

**Zeitschrift:** Mémoires de la Société Fribourgeoise des Sciences Naturelles.  
Mathématique et physique = Mitteilungen der Naturforschenden  
Gesellschaft in Freiburg. Mathematik und Physik

**Herausgeber:** Société Fribourgeoise des Sciences Naturelles

**Band:** 6 (1948)

**Artikel:** Studie über die dynamische Linse

**Autor:** Briner, Hermann

**Kapitel:** IX: Korrektur der Einzelfläche

**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-306974>

### Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 08.02.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

## IX. Korrektur der Einzelfläche

### § 1. Veränderliche Dicke

In Abschnitt VIII § 3 und § 4 wurde dargelegt, wie sich die Scheiben bei verschiedener Dicke verhalten: Dünne Scheiben (Silikatglas von 0,18 und 0,17 mm) geben Linsen mit sphärischer Aberration, während dickere (0,7 mm) bereits Überkorrektur ergeben (antisphärisch). Bei mittleren Dicken (0,4 mm) gehen die Linsen von der antisphärischen Aberration bei schwachem Druck zur sphärischen über, wenn der Druck steigt (also die Brennweite sich verkürzt). (Siehe auch Abb. 22.)

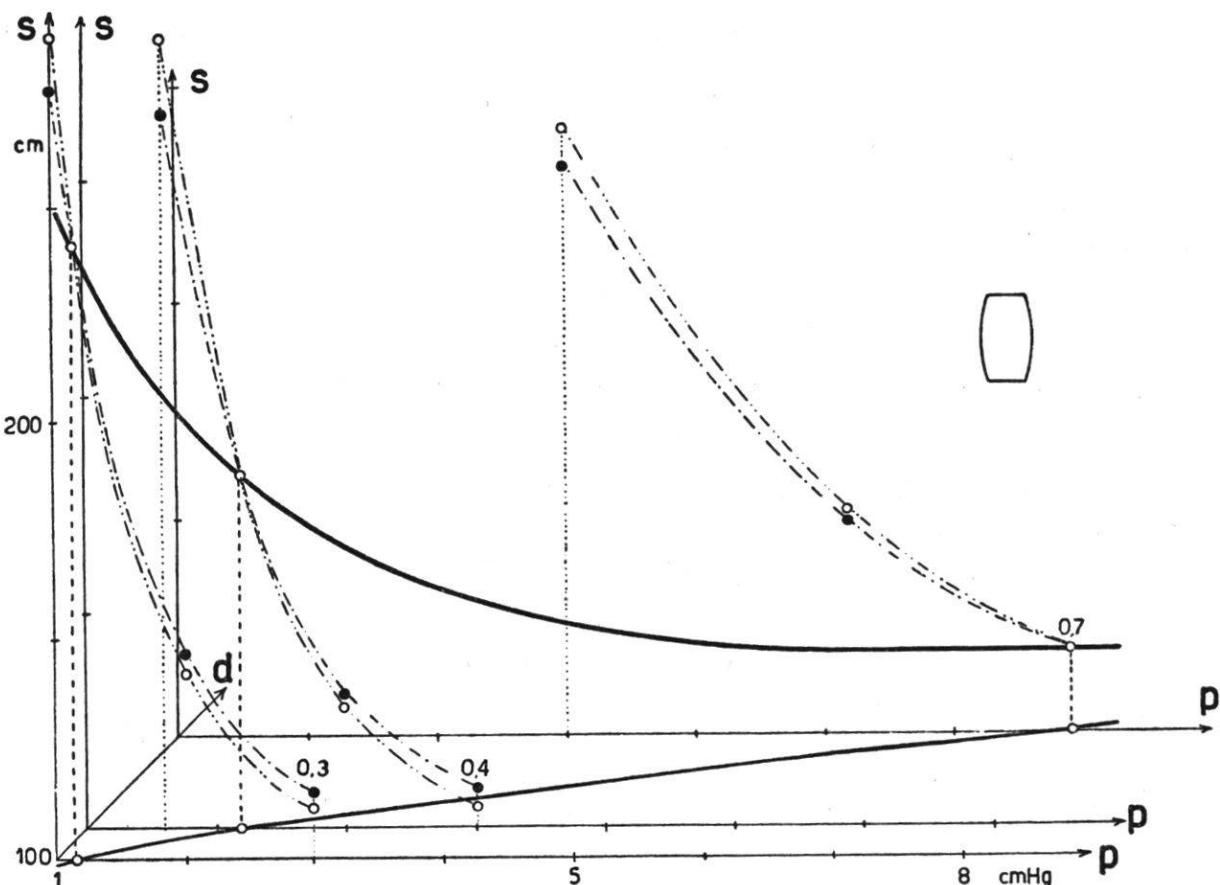


Abb. 25. Korrektur der Aberration. Überzogenes Silikatglas.  
 $d = 0,3 \text{ mm} ; 0,4 \text{ mm} ; 0,7 \text{ mm}$ ,  $\phi = 100 \text{ mm}$ ,  $\phi_s = 92 \text{ mm}$ .

Für jede Linse mit Scheiben mittlerer Dicke gibt es also einen bestimmten Druck, bei dem sich die Kurven der Brennweitenänderungen für die mittleren Zonen (0,5 und 1,0 cm von der Linsenachse) schneiden. Trägt man in einem räumlichen Koordinatensystem auf : Brennweite z, Druck x und Scheibendicke y, so erhält man in Ebenen parallel zu (x, z) solche sich schneidende Kurven der Brennweitenänderung (Abb. 25).

Die Raumkurve, welche alle diese Schnittpunkte miteinander verbindet, ist die Linie, längs der man sich zu bewegen hat, wenn die Aberration in einem größeren Intervall der Brennweite korrigiert sein soll.

Das Durchlaufen der soeben konstruierten Raumkurve bedeutet, daß bei steigendem Druck die Dicke des Glases zunehmen muß. Diese

Möglichkeit der Korrektur der dynamischen Linse wäre vielleicht die idealste. Um sie zu realisieren, könnte man zum Beispiel folgenden Weg einschlagen : In gewissen, zu berechnenden Abständen werden außerhalb der eigentlichen Linsenschalen weitere Schalen eingespannt, deren Dicke sich gleichfalls berechnen ließe. Die innerste Schale (welche die Flüssigkeit abgrenzt), würde dann bei der Durchbiegung auf die zweite stoßen und diese dann so weit durchbiegen, bis die dritte berührt wird. Alle drei biegen sich weiter und nehmen dann die vierte Scheibe mit usw. (Abb. 26). Auf diese Art würde die wirksame Dicke der Scheibe mit der Durchbiegung zunehmen. Allerdings wird dieses Vorgehen bei Silikatglas erschwert wegen der geringen bei diesem

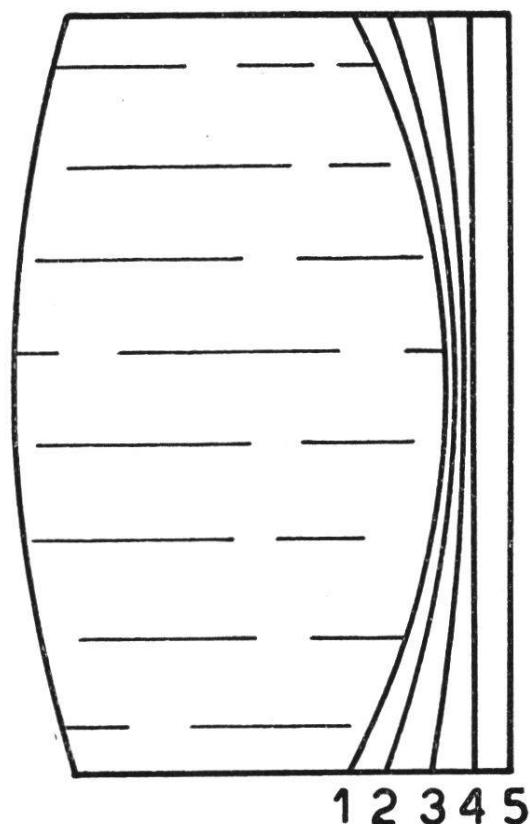


Abb. 26. Korrektur durch veränderliche Dicke.

Material zulässigen Durchbiegung. Mit Plexiglas ist die Realisierung eher möglich, denn bei diesem zeigt sich derselbe Zusammenhang zwischen Dicke und Aberration (Abb. 23 und 24) und der größere Betrag der erreichbaren Durchbiegung würde ein Anbringen der äußeren Scheiben wirksam erlauben.

## § 2. Veränderlicher Radius

Die Überlegung ist hier der vorhergehenden analog. In Kap. VIII § 5 (siehe auch § 4) sahen wir, daß in Bezug auf die Aberration eine Zunahme der Dicke der Linsenschalen einer Abnahme des Radius bei konstanter Dicke gleichkommt. Also wäre es denkbar, statt der bei Druckanstieg zunehmenden Dicke einen abnehmenden Radius einzuführen. Dazu kann am Linsenrand eine Fläche angebracht werden, an die sich der Scheibenrand beim Durchbiegen anschmiegt (Abb. 27). Aus einer systematischen Untersuchungsreihe über Linsen mit verschiedenem Radius wäre es leicht, die Form dieser Anschmieгfläche so zu konstruieren, daß der effektive Radius immer derjenige wäre, für den die Linse beim entsprechenden Druck keine Aberration aufweist. Auch dieses Verfahren eignet sich nur bei größerer Durchbiegung (also bei Plexiglas).

Die Figur 28 zeigt wieder die räumliche Disposition der Meßergebnisse mit Scheiben gleicher Dicke, aber in verschiedenen Durchmessern eingespannt. Durch Verbinden der korrigierten Punkte ergibt sich wieder eine Raumkurve, die im beschriebenen Verfahren mit veränderlichem Radius durchlaufen werden muß. — In jeder der drei Kurvenscharen ist ein Gebiet vorhanden, in dem die drei inneren Zonen (Linsenöffnung von 3 cm) nahe beieinanderliegende Brennweiten besitzen. In den Abb. 25 und 28 wurden übersichtshalber nur die Kurven der beiden inneren Zonen eingezeichnet.

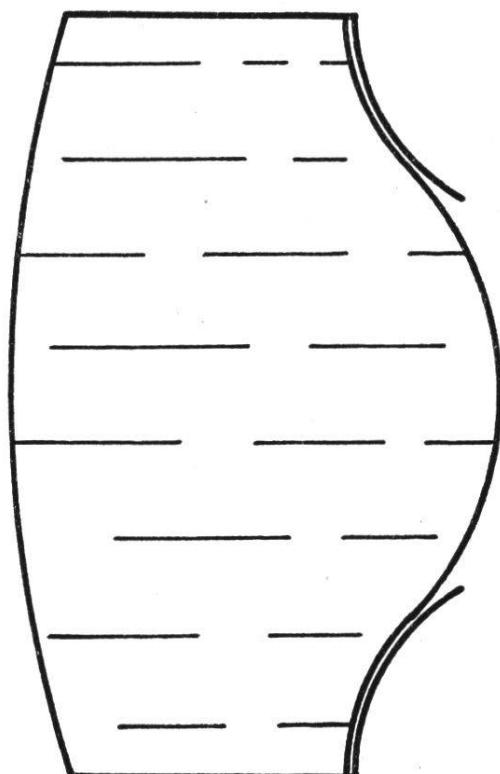


Abb. 27. Korrektur durch veränderlichen Radius.

## § 3. Geformte Scheiben

Eine Annäherung der einzelnen Linsenschale an eine Cartesianische Fläche (zur Korrektur) ist dadurch möglich, daß man das Glas entsprechend schleift. Die Dicke der Scheibe wird dann eine solche Funk-

tion des Radius, daß unter dem Flüssigkeitsdruck die elastische Linie eines Meridians eine vorgegebene Kurve bildet. Diese Kurve braucht nicht notwendigerweise cartesianisch zu sein ; bei geeigneter Abhängigkeit der Dicke vom Radius steht die Möglichkeit offen z. B. Kreise oder

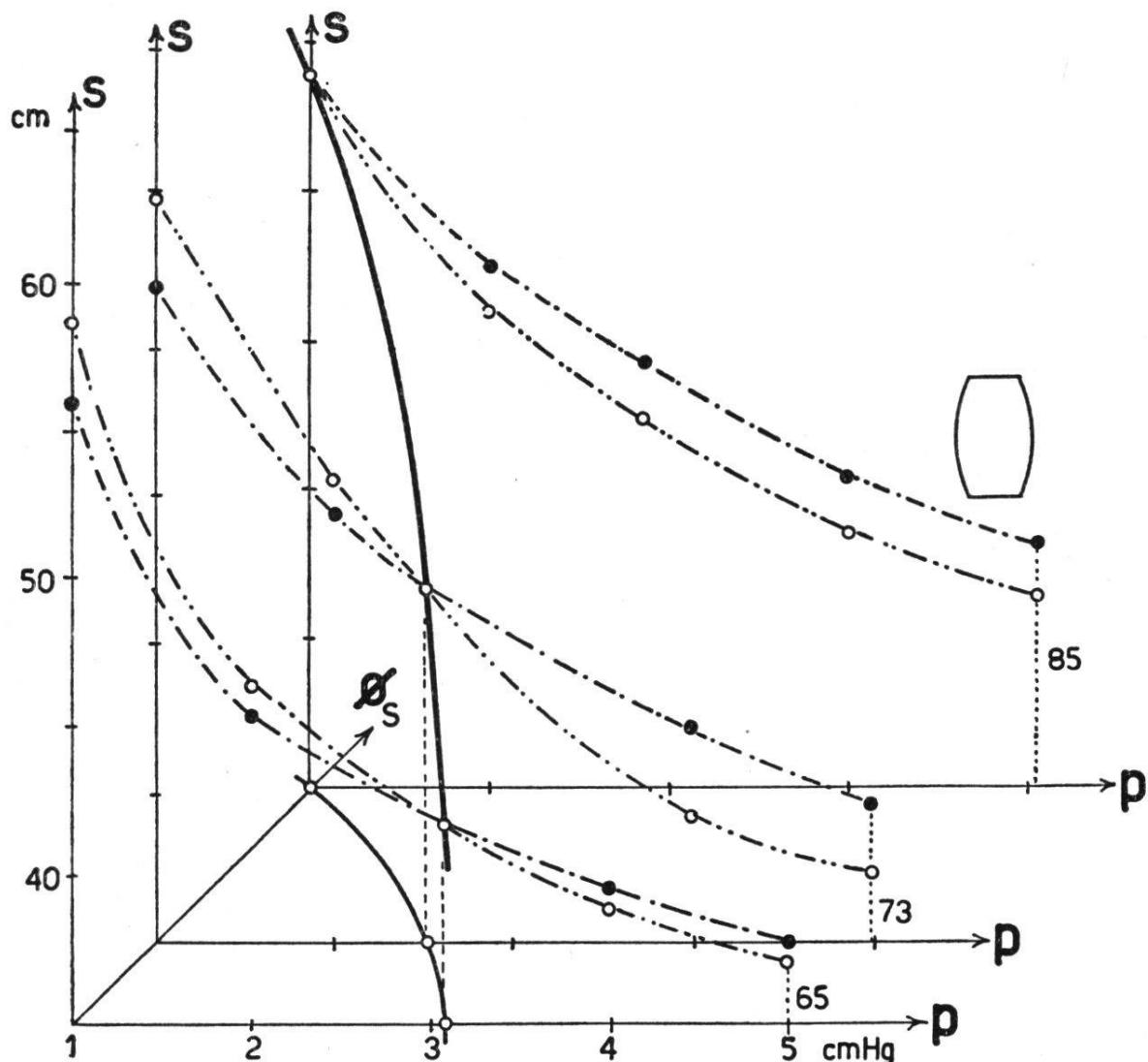


Abb. 28. Korrektur der Aberration.  
Plexiglas  $d = 0,5$  mm,  $\phi_s = 65, 73, 85$  mm.

Parabeln verschiedener Ordnung als Meridian der durchbogenen Scheibe zu erhalten. Die gewünschte elastische Linie bei entsprechend vermittelter Dickenfunktion wird nur bei einem bestimmten Druck erwartet.

Diese Frage wird im folgenden theoretisch untersucht und es wird sich ergeben, daß im Falle geringer Durchbiegung sich eine solche Randbedingung finden läßt, daß für jeden Druck eine Parabel zweiter Ordnung entsteht. Weiter wird sich ergeben, daß das mathematische Problem des Aufsuchens der Dickenfunktion bei großer Durchbiegung zu einem

physikalisch unrealisierbaren Resultat führt. Diese Unmöglichkeit besteht sogar im Idealfall der frei aufliegenden Platte. Wird die Platte eingespannt, entsteht in der Nähe des Randes ein Wendepunkt, ein Umstand, der in der Wahl der elastischen Linie eine starke Einschränkung bedeutet und den Kreis oder die Parabel als elastische Linie ausschließt. Aus diesem Grunde wurde nur mit einer im Auflagekreis frei drehbaren Platte (Schwingringe) gerechnet.

Zur Diskussion dieser Korrekturmöglichkeit wurde die Differentialgleichung der Scheiben-Dicke als Funktion des Radius für eine offen gelassene Durchbiegungsform abgeleitet und integriert. Aus der so erhaltenen Formel wurden dann die Lösungen für den Kreis und die Parabel als Meridian gesucht. Diese Berechnung mußte für kleine und große Durchbiegungen getrennt durchgeführt werden. Der Ansatz mit der neutralen Schicht, welche Gebiete mit Zug- und solche mit Druckbeanspruchung trennt, ist nur für Durchbiegungen richtig, die kleiner sind als die Scheibendicke. Bei größerer Durchbiegung hat es keinen Sinn mehr von neutraler Schicht zu sprechen, das Material ist dann in seinem ganzen Querschnitt auf Zug beansprucht.

Da sich für den Kreis und die Parabel bei großer Durchbiegung unrealisierbare Lösungen ergeben, wird man für diese Korrekturmöglichkeit mit so dickem Plexiglas arbeiten müssen, daß die Durchbiegungen selbst bei den kleineren Brennweiten in der Größenordnung der Scheibendicke bleiben. Es besitzt dann die erste Rechnung Gültigkeit. Außerdem ist es leichter dem Plexiglas die gewünschte Form zu geben als dem härteren, brüchigeren und viel dünneren Silikatglas.

a) *Differentialgleichung der elastischen Linie einer Scheibe nicht konstanter Dicke, bei kleiner Durchbiegung.*

Ist  $x$  die von der Mitte aus gezählte Koordinate des Meridians einer Kreisscheibe (d. h. der Radiusvektor), so möchte man eine Funktion  $h(x)$  für die Dicke finden, so daß bei Belastung die Meridianlinie eine gegebene Form annimmt.

Die gewöhnliche Differentialgleichung für die Durchbiegung einer Kreisscheibe kann man in dem vorliegenden Fall nicht brauchen, denn jene ist für konstantes  $h$  abgeleitet. Die Herleitung der Differentialgleichung etwa nach Föppl<sup>1</sup> diene als Weg zur Aufstellung der gesuchten Gleichung mit  $h = h(x)$ .

<sup>1</sup> FÖPPL : Technische Mechanik, Band III : Festigkeitslehre.

$O(x, z)$  sei ein Punkt der neutralen Faser. Durch diesen Punkt legen wir einen Querschnitt durch den Träger. Dieser ursprünglich senkrechte Schnitt neigt sich bei der Belastung um den Winkel  $\omega$ .  $P$  sei ein Punkt des Querschnittes,  $\lambda$  ist sein Abstand von  $O$ . Als  $z$ -Achse wählen wir die Symmetriechse, d. h. die Achse durch den Scheibenmittelpunkt (Abb. 29).

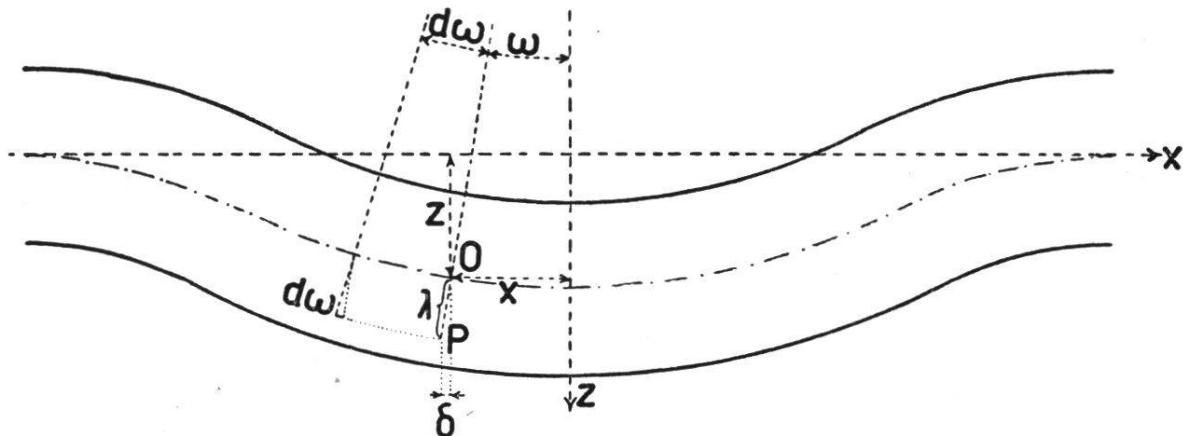


Abb. 29.

Der Kreis durch  $P$  mit Mittelpunkt auf der  $z$ -Achse dehnt sich bei der Durchbiegung. Sein Radius wächst um

$$\delta = \lambda \sin \omega \quad (1)$$

also dehnt sich der Umfang um  $2\pi\delta$ . Die spezifische tangentielle Dehnung ist somit :

$$\varepsilon_t = \frac{\lambda \sin \omega}{x} \quad (2)$$

Die Faser durch  $P$  ist in ihrem durch die Querschnitte  $\omega$  und  $\omega + d\omega$  begrenzten Abschnitt um  $\lambda d\omega$  länger geworden. Infolgedessen ist die spezifische radiale Dehnung

$$\varepsilon_r = \frac{\lambda d\omega}{d x} \quad (3)$$

Bei reinem Zug gilt das Hook'sche Gesetz

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} \quad \text{und} \quad \varepsilon_y = -\frac{1}{m} \frac{\sigma_x}{E}$$

Für die Tangential- und Radialspannung ergibt sich (unter Berücksichtigung von (2) und (3))

$$\sigma_t = \frac{m E}{m^2 - 1} \lambda \left( m \frac{\sin \omega}{x} + \frac{d \omega}{d x} \right) \quad (4)$$

$$\sigma_r = \frac{m E}{m^2 - 1} \lambda \left( \frac{\sin \omega}{x} + m \frac{d \omega}{d x} \right) \quad (5)$$

Jetzt schneiden wir aus der Kreisscheibe einen Sektor mit dem beliebig kleinen Winkel (mit Scheitel in der z-Achse)  $d\varphi$  heraus und untersuchen die Spannungen an seinen Seitenflächen. Im Sektor selber grenzen wir ein Element durch die Kreise mit Radius  $x$  und  $x + dx$  ab (Abb. 30).

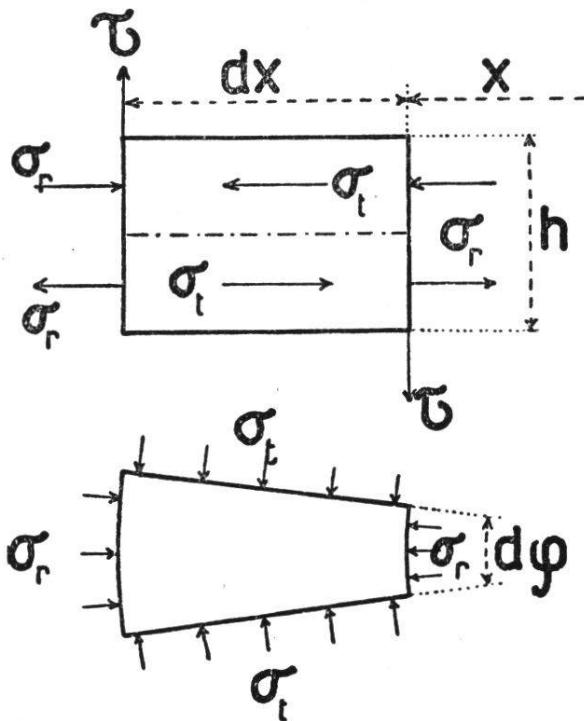


Abb. 30.

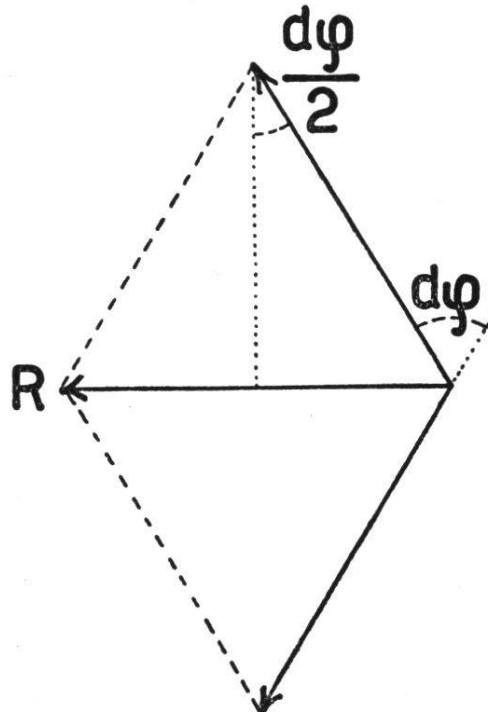


Abb. 31.

I. Die Tangentialspannungen  $\sigma_t$ . Zu jedem  $\sigma_t dF$  der einen Fläche gehört ein gleich großes entgegengesetzt gerichtetes  $\sigma_t dF$  der anderen Fläche. Alle Richtungen schneiden sich in der vertikalen Symmetrieebene des Plattenelementes. Ihre Resultierende fällt in diese Symmetrieebene (Abb. 31).

$$R = \sigma_t dF d\varphi$$

Die Kraft  $R$  wirkt im Abstand  $\lambda$  von der neutralen Faserschicht. Ihr Moment in Bezug auf diese Schicht beträgt deswegen:  $\sigma_t \cdot dF \cdot d\varphi \cdot \lambda$ . Das gesamte Moment der Tangentialspannungen ist folglich

$$d\varphi \int \sigma_t \lambda dF = d\varphi \frac{m E}{m^2 - 1} \left( m \frac{\sin \omega}{x} + \frac{d\omega}{dx} \right) \int \lambda^2 dF$$

Das Integral erstreckt sich über die Meridianschnittfläche der Länge  $dx$  (Abb. 32). Dabei soll jetzt angenommen werden, die Dicke  $h$  sei

Funktion von  $x$ . Einschränkend soll verlangt sein, daß die neutrale Schicht auch Symmetrieebene ist (was aus der Definition der neutralen Schicht folgen muß). Unter Vernachlässigung von Differentialen höherer Ordnung berechnet sich das Integral zu

$$\int \lambda^2 dF = \frac{h^3(x)}{12} dx$$

$$\text{Moment der } \sigma_t = \frac{d\varphi}{12} \frac{mE}{m^2 - 1} \left( m \frac{\sin \omega}{x} + \frac{d\omega}{dx} \right) h^3(x) dx \quad (6)$$

Legen wir die Uhrzeigerrichtung für die Momente als positiv fest, so ist das Moment der  $\sigma_t$ -Kräfte negativ und folglich mit negativem Vorzeichen in die Momentengleichung einzusetzen.

II. Radialspannungen  $\sigma_r$ . In der zum Radius  $x$  gehörenden Schnittfläche bilden die  $\sigma_r$  das Moment :

$$\int \sigma_r \lambda dF = \frac{mE}{m^2 - 1} \left( \frac{\sin \omega}{x} + m \frac{d\omega}{dx} \right) \int \lambda^2 dF$$

$\int \lambda^2 \cdot dF$  ist das Trägheitsmoment des Rechteckes mit der Breite  $x d\varphi$  und der Höhe  $h(x)$ , also

$$\int \lambda^2 dF = \frac{h^3(x)}{12} x d\varphi$$

und das Moment der  $\sigma_r$ -Kräfte ist im Schnitt  $x$ :

$$\frac{d\varphi}{12} \frac{mE}{m^2 - 1} \left( \sin \omega + m x \frac{d\omega}{dx} \right) h^3 \quad (7)$$

An der Schnittfläche mit dem Radius  $x + dx$  haben die  $\sigma_r$  ein entgegengesetzt gerichtetes Moment. Auf das Trägerelement wirkt der Unterschied der beiden Momente, welcher gleich dem Differential des Ausdruckes (7) ist. Das Differential entspricht einem Anwachsen des Abstandes  $x$  um  $dx$ .

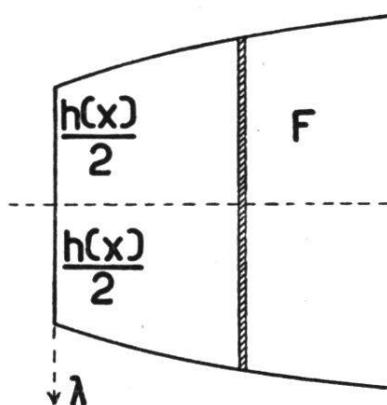


Abb. 32.

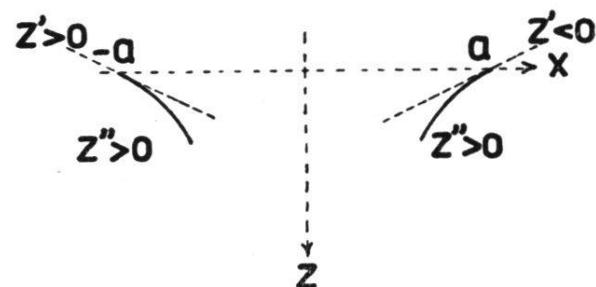


Abb. 33.

$$\text{Moment aller } \sigma_r = \frac{d\varphi}{12} \frac{mE}{m^2 - 1} \left\{ \left( \cos \omega \frac{d\omega}{dx} + m \frac{d\omega}{dx} + mx \frac{d^2\omega}{dx^2} \right) h^3 dx + \right. \\ \left. + \left( \sin \omega + mx \frac{d\omega}{dx} \right) 3h^2 h' dx \right\} \quad (8)$$

Dieser Ausdruck ist ohne Vorzeichenwechsel in die Momentengleichung einzuführen, denn das Moment der  $\sigma_r$ -Kräfte ist positiv.

III. Schubspannungen  $\tau$ .  $p$  sei der Druck auf das Flächenelement der Platte. Auf den Kreis mit Radius  $x$  drückt die Last  $\pi x^2 p$ . Die Schubkräfte an der Peripherie des Kreises halten dieser Last das Gleichgewicht. Auf den Teil im Sektor mit Winkel  $d\varphi$  kommt davon der Bruchteil  $d\varphi/2\pi$  also

$$\tau_x = \frac{d\varphi}{2\pi} \pi x^2 p = \frac{x^2 p}{2} d\varphi$$

Für den Schnitt mit Radius  $x + dx$  des Sektors ist

$$\tau_{x+dx} = \tau_x + \frac{d\tau}{dx} dx$$

Moment der  $\tau$  auf das Plattenelement.

$$\text{Mom. d. } \tau = \frac{x^2 p}{2} dx d\varphi \quad (9)$$

Das Moment ist positiv, also kein Vorzeichenwechsel.

IV. Momentengleichung. Für das Gleichgewicht muß die Summe aller Momente verschwinden. Daraus ergibt sich mit der Substitution

$$\frac{6(m^2 - 1)}{mE} p = N \quad (10)$$

die Differentialgleichung der elastischen Linie :

$$mxh^3 \frac{d^2\omega}{dx^2} - h^2 \left( -h + h \cos \omega + mh + 3 \frac{dh}{dx} mx \right) \frac{d\omega}{dx} + \\ + h^2 \left( -\frac{m}{x} h + 3 \frac{dh}{dx} \right) \sin \omega + Nx^2 = 0 \quad (11)$$

Für kleine Durchbiegungen ist  $\cos \omega = 1$ ,  $\sin \omega = \omega$ . Mit  $h = \text{konst.}$  wird die Gleichung (11) :

$$x^2 \frac{d^2\omega}{dx^2} + x \frac{d\omega}{dx} - \omega + \frac{N}{mh^3} x^3 = 0 \quad (12)$$

die von Föppl angegebene Differentialgleichung.

Der Zweck unserer Rechnung ist aber nicht der, die Gleichung für die Durchbiegung zu finden, sondern bei gegebener Durchbiegung und

Form der elastischen Linie die Funktion  $h = h(x)$  zu ermitteln. Es wird also  $z$  als bekannte Funktion von  $x$  vorausgesetzt. Die Gleichung (11) kann man zu einer solchen für  $h$  umordnen :

$$3 h' h^2 (m x^2 \omega' + x \sin \omega) + h^3 (m x^2 \omega'' - x \omega' + x \omega' \cos \omega + m x \omega' - m \sin \omega) + N x^3 = 0 \quad (13)$$

Ist  $a$  der Radius des Kreises, auf dem die Platte ruht, und wirkt die Belastung nur innerhalb des Auflagekreises, so ist für den über diesen Kreis herausragenden Teil der Scheibe dieselbe Differentialgleichung gültig, in der dann  $N = 0$  zu setzen ist. Die Randbedingungen (die wir weiter unten behandeln) sind dann nicht für  $x = a$  gültig, sondern für den Rand der Scheibe. Für  $x = a$  geben die Stetigkeitsbedingungen den Übergang von der Gleichung mit  $N$  zu der mit  $N = 0$ .

b) *Randbedingungen und Lösungsmöglichkeiten.*

Bei frei aufliegender Scheibe muß am Rand die Radialspannung verschwinden. Also für  $x = a$  muß sein :

$$(5) \quad \frac{\sin \omega}{x} + m \omega' = 0 \quad (14)$$

Es sei nun  $z = f(x)$  als elastische Linie vorgegeben. Es ist dann :

$$\omega' = \frac{f''}{1 + f'^2}$$

und       $\sin \omega = \pm \frac{f'}{\sqrt{1 + f'^2}}$

Wegen  $\omega < \pi/2$  muß hier die positive Wurzel genommen werden. Die Randbedingung wird :

$$\frac{f'}{x \sqrt{1 + f'^2}} + m \frac{f''}{1 + f'^2} = 0$$

Beide Ausdrücke  $\sqrt{1 + f'^2}, 1 + f'^2$  sind positiv. Die Randbedingung kann also nur dann erfüllt sein, wenn  $f'/x$  und  $f''$  entgegengesetzte Vorzeichen für  $x = a$  annehmen. Aus physikalischen Gründen (Durchbiegung) muß für  $x = a$  :  $f'$  negativ sein, also fordert die Randbedingung für  $x = a$  :  $f'' > 0$ . Dasselbe gilt wegen der Rotationssymmetrie auch für  $x = -a$ . (Dort ist  $f'$  positiv,  $f'/x$  negativ, also muß  $f''$  positiv sein.) Positive zweite Ableitung bedeutet (für unsere  $z$ -Richtung), daß die Krümmung nach unten verläuft. Ein Wendepunkt ist folglich nicht zu vermeiden (Abb. 33). Wir werden also für  $f(x)$  nicht irgend eine Funktion, wie z. B. einen Kreis oder eine Parabel wählen können.

Um trotzdem eine beliebige elastische Linie verlangen zu dürfen, ist die Randbedingung abzuändern. Es muß erreicht werden, daß nicht mehr für  $x = a$  gefordert wird  $\sigma_r = 0$ . Das geschieht, indem man am Rand ein Kraftmoment anbringt. Dies ist auch physikalisch plausibel, denn ein solches Moment kann den Wendepunkt durchdrücken (Abb. 34).

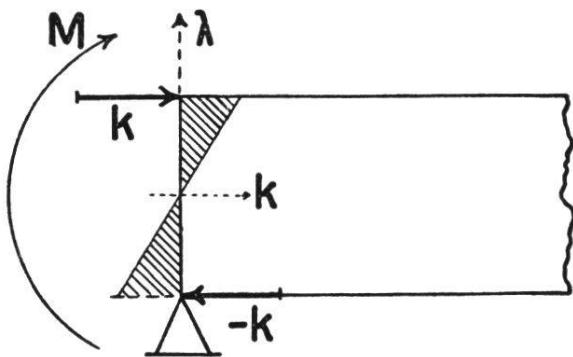


Abb. 34.

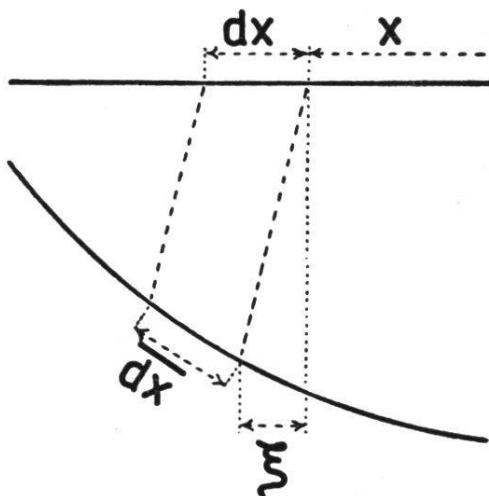


Abb. 35.  
(Zu Seite 74).

Ist  $H$  die Dicke der Scheibe am Rand, so wirke pro Längeneinheit des Umfanges das Moment

$$M = 2k \frac{H}{2}$$

welches hervorgebracht wird durch die Kräfte  $k$ , die tangential zu den Scheibenoberflächen wirken. Physikalisch ließen sich diese Kräfte schwer realisieren, deswegen führen wir andere Kräfte ein, die auf die ganze seitliche Fläche wirken sollen. Die Verteilung dieser Kräfte über die Seitenfläche geschehe nach dem Ansatz

$$k' = c \cdot \lambda$$

Die Momente dieser  $k'$ -Kräfte und der  $k$ -Kräfte sollen gleich sein

$$k \frac{H}{2} = \int_0^{H/2} c \lambda \cdot \lambda \cdot d\lambda = \frac{c}{3} \frac{H^3}{8}$$

woraus folgt :

$$c = \frac{12k}{H^2}$$

Die neue Randbedingung wird jetzt: ( $\sigma_r = \lambda c$ )

$$\frac{\sin \omega}{x} + m \frac{d \omega}{d x} = \frac{12 k}{H^2} \frac{m^2 - 1}{m E} \quad (15)$$

Durch dieses neue Moment am Rande bleibt die Differentialgleichung der elastischen Linie dieselbe, denn für die Beanspruchung ist es gleichmäßig über die ganze Fläche verteilt und käme als konstantes Glied in die Differentialgleichung zweiter Ordnung in  $z$ , also tritt es in der Gleichung zweiter Ordnung in  $\omega$  (dritte Ordnung für  $z$ ) nicht auf.

Für  $\sin \omega = \omega$  und  $\cos \omega = 1$  kann man die Differentialgleichung (13) schreiben:

$$h' = \frac{-1}{3 A} \left( h B + \frac{N x^2}{h^2} \right) \quad (16)$$

dabei ist

$$A = x \left( m \omega' + \frac{\omega}{x} \right); \quad B = m x \omega'' + m \omega' - m \frac{\omega}{x}$$

Die Randbedingung (15) wird

$$\frac{\omega}{x} + m \omega' = 12 \frac{k (m^2 - 1)}{H^2 m E} \quad (17)$$

c) *Integration für die Parabel zweiter Ordnung.*

Ist  $v$  der Parameter der Parabel und  $a$  die Apertur (der Radius der Scheibe), so lautet die Gleichung der Parabel:

$$z = 2 v (a^2 - x^2) \quad (18)$$

Die Randbedingung gibt für diesen Fall:

$$v = 3 \frac{k (m - 1)}{H^2 m E}$$

Durch Einsetzen von  $\omega = -z'$  in die Gleichung (16) (die Integrationskonstante bestimmt sich aus der Bedingung  $h = H$  für  $x = a$ ) erhält man die gesuchte Funktion

$$h^3 = \frac{H^2}{4} \frac{p}{k} (a^2 - x^2) + H^3 \quad (19)$$

Soll die elastische Linie bei jeder Belastung eine Parabel bleiben ( $v$  wird sich mit der Belastung ändern), genügt es den Quotienten  $p/k$  konstant zu halten. D. h. ändert man das Moment am Rand proportional zur Belastung (Flüssigkeitsdruck), was sich experimentell leicht durchführen lässt, ist die elastische Linie der nach (19) geformten Scheibe bei jeder Belastung eine Parabel zweiten Grades.

Für den Fall  $H = 0,1$  cm,  $h_o$  (Dicke in der Mitte) = 0,3 cm ergibt sich aus (19) :

$$p = 0,416 \text{ k}$$

d) *Integration für die Parabel vierter Ordnung.*

Die Gleichung dieser Parabel ist

$$z = v (a^4 - x^4) \quad (20)$$

Die Randbedingung gibt :

$$v = \frac{3 k (m^2 - 1)}{H^2 m E a^2 (1 + 3 m)}$$

und die Lösung der Gleichung (16) ist

$$h^3 = H^2 \frac{x}{a} \left[ \frac{p}{k} \frac{e^{\frac{16m}{3m+1}}}{2} a^4 \left( 1 - \frac{x}{a} \right) + H \right] \quad (21)$$

Auch in diesem Fall genügt das Konstanthalten von  $p/k$ , um den Charakter der Meridianlinie von der Belastung unabhängig zu machen. Physikalisch ist aber die Lösung (21) unmöglich, denn für die Mitte ( $x = 0$ ) folgt  $h_o = 0$ .

e) *Integration für Parabeln höherer Ordnung.*

Für die Parabel

$$z = v (a^n - x^n) \quad (22)$$

mit  $n > 2$  ergibt sich wieder eine ähnliche Formel wie (21), die also für  $x = 0$  den physikalisch unannehbaren Wert  $h_o = 0$  liefert.

f) *Integration für einen Kreis.*

Der Meridian sei ein Kreis mit Parameter (Radius)  $w$ . Seine Gleichung ist

$$z = \sqrt{w^2 - x^2} - \sqrt{w^2 - a^2} \quad (23)$$

Da die gemachte Annäherung  $\sin \omega = \omega$  und  $\cos \omega = 1$  dem Gleichsetzen von Kreis und Parabel äquivalent ist, ergibt sich hier dieselbe Lösung wie für die Parabel zweiten Grades, wie auch die Durchrechnung zeigt.

$$h^3 = \frac{H^2}{4} \frac{p}{k} (a^2 - x^2) + H^3 \quad (24)$$

Die Randbedingung liefert :

$$w = \frac{H^2 m E}{12 k (m - 1)}$$

also               $\frac{1}{w} = 4 v$

g) *Diskussion.*

Die Lösung für den Kreis und die Parabel zweiten Grades enthält den Faktor  $p/k$ . Soll die Formgebung der Membran für jede Durchbiegung dieselbe sein, ohne daß sich die elastische Linie bei verschiedenen Drucken in ihrem Charakter ändert, genügt es, diesen Wert konstant zu halten.

Es seien noch einige Zahlenwerte für die Dicken angegeben, um sich ein Bild der Gestalt der Scheibe zu machen :

$H = 0,1$ cm	$p/k = 1,0$	$h_o = 0,86$ cm
	0,5	0,68
	0,1	0,27
0,05	1,0	0,25
	0,5	0,199
	0,1	0,119

Diese Maße, namentlich die für  $H = 0,05$  cm sind in realisierbaren Größenordnungen.

Es ist noch der Parameter  $v$  in Funktion der Belastung zu finden. Zu diesem Zweck setzen wir (18) und (19) in (16) ein und erhalten :

$$2v = 6p \frac{m-1}{mE} \frac{1}{p/k} \frac{1}{H^2}$$

Zusammenfassend ist also für Durchbiegungen der Größenordnung der Plattendicke bei Scheiben, deren Dicke  $h$  der Gleichung

$$h^3 = \frac{H^2}{4} \frac{p}{k} (a^2 - x^2) + H^3$$

(25)

genügt, die elastische Linie eines Meridians : die Parabel :

$$z = 6 p \frac{m-1}{m E} \frac{1}{H^2} \frac{1}{p/k} (a^2 - x^2) \quad (26)$$

oder der Kreis :

$$z = \sqrt{\left[ \frac{m E}{m-1} \frac{1}{12 p} \frac{p}{k} H^2 \right]^2 - x^2} - \sqrt{\left[ \frac{m E}{m-1} \frac{1}{12 p} \frac{p}{k} H^2 \right]^2 - a^2} \quad (27)$$

denn in der gemachten Annäherung fallen Kreis und Parabel zusammen.

$p/k$  ist wählbar, experimentell ist also das Moment am Rand ( $H \times k$ ) proportional der Belastung zu nehmen, um die gewünschte Form der Durchbiegung bei jeder Belastung beizubehalten.

Für Parabeln höherer Ordnung ist die Lösung nicht mehr zulässig.

h) *Differentialgleichung der elastischen Linie einer Scheibe bei großer Durchbiegung.*

Bei großer Durchbiegung ist die in den vorhergehenden Paragraphen durchgeführte Rechnung nicht mehr gültig. Es ist jetzt nicht mehr zulässig, von neutraler Faser zu sprechen, denn das Material wird im ganzen Querschnitt nur noch auf Zug beansprucht. Dabei werden  $\sigma_x$  und  $\sigma_y$  über den ganzen Querschnitt als konstant angenommen. Außerdem soll angenommen werden, daß im unbelasteten Zustand die Platte nicht angespannt ist, so daß alle Spannungen bei der Durchbiegung nur von den Lasten herrühren. Diese Voraussetzung ist für die Schalen der dynamischen Linse erfüllt. Aus den geänderten Voraussetzungen geht hervor, daß der Ansatz für die Ableitung der Differentialgleichung im Falle großer Durchbiegungen ein anderer sein muß. Auch hier wird eine Rechnung aus Föppl : Technische Mechanik<sup>1</sup> übernommen und für unseren Fall nicht konstanter Dicke abgeändert.

Die Durchbiegung sei größer als die Dicke der Platte. Aus einem  $dx$  wird in einem analogen ebenen Fall ein  $ds$  nach der Gleichung :

$$ds = \sqrt{1 + z'^2} dx$$

Da  $z'$  klein gegenüber 1 ist, kann man dies schreiben :

$$ds = dx \left( 1 + \frac{1}{2} z'^2 \right)$$

<sup>1</sup> FÖPPL : Technische Mechanik, Band V : Die wichtigsten Lehren der höheren Elastizitätstheorie (Leipzig 1907), S. 132 ff.

Für das uns vorliegende Problem sind partielle Ableitungen zu setzen.  
Also sind die Dehnungen in der x- und y-Richtung:

$$\frac{1}{2} \left( \frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 \quad \frac{1}{2} \left( \frac{\partial z}{\partial y} \right)^2$$

Außer dieser Dehnung ist bei großer Durchbiegung noch die Verschiebung parallel zur Plattenebene zu berücksichtigen.  $\xi$  und  $\eta$  seien die Komponenten dieser Verschiebungen in der x- und y-Richtung (Abb. 35), Seite 69. Die entsprechenden Dehnungen sind dann  $\frac{d\xi}{dx}$  und  $\frac{d\eta}{dy}$ .

Jetzt kann man die totale Dehnung in den Richtungen x und y anschreiben :

$$\varepsilon_x = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 + \frac{\partial \xi}{\partial x}$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial z}{\partial y} \right)^2 + \frac{\partial \eta}{\partial y}$$

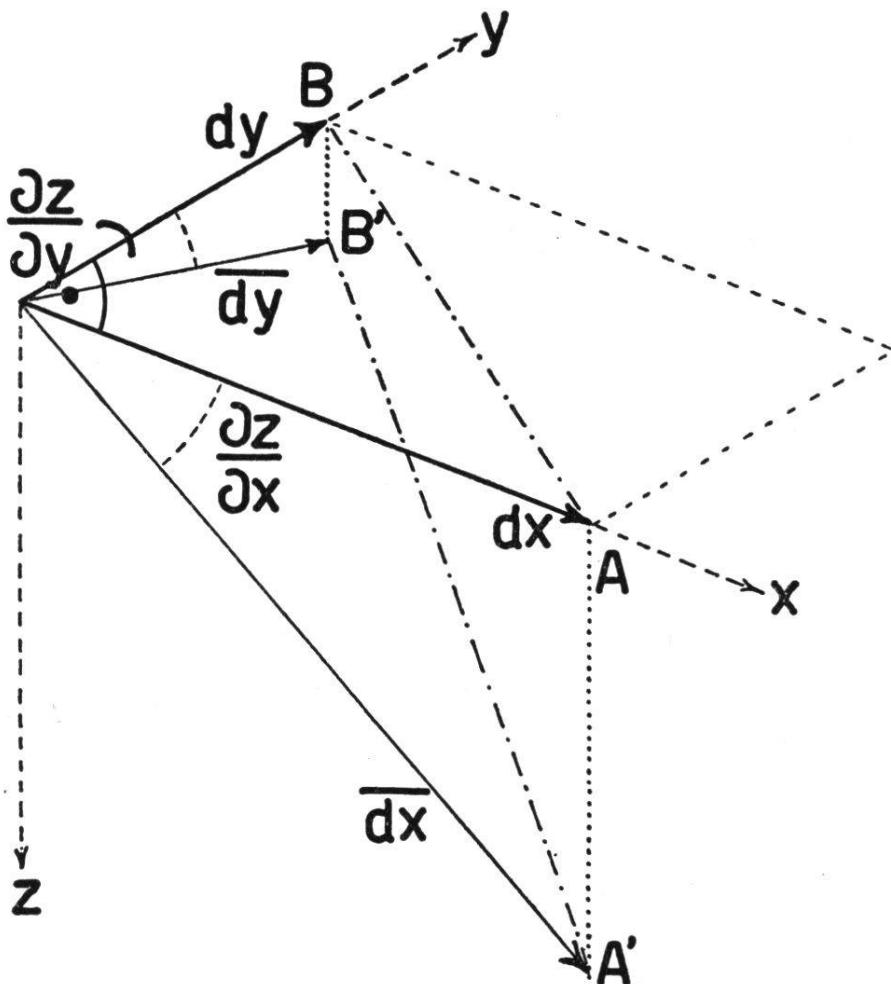


Abb. 36.

Unter Berücksichtigung der Querkontraktion sind dann die Spannungen in den beiden Richtungen :

$$\sigma_x = \frac{m E}{m^2 - 1} \left\{ m \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 + \frac{\partial \xi}{\partial x} \right] + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial z}{\partial y} \right)^2 + \frac{\partial \eta}{\partial y} \right\} \quad (1)$$

$$\sigma_y = \frac{m E}{m^2 - 1} \left\{ m \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial z}{\partial y} \right)^2 + \frac{\partial \eta}{\partial y} \right] + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 + \frac{\partial \xi}{\partial x} \right\} \quad (2)$$

Bei der Beanspruchung ändert sich der ursprünglich rechte Winkel zwischen  $dx$  und  $dy$  um  $\gamma$ .  $\overline{dx}$  und  $\overline{dy}$  seien die Linienelemente nach der Deformation (Abb. 36). Aus dem ursprünglichen

$$ds^2 = \overline{AB}^2 = dx^2 + dy^2$$

wird das deformierte

$$\overline{ds}^2 = \overline{A'B'}^2 = ds^2 + \left( \frac{\partial z}{\partial x} dx - \frac{\partial z}{\partial y} dy \right)^2$$

Berücksichtigt man noch

$$\overline{dx} = \sqrt{dx^2 + \left( \frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 dx^2}$$

$$\text{und} \quad \overline{dy} = \sqrt{dy^2 + \left( \frac{\partial z}{\partial y} \right)^2 dy^2}$$

kann man den Kosinussatz anwenden, aus dem wegen  $\cos(\frac{\pi}{2} - \gamma) = \sin \gamma \approx \gamma$  durch Einsetzen der soeben berechneten Werte von  $dx$ ,  $dy$ ,  $ds$ , bei Vernachlässigung von Gliedern höherer Ordnung, resultiert :

$$\gamma_1 = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial z}{\partial y}$$

Ein weiterer Beitrag zur Winkeländerung kommt von den Verschiebungen  $\xi$ ,  $\eta$  her (Abb. 37). Verschiebt man  $\overline{dx}$ ,  $\overline{dy}$  an den Ursprung von  $dx$ ,  $dy$  zurück, kann man die Winkeländerung leicht aus der Figur ablesen. Durch die Verschiebung  $\xi$ ,  $\eta$  ändert sich der rechte Winkel um

$$\gamma_2 = \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial \eta}{\partial x}$$

Die totale Winkeländerung ist demnach

$$\gamma = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial z}{\partial y} + \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial \eta}{\partial x} \quad (3)$$

$\gamma > 0$  bedeutet Verkleinerung des ursprünglich rechten Winkels. Die Schubspannung ist

$$\tau = \tau_{xy} = \tau_{yx} = G \gamma$$

wobei  $G$  den Schubspannungsmodul bezeichnet:

$$G = \frac{m E}{2(m+1)}$$

Betrachten wir jetzt ein Plattenelement mit den Kanten  $dx$ ,  $dy$ ,  $h$  und stellen wir für dieses die Gleichgewichtsbedingung auf. Im Falle großer Durchbiegung hat die  $\sigma_x$  Spannung eine merkliche vertikale Komponente (Abb. 38). Sie ist

$$\sigma_x \frac{\partial z}{\partial x} h dy$$

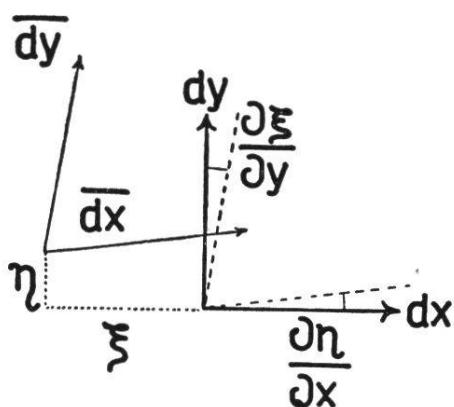


Abb. 37.

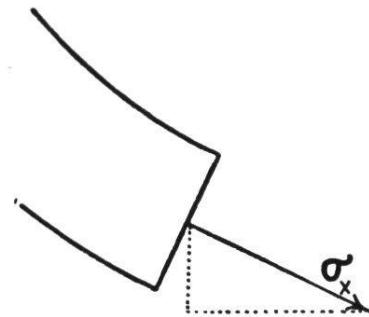


Abb. 38.

Da  $h$  jetzt nicht konstant sein soll, müßte man an Stelle von  $h \cdot dy$  schreiben:

$$\int_y^{y+dy} h dy = dy \cdot h(x, y + \theta dy)$$

was aber bis auf Differentiale höherer Ordnung wieder zu  $h \cdot dy$  führt. Auf der entgegengesetzten Seite des Plattenelementes kommt das Differential dieser Kraft hinzu. Die Resultierende der beiden Kräfte ist das Differential selber:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[ \sigma_x \frac{\partial z}{\partial x} h \right] dx \cdot dy \quad (4)$$

Analog gilt für die  $y$ -Richtung

$$\frac{\partial}{\partial y} \left[ \sigma_y \frac{\partial z}{\partial y} h \right] dx \cdot dy \quad (5)$$

Die vertikale Komponente der Schubspannung auf der Seitenfläche  $h \cdot dy$  ist

$$\tau \frac{\partial z}{\partial y} h dy$$

Die Summe mit den Schubkräften auf der gegenüberliegenden Seite ist wieder das Differential davon :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[ \tau \frac{\partial z}{\partial y} h \right] dx dy \quad (6)$$

Für die anderen Seitenflächen :

$$\frac{\partial}{\partial y} \left[ \tau \frac{\partial z}{\partial x} h \right] dx dy \quad (7)$$

Die Gleichgewichtsbedingung erhält man, indem man die Summe aller vertikalen Komponenten der auf das Trägerelement wirkenden Spannungen der Belastung gleichsetzt. Im Falle des Flüssigkeitsdruckes ist diese senkrecht zum Trägerelement. Die lotrechte Komponente der Belastung von  $p \text{ gr}^*/\text{cm}^2$  ist (Abb. 39)

$$p_v = p \sqrt{1 - \left( \frac{\partial z}{\partial x} \right)^2} \sqrt{1 - \left( \frac{\partial z}{\partial y} \right)^2} dx dy$$

was bei Vernachlässigung höherer Ordnung sich zu

$$p dx dy \quad (8)$$

vereinfacht. Hier wird also von der Neigung von  $p$  abgesehen, denn dazu werden höhere Potenzen von  $\frac{\partial z}{\partial x}$  und  $\frac{\partial z}{\partial y}$  vernachlässigt. Weiter unten (Gleichungen 10 und 11) wird diese Vernachlässigung nicht mehr zulässig sein, denn dort käme sie einem Unterschlagen der ersten Potenz derselben Ableitung gleich.

Die Gleichgewichtsbedingung, die sich aus den Gleichungen (4), (5), (6), (7), (8) nach Kürzen mit  $dx \cdot dy$  ergibt, liefert die Gleichung der elastischen Linie :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[ \left( \sigma_x \frac{\partial z}{\partial x} + \tau \frac{\partial z}{\partial y} \right) h \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[ \left( \sigma_y \frac{\partial z}{\partial y} + \tau \frac{\partial z}{\partial x} \right) h \right] = -p \quad (9)$$

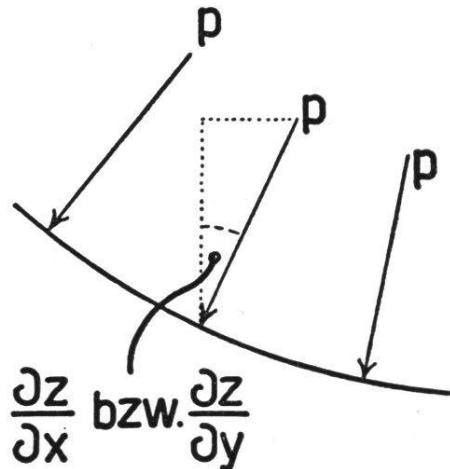


Abb. 39.

Es ist aber noch die Gleichgewichtsbedingung für die horizontalen Verschiebungen aufzustellen.

Auf die Raumeinheit wirke die Kraft (XYZ). Die Elastizitätstheorie zeigt, daß dann für das Parallelepiped  $dx \cdot dy \cdot dz$  die Gleichungen gelten :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + X = 0 \\ \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} + Y = 0 \\ \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + Z = 0 \end{array} \right.$$

In unserem Fall ist  $\sigma_z = 0$ ,  $\tau_{zx} = \tau_{zy} = 0$  und  $\tau_{xy} = \tau_{yx} = \tau$ .

Die Kraft auf das Parallelepiped ist  $p dx dy$ . Da das Volumenelement  $dx \cdot dy \cdot h$  ist, beträgt die auf die Raumeinheit bezogene Kraft  $p/h$ . In die Gleichungen sind davon die beiden horizontalen Komponenten X und Y (in der x- und y-Richtung) einzusetzen. Es ist (Abb. 39) :

$$X = \frac{p}{h} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} \quad Y = \frac{p}{h} \cdot \frac{\partial z}{\partial y}$$

also

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau}{\partial y} + \frac{p}{h} \frac{\partial z}{\partial x} = 0 \end{array} \right. \quad (10)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau}{\partial x} + \frac{p}{h} \frac{\partial z}{\partial y} = 0 \end{array} \right. \quad (11)$$

Differentiert man (9) und setzt (10) und (11) ein, erhält man :

$$\left\{ -\frac{p}{h} \left[ \left( \frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial z}{\partial y} \right)^2 \right] + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \right\} h + \right. \\ \left. + \frac{\partial z}{\partial x} \left( \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \frac{\partial h}{\partial x} - \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \frac{\partial h}{\partial y} \right) + \frac{\partial z}{\partial y} \left( \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \frac{\partial h}{\partial y} - \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \frac{\partial h}{\partial x} \right) = -p \quad (12) \right.$$

Darin ist F die Spannungsfunktion, d. h. eine Funktion, die so gewählt wurde, daß

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \quad \tau = -\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \quad (13)$$

Die Gleichung (12) genügt noch nicht, um Aufgaben zu lösen, denn sie enthält noch die unbekannte Funktion F. Es ist also eine weitere

Gleichung abzuleiten, die F enthält. Dazu differenzieren wir (3) nacheinander nach x und nach y. Die Werte der Ableitungen von  $\frac{\partial \xi}{\partial x}$  und  $\frac{\partial \eta}{\partial y}$ , die dabei auftreten werden, entnehmen wir den nach  $\frac{\partial \xi}{\partial x}$  und  $\frac{\partial \eta}{\partial y}$  aufgelösten Gleichungen (1) und (2). Die Rechnung ist etwas lang, aber ohne Schwierigkeiten durchführbar, so daß wir hier nur das Resultat notieren :

$$\frac{\partial^4 F}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 F}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 F}{\partial y^4} = E \left[ \left( \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \right] \quad (14)$$

Die Gleichungen (12) und (14) sind für die durchbogene Scheibe (oder Platte) zusammen gültig.

Der hier interessierende Fall der Linsenschale ist rotationssymmetrisch. Es ist deswegen praktischer, diese Gleichungen in Polarkoordinaten umzuschreiben.

Mit dem Index r sei die radiale, mit t die tangentiale Richtung bezeichnet. Es ist dann :

$$\sigma_r = \frac{\partial^2 F}{\partial t^2} \quad \sigma_t = \frac{\partial^2 F}{\partial r^2} \quad \tau = - \frac{\partial^2 F}{\partial r \partial t} \quad (15) \quad (16) \quad (17)$$

Legen wir x in die r-Richtung und y dazu senkrecht. Statt t möchte man aber das φ der Polarkoordinaten, also sind die entsprechenden Ableitungen der Spannungsfunktion F auszurechnen.

Aus  $x = r \cdot \cos \varphi$ ,  $y = r \cdot \sin \varphi$  folgen die partiellen Ableitungen nach x und y als Funktion derjenigen nach r und φ. Die Ableitungen von F und h nach φ verschwinden wegen der Kreissymmetrie.

$$\frac{\partial}{\partial x} = \cos \varphi \frac{\partial}{\partial r}; \quad \frac{\partial}{\partial y} = \sin \varphi \frac{\partial}{\partial r} \quad (18)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} = \cos^2 \varphi \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{\sin^2 \varphi}{r} \frac{\partial}{\partial r}; \quad \frac{\partial^2}{\partial y^2} = \sin^2 \varphi \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{\cos^2 \varphi}{r} \frac{\partial}{\partial r} \quad (19)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} = \cos \varphi \sin \varphi \frac{\partial}{\partial r^2} - \frac{\sin \varphi \cos \varphi}{r} \frac{\partial}{\partial r}; \quad \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \quad (20)$$

Gleichung (12) wird dadurch, nach wiederholter Berücksichtigung der Beziehung  $\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi = 1$  :

$$\frac{d}{dr} \left( h \frac{dF}{dr} \frac{dz}{dr} \right) = pr \left[ \left( \frac{dz}{dr} \right)^2 - 1 \right] \quad (21)$$

Auch Gleichung (14) ist dementsprechend in Polarkoordinaten umzuschreiben :

$$\frac{d}{dr} \left[ r \frac{d}{dr} \left( \frac{d^2 F}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dF}{dr} \right) \right] = -\frac{E}{2} \frac{d}{dr} \left( \frac{dz}{dr} \right)^2$$

Infolgedessen ist das erste Integral von (14) :

$$r \frac{d}{dr} \left( \frac{d^2 F}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dF}{dr} \right) = -\frac{E}{2} \left( \frac{dz}{dr} \right)^2 + C$$

Für  $r = 0$  ist die Tangente horizontal, also  $dz/dr = 0$ , folglich verschwindet die Integrationskonstante  $C$ .

Um die gebräuchlicheren Bezeichnungen wieder einzuführen, werden wir den Radius  $x$  (statt  $r$ ) nennen.

Es sei die neue Funktion  $L$  so definiert, daß

$$\frac{dF}{dr} = \frac{dF}{dx} = L \quad (22)$$

Die beiden Gleichungen der elastischen Linie werden jetzt :

$$x \frac{d}{dx} \left( \frac{dL}{dx} + \frac{1}{x} L \right) = -\frac{E}{2} \left( \frac{dz}{dx} \right)^2 \quad (23)$$

$$\frac{d}{dx} \left( h L \frac{dz}{dx} \right) = p x \left[ \left( \frac{dz}{dx} \right)^2 - 1 \right] \quad (24)$$

Beide Gleichungen gelten gleichzeitig. Für eine Lösung ist zwischen ihnen  $L$  zu eliminieren.

### i) Randbedingungen.

Am Rande ist die tangentiale Dehnung  $\varepsilon_t = \frac{1}{E} \left( \sigma_t - \frac{1}{m} \sigma_r \right) = 0$

$$\frac{dL}{dx} - \frac{1}{mx} L = 0 \quad \text{für } x = a \quad (25)$$

Es muß dort die Radialspannung verschwinden,  $\sigma_r = 0$  :

$$\frac{1}{x} L = 0 \quad \text{für } x = a \quad (26)$$

Die Randbedingungen sind folglich :

$$\frac{dL}{dx} = L = 0 \quad \text{für } x = a \quad (27)$$

k) *Integration für eine Parabel zweiten Grades.*

Für unseren Fall, bei dem eine elastische Linie  $z = z(x)$  vor-  
gegeben ist, löst man die Gleichungen (23) (24), indem man  $z$  in (23)  
einsetzt und aus dieser Gleichung  $L$  berechnet. Setzt man dann  $z$  und  $L$   
in (24) ein, entsteht eine Gleichung für  $h(x)$ .

Es sei nun als Meridianlinie der durchgebogenen Membran die  
Parabel gewünscht :

$$z = v (a^2 - x^2) \quad (28)$$

Aus (23) folgt dafür, unter Berücksichtigung der Randbedingungen (27) :

$$L = -\frac{v^2 E}{4} \frac{1}{x} (x^2 - a^2)^2$$

Damit folgt aus (24) die Lösung :

$$h = \frac{\frac{p x^2}{v E} \left( 2 x^2 - \frac{1}{v^2} \right) + a^4 h_0}{(x^2 - a^2)^2} \quad (29)$$

l) *Integration für einen Kreis als Meridian.*

Ist wieder  $w$  der Kreisradius und  $a$  die Apertur (Radius des Auflage-  
kreises), so lautet die Kreisgleichung

$$z = \sqrt{w^2 - x^2} - \sqrt{w^2 - a^2} \quad (30)$$

Gleichung (23) gibt dafür in Verbindung mit den Randbedingungen (27) :

$$L = \frac{E}{8} \frac{1}{x} \left[ (x^2 - w^2) \ln \frac{w^2 - x^2}{w^2 - a^2} - (x^2 - a^2) \right] \quad (31)$$

Das Integral von (24) ist

$$h = \frac{\frac{w^2}{2} \ln \frac{w^2 - x^2}{w^2} + x^2 - \frac{E}{8 p} \frac{h_0}{w} \left[ w^2 \ln \frac{w^2}{w^2 - a^2} - a^2 \right]}{\frac{E}{8 p} \frac{1}{\sqrt{w^2 - x^2}} \left[ (x^2 - w^2) \ln \frac{w^2 - x^2}{w^2 - a^2} - (x^2 - a^2) \right]} \quad (32)$$

m) *Integration für die Parabel vierten Grades.*

$$Z = v (a^4 - x^4) \quad (33)$$

Gleichung (24) wird jetzt

$$\frac{4 E v^3}{6 p} h x^2 (x^8 - 4 a^6 x^2 + 3 a^8) = 2 v^2 x^8 - \frac{x^2}{2} + C$$

Für  $x = 0$  folgt daraus  $h = \infty$ , wenn  $C \neq 0$  sein soll. Durch die willkürliche Festsetzung  $C = 0$  kommt die Integrationskonstante  $h_0$  in Wegfall. Wir schreiben das Resultat trotzdem auf :

$$h = \frac{2 v^2 x^6 - 1/2}{\frac{2 E v^3}{3} (x^8 - 4 a^6 x^2 + 3 a^8)} \quad (34)$$

n) *Parabeln höherer Ordnung.*

Aus dem Gang der Rechnung für die Parabel zweiter Ordnung sieht man sofort, daß für Parabeln höherer Ordnung sich ähnliche Lösungen anschreiben lassen. Im Nenner wird immer ein Polynom stehen (seine Ordnung wächst mit derjenigen der Parabel), das für  $x = a$  eine Nullstelle aufweist.

o) *Diskussion.*

Die Integration der Differentialgleichungen für große Durchbiegungen einer Kreisscheibe für eine Parabel zweiter Ordnung, einen Kreis, eine Parabel vierter Ordnung als Meridianlinie, führte zu den Lösungen (29), (32) und (34). Die drei Funktionen stellen die Dicke der frei aufliegenden kreisrunden Membran als Funktion des Radius  $x$  dar, um die drei elastischen Linien des Diagonalschnittes zu erhalten. Die Lösungen sind noch nicht endgültige Resultate, denn in allen steht außer dem Flüssigkeitsdruck  $p$  noch der Kurvenparameter  $v$  (Parabeln) oder  $w$  (Kreis), die ja Funktion von  $p$  sind. Es ist aber überflüssig diese Funktionen noch zu bestimmen, denn die drei Resultate haben für uns keine Bedeutung. Sie lassen sich nämlich nicht realisieren, denn für  $x = a$  folgt aus ihnen  $h = \infty$ . In den beschriebenen Fällen und für Parabeln höherer Ordnung (siehe unter n) sollte also die Dicke am Rande unendlich werden.

Muß aber wirklich die Berechnung für große Durchbiegungen Verwendung finden ?

Für eine Brennweite von 50 cm und unsere übliche Füllung mit  $n = 1,479$  gibt die Formel (30) eine Durchbiegung von ca. 0,3 cm. Verwendet man also Glas in den uns gebräuchlichen Qualitäten, so ist für so große Durchbiegungen nur das allerdünnteste von höchstens 0,02 cm zu gebrauchen. Die Durchbiegung ist also viel größer als die Plattendicke. Es steht somit außer Zweifel, daß die Berechnung für große Durchbiegungen Anwendung finden muß, die zu physikalisch unmöglichen Lösungen führte.

Verwendet man hingegen Plexiglas, so bietet es keine Schwierigkeiten, Platten von 0,3 cm in der gleichen Größenordnung ihrer Dicke durchzubiegen. Für diesen Fall gilt aber angenähert die früher durchgeführte Berechnung für kleine Durchbiegungen, die für die Parabel zweiter Ordnung und den Kreis zu realisierbaren Lösungen führte.

Also kommt man zum Schluß :

Es ist so dickes Plexiglas zu verwenden, daß die Durchbiegung im Verhältnis zur Dicke klein (oder derselben Größenordnung) ist, so daß die entsprechende physikalisch realisierbare Berechnung Gültigkeit hat.

Zur Korrekturmöglichkeit durch Schleifen der Scheiben sei noch bemerkt, daß sie eher theoretischen Charakter hat, denn es stehen dem Experimentalphysiker vorderhand noch keine Mittel zur Verfügung, den Glasscheiben so komplizierte Profile zu erteilen, wie es die Theorie fordert. Eventuell könnte aber eine solche Möglichkeit (abgesehen vom theoretischen Interesse) für die Industrie von einer gewissen Bedeutung sein.