

<b>Zeitschrift:</b>	Museum Helveticum : schweizerische Zeitschrift für klassische Altertumswissenschaft = Revue suisse pour l'étude de l'antiquité classique = Rivista svizzera di filologia classica
<b>Herausgeber:</b>	Schweizerische Vereinigung für Altertumswissenschaft
<b>Band:</b>	48 (1991)
<b>Heft:</b>	1
<b>Artikel:</b>	Un fragment attribué à Archimède
<b>Autor:</b>	Sesiano, Jacques
<b>DOI:</b>	<a href="https://doi.org/10.5169/seals-37692">https://doi.org/10.5169/seals-37692</a>

### Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 23.02.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# Un fragment attribué à Archimède

Par Jacques Sesiano, Genève

## 1. Introduction

La partie de l'œuvre d'Archimède qui nous est parvenue par l'intermédiaire des Byzantins descend essentiellement de trois manuscrits:

Le plus important d'entre eux fut copié à Byzance, peut-être au IX<sup>e</sup> siècle à l'initiative de Léon le Mathématicien; on le retrouve en Sicile au XII<sup>e</sup> siècle, puis à la Cour papale de Viterbe où il est utilisé en 1269 par Guillaume de Moerbeke pour sa version latine d'Archimède. Ce manuscrit est perdu depuis le milieu du XVI<sup>e</sup> siècle; mais, grâce aux copies qui en ont été faites entre-temps, nous connaissons le texte grec de cinq traités de mathématique (*De la sphère et du cylindre*, *De la mesure du cercle*, *Des conoïdes et des sphéroïdes*, *Des spirales*, *l'Arénaire*) et deux de mécanique (*De l'équilibre des plans*, *De la quadrature de la parabole*).

Un second manuscrit contenait, lui, trois traités de mécanique d'Archimède, soit les deux qui ont été déjà mentionnés et l'ouvrage *Sur les corps flottants*. Ce manuscrit fut également utilisé par Guillaume de Moerbeke en 1269, puis disparut lui aussi, mais déjà au XIV<sup>e</sup> siècle et sans que des copies en eussent été faites.

Notre troisième source est un palimpseste provenant du patriarcat de Jérusalem et apporté à Constantinople, où il fut examiné en 1906 par l'éditeur moderne d'Archimède en grec, J. Heiberg<sup>1</sup>. Il contenait une œuvre jusqu'alors inconnue, la *Méthode*, ainsi que des fragments importants de six œuvres continues, mais dont l'une (*Sur les corps flottants*) ne l'était plus que par sa version latine et une autre (*le Stomachion*) que par un fragment en traduction arabe<sup>2</sup>.

Avec l'épigramme du Problème des bœufs, transmise par d'autres manuscrits, et quelques citations ou allusions dispersées se clôt l'inventaire des travaux d'Archimède dont la tradition grecque nous a conservé la mémoire. Même si leur forme actuelle et la langue utilisée ne correspondent parfois plus au texte qu'avait composé Archimède, on n'a guère de doute que presque toutes les œuvres ainsi transmises reflètent les résultats de recherches d'Archimède.

On ne saurait en dire autant des traités qui nous ont été transmis par voie des traductions en arabe. Il apparaît en effet que dans leur majorité ces écrits

<sup>1</sup> L'édition de Heiberg, *Archimedes, Opera omnia*, I-III (Leipzig 1910-1915; réimpression Stuttgart 1972), contient en outre les commentaires d'Eutocius.

<sup>2</sup> Ce palimpseste, considéré comme perdu à la suite d'un vol dans les années 1920, aurait été recelé en France puis récemment placé dans un coffret bancaire à Genève.

ont été malmenés à divers degrés par des glossateurs ou des interpolateurs grecs tardifs.

Les bibliographes arabes attribuent à Archimète les études suivantes<sup>3</sup>:

1. De la sphère et du cylindre.
2. De la mesure du cercle.
3. De la division du cercle en sept parties (construction de l'heptagone régulier).
4. Sur les cercles tangents.
5. Sur les lemmes.
6. Sur les données.
7. Sur les lignes parallèles.
8. Sur les triangles.
9. Sur les propriétés des triangles rectangles.
10. Sur les clepsydres projetant des boules.

Les deux premiers de ces traités étant aussi conservés en grec, on peut comparer les deux versions; il en résulte que, pour ces deux cas, la tradition arabe ne présente guère de différences de fond avec la tradition grecque. C'est avec les autres traités (et pour des seules considérations de contenu cette fois) que la question de l'attribution à Archimète se pose. Ainsi, il apparaît que le dernier traité de la liste (le seul à ne pas être mathématique) est une compilation tardive, d'époque byzantine semble-t-il<sup>4</sup>. Le groupe des traités 3 à 6 est plus caractéristique de la tradition arabe d'Archimète. On ne peut ni les rejeter dès l'abord comme des pseudépigraphe, ni les accepter tels quels comme des écrits de la main d'Archimète, mélanges qu'ils sont de propositions de niveaux fort inégaux et dont le lien avec le sujet de l'ouvrage peut être d'une extrême ténuité voire même inexistant. On conçoit donc que dans une telle situation il est difficile sinon illusoire de vouloir présumer la forme et le contenu du texte qu'aurait pu composer Archimète<sup>5</sup>. Enfin, des trois écrits restants dans la liste

3 Cette liste n'est pas complète: le *Stomachion* n'y est pas mentionné, non plus qu'un fragment du traité sur les corps flottants.

4 Il enseigne la construction d'une horloge indiquant chaque passage d'heure par la chute d'une petite boule de cuivre, ainsi que par d'autres mécanismes d'un haut niveau technique. Voir la traduction de E. Wiedemann et F. Hauser, *Uhr des Archimedes*, Nova Acta 103 (1918) 159–202.

5 Le premier de ces traités a été traduit par C. Schoy, *Die trigonometrischen Lehren des persischen Astronomen (...) al-Bîrûni* (Hannover 1927) 74–84, et analysé par J. Tropfke, *Die Sieben-eckabhandlung des Archimedes*, Osiris 1 (1936) 636–651. Le second fait l'objet d'un vol. IV (1975) ajouté à la réimpression de Stuttgart des *Opera* (n. 1). Le troisième fut traduit, sous le titre *Liber assumptorum*, au XVII<sup>e</sup> siècle, et cette traduction est reprise par Heiberg dans le vol. II des *Opera*. Enfin, deux versions du quatrième sont traduites et étudiées par Y. Dold dans son *Book of Assumption by Aqâqun* (Diss. Amsterdam 1977). Sur les éditions de plusieurs de ces textes à Haiderabad et sur les manuscrits conservés, voir F. Sezgin, *Geschichte des arabischen Schrifttums* IV (Leyde 1974) 128–135. Une liste récente de travaux sur Archimète a été établie par W. Knorr en appendice de la seconde édition anglaise du *Archimedes* de E. J. Dijksterhuis (Princeton 1987).

(n<sup>o</sup>s 7 à 9), les deux premiers n'ont pas été retrouvés, tandis que l'on savait depuis plusieurs années qu'un fragment du dernier était conservé à Téhéran<sup>6</sup>. C'est de celui-ci qu'il sera question, car nous avons eu l'occasion de l'examiner lors de séjours en Iran.

Le manuscrit dont fait partie ledit fragment porte la cote 284 dans le fonds des manuscrits ayant appartenu à l'Imam Jum'a (Saïd Jawād) de Kerman (m. en 1287 H./1871); sa collection, léguée par sa descendance à la Faculté des Lettres de l'Université de Téhéran, est actuellement conservée à la Bibliothèque centrale (Ketābkhānē-yé markazī) de l'Université. Le manuscrit 284, qui a été écrit tout d'une même main vers 1440, comprend 195 feuillets, sans numérotation, dont le fragment occuperait les fol. 192<sup>v</sup>, 3 à 194<sup>r</sup>. Des cinq figures devant servir de support aux démonstrations, seules les deux premières ont été dessinées (à l'encre rouge); les autres manquent, et devaient aussi manquer dans l'exemplaire utilisé par le copiste, l'omission n'étant ni voulue (les pages précédentes et suivantes dans le manuscrit ont les figures requises) ni fortuite (aucun espace vide n'a été laissé pour leur addition ultérieure).

Les démonstrations utilisent quelques théorèmes que le lecteur est censé connaître et qui sont démontrés dans les Éléments d'Euclide. Nous les mentionnons ci-après, préalablement à l'étude du fragment.

## 2. Théorèmes utilisés dans les démonstrations du fragment

Les théorèmes supposés être connus sont simples et comptent parmi les plus fréquemment utilisés dans la mathématique grecque. Deux de ces théorèmes concernent des propriétés élémentaires du triangle rectangle, quatre sont des identités, deux enfin sont des opérations sur les rapports.

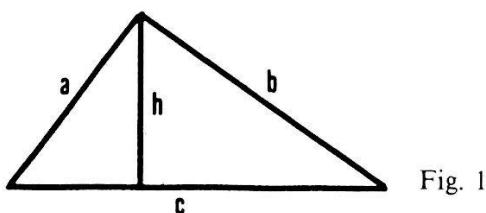


Fig. 1

Désignons par  $a$ ,  $b$  les côtés perpendiculaires d'un triangle rectangle, par  $c$  son hypoténuse, et par  $h$  la hauteur tombant sur l'hypoténuse (fig. 1); on a alors les relations:

- (1) Éléments I 47:  $a^2 + b^2 = c^2$  (théorème dit de Pythagore).
- (2) El. X 33 (lemme):  $a \cdot b = c \cdot h$  ( $= 2S$ , où  $S$  est la surface du triangle).

<sup>6</sup> Depuis sa mention à la p. 44 du catalogue de la collection de l'Imam Jum'a (v. infra) publié par M. Daneš-Pajouh comme vol. 13 (1344/1965) de la série Madjallé-yé Dāneškadé-yé adabiyāt.



Fig. 2

Appelons  $a, b$  des segments de droites, et  $a_1, a_2, b_1$ , etc. des parties de ces segments (Euclide, lui, désigne les segments de droites soit par une seule lettre, soit par les deux lettres marquant leurs extrémités); on a alors les relations:

(3) El. II 1: Si  $b = b_1 + b_2 + b_3$  (p.ex.  $A\Delta = A\Gamma + \Gamma B + B\Delta$  dans la fig. 2), alors  $a \cdot b = a \cdot b_1 + a \cdot b_2 + a \cdot b_3$ .

(4) El. II 4: Si  $a = a_1 + a_2$ , alors  $a^2 = a_1^2 + a_2^2 + 2a_1 \cdot a_2$  (soit:  $\Gamma\Delta^2 = \Gamma B^2 + B\Delta^2 + 2\Gamma B \cdot B\Delta$ ).

(5) El. II 6: Soit un segment de longueur  $b$  et un autre de longueur  $2a$  ( $B\Delta$  resp.  $AB$  avec  $A\Gamma = \Gamma B$ ); on a alors:  $(2a + b)b + a^2 = (a + b)^2$  (soit:  $A\Delta \cdot B\Delta + \Gamma B^2 = \Gamma\Delta^2$ ).

(6) El. II 10: Sous les mêmes conditions, on a aussi:  $(2a + b)^2 + b^2 = 2[a^2 + (a + b)^2]$  (soit:  $A\Delta^2 + B\Delta^2 = 2(\Gamma B^2 + \Gamma\Delta^2)$ ).

Enfin, le lecteur est censé connaître trois théorèmes sur les rapports, qui se réduisent en fait à deux puisque l'un est un cas particulier de l'autre:

(7) El. V 18: Si  $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$  alors  $\frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}$

(8) El. VI 16: Si  $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$  alors  $a \cdot d = b \cdot c$ , et inversement.

(9) El. VI 17: Si  $\frac{a}{b} = \frac{b}{c}$  alors  $b^2 = a \cdot c$ .

### 3. Traduction du fragment<sup>7</sup>

(Extrait) du livre des propriétés du triangle (rectangle)  
par Archimède

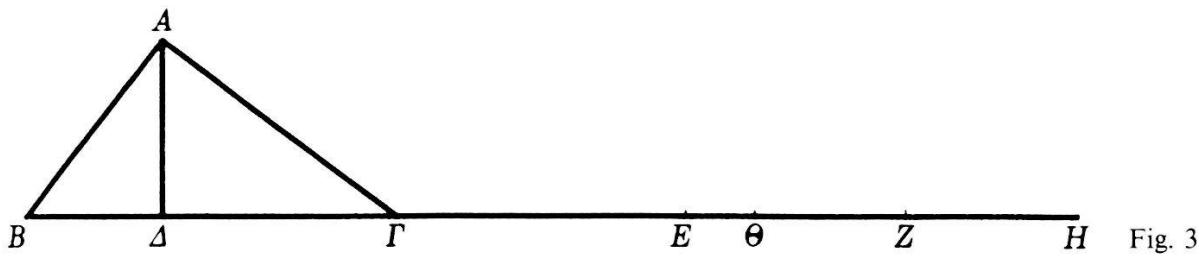
[1] Dans tout triangle rectangle, le carré des trois côtés, disposés comme en une seule ligne<sup>8</sup>, égale le double du rectangle que comprennent les trois côtés et la hauteur abaissée de l'angle droit sur l'hypoténuse, le tout disposé comme en une seule ligne, et l'hypoténuse.

Illustration<sup>9</sup>. Soit (le triangle)  $AB\Gamma$ , rectangle en  $A$ . Je dis que le carré de

7 La traduction est littérale, et les additions au texte sont mises entre parenthèses. Les erreurs mineures de copiste sont corrigées sans être signalées. Rappelons que seules les deux premières figures apparaissent (placées verticalement, voir la planche) dans le manuscrit.

8 C'est-à-dire placés bout à bout comme un seul segment de droite. Le mot *khaṭ* resp. *γραμμή* est utilisé par certains mathématiciens (dont Archimède) dans le sens de *εὐθεῖα γραμμή* = *khaṭ mustaqīm*. Nous maintenons «ligne» dans la traduction.

9 Ar. *mithāl* = ἔκθεσις, par laquelle l'énoncé purement rhétorique est appliqué, généralement à une figure sur laquelle s'appuiera la démonstration.



ses côtés, disposés comme en une seule ligne, égale deux fois le produit desdits (côtés) avec la hauteur, soit  $A\Delta$ , par la base, soit  $\Gamma B^{10}$ .

Prolongeons  $\Gamma B$  tout droit. Nous en découpons  $\Gamma E$  égale à  $A\Gamma$ ,  $EZ$  égale à  $AB$ , et  $ZH$  égale à  $A\Delta$ . Nous découpons (en outre)  $\Gamma\Theta$  égale à  $\Gamma B$ . Ainsi,  $\Theta B$  est divisée au (point)  $\Gamma$  en deux moitiés et  $\Theta Z$  lui est ajoutée. Donc, le produit de  $BZ$  par  $Z\Theta$  avec le carré de  $\Theta\Gamma$  égale le carré de  $\Gamma Z^{11}$ . Or le carré de  $Z\Gamma$  égale les carrés de  $ZE$ ,  $E\Gamma$ , et deux fois le produit de  $ZE$  par  $E\Gamma$ ; et les carrés de  $ZE$ ,  $E\Gamma$  égalent le carré de  $\Theta\Gamma$ , laquelle est égale à la base<sup>12</sup>. Retranchant les égaux, il en résulte que le produit de  $BZ$  par  $Z\Theta$  est égal à (deux fois) le produit de  $ZE$  par  $E\Gamma^{13}$ . Par suite, le produit de  $HZ$ , laquelle est égale à la hauteur, par  $\Theta B$ , qui est le double de la base, est égal au produit de  $ZB$  – c'est-à-dire la somme des côtés – par  $Z\Theta^{14}$ . Donc, le rapport de  $HZ$  à  $ZB$  est égal au rapport de  $Z\Theta$  à  $\Theta B$ . Par composition, le rapport de  $HB$  à  $ZB$  sera égal au rapport de  $ZB$  à  $\Theta B^{15}$ . Donc  $ZB$  est une moyenne proportionnelle. Ainsi, le produit de  $HB$  par  $\Theta B$  est égal au carré de  $ZB$ . C'est ce dont nous voulions la démonstration.

[2] Dans tout triangle rectangle [193'] scalène, le carré des trois lignes<sup>16</sup>, disposées comme en une seule ligne, et le carré de l'excès de l'une des deux lignes comprenant l'angle droit sur l'autre égalent le carré de l'hypoténuse avec l'un des (côtés) comprenant (l'angle droit), disposés comme en une seule ligne, et le carré de – à nouveau – l'hypoténuse avec le deuxième côté, disposés comme en une seule ligne.

Illustration. Soit le triangle  $AB\Gamma$ , rectangle en  $B$ , et (soit)  $B\Gamma$  plus longue que  $AB$ . Je dis que le carré de ses trois côtés (disposés comme en une seule

10 Donc:  $(AB + B\Gamma + A\Gamma)^2 = 2B\Gamma(AB + B\Gamma + A\Gamma + A\Delta)$ .

11  $\Gamma$  étant le milieu du segment  $B\Theta$  et  $\Theta Z$  étant un segment ajouté, on a par *El. II 6* que  $BZ \cdot Z\Theta + \Theta\Gamma^2 = Z\Gamma^2$ .

12  $Z\Gamma^2 = ZE^2 + E\Gamma^2 + 2ZE \cdot E\Gamma$ , par *II 4*, et  $ZE^2 + E\Gamma^2 = \Theta\Gamma^2$ , par *I 47* appliqué aux segments égaux aux côtés du triangle reportés sur  $\Gamma Z$ ; donc  $Z\Gamma^2 = \Theta\Gamma^2 + 2ZE \cdot E\Gamma$ .

13 Nous avons trouvé (n. 11) que  $BZ \cdot Z\Theta + \Theta\Gamma^2 = Z\Gamma^2$  et (n. 12) que  $Z\Gamma^2 = \Theta\Gamma^2 + 2ZE \cdot E\Gamma$ ; partant,  $BZ \cdot Z\Theta = 2ZE \cdot E\Gamma$ .

14 Comme  $2ZE \cdot E\Gamma = 2AB \cdot A\Gamma$  (car  $ZE = AB$ ,  $E\Gamma = A\Gamma$ ) et que  $2AB \cdot A\Gamma = 2B\Gamma \cdot A\Delta$  (selon *X 33*, lemme) =  $B\Theta \cdot HZ$  (car  $2B\Gamma = B\Theta$ ,  $A\Delta = HZ$ ), on aura, en utilisant le résultat de la n. 13, que  $BZ \cdot Z\Theta = B\Theta \cdot HZ$ .

15 Puisque  $BZ \cdot Z\Theta = B\Theta \cdot HZ$ , alors  $\frac{HZ}{ZB} = \frac{Z\Theta}{\Theta B}$  (*VI 16*), donc  $\frac{HZ + ZB}{ZB} = \frac{Z\Theta + \Theta B}{\Theta B}$  (*V 18*), soit  $\frac{HB}{ZB} = \frac{ZB}{\Theta B}$ . On en déduit que  $ZB^2 = HB \cdot \Theta B$  (*VI 17*), et le théorème est démontré.

16 Ar. *khuṭūṭ* = γραμμαί, alors que l'on attendrait *adlā'* = πλευραί.

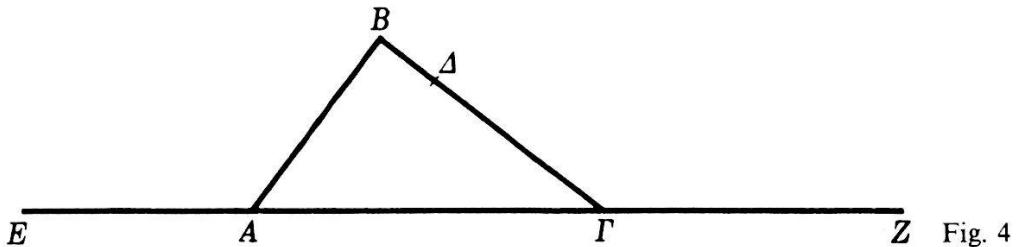


Fig. 4

ligne), avec le carré de l'excès de  $B\Gamma$  sur  $AB$ , égale le carré de  $B\Gamma$ ,  $\Gamma A$ , disposées comme en une seule ligne, et le carré de  $\Gamma A$ ,  $AB$ , disposées selon une seule ligne<sup>17</sup>.

Traçons  $AE$  égale à  $AB$  et  $\Gamma Z$  égale à  $B\Gamma$ , et (soit)  $B\Delta$  l'excès de  $B\Gamma$  sur  $AB$ . Le carré de  $EZ$  égale les carrés de  $EA$ ,  $A\Gamma$ ,  $\Gamma Z$ , et deux fois le produit de  $EA$  par  $A\Gamma$ , et deux fois le produit de  $A\Gamma$  par  $\Gamma Z$ , et deux fois le produit de  $EA$  par  $\Gamma Z$ <sup>18</sup>. Mais deux fois le produit de  $EA$  par  $Z\Gamma$ , c'est-à-dire deux fois le produit de  $AB$  par  $B\Gamma$ , égale deux fois le produit de  $AB$  par  $\Gamma\Delta$  – qui lui est égale – et deux fois le produit de  $\Gamma\Delta$  par  $B\Delta$ . Or deux fois le produit de  $AB$  par  $\Gamma\Delta$  est les carrés de  $AB$ ,  $\Gamma\Delta$ . Nous ajoutons à deux fois le produit de  $B\Delta$  par  $\Delta\Gamma$  et au carré de  $\Gamma\Delta$  le carré de  $B\Delta$ ; et ceci sera égal au carré de  $B\Gamma$ . En conséquence, (deux fois) le produit de  $AB$  par  $B\Gamma$ , avec le carré de  $B\Delta$ , égale les carrés de  $AB$ ,  $B\Gamma$ , c'est-à-dire le carré de  $A\Gamma$ <sup>19</sup>. Ainsi, le carré de  $EZ$  et le carré de  $B\Delta$  égaleront les carrés de  $EA$ ,  $A\Gamma$ , le carré de  $A\Gamma$  encore une fois, le carré de  $\Gamma Z$ , deux fois le produit de  $EA$  par  $A\Gamma$ , deux fois (celui de)  $A\Gamma$  par  $\Gamma Z$ . Mais les carrés de  $EA$ ,  $A\Gamma$  et deux fois le produit de  $EA$  par  $A\Gamma$  égalent le carré de  $E\Gamma$ ; et les carrés de  $A\Gamma$  (,  $\Gamma Z$ ) [193<sup>v</sup>] et deux fois le produit de  $A\Gamma$  par  $\Gamma Z$  égalent le carré de  $AZ$ . Donc les carrés de  $EZ$ ,  $B\Delta$  égalent les carrés de  $E\Gamma$ ,  $AZ$ . C'est ce dont nous voulions la démonstration<sup>20</sup>.

[3] Dans tout triangle rectangle, si l'on découpe depuis l'une des extrémités de l'hypoténuse<sup>21</sup> un (segment) égal à l'un des deux côtés comprenant l'angle droit et depuis l'autre extrémité le (segment) égal à l'autre côté, le produit de la ligne qui est entre les points de section par le périmètre du triangle – c'est-à-dire les trois lignes comprenant le triangle, disposées comme en une seule ligne – est quatre fois la surface du triangle.

17 Donc:  $(BA + A\Gamma + B\Gamma)^2 + (B\Gamma - BA)^2 = (B\Gamma + A\Gamma)^2 + (BA + A\Gamma)^2$ .

18  $EZ^2 = EA^2 + A\Gamma^2 + \Gamma Z^2 + 2EA \cdot A\Gamma + 2A\Gamma \cdot \Gamma Z + 2EA \cdot \Gamma Z$  (extension de II 4 à trois termes).

19 Comme  $EA = BA = \Delta\Gamma$  et  $\Gamma Z = B\Gamma$ , on a que  $2EA \cdot \Gamma Z = 2BA \cdot B\Gamma = 2BA(B\Delta + \Delta\Gamma) = 2BA \cdot B\Delta + 2BA \cdot \Delta\Gamma = 2\Delta\Gamma \cdot B\Delta + BA^2 + \Delta\Gamma^2$ . Or, si de chaque côté de l'expression de la note 18 on ajoute  $B\Delta^2$ , on aura à gauche  $EZ^2 + B\Delta^2$ , et à droite une suite de termes parmi lesquels la somme  $2EA \cdot \Gamma Z + B\Delta^2$  qui se transformera, selon ce qui vient d'être vu, en  $2\Delta\Gamma \cdot B\Delta + BA^2 + \Delta\Gamma^2 + B\Delta^2 = (B\Delta + \Delta\Gamma)^2 + BA^2 = B\Gamma^2 + BA^2 = A\Gamma^2$  (I 47).

20 Tenant compte des transformations de la note 19, l'expression de la note 18 devient:  $EZ^2 + B\Delta^2 = EA^2 + A\Gamma^2 + \Gamma Z^2 + 2EA \cdot A\Gamma + 2A\Gamma \cdot \Gamma Z + A\Gamma^2$ . Comme les termes à droite peuvent se regrouper en  $(EA + A\Gamma)^2 + (A\Gamma + \Gamma Z)^2 = E\Gamma^2 + AZ^2$ , le théorème est démontré.

21 «De l'hypoténuse» se dit «de la corde de l'angle droit», *watar(i) al-zāwiyat al-qā'ima* = τῆς τὴν ὄρθην γωνίαν ὑποτείνουσης; le texte arabe a seulement «de l'angle droit», par omission de *watar*.

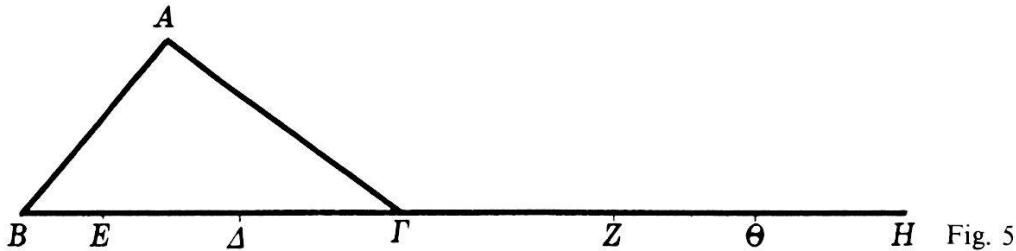
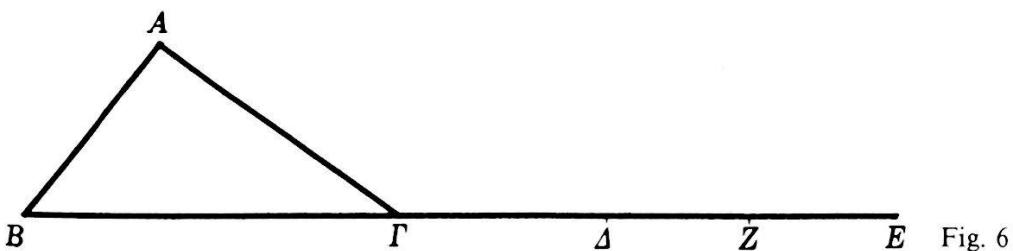


Illustration. Soit le triangle  $AB\Gamma$ , rectangle en  $A$ , de la base (duquel) on a découpé  $B\Delta$  égale à  $AB$  ainsi que  $\Gamma E$  égale à  $A\Gamma$ . Je dis que le produit de la somme des côtés par  $E\Delta$  égale quatre fois la surface du triangle<sup>22</sup>.

Démonstration. Les lignes  $BA$ ,  $A\Gamma$ , rabattues sur la ligne  $B\Gamma$ , en découpent la ligne  $E\Delta$ <sup>23</sup>. Nous prolongeons  $B\Gamma$  et posons  $\Gamma Z$  égale à  $BA$ ,  $ZH$  égale à  $A\Gamma$ , et  $H\Theta$  égale à  $E\Delta$ . Alors, puisque  $H\Theta$  est la différence qu'il y a entre les lignes  $BA$ ,  $A\Gamma$  et  $B\Gamma$ , il en résulte que  $\Gamma\Theta$  est égale à  $B\Gamma$ . Ainsi, la ligne  $B\Theta$  est divisée au (point)  $\Gamma$  en deux moitiés, et  $\Theta H$  lui est ajoutée. (Donc) le produit de  $BH$  par  $\Theta H$ , avec le carré de  $\Gamma\Theta$ , égale le carré de  $\Gamma H$ <sup>24</sup>. Mais le carré de  $\Gamma H$  égale les carrés de  $\Gamma Z$ ,  $ZH$ , et deux fois le produit de  $\Gamma Z$  par  $ZH$ ; et les carrés de  $\Gamma Z$ ,  $ZH$  égale le carré de  $B\Gamma$ <sup>25</sup>. Donc le produit de  $BH$  par  $H\Theta$ , avec le carré de  $\Gamma\Theta$  – laquelle est égale à  $B\Gamma$  –, égale le carré de  $B\Gamma$  et deux fois le produit de  $\Gamma Z$  par  $ZH$ . Retranchant le carré de  $B\Gamma$ , qui est commun, il résulte que le produit de  $BH$  par  $H\Theta$  est égal à deux fois le produit de  $\Gamma Z$  par  $ZH$ . Mais deux fois le produit de  $\Gamma Z$  par  $ZH$  est quatre fois la surface du triangle  $AB\Gamma$ . C'est ce que nous avions l'intention de prouver.

[4] Dans tout triangle rectangle, le carré des trois côtés, disposés comme en une seule ligne, égale deux fois le produit [194'] de l'ensemble de la ligne par l'hypoténuse et deux fois le produit des deux extrémités<sup>26</sup>.



22 Donc:  $(AB + B\Gamma + A\Gamma) \cdot E\Delta = 4S$ , où  $4S = 2AB \cdot A\Gamma$ .

23 Le segment  $E\Delta$  représente donc l'excès de  $AB + A\Gamma$  sur  $B\Gamma$ .

24 Comme  $\Gamma H = AB + A\Gamma$  et  $\Theta H = E\Delta = AB + A\Gamma - B\Gamma$ ,  $\Gamma\Theta = B\Gamma$ . On a donc par II 6 ( $\Gamma$  milieu de  $B\Theta$ ,  $\Theta H$  segment ajouté):  $BH \cdot \Theta H + \Gamma\Theta^2 = \Gamma H^2$ .

25 Comme  $\Gamma H^2 = \Gamma Z^2 + ZH^2 + 2\Gamma Z \cdot ZH$  (II 4) et  $\Gamma\Theta^2 = \Gamma Z^2 + ZH^2$  (I 47, appliqué aux segments reportés), et utilisant le résultat de la note 24, on a  $BH \cdot \Theta H = 2\Gamma Z \cdot ZH$ , donc  $BH \cdot \Theta H = 2AB \cdot A\Gamma = 4S$ , ce qui clôt la démonstration.

26 Ar. *al-ṭarafān* (duel) = τὰ πέρατα, alors que l'on attendrait (*al-dila'ān*) *al-muḥīṭān* = αἱ περιέχουσαι (sc. τὴν ὄρθὴν γωνίαν πλευραί).

Illustration. Soit le triangle  $B\Gamma\Delta$ , rectangle en  $A$ . Je dis que le carré de ses trois côtés, (disposés) comme en une seule ligne, égale deux fois le produit de  $B\Gamma$  par la somme des côtés et deux fois le produit de  $BA$  par  $A\Gamma$ <sup>27</sup>.

Menons  $\Gamma\Delta$  égale à  $AB$ , et  $\Delta E$  égale à  $A\Gamma$ , et (soit)  $\Gamma Z$  égale à  $B\Gamma$ . Alors  $BZ$  est divisée au point  $\Gamma$  en deux moitiés, et  $ZE$  lui est ajoutée. Donc le produit de  $BE$  par  $EZ$ , avec le carré de  $\Gamma Z$ , égale le carré de  $\Gamma E$ <sup>28</sup>. Or le carré de  $\Gamma E$  égale les carrés de  $\Gamma\Delta$ ,  $\Delta E$ , et deux fois le produit de l'une par l'autre; et les carrés de  $\Gamma\Delta$ ,  $\Delta E$  égalent le carré de  $\Gamma Z$ . Les retranchant tous deux, il résulte que le produit de  $BE$  par  $EZ$  est égal à deux fois le produit de  $\Gamma\Delta$  par  $\Delta E$ <sup>29</sup>. Mettant le produit de  $BE$  par  $BZ$  en commun, le(s) produit(s) de  $EB$  par  $BZ$  et de  $BE$  par  $EZ$  – et ceci est égal au carré de  $EB$  – égaleront le(s) produit(s) de  $EB$  par  $BZ$  et, deux fois, de  $\Gamma\Delta$  par  $\Delta E$ <sup>30</sup>.

[5] Dans tout triangle rectangle, si l'on découpe de l'un des côtés comprenant l'angle droit un (segment) égal à l'autre côté, le carré des deux côtés comprenant l'angle (droit), disposés comme en une seule ligne, et le carré de leur différence sont le double du carré de l'hypoténuse.

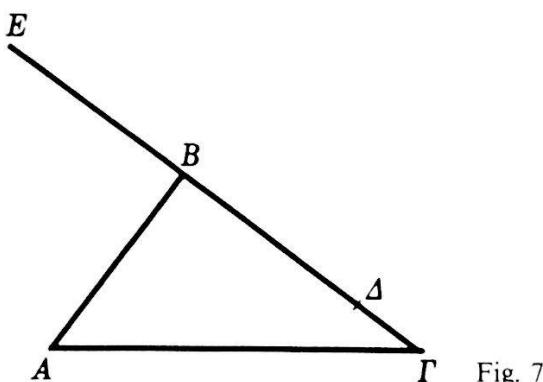


Fig. 7

Illustration. Soit le triangle  $AB\Gamma$ , rectangle en  $B$ , et (soit)  $B\Delta$  égale à  $AB$ . Nous menons  $BE$  égale à  $AB$ . Je dis que les carrés de  $E\Gamma$ ,  $\Gamma\Delta$  sont le double du carré de  $A\Gamma$ <sup>31</sup>.

Comme  $E\Delta$  est divisée en deux moitiés au point  $B$  et que  $\Delta\Gamma$  lui est ajoutée, les carrés de  $E\Gamma$ ,  $\Gamma\Delta$  sont le double des carrés de  $EB$ ,  $B\Gamma$ . Mais les

27 Donc:  $(AB + B\Gamma + A\Gamma)^2 = 2B\Gamma (AB + B\Gamma + A\Gamma) + 2AB \cdot A\Gamma$ .

28 Comme  $\Gamma Z = B\Gamma$ ,  $\Gamma$  est le milieu de  $BZ$ , et  $ZE$  est un segment ajouté; donc (II 6)  $BE \cdot EZ + \Gamma Z^2 = \Gamma E^2$ .

29 Comme nous l'avons déjà fait précédemment, nous introduisons dans la relation déterminée par II 6 les résultats de l'application de II 4, soit  $\Gamma E^2 = \Gamma\Delta^2 + \Delta E^2 + 2\Gamma\Delta \cdot \Delta E$ , et de I 47, soit  $\Gamma Z^2 = \Gamma\Delta^2 + \Delta E^2$ ; nous obtenons ainsi  $BE \cdot EZ = 2\Gamma\Delta \cdot \Delta E$ .

30 Ajoutant des deux côtés de l'égalité précédente  $BE \cdot BZ$ , nous obtenons  $BE (EZ + BZ) = 2\Gamma\Delta \cdot \Delta E + BE \cdot BZ$ , qui s'écrit aussi  $BE^2 = 2AB \cdot A\Gamma + 2BE \cdot B\Gamma$ ; c'est la conclusion cherchée.

31 Donc:  $E\Gamma^2 + \Delta\Gamma^2 (= (B\Gamma + BA)^2 + (B\Gamma - BA)^2) = 2A\Gamma^2$ .

carrés de  $EB$ ,  $B\Gamma$  sont égaux au carré de  $A\Gamma$ . Donc les carrés de  $E\Gamma$ ,  $\Delta\Gamma$  sont le double du carré de  $A\Gamma$ <sup>32</sup>. C'est ce que nous voulions démontrer.

Fin (de l'extrait) du livre  
des propriétés du triangle rectangle par Archimède

#### 4. Sur l'authenticité de ce fragment

Le millénaire que l'on compte entre Archimède et l'époque des traductions en arabe et les quelque six siècles qui séparent ladite époque et la transcription du texte conservé sont largement suffisants pour permettre des altérations, grecques ou arabes, du texte original. Aussi nous faut-il soulever la question de l'authenticité du fragment que nous avons étudié, les réponses extrêmes étant l'une que le texte dont il provient est d'origine arabe – et donc l'attribution sans fondement –, l'autre que ce texte est intégralement l'œuvre d'Archimède.

##### a) Que ce fragment est d'origine grecque

Il n'est guère douteux que le texte descende d'un original grec. Outre le fait que les sources arabes qui nous mentionnent la traduction d'un traité sur les propriétés des triangles rectangles sont très sûres, certaines particularités d'expression du fragment en trahissent l'origine. Ainsi, la version arabe contient ça et là quelques incongruités dans la syntaxe de certaines phrases (concordance des temps fautive, absence de terme de liaison) qui toutes s'expliqueraient par une difficulté du traducteur à rendre une construction au génitif absolu. D'autre part, lorsqu'il est question de l'élévation au carré de la somme de deux segments de droites, il est spécifié que le carré est engendré par (autrement dit: que son côté est constitué par) les deux segments *idhā ja' alā ka-khaṭ wāhid* = ὡς ἀπὸ μιᾶς (*γραμμῆς* = *εὐθείας*), ce qui est certes conforme à une vue purement géométrique (cf. Eléments II 8 ou II 10; Pappus, Collectio [ed. Hultsch], p. 70, 5), mais serait insolite, des siècles plus tard, sous la plume d'un auteur musulman – lequel eût simplement parlé de deux segments «ajoutés» (*maj-mū'ain*).

##### b) La question de l'attribution à Archimède

Les sources bibliographiques arabes mises à part, nous n'entendons guère parler de l'ouvrage d'Archimède sur les propriétés des triangles rectangles. Mention en est toutefois faite dans un autre texte en arabe attribué à Archimède, celui des Lemmes, dont la proposition 5 renvoie au traité – ou à un commentaire au traité – (d'Archimède) «Sur les triangles rectangles» (*fī'l-mu-*

<sup>32</sup> Nous avons à nouveau un segment,  $E\Delta$ , divisé en son milieu,  $B$ , et auquel est ajouté un autre segment,  $\Delta\Gamma$ . Utilisant cette fois II 10, nous avons directement  $E\Gamma^2 + \Delta\Gamma^2 = 2(BE^2 + B\Gamma^2) = 2A\Gamma^2$ , du fait que  $BE = BA$  et par I 47.

*thallathāt al-qā’imat al-zawāyā = Περὶ ὀρθογωνίων τριγώνων*). Qui que soit l'auteur de cette référence (diverses mains ont retouché les Lemmes), c'est une autre indication qu'à l'époque islamique au moins Archimède était bien considéré comme l'auteur d'un ouvrage relatif aux triangles rectangles.

Mais là s'arrêtent les traces, car nous n'avons aucune mention en grec d'un tel traité. L'attribution à Archimède reste donc à vérifier, et le premier pas sera d'examiner le contenu du fragment pour décider si les raisonnements mathématiques qui y apparaissent peuvent vraiment être l'œuvre de celui que l'on regarde comme l'un des plus grands mathématiciens de l'antiquité.

Comme nous l'avons vu, la première proposition enseigne que, pour tout triangle rectangle de côtés  $a$ ,  $b$ ,  $c$  (hypoténuse), et de hauteur  $h$ , on a la relation

$$(a + b + c)^2 = 2c(a + b + c + h),$$

que l'on peut aussi écrire

$$(a + b + c)^2 = 2c(a + b + c) + 2c \cdot h.$$

1° Comme  $c \cdot h = a \cdot b$  (supra, p. 23), on a

$$(a + b + c)^2 = 2c(a + b + c) + 2a \cdot b,$$

qui est la proposition 4.

2° Comme  $2c \cdot h = 4S$  où  $S$  est la surface du triangle (cf. ibid.), on a

$$(a + b + c)^2 - 2c(a + b + c) = 4S,$$

donc

$$(a + b + c) \cdot (a + b - c) = 4S,$$

qui est la proposition 3.

3° Effectuant la multiplication à droite dans l'égalité de 1°, nous obtenons

$$(a + b + c)^2 = 2a \cdot c + 2b \cdot c + 2c^2 + 2a \cdot b;$$

ajoutant alors à droite la quantité nulle  $a^2 + b^2 - a^2 - b^2$ , et regroupant les termes de manière appropriée, nous aurons

$$(a + b + c)^2 = (a + c)^2 + (b + c)^2 - (a - b)^2,$$

qui est la proposition 2.

4° Quant à la proposition 5, elle se déduit immédiatement du théorème de Pythagore, puisque, si  $c^2 = a^2 + b^2$ , alors  $2c^2 = 2(a^2 + b^2) = (a + b)^2 + (a - b)^2$ . L'identité sur laquelle repose cette déduction était parfaitement banale à l'époque d'Archimède: non seulement elle était employée dans l'enseignement élémentaire en Grèce, mais les Mésopotamiens en usaient plus d'une quinzaine de siècles auparavant<sup>33</sup>.

On voit ainsi que les quatre dernières propositions se déduisent, par de petites manipulations de calcul, de la première proposition et/ou de relations parfaitement élémentaires. Il n'était en tout cas nullement nécessaire de leur apporter à chacune une démonstration indépendante et complète, et ce n'est certes pas Archimède qui aurait agi d'une manière aussi légère. C'est encore

33 Cf. Mus. Helv. 43 (1986) 79.

moins lui qui aurait démontré un théorème (le troisième) dont le contenu avait été établi de manière incidente dans une démonstration antérieure (la première; voir notes 13–14), et l'aurait à nouveau établi dans une démonstration ultérieure (la quatrième; voir note 29). Nous pouvons donc déjà dire que ni la cinquième proposition, ni les démonstrations des deuxième, troisième, et quatrième propositions – si la disposition actuelle suit l'ordre originel de succession des propositions – ne sauraient remonter à Archimède.

Il est apparu des remarques générales sur les textes d'Archimède connus dans leur seule version arabe (cf. § 1) que ceux-ci avaient été fortement remaniés et étaient même parfois composés d'éléments hétérogènes. Dès lors, il n'est pas particulièrement surprenant de voir que trois des théorèmes de notre fragment – les trois premiers – contribuent à la disparité d'un autre traité: on les trouve incorporés dans le texte sur la construction de l'heptagone régulier (n° 3 de la liste), qui, dépouillé des parties qui – comme ces trois théorèmes – sont sans rapport avec le sujet, remonte certainement à une recherche spécifique d'Archimède.

A défaut d'éclairer de quelque manière la construction de l'heptagone régulier, la présence des trois théorèmes dans le traité est d'un grand intérêt pour l'histoire de notre fragment. En premier lieu, on peut remarquer que, par cette incorporation, ils se trouvent encore une fois associés au nom d'Archimède. Ensuite, une comparaison montre que leurs démonstrations sont différentes de celles du fragment mais que toutes ont en commun ce curieux mélange de faiblesse de fond et de rigueur dans la forme qui est le propre des commentateurs tardifs de mathématiciens classiques. Enfin, dans les deux traditions, la succession des théorèmes est la même – à la différence mineure près que dans le traité sur l'heptagone des additions d'origines grecque et arabe sont venues s'insérer entre eux.

La similitude du contenu et de l'ordre des propositions et les différences dans leurs démonstrations nous amènent à poser une première conjecture. Dans la basse antiquité circulait une série d'énoncés de propositions relatives au triangle rectangle. Deux copies furent, chacune de son côté, augmentées de démonstrations voire de compléments. Alors que l'une des versions gardait son indépendance, l'autre fut rattachée au traité sur l'heptagone<sup>34</sup>. Toutes deux retrouvèrent un sort commun en ce qu'elles furent traduites en arabe sans qu'elles laissassent nulle trace dans l'antiquité grecque et le moyen âge byzantin.

Si la part d'Archimède dans notre fragment s'est rétrécie comme peau de chagrin, l'association de ces propositions à son nom dans les deux situations décrites nous amène à poser une deuxième conjecture: Archimède ne peut être totalement étranger au fond du traité. Or ce fond, quel est-il? Négligeant la cinquième proposition de notre fragment, parfaitement banale et donc claire-

<sup>34</sup> Un autre cas d'amalgame de traités scientifiques dans la basse antiquité a été mentionné dans le *Mus. Helv.* 45 (1988) 194–195.

ment ajoutée, il nous reste quatre énoncés dépendant d'une seule et même relation, *qui établit un lien entre la longueur des côtés et la surface d'un triangle rectangle*.

Or, ceci n'est qu'un cas particulier d'une relation tout à fait générale, valable pour un triangle quelconque, et déjà connue dans l'Antiquité puisque Héron d'Alexandrie la démontre dans ses *Metrica*<sup>35</sup>. Toutefois, si l'on en croit des sources arabes, cette relation était connue auparavant et remonterait à Archimète. On trouve en effet dans un passage de l'*Istikhrāj al-autār fī'l-dā'ira* (Détermination des cordes dans le cercle) du Persan al-Bīrūnī (972/3–1048) le passage suivant<sup>36</sup>: «Méthode d'Archimète pour (calculer) la surface des triangles par les excès. Archimète a dit: On multiplie la moitié de la somme des trois côtés du triangle par l'excès qu'elle a sur l'un d'eux, puis le résultat par l'excès qu'elle a sur le second, puis ce que l'on a obtenu par l'excès qu'elle a sur le troisième, et l'on prend la racine (carrée) du résultat; ce qui provient est la surface du triangle»<sup>37</sup>.

Il serait tentant de voir dans les propositions du fragment des survivances de lemmes ou de corollaires, traitant du cas particulier du triangle rectangle, ayant à quelque époque fait partie d'une étude plus générale d'Archimète sur la détermination de la surface d'un triangle dont on connaît la longueur des côtés. Regrettions seulement que cette reconstruction doive rester hypothétique, étayée qu'elle n'est que par diverses suppositions, présomptions, ou extrapolations.

35 Voir le vol. III des *Heronis Alexandrini Opera*, ed. H. Schöne (Leipzig 1903) 18sqq.

36 *Rasā'ilu l-Bīrūnī* (Haiderabad 1367/1948) I, p. 61 (traduit ci-après); traduction, selon un autre manuscrit, de H. Suter, *Das Buch der Auffindung der Sehnen im Kreise von (...) el-Bīrūnī*, *Bibliotheca mathematica*, 3. F., 11 (1910) 39.

37 Si a, b, c sont les côtés du triangle et p leur somme, alors la surface est donnée par

$$S = \sqrt{\frac{p}{2} \left( \frac{p}{2} - a \right) \left( \frac{p}{2} - b \right) \left( \frac{p}{2} - c \right)}.$$

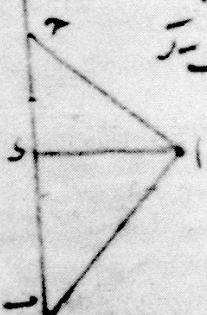
مَرْ دَكْنَ مَدْ شَلْ مَهْ دَهْ مَأْ شَلْ دَهْ فَرْجْ مَأْ مَعْ مَرْجَعْ دَهْ مَشْ رَعْ دَهْ  
غَادْ اَقْسَنَا اَهْ اَمْزَوْ مَنْ قَسَهْ دَهْ خَدْ عَلَنَا مَا اَرْ دَنَا

# مسنونات خواص المثلث لـ شمس الدين

كل شئ قام الراوه فان ورع اضلاعه الثالثة اذا جعلت كخط واحد مساو  
لصف سطح القائم ازوايا الذي يحيط به اضلاعه الثالثة والرابعة المزوج  
من الراوه الثالثة الى دترها اذا جعل المجموع خط واحد في وزز الراوه  
الثالثة مثل اية زاوية آمنة قامه اقول ان ورع  
اضلاعه اذا جعلت كخط واحد مساو لصفها مع ابعاد دهراوه

فِي الْمَاعِدِنِ وَهُنَّ حَرْتَنْ طَنْجَحْ وَعَلَى سَفَامَةِ وَعَصَلْ  
مِنْ حَدَّهَ شَلْ أَهَدَهَ رَمْلَتَ وَرَجَحْ شَلْ أَدَهَ عَصَلْ حَرَطَ  
شَلْ وَهَ فَطَرَ قَمْ عَلَى وَهَ سَعِينَ وَرَنْدَفِهَ طَرَفَزْ بَرَ  
فِي رَطَحْ مَرْجَ طَهَ شَلْ مَرْجَ دَرَ وَمَرْجَ رَهَ شَلْ  
رَسْنَيْ رَهَ وَضَرَبَ رَهَ فِي وَهَ حَرْتَنْ وَرَجَعَ  
رَهَ وَهَ شَلْ مَرْجَ طَهَ الْمَادِي لَعْتَ عَدَسْفَطَ

المضاادة بمعنى ضرب في رطأ مثل ضرب في حَمْض حَمْس الماء  
ممعود في طَهَ وَهُنَّ الْمُقَوِّمُونَ فِي الْأَعْدَادِ مِنْهُمْ مَنْ يَوْمَ الْحِسَابِ  
فِي رَطَّابَةِ فَسَبَّةِ حَمْسَةِ طَهَ الْمُنْهَى رَطَّابَةِ طَهَ وَادَارَ كَبَنَةَ كَبَّةِ  
طَهَ الْمُنْهَى رَطَّابَةِ طَهَ وَهُنَّ وَسَطَانُونَ فِي الْمُنْهَى ضَرَبَ حَمْسَهِ  
فِي طَهَ مِثْقَلَهِ حَمْسَهِ طَهَ وَهُنَّ مَا يَرَوْنَ مَا يَبْيَأُنَّ هُنَّ كُلُّ شَيْءٍ فَلَمْ يَرَوْنَ



Leere Seite  
Blank page  
Page vide