Zeitschrift: Mitteilungen der Naturforschenden Gesellschaft Bern

Herausgeber: Naturforschende Gesellschaft Bern

Band: - (1846)

Heft: 68-69

Artikel: Über ein räumliches System von Geraden im Allgemeinen, und über dasjenige der Normalen einer krummen Fläche insbesondere

Autor: Schläfli, L.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-318204

MITTHEILUNGEN

DER

NATURFORSCHENDEN GESELLSCHAFT

IN BERN.

Nr. 68 und 69.

Ausgegeben den 17. April 1846.

L. Schläfli, über ein räumliches System von Geraden im Allgemeinen, und über dasjenige der Normalen einer krummen Fläche insbesondere.

§. 1. Zur Bestimmung der Lage einer Geraden im Raume werden vier Constanten erfordert. Lässt man zwei derselben beliebige Functionen der beiden übrigen sein, so entsteht durch Variation dieser beiden ein System von Geraden, welches den Raum erfüllt. Wenn nun besondere Fälle, in denen die Continuität Abbruch erleidet, bei Seite gesetzt werden, so ist irgend eine einzelne Gerade des Systems ringsum von andern Geraden desselben Systems umgeben, die man sich jener so nahe denken kann als man will; wenn ihre Entfernung von jener ersten Geraden verschwindend klein wird, so mögen sie *consecutive Geraden* derselben heissen. Im Allgemeinen wird nun jene ursprüngliche Gerade von einer beliebigen consecutiven nicht geschnitten; sondern es wird eine oder mehrere besondere

Richtungen geben, in denen man von der ursprünglichen Geraden aus fortgehen muss, um auf eine consecutive zu treffen, von der jene geschnitten wird. In diesem bestimmten Falle kann durch die ursprüngliche und die consecutive Gerade eine Ebene gelegt werden, welche ich die *charakteristische Ebene* der ursprünglichen Geraden nennen will. Es entsteht nun die Frage, wie viele charakteristische Ebenen zu jeder Geraden des Systems gehören.

Zur Lösung dieser Frage gebrauchte ich zuerst die beiden Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} Y &= aX + \alpha \\ Z &= bX + \beta \end{aligned}\right\}$$

wo X, Y, Z die rechtwinkligen Coordinaten des laufenden Punkts der Geraden, und a, b, α, β vier Grössen bezeichnen, welche für jede einzelne Gerade constant sind. Ich betrachtete α, β als beliebige Functionen der beiden Unabhängigen a, b, differentiirte die vorgelegten Gleichungen, suchte das Verhältniss der Incremente da, db so zu bestimmen, dass ein Durchschnitt zweier consecutiver Geraden stattfand, und fand für dasselbe eine *quadratische* Gleichung. Die Antwort auf jene Frage ist daher, dass *durch jede Gerade des Systems* NUR ZWEI *charakteristische Ebenen gehen.*

Nun kann weiter gefragt werden, welchen Winkel je zwei charakteristische Ebenen einschliessen, und unter welcher Bedingung dieser Winkel ein Rechter sei. Die Antwort auf die letzte Frage gewinnt eine durch ihre Einfachheit merkwürdige Form, wenn man diesen Gegenstand auf folgende mehr symmetrische und zugleich allgemeinere Weise behandelt, als im Bisherigen geschehen ist.

§. 2. Es mögen x, y, z die Coordinaten des Anfangspunkts einer Geraden, R die Länge derselben, λR, μR, νR die Projectionen dieser Länge auf die drei Coordinatenaxen und endlich X, Y, Z die Coordinaten des *laufenden* Endpunkts dieser Geraden bezeichnen, so hat man

$$\left.\begin{aligned} X &= \lambda R + x \\ Y &= \mu R + y \\ Z &= \nu R + z \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

und überdiess die bekannte Gleichung

$$\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 = 1,$$

wo die sechs Grössen $x, y, z, \lambda, \mu, \nu$ als Functionen zweier Variabeln t, u aufzufassen sind. Für den Durchschnitt der durch die Gleichungen (1) dargestellten Geraden mit einer consecutiven gelten nun die Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} \lambda dR + R d\lambda + dx &= o \\ \mu dR + R d\mu + dy &= o \\ \nu dR + R d\nu + dz &= o \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

aus denen durch Elimination von dR, R sich die Gleichung:

$$(\mu d\nu - \nu d\mu)\, dx + (\nu d\lambda - \lambda d\nu)\, dy + (\lambda d\mu - \mu d\lambda)\, dz = o \quad (3)$$

als Bedingung des Durchschnitts ergiebt. Sie wird, wie man leicht sieht, durch Entwicklung in Beziehung auf das Verhältniss der Incremente dt, du der beiden unabhängigen Variabeln *quadratisch* und zeigt hiedurch an, dass durch die ursprüngliche Gerade (1) zwei charakteristische Ebenen gelegt werden können, welche den beiden Werthen von $\frac{du}{dt}$ entsprechen. Die Gleichung (3) ergiebt sich auch unmittelbar aus der geometrischen Betrachtung; denn wenn die ursprüngliche Gerade von einer consecutiven geschnitten wird, so liegen beide und der vom Punkt (xyz) zurückgelegte Weg, der als unendlich kleine gerade Linie betrachtet werden werden kann, in einer und derselben Ebene. Da nun die Richtungen der drei genannten geraden Linien durch die Grössen

$$\begin{matrix} \lambda, & \mu, & \nu, \\ \lambda + d\lambda, & \mu + d\mu, & \nu + d\nu, \\ dx, & dy, & dz \end{matrix}$$

bestimmt werden, so ergibt sich hieraus die Gleichung (3) unmittelbar.

Die Gleichung (3), wenn darin Alles durch t, u ausgedrückt ist, ist in Beziehung auf diese beiden Variabeln eine quadratische Differentialgleichung erster Ordnung. Wenn es gelingt, dieselbe zu integriren, so muss die Integralgleichung in Beziehung auf ihre arbiträre Constante quadratisch sein und daher für dieselbe im Allgemeinen zwei verschiedene Wurzelwerthe in Function von t, u liefern:

$$\left.\begin{array}{l}\text{const.} = \varphi\,(t, u)\\ \text{const.} = \psi\,(t, u)\end{array}\right\}\quad(4)$$

d. h. die Gleichungen (4) sind zwei verschiedene allgemeine Integrale der quadratischen Differentialgleichung (3). Setzt man nun zwischen den Variabeln t, u, die von den 6 Functionen x, y, z, λ, μ, ν implicirt werden, die durch die Gleichung

$$\varphi = \text{const.}$$

bezeichnete Abhängigkeit fest, so hören die Gleichungen (1) auf, ein *räumliches* System von Geraden darzustellen, sie geben vielmehr ein *superficielles* System von Geraden, deren jede, weil stets die Bedingung (3) erfüllt ist, von der consecutiven geschnitten wird. D. h. die Gleichung $\varphi =$ const., vereint mit den Gleichungen (1), stellt eine *abwickelbare Fläche* dar, welche von einer bestimmten Reihenfolge charakteristischer Ebenen eingehüllt wird. Gibt man der arbiträren Integrationsconstanten alle möglichen Werthe, so erhält man ein *System abwickelbarer Flächen.* Das Gleiche ist von der andern Integralgleichung $\psi =$ const. zu sagen. Demnach haben wir folgenden Satz:

Die Geraden eines beliebigen räumlichen Systems lassen sich im Allgemeinen auf zwei verschiedene Arten in ein System abwickelbarer Flächen gruppiren, und durch *jede einzelne Gerade gehen zwei abwickelbare Flächen, welche zu den beiden verschiedenen Systemen gehören.*

§. 3. Da im Allgemeinen φ, ψ zwei unter sich unabhängige Functionen der beiden Variabeln t, u sind, so lassen sich diese durch jene ausdrücken; folglich werden sich auch x, y, z, λ, μ, ν in Function von φ, ψ angeben lassen. Da dieses die passendste Wahl der unabhängigen Variabeln ist, so wollen wir wieder t, u an die Stelle von φ, ψ setzen, d. h. wir wollen die beiden unabhängigen Variabeln t, u so wählen, dass nach geschehener Reduction die Differentialgleichung (3) die Form

$$dtdu = o$$

annimmt. Wenn wir überdiess die auf diese beiden Variabeln t, u bezüglichen Differentialcoefficienten durch einen obern und einen untern Accent von der respectiven ursprünglichen Function unterscheiden, also z. B.

$$dx = x'dt + x_{,}du$$

setzen, so werden aus der getroffenen Wahl der unabhängigen Variabeln mit Nothwendigkeit die beiden Gleichungen

$$\left.\begin{array}{l}(\mu\nu' - \mu'\nu)\,x' + (\nu\lambda' - \nu'\lambda)\,y' + (\lambda\mu' - \lambda'\mu)\,z' = o \\ (\mu\nu_{,} - \mu_{,}\nu)\,x_{,} + (\nu\lambda_{,} - \nu_{,}\lambda)\,y_{,} + (\lambda\mu_{,} - \lambda_{,}\mu)\,z_{,} = o\end{array}\right\} \quad (5)$$

folgen. Zugleich ergeben sich durch Differentiation der Gleichung

$$\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 = 1$$

die beiden Gleichungen

$$\left.\begin{array}{l}\lambda\lambda' + \mu\mu' + \nu\nu' = o \\ \lambda\lambda_{,} + \mu\mu_{,} + \nu\nu_{,} = o\end{array}\right\} \quad (6)$$

welche zeigen, dass die beiden durch die Grössen

$$\lambda', \ \mu', \ \nu',$$
$$\lambda_{,}, \ \mu_{,}, \ \nu_{,}$$

bestimmten Richtungen zu der ursprünglichen Geraden $(\lambda\mu\nu)$ senkrecht sind. Da nun überdiess die beiden genannten Richtungen $(\lambda'\mu'\nu')$ und $(\lambda_{,}\mu_{,}\nu_{,})$ mit den beiden charakteristischen Ebenen parallel sind, so wird der Winkel w, unter dem diese beiden sich schneiden, durch die Formel

$$\cos w = \frac{\lambda'\lambda_, + \mu'\mu_, + \nu'\nu_,}{\sqrt{(\lambda'^2 + \mu'^2 + \nu'^2)}\sqrt{(\lambda_,^2 + \mu_,^2 + \nu_,^2)}} \quad (7)$$

bestimmt.

§. 4. Wenn die beiden charakteristischen Ebenen zu einander *senkrecht* sein sollen, so muss die Gleichung

$$\lambda'\lambda_, + \mu'\mu_, + \nu'\nu_, = o$$

erfüllt sein. Nimmt man aber zu dieser die zweite der Gleichungen (6) hinzu, so folgt aus beiden, da im Allgemeinen nicht alle drei Grössen $\lambda_,$, $\mu_,$, $\nu_,$ zugleich verschwinden können:

$$\frac{\mu\nu' - \mu'\nu}{\lambda_,} = \frac{\nu\lambda' - \nu_,\lambda}{\mu_,} = \frac{\lambda\mu' - \lambda'\mu}{\nu_,},$$

(Proportionen, die übrigens aus der Lehre von der Transformation rechtwinklicher Coordinaten im Raume bekannt sind). Demnach verwandelt sich die erste der Gleichungen (5) in

$$\lambda_, x' + \mu_, y' + \nu_, z' = o \quad (8)$$

Auf ähnliche Weise findet man aber auch:

$$\lambda' x_, + \mu' y_, + \nu' z_, = o \quad (8 \text{ bis})$$

Aus diesen beiden Gleichungen (8) lässt sich nun für den vorliegenden speziellen Fall eine merkwürdige Bedingung ableiten. Ich gebe nämlich den beiden unabhängigen Variabeln t, u zuerst die beliebigen Incremente α, β, sodann andere beliebige Incremente γ, δ, und bezeichne die entsprechenden Incremente der Functionen x, y, z, λ, μ, ν das erste Mal durch ein vorgesetztes d, das andere Mal durch ein vorgesetztes d', so dass z. B.

$$dx = x'\alpha + x_, \beta,$$
$$d'x = x'\gamma + x_, \delta$$

ist. Dann folgt aus den Gleichungen (8):

$$\left.\begin{array}{r} d'\lambda \cdot dx + d'\mu \cdot dy + d'\nu \cdot dz \\ = d\lambda \cdot d'x + d\mu \cdot d'y + d\nu \cdot d'z \end{array}\right\} \quad (9)$$

Da der Ort des Punkts (xyz) eine krumme Fläche ist, so ergibt sich aus dieser Bedingungsgleichung folgender Satz:

Durch jeden Punkt M irgend einer krummen Fläche sind nach einem beliebigen Gesetz gerade Linien MP gezogen. Wenn nun für einen gegebenen Punkt M die beiden charakteristischen Ebenen, welche durch die zugehörige Gerade MP *gehen, aufeinander senkrecht stehen sollen, so muss folgende Bedingung erfüllt sein: Man nehme auf der krummen Fläche zwei beliebige consecutive Punkte* M′, M″, *welchen die consecutiven Geraden* M′P′, M″P″ *zugehören, ziehe dann durch irgend einen Punkt* O *im Raume die Geraden* ON, ON′, ON″ *parallel mit den Geraden* MP, M′P′, M″P″, *mache* ON = ON′ = ON″ *und ziehe die Geraden* NN′, NN″. *Wenn man sich nun* M *als materiellen Punkt denkt, der die Fähigkeit hat, den unendlich kleinen Weg* MM′ *zu durchlaufen, während zugleich eine Kraft auf ihn wirkt, deren Richtung und Grösse durch* NN″ *dargestellt ist, so ist das virtuelle Moment dasselbe, wie wenn der materielle Punkt den Weg* MM″ *durchläuft, und die auf ihn wirkende Kraft durch* NN′ *dargestellt ist. D. h. das virtuelle Moment darf sich nicht ändern, wenn man die consecutiven Punkte* M′, M″ *mit einander vertauscht.*

Bemerkung. Wenn t, u wieder, wie im §. 2, beliebige unabhängige Variabeln bezeichnen, so lässt sich die Gleichung (9) auch so schreiben:

$$\left.\begin{array}{r} \frac{d\lambda}{du}\frac{dx}{dt} + \frac{d\mu}{du}\frac{dy}{dt} + \frac{d\nu}{du}\frac{dz}{dt} \\ = \frac{d\lambda}{dt}\frac{dx}{du} + \frac{d\mu}{dt}\frac{dy}{du} + \frac{d\nu}{dt}\frac{dz}{du} \end{array}\right\} \quad (9 \text{ bis})$$

§. 5. Der Ort aller Punkte, in denen jede Gerade einer abwickelbaren Fläche von ihrer consecutiven geschnitten wird, heisst bekanntlich *die charakteristische Curve der abwickelbaren Fläche.* Da nun nach §. 2 jedes räumliche System von Geraden eins und dasselbe ist mit zwei Systemen abwickelbarer Flächen, die ihre Geraden gemein haben, so ist auch der Ort aller Punkte, in denen sich consecutive Geraden eines räumlichen Systems schneiden, ein Paar krummer Flächen, deren eine sämmtliche charakteristische Curven des einen Systems abwickelbarer Flächen, die andere diejenigen des andern Systems enthält. Zugleich wird jene erste *Ortsfläche* (so will ich fortan diese beiden Flächen nennen) von den abwickelbaren Flächen des zweiten Systems eingehüllt, und ebenso wird die zweite Ortsfläche von den abwickelbaren Flächen des ersten Systems eingehüllt. Da nun die erste Ortsfläche z. B. von irgend einer bestimmten abwickelbaren Fläche des zweiten Systems in einer bestimmten Curve berührt wird, die ich *Berührungscurve* nennen will, so ist jede der beiden Ortsflächen durch zweierlei Curven in parallelogrammförmige infinitesimale Felder abgetheilt, einmal durch die charakteristischen Curven der abwickelbaren Flächen des gleichnamigen Systems, sodann durch die Berührungscurven des entgegengesetzten Systems. — Demnach sind die Berührungscurven diejenigen Curven, in denen je zwei consecutive abwickelbare Flächen desselben Systems sich schneiden. — Aus dem Gesagten folgt auch, dass *jede charakteristische Ebene die entgegengesetzte Ortsfläche im entsprechenden Punkte berührt.*

Um diese Vorstellungen analytisch auszudrücken, behalte ich die in §. 3 getroffene Wahl der Variabeln t, u bei und gebe den Gleichungen (2) unter der Voraussetzung $u = \text{const.}$ die Gestalt:

$$\left.\begin{array}{l} -\lambda S - \lambda' T + x' = o \\ -\mu S - \mu' T + y' = o \\ -\nu S - \nu' T + z' = o \end{array}\right\} \quad (10)$$

Dann ergibt sich aus denselben, mit Betrachtung der Gleichungen (6):

$$T = \frac{\lambda' x' + \mu' y' + \nu' z'}{\lambda'^2 + \mu'^2 + \nu'^2} \quad \text{und} \quad S = \lambda x' + \mu y' + \nu z'.$$

Die Gleichungen (1), unter die Form

$$\left.\begin{array}{l} X = -\lambda T + x \\ Y = -\mu T + y \\ Z = -\nu T + z \end{array}\right\} \quad (11)$$

gebracht, geben nach geschehener Elimination der beiden Variabeln t, u eine Endgleichung zwischen den Coordinaten X, Y, Z derjenigen Ortsfläche, welche die charakteristischen Curven sämmtlicher durch die Gleichung $u = \text{const.}$ dargestellten abwickelbaren Flächen enthält. Wird ferner

$$dX = X' dt + X_, du \quad , \text{ etc.}$$
$$dT = T' dt + T_, du$$

gesetzt, so ergibt sich mit Beachtung der Gleichungen (10):

$$\left.\begin{array}{ll} X' = \lambda(S - T') & , \text{ etc.} \\ X_, = x_, - \lambda T' - \lambda_, T \; , & \text{etc.} \end{array}\right\} \quad (12)$$

und die Gleichungen (5) erfüllt sein müssen, so folgt

$$(\mu\nu_, - \mu_,\nu)\, dX + (\nu\lambda_, - \nu_,\lambda)\, dY + (\lambda\mu_, - \lambda_,\mu)\, dZ = o \quad (13)$$

als Differentialgleichung der Ortsfläche. Diese Gleichung (13) lehrt zugleich, dass die Ortsfläche von derjenigen charakteristischen Ebene, welche der Annahme $t = \text{const.}$ entspricht, berührt wird.

§. 6. Im Vorigen hat sich das räumliche System von Geraden in ein *System gemeinschaftlicher Tangenten beider Ortsflächen* verwandelt. Wir wollen nun die umgekehrte Aufgabe, *aus den beiden Ortsflächen das räumliche System von Geraden sammt seinen abwickelbaren Flächen herzuleiten*, betrachten. Es seien zwei beliebige krumme

Flächen gegeben, und man solle eine abwickelbare Fläche finden, deren charakteristische Curve auf der ersten der beiden gegebenen Flächen liegt, während die zweite von ihr eingehüllt wird. Durch einen beliebigen Punkt A der ersten Fläche lege man eine Berührungsebene an dieselbe, so wird diese die zweite Fläche in einer ebenen Curve schneiden; an diese ebene Curve ziehe man nun vom Punkt A aus eine Tangente, welche sie im Punkte B berührt. In der Richtung dieser Tangente nehme man auf der ersten Fläche einen zweiten Punkt $A_{,}$ unendlich nahe bei A, wiederhole die vorige Construction in Beziehung auf diesen Punkt $A_{,}$ und bestimme dadurch einen neuen Punkt $B_{,}$ auf der zweiten Eläche. Setzt man dieses Verfahren fort, so bestimmt die Reihenfolge der Tangenten AB, $A_{,}B_{,}$, etc. eine abwickelbare Fläche, welche die zweite gegebene Ortsfläche einhüllt und ihre charakteristische Curve auf der ersten Ortsfläche hat. Die gerade Linie $AA_{,}$ ist das Element einer charakteristischen Curve, und $BB_{,}$ das Element einer Berührungscurve.

Wenn $U(x,y,z)=o$, $V(x_{,},y_{,},z_{,})=o$ die Gleichungen der beiden Ortsflächen sind, so ist die gegenseitige Abhängigkeit der Coordinaten x, y, z, $x_{,}$, $y_{,}$, $z_{,}$ je zweier zusammengehöriger Punkte A, B beider Ortsflächen durch folgende vier Gleichungen ausgedrückt:

$$\left.\begin{aligned} U=o,\ \frac{dU}{dx}(x_{,}-x)+\frac{dU}{dy}(y_{,}-y)+\frac{dU}{dz}(z_{,}-z)=o,\\ V=o,\ \frac{dV}{dx_{,}}(x_{,}-x)+\frac{dV}{dy_{,}}(y_{,}-y)+\frac{dV}{dz_{,}}(z_{,}-z)=o.\end{aligned}\right\}\quad(14)$$

Sind z. B. x, y, z so bestimmt, dass sie der Gleichung $U=o$ genügen, so reichen die drei andern Gleichungen gerade hin, um $x_{,}$, $y_{,}$, $z_{,}$ zu bestimmen. Man kann sich daher die sechs Variabeln x, y, z, $x_{,}$, $y_{,}$, $z_{,}$ als Funktionen *zweier* unabhängiger Variabeln denken, welche den vier obigen Gleichungen genügen. Die Relation zwischen diesen beiden Unabhängigen, welche für die charakteristische Curve auf der ersten Ortsfläche ($U=o$) bestehen muss, wird gefunden durch Integration der Gleichung

$$\frac{dV}{dx_{,}}\,dx + \frac{dV}{dy_{,}}\,dy + \frac{dV}{dz_{,}}\,dz = o. \quad (15)$$

Das Integral derselben sei $\varphi = \text{const.}$ Will man nun eine Gleichung für die abwickelbare Fläche haben, welche die zweite Ortsfläche ($V=o$) einhüllt, so muss man aus den drei Gleichungen

$$\left.\begin{array}{c} \frac{dU}{dx}(X-x) + \frac{dU}{dy}(Y-y) + \frac{dU}{dz}(Z-z) = o \\ \frac{dV}{dx_{,}}(X-x) + \frac{dV}{dy_{,}}(Y-y) + \frac{dV}{dz_{,}}(Z-z) = o \\ \varphi = \text{const.} \end{array}\right\} \quad (16)$$

mit Beiziehung der Gleichungen (14) die beiden unabhängigen Variabeln eliminiren. Die resultirende Gleichung zwischen X, Y, Z ist diejenige der abwickelbaren Fläche.

Besondere Beachtung verdient der besondere Fall, wo die beiden Gleichungen

$$S\frac{dU}{dx}(x_{,}-x) = o \quad \text{und} \quad S\frac{dV}{dx_{,}}(x_{,}-x) = o$$

zusammenfallen, weil

$$\frac{dU}{dx}:\frac{dU}{dy}:\frac{dU}{dz} = \frac{dV}{dx_{,}}:\frac{dV}{dy_{,}}:\frac{dV}{dz_{,}}$$

ist. Man hat alsdann fünf Gleichungen zwischen den sechs Variabeln x, y, z, $x_{,}$, $y_{,}$, $z_{,}$. Folglich entspricht dieser Bedingung nur *eine Grenzcurve* auf jeder Ortsfläche. Es sind diejenigen zwei Curven, in denen die zwei gegebenen Ortsflächen von einer einzigen abwickelbaren Fläche berührt werden. Sie sind zugleich die Orte der Rückkehrpunkte aller charakteristischen Curven.

Das im Vorhergehenden besprochene räumliche System von Geraden kann also ausser den beiden Systemen abwickelbarer Flächen auch noch eine *singuläre abwickelbare Fläche* enthalten, welche der Ort ist aller derjenigen Geraden, für welche der Winkel der beiden charakteristischen Ebenen verschwindet, d. h. für welche, wenn wir die Bezeichnungen des §. 3 gebrauchen,

$$\lambda' : \mu' : \nu' = \lambda_, : \mu_, : \nu_,$$

ist. (Obschon dieser Proportionen zwei an der Zahl sind, so wird doch durch dieselben nur eine einzige Relation zwischen den beiden Unabhängigcn t, u gesetzt, da wegen der Gleichung (6) eine dieser beiden Proportionen die andere zur Folge hat.) Ich vermuthe, dass diese singuläre abwickelbare Fläche der *particulären Solution* der Differentialgleichung (3) entspreche.

Aus dem Gesagten folgt auch, dass der Ort aller Durchschnittspunkte consecutiver Geraden des räumlichen Systems ausser den beiden Ortsflächen noch eine *singuläre* oder vielmehr *isolirte Curve* enthalten kann, nämlich die charakteristische Curve der singulären abwickelbaren Fläche.

Wenn die beiden Ortsflächen zwei getrennte und überall convexe Körper umschliessen, und man denkt sich den einen dieser Körper leuchtend, den andern dunkel, so besteht die singuläre abwickelbare Fläche aus den zwei Mänteln, welche den Raum des *Halbschattens* begränzen.

(Fortsetzung folgt.)