

# Ueber die Reaktionen zwischen den neun Cosinus, durch welche die gegenseitige Lage zweier rechtwinkliger Coordinatensysteme bestimmt wird

Autor(en): **Schläfli, L.**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **Mitteilungen der Naturforschenden Gesellschaft Bern**

Band (Jahr): - **(1848)**

Heft 112-113

PDF erstellt am: **21.09.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-318255>

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

mit den aus der Projectionslehre hervorgehenden, die 9 Winkel der Axen enthaltenden Transformationsformeln, die bekannten Bedeutungen und Eigenschaften der 9 Coeffizienten auf die leichteste Weise ergeben.



**L. Schläfli, Ueber die Relationen zwischen den neun Cosinus, durch welche die gegenseitige Lage zweier rechtwinkliger Coordinatensysteme bestimmt wird.**

Wenn wir die Coordinaten eines beliebigen Punktes P in Beziehung auf das erste System mit  $x, y, z$  und in Beziehung auf das zweite mit  $x', y', z'$  bezeichnen und vorerst nur die Ebenen  $xy$  und  $x'y'$ , deren Durchschnitt oder die Knotenlinie und die Lage der positiven Hälften der Axen der  $x$  und  $x'$  in der Anschauung behalten, so sehen wir sogleich ein, dass die Lage des zweiten Systems gegen das erste durch drei Grössen vollständig bestimmt wird. Diese sind 1<sup>o</sup>. der Winkel zwischen der Axe der  $x$  und der Linie des aufsteigenden Knotens oder die Länge des aufsteigenden Knotens in der Ebene  $xy$ ; 2<sup>o</sup>. die Neigung der Ebene  $x'y'$  gegen die Ebene  $xy$ ; 3<sup>o</sup>. der Winkel zwischen der Knotenlinie und der Axe der  $x'$ . Mittelst dieser drei Grössen können die Cosinus der neun Winkel, unter denen die Axen des zweiten Systems gegen diejenigen des ersten geneigt sind, trigonometrisch angegeben werden; und aus diesen trigonometrischen Ausdrücken ergeben sich sodann durch einfache Rechnung die bekannten 21 Relationen zwischen den

neun Cosinus. Mein Freund, Herr Wolf, der bei seinem Verfahren der Transformation der Coordinaten diesen Weg eingeschlagen hat und ohne successiver Operationen zu bedürfen an einer einzigen Figur alle drei Transformationsformeln nachweist, hat mir nun durch Mittheilung seiner Methode Veranlassung gegeben, denselben Gegenstand auch von der rein analytischen Seite, wo er mit der Theorie der Elimination bei linearen Gleichungen im Zusammenhange steht, darzustellen.

Wenn nämlich die trigonometrische Behandlung den Vortheil gewährt, dass bei derselben gerade nur so viele Grössen gebraucht werden als die Natur des Gegenstandes erfordert, so thut sie dieses nur auf Kosten der Symmetrie, insofern es ihr nicht gelingt, drei unter sich unabhängige Grössen aufzufinden, durch welche die oft erwähnten neun Cosinus sich sämmtlich auf gleichmässige Weise ausdrücken liessen. Um diesen Uebelstand fühlbar zu machen, brauche ich nur darauf hinzuweisen, dass die Axen der  $z$  und  $z'$  anders als die übrigen Axen behandelt werden. Will man dagegen die Symmetrie nicht verlieren, so muss man es aufgeben, in den Formeln die drei unabhängigen Grössen explicite vor sich zu haben.

Ich setze folgende zwei Sätze als bekannt voraus:

1<sup>o</sup>. Wenn  $a, b, c$  die Cosinus der drei Winkel sind, welche irgend eine Gerade mit den drei Coordinatenaxen bildet, so ist

$$a^2 + b^2 + c^2 = 1.$$

2<sup>o</sup>. Wenn zwei Gerade mit den Coordinatenaxen resp. Winkel bilden, deren Cosinus  $a, b, c, a', b', c'$  sind, so ist der Cosinus des von beiden Geraden eingeschlossenen Winkels  $= aa' + bb' + cc'$  \*).

---

\*) Von eben so häufiger Anwendung als diese beiden Sätze ist dieser dritte: Wenn  $x, y, z, x', y', z'$  die Projectionen zweier begrenzten

Nun seien  $a, b, c$  die Cosinus der drei Winkel, welche die Axe der  $x'$  mit den Axen der  $x, y, z$  bildet, und ebenso seien die Richtungen der Axen der  $y', z'$  in Beziehung auf die Axen des ersten Systems durch die Cosinus  $a', b', c', a'', b'', c''$  bestimmt, so dass man durch Projection der aus den neuen Coordinaten  $x', y', z'$  zusammengesetzten gebrochenen Linie auf die drei ursprünglichen Coordinatenaxen die Transformationsformeln

$$\left. \begin{aligned} x &= ax' + a' y' + a'' z' \\ y &= bx' + b' y' + b'' z' \\ z &= cx' + c' y' + c'' z' \end{aligned} \right\} (1)$$

erhält. Vermöge des ersten vorhin angeführten Satzes hat man dann die drei Gleichungen

$$\left. \begin{aligned} a^2 + b^2 + c^2 &= 1, \\ a'^2 + b'^2 + c'^2 &= 1, \\ a''^2 + b''^2 + c''^2 &= 1 \end{aligned} \right\} (2)$$

und vermöge des zweiten, da die drei Axen der  $x', y', z'$  sich rechtwinklig schneiden sollen,

$$\left. \begin{aligned} a' a'' + b' b'' + c' c'' &= 0, \\ a'' a + b'' b + c'' c &= 0, \\ a a' + b b' + c c' &= 0, \end{aligned} \right\} (3)$$

also im Ganzen 6 Bedingungsgleichungen zwischen 9 Grössen. Wenn nun keine dieser 6 Gleichungen eine nothwendige Folge der übrigen ist, so bleiben nur drei unabhängige Grössen, und sechs von den neun Cosinus sind jeweilen durch die drei übrigen bestimmt.

Da das erste Coordinatensystem ebenso auf das zweite bezogen werden kann, wie dieses auf jenes, so ist klar, dass die angeführten 6 Bedingungsgleichungen noch die 6 folgenden zur nothwendigen Folge haben müssen :

---

Geraden sind, so sind  $yz' - y'z, zx' - z'x, xy' - x'y$  die Projectionen des von derselben gebildeten Parallelogramms auf die drei Coordinatenebenen.

$$a^2 + a'^2 + a''^2 = 1, \text{ etc.} \quad bc + b'c' + b''c'' = 0, \text{ etc.}$$

Es entsteht daher die Aufgabe, dieses was geometrisch a priori eingesehen wird noch analytisch nachzuweisen.

Wenn man die drei Gleichungen (1) der Reihe nach mit  $a, b, c$  multiplicirt und addirt, so ergibt sich unter Berücksichtigung der Relationen (2) und (3)

$$x' = ax + by + cz, \text{ etc.}$$

Durch das gewöhnliche Eliminationsverfahren ergibt sich

$$x' = \frac{b'c'' - b''c'}{\Delta} x + \frac{c'a'' - c''a'}{\Delta} y + \frac{a'b'' - a''b'}{\Delta} z, \text{ etc.}$$

$$\text{wo } \Delta = ab'c'' + a'b''c + a''bc' - ab''c' - a'bc'' - a''b'c$$

die unter dem Namen der Determinante bekannte Function der neun Cosinus  $a, b, c, a', \text{ etc.}$  ist, welche die Eigenschaft hat, durch jede Permutation zweier Buchstaben (oder auch zweier Accente) in ihren entgegengesetzten Werth überzugehen. Man hat also

$$\left. \begin{aligned} b'c'' - b''c' &= a\Delta, & c'a'' - c''a' &= b\Delta, & a'b'' - a''b' &= c\Delta, \\ b''c - bc'' &= a'\Delta, & c''a - ca'' &= b'\Delta, & a''b - ab'' &= c'\Delta, \\ bc' - b'c &= a''\Delta, & ca' - c'a &= b''\Delta, & ab' - a'b &= c''\Delta, \end{aligned} \right\} (4)$$

Quadriert man die beiden Seiten jeder in der ersten Horizontalreihe enthaltenen Gleichung und addirt, so ergibt sich mit Rücksicht auf die identische Gleichung

$$\begin{aligned} & (b'c'' - b''c')^2 + (c'a'' - c''a')^2 + (a'b'' - a''b')^2 \\ & = (a'^2 + b'^2 + c'^2)(a''^2 + b''^2 + c''^2) - (a'a'' + b'b'' + c'c'')^2 \end{aligned}$$

vermöge der Relationen (2) und (3)

$$1 = \Delta^2 \cdot (5)$$

Also ist entweder  $\Delta = 1$  oder  $\Delta = -1$ . Nimmt man an, das zweite Coordinatensystem sei so beschaffen, dass, wenn die positiven Axen der  $x', y'$  mit den positiven Axen der  $x, y$  resp. zur Coincidenz gebracht werden, dann auch die positive Axe der  $z'$  mit der positiven Axe der  $z$  und nicht

mit der negativen zusammenfalle, so dass gleichzeitig  $a=b'=c''=1$  wird, während die sechs übrigen Cosinus verschwinden, so wird  $\Delta=1$ .

Wenn wir nun die in der ersten Verticalreihe (4) enthaltenen Gleichungen resp. mit  $a, a', a''$  multipliciren und addiren, so bekommen wir:  $\Delta=(a^2+a'^2+a''^2)\Delta$ , also

$$a^2+a'^2+a''^2=1, \text{ etc. (6)}$$

Multipliciren wir dagegen dieselben Gleichungen mit  $b, b', b''$  und addiren, so ergibt sich  $0=(ab+a'b'+a''b'')\Delta$ , also

$$ab+a'b'+a''b''=0, \text{ etc. (7)}$$

Hiemit sind diese sechs neuen Relationen (6) und (7) als nothwendige Folge der ursprünglichen (2) und (3) nachgewiesen.

Merkwürdiger Weise kommen, unbeschadet der Symmetrie, drei unabhängige Grössen ungezwungen zum Vorschein, sobald man die Differentialien der neun Cosinus  $a, b, c, a', \text{ etc.}$  betrachtet.

Die Gleichungen (6) und (7) differentiirt geben

$$ada+a'da'+a''da''=0, \text{ etc.,}$$

$$adb+a'db'+a''db''=-(bda+b'da'+b''da''), \text{ etc.}$$

Man darf daher setzen

$$\left. \begin{aligned} pdt &= bdc + b'dc' + b''dc'' = -(cdb + c'db' + c''db'') \\ qdt &= cda + c'da' + c''da'' = -(adc + a'dc' + a''dc'') \\ rdt &= adb + a'db' + a''db'' = -(bda + b'da' + b''da'') \end{aligned} \right\} (8)$$

wo  $dt$  das Zeitelement und  $p, q, r$  die drei neu eingeführten Unabhängigen bezeichnen. Aus den drei Gleichungen

$$\left. \begin{aligned} ada+a'da'+a''da'' &= 0, \\ bda+b'da'+b''da'' &= -rdt \\ cda+c'da'+c''da'' &= qdt \end{aligned} \right\}$$

ergiebt sich durch Elimination

$$\left. \begin{aligned} \frac{da}{dt} &= cq - br, & \frac{da}{dt} &= c'q - b'r & \frac{da}{dt} &= c''q - b''r, \\ \text{ebenso } \frac{db}{dt} &= ar - cp, & \text{etc.} & & & \\ \frac{dt}{dt} &= bp - aq, & \text{etc.} & & & \end{aligned} \right\} (9)$$

Denkt man sich nun einen Punkt P, der seine Lage gegen das zweite Coordinatensystem nicht ändert, für den also  $x', y', z'$  constant bleiben, während dieses zweite Coordinatensystem selbst sich beliebig um seinen festen Ursprung herumdreht und dadurch seine Lage gegen das feststehende erste Coordinatensystem fortwährend verändert, und betrachtet dann die momentane Bewegung des Punktes P in Beziehung auf dieses erste Coordinatensystem, so geben die differentiirten Gleichungen (1), wenn darin für  $da, da',$  etc. obige Ausdrücke substituirt werden,

$$\frac{dx}{dt} = qz - ry, \quad \frac{dy}{dt} = rx - pz, \quad \frac{dz}{dt} = py - qx. \quad (10)$$

Diese Gleichungen zeigen 1<sup>o</sup>., dass die Gerade, deren Projectionen auf die feste Coordinatenaxen  $dx, dy, dz$  sind d. h. das vom Punkte P durchlaufene Wegelement, auf den beiden Geraden, deren Projectionen auf dieselben festen Axen resp.  $pdt, qdt, rdt$  und  $x, y, z$  sind, senkrecht steht und zwar so, dass die Richtungen  $(pdt, qdt, rdt), (x, y, z), (dx, dy, dz)$  in der Ordnung der Axen  $x, y, z$  auf einander folgen, 2<sup>o</sup>. dass das genannte Wegelement an Grösse gleich ist dem Parallelogramm, welches die Geraden  $(pdt, qdt, rdt)$  und  $(x, y, z)$  zu Seiten hat.

Denken wir uns nun die von der Lage des Punktes P unabhängige Gerade  $(pdt, qdt, rdt)$  als vom Ursprung ausgehend und nehmen dieselbe als Grundlinie des Parallelogramms an, so ist dessen Höhe zugleich die Entfernung des Punktes P von der verlängerten Geraden  $(pdt, qdt, rdt)$ .

Folglich ist das vom Punkt P durchlaufene Wegelement 1<sup>o</sup>. senkrecht zu der durch P und die Gerade (pdt, qdt, rdt) gelegten Ebene, 2<sup>o</sup>. ist dasselbe an Grösse gleich dem Producte seiner Entfernung von der zuletzt genannten Geraden und einer von der Lage des Punktes P unabhängigen Grösse, der Grundlinie (pdt, qdt, rdt) jenes Parallelogramms. D. h. diese Grundlinie stellt ihrer Richtung nach die momentane Drehungsaxe und ihrer Grösse nach die momentane Drehung des zweiten Coordinatensystems dar. Die drei in obigen Differentialgleichungen auftretenden unabhängigen Grössen p, q, r, zeigen also, als Projectionen einer vom Ursprung ausgehenden Geraden aufgefasst, die Richtung der momentanen Drehungsaxe an, während die zuletzt genannte Gerade selbst an Grösse der momentanen Winkelgeschwindigkeit gleich ist. In Betreff des Sinns dieser letztern ist zu merken, dass wenn p positiv ist und q, r verschwinden, so dass die momentane Drehungsaxe mit der positiven Axe der x zusammenfällt, dann die Drehung von der Axe der y gegen diejenige der z hin erfolgt, was aus den Gleichungen (10) zu ersehen ist.

(Man vergleiche die hier am Ende gegebene Darstellung mit derjenigen in Poissons Mechanik Nr. 406 und mit Littrows Astronomie III. S. 86—90.)

---

**R. Wolf, Auszüge aus Briefen an Albrecht von Haller, mit litterarisch-historischen Notizen.**

(Fortsetzung zu Nr. 109.)

**CLXXIV. Werlhof** <sup>146</sup>), *Hannover, 21. Juni 1767*:  
Ma maladie augmente tous les jours, et peut-être que Dieu

---

<sup>146</sup>) Königl. Grossbrit. Hofrath und Leibarzt in Hannover und langjähriger Korrespondent Hallers.