Zeitschrift: Mitteilungen der Naturforschenden Gesellschaft Bern

Herausgeber: Naturforschende Gesellschaft Bern

Band: - (1843)

Heft: 4

Artikel: Über Primzahlen

Autor: Wolf

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-318148

Herr Wolf, über Primzahlen.

Durch eine Notiz in Grunerts Archiv für reine und angewandte Mathematik I, 112 aufmerksam gemacht, stellte ich eine Reihe von Versuchen an, die Stellung der Primzahlen in der Zahlenreihe durch graphische Mittel anschaulich zu machen. Ich erwartete hiebei keineswegs bedeutende Gesetze über das Auftreten der Primzahlen herauszubekommen, zumal da ich mich der grossen Arbeit wegen auf die 10,000 ersten Zahlen beschränken musste. Mein Hauptzweck war von Anfang an unter verschiedenen Arten der Zusammenstellung diejenige auszuwählen, welche der Anschauung am meisten bietet, d.h. auf rein empirischem Wege möglichst viele Eigenschaften der Zahlenreihe finden lasse.

Vielfache Versuche führten mich darauf, folgender Anordnung entschiedenen Vorzug zu geben: Man theile ein Quadrat in 10,000 kleine Quadrate und schreibe in diese, von der Mitte aus spiralförmig sich fortbewegend, die Zahlen in ihrer natürlichen Folge ein.

e d c

50	49	48	47	46	45	44	43
51	26	25	24	23	22	21	42
52	27	10	9	8	7	20	41
53	28	11	2	1	6	19	40
54	29	12	3	4	5	18	39
55	30	13	14	15	16	17	38
56	31	32	33	34	35	36	37
57	58	59	60	61	62	63	64

f a b

g h i

Bei dieser Anordnung ist jede gerade Zahl allseitig von ungeraden, jede ungerade von geraden Zahlen umgeben, — ein sehr wesentlicher Vortheil.

Unterscheidet man diejenigen Felder, welche Primzahlen enthalten, von den übrigen durch eine Farbe, so treten unter den ungeraden Zahlen Reihen von Parallelen zu den beiden Diagonalen des Quadrats hervor, von welchen die einen sich durch Reichthum an Primzahlen auszeichnen, während die andern, zu ihnen senkrechten, gar keine Primzahlen enthalten. Ferner zeigen sich Systeme von Geraden welche zu den Seiten des Quadrats senkrecht stehen und ebenfalls von Primzahlen ganz frei sind. Alle diese Geraden gehen vom Rande aus so lange fort, bis sie auf eine Diagonale treffen, und krümmen sich von da aus spiralförmig dem Mittelpunkte zu.

Die zu den Seiten des Quadrates senkrecht stehenden Vielfachenreihen erscheinen ziemlich regelmässig. Sie finden sich in den Octanten a c d, a e f, a g h und a i b paarweise symmetrisch, — gar nicht in den übrigen. Die Octanten a c d und a e f enthalten die Reihen

$$\left.\begin{array}{l} m + 10 \\ m + 9 \\ m + 3 \\ m \\ m - 12 \\ m - 17 \end{array}\right\} \text{wo } m = 4n^2 \mp 13n$$

das obere Zeichen für a c d, das untere für a e f geltend. Die Octanten a g h und a i b dagegen enthalten die Reihen

$$\left.\begin{array}{l} m + 18 \\ m + 15 \\ m + 13 \\ m + 4 \\ m \\ m - 15 \end{array}\right\} \text{ wo } m = 4n^2 \mp 17n$$

das obere Zeichen für a g h, das untere für a i b geltend.

Die zu den Diagonalen des Quadrates parallelen Vielfachenreihen finden sich in den Quadranten c a e und g a i, und zwar sind sie sämmtlich der Diagonale e i parallel. Der Quadrant c a e enthält die Reihen

$$\left.\begin{array}{l} m + 9 \\ m + 5 \\ m - 7 \\ m - 27 \\ m - 55 \end{array}\right\} \text{ wo } m = n^2 \pm 6n$$

von welchen die erste die Quadrate aller ungeraden Zahlen in sich begreift. Der Quadrant g a i enthält, neben der Reihe der Quadrate aller geraden Zahlen, die Reihen

$$\left.\begin{array}{l} m + 35 \\ m + 27 \\ m + 11 \\ m - 13 \\ m - 45 \end{array}\right\} \text{ wo } m = n^2 \pm 12n$$

Von den Primzahlenreihen tritt ganz besonders diejenige hervor, welche die Zahlen der Form $41 \pm 2n + 4n^2$ oder $41 + n(n - 1)$ enthält. Sie beginnt an der Basis der Quadranten c a e, erstreckt sich, der Diagonale c g parallel laufend, bis zur Diagonale e i und krümmt sich von da spiralig nach 41 zu. Dann kehrt sie in einer zweiten Spirale zur Diagonale e i zurück, und läuft endlich, wieder parallel der Diagonale c g, durch den Quadranten g a i bis an die Basis desselben gerade fort. Auf 100 Feldern, welche ihr von der ganzen Tafel zugehören, zählt sie 86 Primzahlen, also 86%, — eine sehr grosse Anzahl, wenn man bedenkt, dass bis auf 10,000 sich im Ganzen nur 1230 Primzahlen, also etwa 12% finden. Besonders merkwürdig ist aber, dass sämmtliche Vielfache dieser Primzahlenreihe in die oben angeführten Vielfachenreihen fallen, und dasselbe scheint auch mit den Vielfachen statt zu haben, die sich in den immerhin an Primzahlen ebenfalls noch ziemlich reichen Reihen finden, welche die Zahlen der Formen

$$37 + 4n^2$$
$$59 \pm 4n + 4n^2$$

enthalten.

Noch Manches liesse sich aus der Tafel entheben. Es mag aber das Vorliegende genügen, um die Vorzüglichkeit ihrer Anordnung zu erweisen. Ich schliesse damit, die Ansicht auszusprechen, dass eine solche Tafel einerseits demjenigen, welcher sich mit der Theorie der Zahlen beschäftigt, manchen fruchttragenden Gedanken wecken, — andererseits dem angehenden Mathematiker Lust zu solchen Untersuchungen bringen kann.