der Sonne, w', w'' ... die von der ersten mit allen übrigen gebildeten Winkel, ϱ', ϱ'' die Abstände der störenden Planeten vom gestörten Planeten bezeichnet, so heisst

$$R = m'\left(\frac{1}{\varrho'} - \frac{r\cos w'}{r'^2}\right) + m''\left(\frac{1}{\varrho''} - \frac{r\cos w''}{r''^2}\right) + \text{etc.}$$

die störende Funktion. Ihre nach den Coordinaten *) x, y, z des gestörten Planeten genommenen Differentialcoefficienten drücken nämlich die Componenten der störenden Kraft aus, welche der gestörte Planet erfährt. Die Differentialgleichungen zweiter Ordnung, welche die Bewegung des gestörten Planeten darstellen, sind daher:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{\mu x}{r^3} = \frac{dR}{dx},$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{\mu y}{r^3} = \frac{dR}{dy},$$

$$\frac{d^2z}{dt^2} + \frac{\mu y}{r^3} = \frac{dR}{dz},$$

*) Dieselben beziehen sich auf ein beliebiges rechtwinkliges Coordinatensystem von fester Richtung, dessen Ursprung die Sonne einnimmt.

Wäre nun R = 0, so würde die elliptische Bewegung diesen Gleichungen genügen. Bei derselben werden die Coordinaten x, y, z des betrachteten Planeten durch die Zeit t und die sogenannten sechs elliptischen Constanten oder Bahnelemente ausgedrückt. Bei stattfindender geringer Störung kann man nun die für die rein elliptische Bewegung geltenden Gleichungen zwar beibehalten, aber zugleich die vorhin genannten sechs elliptischen Constanten variiren lassen, wie es die jedesmalige Ellipse erfordert, welche der Planet zu beschreiben im Begriffe ist, wenn er einzig der Wirkung der Sonne überlassen bliebe. Die Variationen dieser sechs Constanten sind es nun, welche bei passender Wahl derselben sich auf höchst einfache Weise durch Differentialcoefficienten der störenden Funktion R ausdrücken lassen, die in Beziehung auf dieselben richtig gewählten Constanten genommen sind.

Es bezeichne:

a die halbe grosse Axe der veränderlichen Ellipse,

η die mittlere Anomalie, welche man für den Anfangspunkt der Zeit voraussetzen muss, um daraus den gegenwärtigen Ort des Planeten in derselben Ellipse herzuleiten,

h die doppelte Flächengeschwindigkeit, so dass $\frac{1}{2}$hdt den Inhalt des während des Zeitelements dt vom Fahrstrahl r beschriebenen Flächenelements angiebt,

pdt, p'dt, p''dt die während des Zeitelements dt erfolgenden momentanen Drehungen eines beweglichen Systems dreier unter sich senkrechter Axen, von denen die beiden ersten resp. nach dem Nordpol der Bahnebene und nach dem Perihel gerichtet sind, und die dritte der wahren Anomalie von 90^0 entspricht, um diese drei Axen selbst. Die genannten Drehungen sollen als positiv gelten, wenn die erste im Sinne der Planetenbewegung geschieht, und die beiden übrigen in Beziehung auf die positiven Hälften ihrer Axen damit übereinstimmen.

Wenn nun in der störenden Function R bloss die sechs elliptischen Constanten des gestörten Planeten variirt werden, während alles Uebrige constant bleibt, so sei das Increment dieser Function R durch

$$Ada + Jd\eta + Hdh + Ppdt + P'p'dt + P''p''dt$$

bezeichnet. Dann sind die wirklichen Variationen der sechs elliptischen Constanten des gestörten Planeten durch folgende Differentialgleichungen in völliger Strenge bestimmt:

$$\frac{da}{dt} = 2\sqrt{\frac{a}{\mu}} \cdot J, \qquad \frac{d\eta}{dt} = -2\sqrt{\frac{a}{\mu}} \cdot A,$$

$$\frac{dh}{dt} = P, \qquad p = -H,$$

$$p' = -\frac{P''}{h}, \qquad p'' = \frac{P'}{h}.$$

So merkwürdig dieselben wegen ihrer Einfachheit und paarweisen Wechselbeziehung auch sind, um so mehr verwunderte es mich, dass ich die zweite und vierte nur durch eine verhältnissmässig lange Rechnung erhalten konnte, während doch die Forderung sich aufdringt, alle diese Differentialgleichungen aus eben so einfachen Betrachtungen herzuleiten.

Führt man die gewöhnlich angenommenen sechs elliptischen Elemente ein, so verlieren diese Differentialgleichungen etwas von ihrer einfachen Gestalt. Man vergleiche Littrow's Elemente der phys. Astronomie S. 302.