Note über die Transformation rechtwinkliger Coordinaten im Raume

Autor(en): **Wolf, R.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Mitteilungen der Naturforschenden Gesellschaft Bern**

Band (Jahr): **- (1848)**

Heft 112-113

PDF erstellt am: **20.01.2021**

Persistenter Link: http://doi.org/10.5169/seals-318254

MITTHEILUNGEN

DER

NATURFORSCHENDEN GESELLSCHAFT

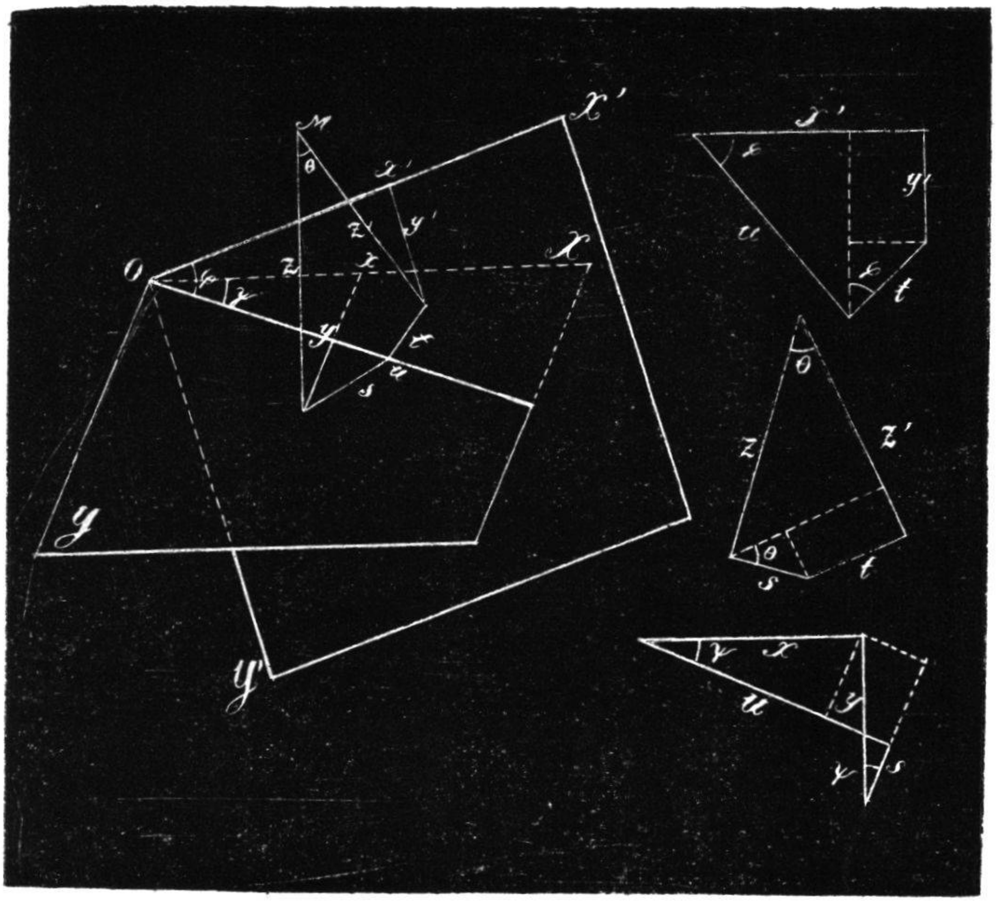
IN BERN.

Nr. 112 und 113.

Ausgegeben den 8. Februar 1848.

R. Wolf, Note über die Transformation rechtwinkliger Coordinaten im Raume.

Bekanntlich ist die Transformation rechtwinkliger Coordinaten im Raume auf andere rechtwinklige Coordinaten desselben Anfangspunktes von vielfacher Anwendung, und die entsprechenden Formeln finden daher in jedem Werke über analytische Geometrie mit drei Dimensionen ihre Ableitung. Für denjenigen Fall, wo der Winkel der Ebenen X Y und die Winkel der Axen X mit ihrer Knotenlinie in die Rechnung eingeführt werden sollen, werden dabei entweder die Beziehungen am Raumdreiecke zu Hülfe gerufen, oder dann wird das eine Coordininatensystem durch verschiedene aufeinander folgende Drehungen um die Axen nach und nach in das andere Coordinatensystem übergeführt. Die folgende Ableitung scheint mir beiden angeführten Weisen und namentlich der am häufigsten angewandten zweiten Ableitungsmethode ihrer grössern Uebersichtlichkeit wegen vorzuziehen. Aus den beistehenden, wohl keiner weitern Erläuterung bedürfenden Figuren lassen sich un-



mittelbar die Beziehungen

$$x' = u \,\mathrm{Cos}\,\varphi + t \,\mathrm{Sin}\,\varphi \qquad y' = u \,\mathrm{Sin}\,\varphi - t \,\mathrm{Cos}\,\varphi$$
$$z' = z \,\mathrm{Cos}\,\theta + s \,\mathrm{Sin}\,\theta \qquad t = z \,\mathrm{Sin}\,\theta - s \,\mathrm{Cos}\,\theta$$
$$u = x \,\mathrm{Cos}\,\psi + y \,\mathrm{Sin}\,\psi \qquad s = y \,\mathrm{Cos}\,\psi - x \,\mathrm{Sin}\,\psi$$

abschreiben, und aus diesen folgen durch Elimination von s, t, u sofort die verlangten Transformationsformeln

$$x' = (\mathrm{Cos}\,\varphi \,\mathrm{Cos}\,\psi + \mathrm{Sin}\,\varphi \,\mathrm{Sin}\,\psi \,\mathrm{Cos}\,\theta)\, x$$
$$+ (\mathrm{Sin}\,\psi \,\mathrm{Cos}\,\varphi - \mathrm{Cos}\,\psi \,\mathrm{Sin}\,\varphi \,\mathrm{Cos}\,\theta)\, y + \mathrm{Sin}\,\theta \,\mathrm{Sin}\,\varphi \cdot z$$
$$y' = (\mathrm{Cos}\,\psi \,\mathrm{Sin}\,\varphi - \mathrm{Sin}\,\psi \,\mathrm{Cos}\,\varphi \,\mathrm{Cos}\,\theta)\, x$$
$$+ (\mathrm{Sin}\,\varphi \,\mathrm{Sin}\,\psi + \mathrm{Cos}\,\varphi \,\mathrm{Cos}\,\psi \,\mathrm{Cos}\,\theta)\, y - \mathrm{Sin}\,\theta \,\mathrm{Cos}\,\varphi \cdot z$$
$$z' = -\mathrm{Sin}\,\psi \,\mathrm{Sin}\,\theta \cdot x + \mathrm{Cos}\,\psi \,\mathrm{Sin}\,\theta \cdot y + \mathrm{Cos}\,\theta \cdot z$$

aus denen sich theils unmittelbar, theils durch Vergleichung mit den aus der Projectionslehre hervorgehenden, die 9 Winkel der Axen enthaltenden Transformationsformeln, die bekannten Bedeutungen und Eigenschaften der 9 Coeffizienten auf die leichteste Weise ergeben.

L. Schläfli, Ueber die Relationen zwischen den neun Cosinus, durch welche die gegenseitige Lage zweier rechtwinkliger Coordinatensysteme bestimmt wird.

Wenn wir die Coordinaten eines beliebigen Punktes P in Beziehung auf das erste System mit x, y, z und in Beziehung auf das zweite mit x′, y′, z′ bezeichnen und vorerst nur die Ebenen xy und x′y′, deren Durchschnitt oder die Knotenlinie und die Lage der positiven Hälften der Axen der x und x′ in der Anschauung behalten, so sehen wir sogleich ein, dass die Lage des zweiten Systems gegen das erste durch drei Grössen vollständig bestimmt wird. Diese sind 1^0. der Winkel zwischen der Axe der x und der Linie des aufsteigenden Knotens oder die Länge des aufsteigenden Knotens in der Ebene xy; 2^0. die Neigung der Ebene x′y′ gegen die Ebene xy; 3^0. der Winkel zwischen der Knotenlinie und der Axe der x′. Mittelst dieser drei Grössen können die Cosinus der neun Winkel, unter denen die Axen des zweiten Systems gegen diejenigen des ersten geneigt sind, trigonometrisch angegeben werden; und aus diesen trigonometrischen Ausdrücken ergeben sich sodann durch einfache Rechnung die bekannten 21 Relationen zwischen den