

Zeitschrift:	Mémoires de la Société Fribourgeoise des Sciences Naturelles. Mathématique et physique = Mitteilungen der Naturforschenden Gesellschaft in Freiburg. Mathematik und Physik
Herausgeber:	Société Fribourgeoise des Sciences Naturelles
Band:	5 (1929-1943)
Heft:	1: Contribution à l'étude de la circulation électrique en haute fréquence dans les circuits complexes
Artikel:	Contribution à l'étude de la circulation électrique en haute fréquence dans les circuits complexes
Autor:	Gremaud, Auguste
DOI:	https://doi.org/10.5169/seals-306917

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 28.12.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

Vol. V. Fasc. 1. **Mathématiques et Physique.** Band V. Heft 1.

MÉMOIRES
DE LA
SOCIÉTÉ Fribourgeoise
DES
SCIENCES NATURELLES

MITTEILUNGEN
DER
NATURFORSCHENDEN GESELLSCHAFT
IN
FREIBURG (SCHWEIZ)



**Contribution à l'étude
de la
Circulation électrique en haute fréquence
dans les circuits complexes**

par

AUGUSTE GREMAUD

Dr ès-Sciences physiques.



FRIBOURG
IMPRIMERIE FRAGNIÈRE FRÈRES

1929

A mes chers parents.

CONTRIBUTION A L'ÉTUDE DE LA CIRCULATION ÉLECTRIQUE EN HAUTE FRÉQUENCE DANS LES CIRCUITS COMPLEXES.

Introduction.

Le présent travail se propose de trancher expérimentalement une difficulté qui se pose dans l'élaboration de la théorie de la circulation électrique en haute fréquence dans certains systèmes de conducteurs. Cette difficulté touche à la nature des équations différentielles qui définissent à chaque instant l'état électrique du système.

Nous avons été amené à grouper les systèmes de conducteurs en deux classes:

1^o *Les circuits simples*, ceux pour lesquels les équations différentielles définissant l'état électrique sont d'une forme et d'une nature parfaitement définies. Ce sont des équations différentielles ordinaires, et leurs solutions (solutions ordinaires) déterminent exactement l'état électrique du système.

2^o *Les circuits complexes*, ceux pour lesquels se pose la difficulté mentionnée. Les équations différentielles définissant l'état électrique du système ont la forme des équations différentielles ordinaires, mais n'en ont pas la nature. Il s'en suit que les solutions ordinaires (solutions des équations différentielles ordinaires) ne peuvent pas être considérées comme des solutions du problème.

L'importance de la question réside dans le fait que jusqu'à présent la plupart des auteurs qui ont étudié le problème de la circulation électrique en haute fréquence

dans les systèmes complexes, comme les solenoïdes par exemple, ont interprété les résultats de leurs expériences en utilisant les solutions ordinaires que donnent les équations différentielles de la circulation électrique, c'est-à-dire, ils ont résolu ces équations en les admettant, a priori, comme des équations différentielles ordinaires.

C'est en suite d'une remarque de Bouasse¹ relative au sens physique des équations différentielles de la haute fréquence que nous avons été frappé par l'importance des arguments théoriques concernant l'impossibilité de considérer dans les cas les équations différentielles de la haute fréquence comme des équations différentielles ordinaires. Ces considérations nous ont imposé pour les systèmes de conducteurs la classification précédente.

Pour soumettre au contrôle expérimental, la conclusion de ces arguments théoriques, la nécessité s'imposait d'analyser comment doivent être confrontées la théorie et l'expérience. Cette analyse nous a montré d'une part comment les solutions ordinaires tirées des équations différentielles considérées a priori comme des équations ordinaires pouvaient dans une certaine mesure interpréter des résultats expérimentaux et quelle était la valeur de cette interprétation, cette analyse nous a fourni en outre pour l'interprétation expérimentale de la théorie, une *condition d'interprétation* qui nous est apparue comme fondamentale, et c'est basé sur cette condition d'interprétation que nous avons soumis à l'expérience les arguments théoriques de Bouasse.

Dans le premier chapitre de ce travail, nous avons cru nécessaire pour mieux fixer le problème, comme aussi à cause des imprécisions et des confusions qu'il y a trop souvent dans les ouvrages de donner un rapide exposé des différents cas qu'il il y a lieu d'envisager dans l'étude de la circulation électrique en courant alternatif: Cas de

¹ BOUASSE, *Ondes Hertziennes*, p. 128. Edit. Delagrave, Paris.

la basse fréquence avec une variable caractéristique le temps t , cas de la haute fréquence avec deux variables caractéristiques le temps t et l'espace l .

Nous y soulignons quatre points principaux:

- 1^o En *B.F.*, les équations différentielles de la circulation définies pour l'*ensemble* du système.
- 2^o En *H.F.*, les équations différentielles de la *B.F.* définies pour un élément de longueur dl du système.
- 3^o Les équations différentielles de la *H.F.*. — Les arguments théoriques de Bouasse.
- 4^o Analyse et interprétation expérimentale de la théorie. — Conditions d'interprétation expérimentale.

Les autres chapitres se rapportent uniquement au contrôle que nous avons fait de la validité des solutions ordinaires pour l'interprétation de la circulation électrique en haute fréquence dans les circuits complexes. Les solutions ordinaires définissent une fonction qui fixe le phénomène observé. Le contrôle porte sur l'existence de cette fonction de définition de la théorie, fonction obtenue par les solutions ordinaires des équations différentielles.

Nous donnons à la fin de ce travail une note sur l'interprétation à faire d'une part des valeurs L et C de la formule $T = 2\sqrt{LC}$ d'un fil homogène vibrant en demi-onde et d'autre part des valeurs correspondantes L_0 et C_0 de la formule $T = 2\pi\sqrt{L_0C_0}$ de Lord Kelvin de la période de résonance d'un circuit formé d'une self-induction L_0 et d'une capacité C_0 . Cette note nous est apparue avoir son importance du fait que nous avons fait intervenir ces formules au chapitre IV de notre travail et du fait qu'en général ces relations se trouvent indiquées dans de nombreux ouvrages sans interprétation spéciale, souvent avec des erreurs, et qu'elles sont d'un usage courant en télégraphie sans fil.

CHAPITRE PREMIER

1. Basse fréquence.

Dans l'étude de la circulation électrique en courant alternatif, il y a lieu de considérer deux cas nettement distincts. Ce sont *relativement à la fréquence du courant pour un système conducteur considéré*. Ces cas de la *basse fréquence* et de la *haute fréquence*.

En *B.F.* on admet que l'intensité du courant périodique est la même à chaque instant en tous les points d'un segment de conducteur appartenant au système, isolé électriquement des autres conducteurs du système, ou autrement dit, l'intensité du courant est la même en tous les points d'un circuit non dérivé.

Considérant le système, on peut par rapport à deux points quelconques de ce système définir trois facteurs résultant de la nature respectivement d'une résistance électrique, d'une self-induction et d'une capacité caractérisant l'*ensemble* du système compris entre les deux points considérés. Nous soulignons cette remarque, car c'est sur la notion de facteurs résultants qu'est bâtie la théorie de la haute fréquence, on admet alors que des facteurs résultats identiques à ceux définis en *B.F.* caractérisent au point de vue électrique l'élément du système compris entre deux points indéfiniment voisins.

En *B.F.* la théorie utilise les relations classiques de l'électro-statique et de l'électro-dynamique, liant entre elles les charges, les courants et les tensions des différents points du système auxquels on applique les relations généralisées de Kirchhoff, ou, d'une façon plus générale, comme

l'a démontré Maxwell¹, le fonctionnement d'un système de n circuits est défini par n équations différentielles analogues aux équations introduites en mécanique par Lagrange et telles que:

$$\frac{\delta}{\delta t} \frac{\delta T}{\delta J_p} + \frac{\delta U}{\delta J_p} + \frac{\delta S}{\delta J_p} = E_p$$

ou t est le temps, J_p le courant dans le circuit p du système et E_p la F.E.M. extérieure appliquée, T , U et S sont des fonctions quadratiques des $\frac{dJ}{dt}$ et des $\int J dt$ telles que :

$$\frac{\delta}{\delta t} \frac{\delta T}{\delta J_p} = \sum_{q=1}^{q=n} L_{pq} \frac{dJ_q}{dt}$$

$$\frac{\delta U}{\delta J_p} = \sum_{q=1}^{q=n} \frac{1}{C_{pq}} \int J_q dt$$

$$\frac{\delta S}{\delta J_p} = \sum_{q=1}^{q=n} R_{pq} J_q$$

où

L_{pp} représente la self induction du circuit

L_{pq} le coefficient d'induction mutuelle des circuits p et q

C_{pp} la capacité résultante des circuits insérés dans le circuit p

C_{pq} la capacité commune aux circuits p et q

R_{pp} la résistance totale du circuit p

R_{pq} la portion de cette résistance commune aux circuits p et q .

¹ MAXWELL, *A Dynamical Theory of the Electromagnetic Field.*
The Royal Society Transaction, vol. CLV (1864).

BOUTHILLON, *Oscillations et haute Fréquence*, p. 4. Delagrave,
Paris.

On voit la remarquable généralité de cette théorie. On peut dire que dans le cas de la *B.F.*, la théorie interprète d'une façon absolument rigoureuse tous les phénomènes observés.

On admet ici que la propagation n'entre pas en ligne de compte. Il n'y a pas à considérer de propagation le long du système et la seule variable caractéristique est le temps t .

Il paraît important de souligner au sujet des cas de *B.F.* et de *H.F.* les considérations suivantes. Il y a en réalité toujours propagation dans l'espace et dans le temps de la perturbation créée. Le cas de la *H.F.* se présente donc comme cas général et celui de la *B.F.* comme cas particulier. C'est relativement aux grandeurs du système vis-à-vis de la vitesse de la propagation que l'on doit se baser pour utiliser la théorie du cas général ou la théorie du cas particulier.

Certains auteurs traitent sous le titre « Oscillations électriques » les problèmes du premier cas, celui de la *B.F.* et sous le titre « Ondes propagées » ceux du second cas. La vitesse de la propagation étant de l'ordre de la vitesse de la lumière, il ressort qu'en général dans les systèmes conducteurs ordinaires la généralité des problèmes de la circulation en courants alternatifs de fréquences industrielles sont traités par la théorie de la *B.F.*, tandis que la *H.F.* ne s'occupe que des problèmes de la circulation électrique en courants alternatifs de fréquence élevée, notamment les problèmes du ressort de la *T.S.F.*

Cette distinction n'a donc rien d'absolu, le cas de la *B.F.* étant essentiellement un cas limite de celui de la *H.F.*. Au point de vue physique on passe d'un cas à l'autre sans discontinuité dans les phénomènes. Ainsi la circulation électrique dans un solénoïde ou dans un transformateur ordinaire est aux fréquences industrielles entièrement du ressort de la *B.F.*, mais qu'on vienne à éléver cette fréquence, la théorie de la *B.F.* n'interprète plus du tout les phénomènes et c'est à la théorie de la *H.F.* qu'il faut demander une interprétation. On peut aussi envisager

certains systèmes conducteurs de dimensions suffisamment grandes pour que aux fréquences industrielles la circulation électrique soit régie par la théorie de la *H.F.*

2. Haute fréquence.

En *H.F.* on tient compte du fait que la propagation des phénomènes n'est pas instantanée. Les relations de Maxwell ne peuvent plus être appliquées à l'*ensemble* du système conducteur. Considérant la double périodicité des phénomènes dans l'espace et dans le temps il y a lieu de faire intervenir dans la théorie deux variables caractéristiques, la variable t caractérisant le temps, comme en *B.F.* et une variable l caractérisant l'espace.

En vertu d'un raisonnement analogue à celui que l'on fait en mécanique on admet que dans un élément de longueur assez petit vis-à-vis de la vitesse de propagation les actions sont instantanées. La théorie de la *H.F.* basée sur ce raisonnement admet que dans un élément de longueur infiniment petit du système, la théorie est régie par les relations de Maxwell appliquées à cet élément infiniment petit du système. Ces considérations conduisent à chercher les facteurs résultants dont nous avons parlé au début de ce chapitre qui caractérisent l'ensemble du segment de circuit compris entre les deux points infiniment voisins qui délimitent l'élément considéré. Analytiquement, on écrira donc pour un élément de circuit de longueur dl compris entre les points l et $l + dl$ du système le long duquel on étudie la propagation, les équations de la tension et du courant aux extrémités de l'élément considéré. Le phénomène d'ensemble se trouve être donné par l'intégration des états respectifs de chaque élément.

Cette façon de traiter le problème conduit à établir des équations différentielles fixant des relations entre les variables indépendantes l et t , les variables dépendantes e et i , et les facteurs résultants qui caractérisent l'élément.

La question qui se pose et qui fait l'objet de notre étude est de savoir quelle est la nature des facteurs résultants qui s'introduisent dans les équations différentielles ? Si ces facteurs résultants peuvent être définis ? Si la condition, que doivent remplir ces facteurs, d'être constants (indépendants des variables) est remplie ? Si donc les facteurs des équations différentielles remplissent les conditions suffisantes pour que ces équations aient la nature des équations différentielles ordinaires.

Comme notre étude consiste en une analyse autant théorique qu'expérimentale, il nous paraît important en terminant cette présentation du problème de dire un mot sur la situation actuelle des recherches en *H.F.* et en *B.F.*

Historiquement, la théorie de la *B.F.* est relativement ancienne. Elle date de plus d'un siècle, elle est le résultat des travaux de Coulomb, Volta, Laplace, Ampère, Ohm, Faraday. Ceci explique le caractère complet et définitif de cette théorie. Le phénomène des ondes propagées sont d'une étude théorique et expérimentale beaucoup plus récente. Ce n'est pratiquement que depuis ces cinquante dernières années depuis les découvertes de Hertz (1889) que les expériences systématiques ont été tentées. Quoique poursuivant un but différent, celui de la justification de l'hypothèse de Maxwell sur les courants de déplacement dans les diélectriques, les découvertes de Hertz se rattachent cependant au problème qui nous occupe dans ce sens qu'elles ont fourni, pour la première fois un procédé pour l'obtention de haute fréquence c'est-à-dire qu'elles ont permis de réaliser une condition fondamentale pour l'existence d'ondes propagées. C'est avec le procédé imparfait de Hertz ne donnant que des oscillations amorties, que les premières expériences ont été faites, d'abord sur les fils ou sur des systèmes de fils parallèles, ensuite sur des systèmes plus compliqués comme des solénoïdes à un seul ou à plusieurs enroulements régulièrement distribués ; ce sont notamment les travaux de Fleming, de Seibt et de Drude. Puis les méthodes techniques se perfectionnent, on résout soit

par l'emploi de lampes à trois électrodes, soit par de nouveaux systèmes alternateurs, des sources d'ondes entretenues. Mais à ces perfectionnements vraiment conséquents des moyens de réaliser les phénomènes, aucune nouveauté importante n'a fait progresser la technique des mesures.

Aujourd'hui, nous sommes en présence d'un problème qui se présente avec une double complication. Au point de vue théorique il est mal défini comme on le verra plus loin, au point de vue expérimental les moyens d'investigation sont trop imparfaits pour soumettre à un contrôle précis le grand nombre des phénomènes à observer. Il n'en reste pas moins vrai que des phénomènes fondamentaux tout à fait caractéristiques et spécifiques sont accessibles à la mesure et cela avec des précisions suffisantes pour que tout d'abord il y ait lieu d'exiger de la théorie leur justification; c'est d'ailleurs à ces phénomènes que nous demanderons des éclaircissements.



3. Les équations différentielles de la haute fréquence. — Arguments théoriques de Bouasse.

Les équations de la circulation électrique, en haute fréquence, dans un circuit sont données par les relations différentielles de l'état électrique dans un élément infiniment petit de ce circuit. On admet que la circulation électrique dans cet élément de circuit est régie par les lois simples de l'électrostatique et de l'électrodynamique.

Le raisonnement est toujours le même quelle que soit la nature du circuit. Si entre les deux points infiniment voisins qui délimitent l'élément considéré, il existe une différence de potentiel, il en résulte un courant entre ces deux points, défini par la nature du circuit de l'élément, c'est-à-dire par des facteurs résultants r , l , c ou r est un facteur de la nature d'une résistance ohmique qui caractérise le courant en phase avec la force électromotrice E , ou l et c

caractérisent les courants en quadrature avec la force électromotrice r , l et c sont des facteurs résultants qui sont définis par l'ensemble du circuit compris entre les deux points considérés ; ils dépendent donc de la complexité du circuit.

Le circuit le plus simple que l'on peut imaginer est celui qui est composé d'un seul fil conducteur. Pour interpréter la circulation électrique dans ce circuit filiforme, Kirchhoff assigne l'élément de longueur de ce fil (fig. I) à un système comprenant une self induction et une résistance ohmique intercalée en série aux extrémités de l'élément et un condensateur en dérivation, réuni à la terre pour tenir compte de la capacité propre de fil et de sa capacité par rapport à la terre.

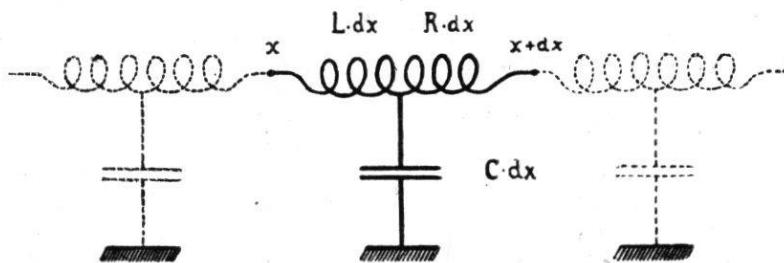


Fig. 1.

Les facteurs caractéristiques de l'élément infiniment petit sont R , ou R est la résistance de l'unité de longueur du fil, et de même L et C pour les autres facteurs résultants. On tire facilement d'un tel schéma les deux équations :

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} -\frac{\delta v}{\delta x} = R i + L \frac{\delta i}{\delta t} \\ \frac{\delta i}{\delta x} = -C \frac{\delta v}{\delta t} \end{array} \right.$$

C'est de ce système d'équation que sont tirées les relations actuellement utilisées connues sous le nom d'équation des télégraphistes et d'équations des téléphonistes.

Pour des circuits plus compliqués, tels que les solénoïdes, les auteurs font des hypothèses sur les circuits élémentaires qu'il y a lieu d'assigner à l'unité de l'élément.

Ces circuits élémentaires définissant comme dans le cas précédent les facteurs caractéristiques de l'unité de longueur qui doivent intervenir dans les équations différentielles de la circulation. Ces différents circuits élémentaires sont représentés par différents schémas, comme par exemple pour le solenoïde, les schémas de Wagner¹ Böhme² Rogowski³ Ruddenberg⁴, qui ont le caractère de celui que représente la figure 2:

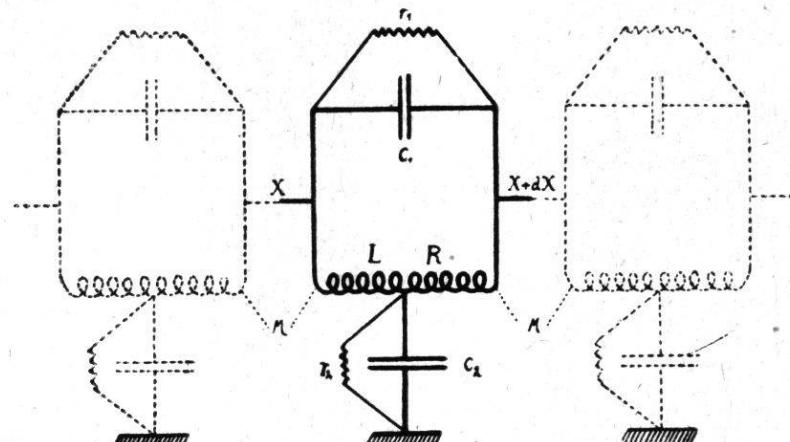


Fig. 2.

Dans l'élaboration de ces schémas les auteurs se préoccupent uniquement de tenir compte des différents facteurs qui semblent intervenir dans la circulation électrique de l'élément. À la self L et à la résistance R de l'élément, ils introduisent par exemple la capacité C , pour tenir compte de la capacité entre les couches de spires, la résistance r , pour tenir compte des pertes dans les isolations, etc...

Si la plupart des auteurs cherchent, par l'élaboration de schémas, à déterminer les facteurs caractéristiques qui entrent dans les équations différentielles de la circulation électrique dans les circuits complexes, il y a lieu cependant, contre ce procédé a priori de déterminer ces facteurs, d'avancer certains arguments théoriques

¹ WAGNER, E. T. Z, p. 639 (1914).

² BÖHME, *Arch. für Elektrotech.*, Bd. 5, p. 408 (1916).

³ ROGOWSKI, *Arch. für Elektrotech.*, Bd. 7, p. 240 (1919).

⁴ RUDDENBERG, *Elektr. und Magnet.*, p. 371 (1914).

relatifs à la possibilité de déterminer par cette méthode des facteurs parfaitement définis.

Ces arguments sont d'ordre mathématique et sont relatifs à la nature des facteurs et des équations différentielles posées. La théorie générale conduit à poser des relations de la forme suivante:

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{l} -\frac{\delta v}{\delta x} - \frac{\delta f}{\delta t} = ri \\ \frac{\delta i}{\delta x} + \frac{\delta m}{\delta t} = 0 \end{array} \right.$$

où v est le potentiel électrique défini au point x à l'instant considéré par l'ensemble des charges, f est une fonction telle que $\frac{\delta f}{\delta t}$ représente au point x la force électrique d'induction due à la variation du courant en *tous les points du système*. Ces relations ne constituent pas nécessairement des équations différentielles au sens de leur définition.

Reprendons, avec Bouasse¹, la discussion:

Une équation différentielle est une condition indéfinie identiquement satisfaite en tous les points du système considéré, elle fournit la situation du problème posé quand on donne certaines conditions aux limites. Il est donc contradictoire d'introduire dans une équation différentielle des paramètres qui dépendent des limites.

C'est ce qui arrive pour les équations de Kirchhoff et en général pour les équations du groupe (2) appliquées à certains circuits.

Comparons deux équations analogues, celle des cordes vibrantes et celle tirée du groupe (1) des équations de Kirchhoff.

Pour les cordes vibrantes on a:

$$T \frac{\delta^2 x}{\delta z^2} = m \frac{\delta^2 x}{\delta t^2}$$

¹ BOUASSE, *Ondes Hertziennes*, p. 125, édit. Delagrave, Paris.

T est la tension de la corde, m la masse par unité de longueur, quantité parfaitement définie pour chaque élément, indépendant de la longueur de la corde et par suite de la manière dont elle se divise en vibrant. Du groupe (1) de Kirchhoff, on tire pour le potentiel la relation:

$$l c \frac{\delta^2 v}{\delta t^2} + r c \frac{\delta v}{\delta t} = \frac{\delta^2 v}{\delta x^2}$$

ici, les paramètres l , r , c par unité de longueur n'ont pas nécessairement une valeur déterminée, indépendante des limites comme l'exige la définition de l'équation différentielle. L'équation de Kirchhoff contient des paramètres, le facteur f (fonction f de l'équation (2)), et le facteur c par unité de longueur qu'on ne peut en général calculer que si l'on connaît les conditions aux limites, par conséquent une solution particulière ce qui est contradictoire avec la définition.

Self et capacité de l'élément ne seront parfaitement définies que dans le cas où leur valeur dépend uniquement de ce qui se passe sur l'élément et les éléments immédiatement voisins, indépendamment de ce qui se passe au même instant sur les autres éléments. L'équation s'applique donc à un cable sous-marin à deux fils parallèles très rapprochés, à un fil unique parallèle et très rapproché d'un plan conducteur maintenu au potentiel constant nul, le principe des images ramène ce dernier cas à celui de deux fils parallèles. Nous avons alors un véritable condensateur continu ; les charges sur une section droite du système sont déterminées par la différence de potentiel entre les armatures du condensateur au voisinage de cette section.

Dans le cas du solenoïde ou d'un fil rectiligne isolé dans l'espace du voisinage d'autres conducteurs, il en est tout autrement. L'état électrique des éléments qui ne sont pas immédiatement voisins de l'élément considéré n'est plus négligeable et dépend des dimensions du système, des conditions aux limites.

Considérons avec Brillouin le cas de deux fils parallèles à la distance b (fig. 3).

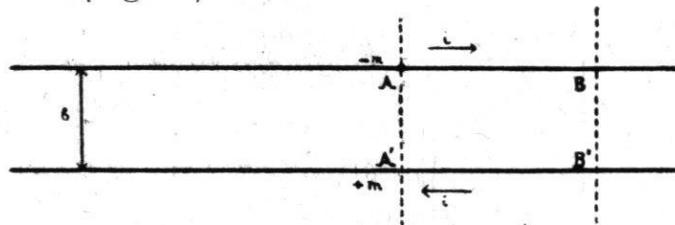


Fig. 3.

Les points A et A' correspondants portent à chaque instant les charges $\pm m$; par suite ils sont le siège de courants égaux et de signes contraires. En un point B à la distance r les points correspondant A et A' créent un champ électrostatique qui est de la forme $\frac{b}{r^3}$ absolument comme le champ d'un aimant assez loin de cet aimant. La force électromotrice d'induction et de la forme $\frac{b}{r^2}$. Les actions du groupe AA' sur les points correspondants B et B' ne sont pas absolument égales puisque B et B' sont écartés de b . Mais la différence des actions est de la forme $\frac{b}{r^3}$ ou de $\frac{b^2}{r^2}$ suivant qu'il s'agit du champ électrique ou de la force électromotrice d'induction. Il s'en suit que si b est assez petit (fils voisins) l'action du groupe AA' sur le groupe BB' est négligeable dès que $\frac{b}{r}$ devient petit, les phénomènes en BB' ne sont plus fonction que de ce qui se passe immédiatement au voisinage de ces points. Il existe alors une capacité et une self induction bien déterminées par unité de longueur.

Il résulte de cette discussion, que seulement pour un nombre très limité de cas, il est possible de déterminer pour l'unité d'éléments du système des facteurs bien définis. D'une façon générale pour les circuits complexes (circuits où les actions à distance sont prépondérantes) on a dans aucun cas le droit d'assigner l'unité d'élément à un circuit élémentaire définissant les fonctions f et m des

équations (2). Ces fonctions f et m ne dépendent pas uniquement des variables i et e au point considéré du système et aux points infiniment voisins, mais de la valeur de i et e en chaque point du système. Comme la distribution du courant i et du potentiel e le long du système dépend des conditions aux limites, les fonctions f et m dépendent aussi des conditions aux limites. Par conséquent les équations différentielles (2) ne sont pas des équations différentielles ordinaires, elles contiennent des fonctions f et m qui ne sont définies que lorsqu'on connaît la distribution du courant et des potentiels c'est-à-dire la solution du problème. Puisque les fonctions f et m ne peuvent pas être définies, il est donc faux de chercher la solution générale de la circulation électrique du système en intégrant ces formes différentielles par les procédés d'intégration des équations différentielles ordinaires.

4. Analyse et interprétation expérimentale de la théorie. — Conditions d'interprétation expérimentale.

Ces arguments théoriques, si évidents soient-ils, ne laissent pas moins indifférents les auteurs qui, pour établir les équations de la circulation électrique dans un système complexe, assignent le circuit étudié à un schéma particulier et tirent de ce schéma les facteurs caractéristiques pour l'unité d'élément du système. Ils justifient leur procédé, plus exactement leur schéma — puisqu'ils admettent à priori l'existence de ces facteurs — par des résultats qu'ils tirent de l'expérience. C'est sur cette interprétation expérimentale qu'il y a lieu de discuter.

Il est facile de démontrer que, si admettant l'existence des facteurs caractéristiques pour l'unité d'élément du système et la validité des solutions des équations différentielles considérées comme ordinaires, il est possible, à l'aide du contrôle expérimental d'un phénomène particulier, de justifier la solution trouvée, de justifier par con-

séquent et la méthode et les facteurs caractéristiques et par conséquent le schéma qui a servi à déterminer ces facteurs.

En effet, il suffit de constater que la circulation électrique du système présente des résonances caractérisées par des régimes d'ondes stationnaires ; or, des équations différentielles telles que l'équation (2) fournissent des solutions définissant de pareils régimes. Si on admet la validité de telles solutions, il suffit de vérifier expérimentalement si, par exemple, les fréquences de ces différents régimes de vibration sont celles prévues par la théorie. On voit aisément l'insuffisance d'une telle vérification, puisque les solutions ainsi fournies prévoient qualitativement le phénomène et que pour le justifier quantitativement, il suffit de modifier les éléments arbitraires des équations utilisées, c'est-à-dire les facteurs caractéristiques de l'unité d'éléments du système ce qui revient par conséquent à trouver pour le circuit complexe étudié, un schéma définissant de la façon prévue les facteurs caractéristiques de l'unité d'élément. Mais cela ne fait pas prévoir la suffisance de ce schéma pour l'interprétation d'un autre phénomène.

Nous avons souligné précédemment le nombre très limité des phénomènes de la haute fréquence capables d'être soumis à un contrôle expérimental précis. Le seul qui soit très caractéristique et le seul capable aussi d'être soumis à un contrôle expérimental précis est pour les circuits complexes celui de la non harmonicité des partiels. C'est sur le contrôle de la fréquence et de la distribution de ces partiels le long du système que portent généralement les mesures. Nous aurons au chapitre IV de ce travail l'occasion de revenir sur certains résultats théoriques relatifs à cette non harmonicité des partiels.

Nous soulignons en passant, relativement à cette non harmonicité des partiels une interprétation qui ne nous paraît pas légitime.

Bouasse¹, se sert pour analyser le phénomène d'un

¹ BOUASSE, *Ondes herziennes*, p. 157.

résultat expérimental donné par Fleming. Pour un solénoïde ainsi défini: longueur, 200 cm., nombre total de spires 5000, spires jointives, fil isolé sur un cylindre d'ébonite de 4 cm. de diamètre, une des extrémités du solénoïde est isolée, l'autre reliée à l'une des armatures d'un condensateur d'un circuit oscillant entretenu par une bobine d'induction, on a le tableau suivant:

		$n = \text{Fréquence}$	$\lambda = \text{long. d'onde}$	$v = n\lambda = \text{vitesse}$
Partiel 1 (fondamental)		$0,215 \cdot 10^6$	920 cm.	$198 \cdot 10^6$
»	2	0,714	276	197
»	3	1,151	160	184
»	4	1,533	115	176
»	5	1,823	88	160
»	6	2,023	72	146

On voit que les fréquences n ne suivent pas du tout la loi harmonique. Fleming incrimine le noyau sur lequel le solénoïde est bobiné, mais comme Drude trouve le même résultat pour des solénoïdes courts, Bouasse conclut en faveur des arguments théoriques qu'il avance, à savoir les arguments que nous avons précédemment indiqués et il conclut: on est forcé d'admettre qu'il n'existe pas de self et de capacité par unité de longueur calculable *indépendamment de la distribution du courant*.

Cette conclusion est discutable, car s'il n'existe pas à proprement parler de self et de capacité pour l'unité de longueur du système, il est possible de définir pour ce système un schéma plus ou moins complexe qui puisse définir pour l'unité de longueur du système des facteurs caractéristiques, fonctions plus ou moins compliquées des éléments électriques du circuit et de la pulsation, *mais indépendantes de la distribution du courant* et capables de justifier cette distribution non harmonique. Cette façon de résoudre le problème que celle des auteurs qui admettent l'existence des facteurs caractéristiques pour l'unité d'élément du système et qui considèrent les équations différentielles posées comme des équations différentielles ordinaires.

Pour résoudre expérimentalement cette difficulté il importe donc de conduire les expériences de façon à être à l'abri des objections soulevées. Si on admet l'existence des facteurs caractéristiques pour l'unité d'élément du système et si on admet comme solution du problème les solutions ordinaires fournies par les équations posées, on doit dans le cas où ces facteurs caractéristiques n'existent pas, trouver expérimentalement des divergences entre la théorie et l'expérience. Deux méthodes à l'abri des critiques s'imposent, la première consiste à soumettre au contrôle expérimental pour un circuit complexe donné, différents phénomènes prévus par la théorie, dans la seconde, le contrôle ne porte que sur un seul phénomène, mais il est prévu une modification systématique du circuit complexe laquelle modification doit entraîner une modification correspondante du phénomène dans le sens prévu par la théorie.

Dans l'impossibilité de soumettre à un contrôle expérimental précis différents phénomènes, nous avons utilisé la seconde méthode. Le phénomène observé est celui de la non harmonicité des partiels, le contrôle porte sur la mesure des fréquences de ces partiels, et pour le circuit complexe étudié (un solénoïde) la modification systématique du système consiste dans la variation systématique de sa capacité par rapport à la terre.

Nous admettons donc l'existence de facteurs caractéristiques définis pour l'unité de longueur du circuit et la validité des solutions ordinaires des équations différentielles. Mais pour ne pas être exposé dans la discussion à des interprétations douteuses dues à la présence dans les formules de facteurs caractéristiques définis a priori (car la définition de ces facteurs a toujours quelque chose d'arbitraire) nous avons développé la théorie sans préciser ces facteurs. Nous avons admis ces facteurs comme des fonctions non définies des éléments électriques du circuit et de la pulsation. Le seul facteur utilisé et que nous admettons

déterminé est celui introduit par l'existence de la capacité par rapport à la terre et définissant une fonction linéaire de la pulsation. La définition de ce facteur n'entraîne aucune ambiguïté puisqu'elle est imposée par la nature du circuit qu'elle représente; elle est d'ailleurs en soi indépendante du solénoïde utilisé.

CHAPITRE II.

1. Les facteurs caractéristiques du circuit pour l'élément de l'unité de longueur.

Ayant admis l'existence d'un circuit élémentaire à attribuer à l'unité de longueur du système, on peut développer la théorie sans fixer par avance un schéma particulier à l'élément de l'unité de longueur. Il suffit, comme le fait Steinmetz¹, en se rapportant aux différentes relations possibles entre les courants et les tensions, de grouper suivant leur nature et leur position, les différents conducteurs qu'il y a lieu de considérer dans le circuit. Nous avons admis également, que la circulation électrique dans l'élément était régie par les lois ordinaires de l'électrostatique et de l'électrodynamique. Pour effectuer l'intégration rendant compte de l'ensemble du phénomène, il nous faut connaître deux genres de relations:

1^{er} genre: par rapport aux extrémités de l'élément, les relations qui lient les courants et les tensions,

2^{me} genre: par rapport à un point quelconque du système et la terre, les relations qui lient les courants et les tensions.

¹ Voir STEINMETZ, *Phénomènes électriques de transition* — traduction française, Paris (1912) — p. 286. Steinmetz souligne cette classification et s'en sert pour développer la théorie de la circulation par ondes dans les lignes de transmission d'énergie électrique à grande distance. Mais pour le cas traité, Steinmetz attribue aux quatre facteurs caractéristiques des valeurs qui sont des constantes, ou des fonctions linéaires de la pulsation, en vertu des considérations que nous exposons, les quatre facteurs de notre théorie sont des fonctions quelconques de la pulsation.

Voir aussi JANET, *Cours d'électrotechnique*, II vol. 6^e édit. p. 178.

Pour le premier genre de relations nous avons:

- 1^o des forces élect. motrices consommées en phase avec le courant,
- 2^o des forces élect. motrices consommées en quadrature avec le courant.

Pour le second genre de relations nous avons:

- 3^o des courants consommés en phase avec les forces élect. motrices.
- 4^o des courants consommés en quadrature avec les f.e.m.

Il y a lieu de déterminer quatre relations caractéristiques fixées par quatre *facteurs de proportionnalité*.

- 1^o Pour un circuit complexe intercalé entre deux points A et B d'un conducteur traversé par un courant I , on peut calculer un facteur résultant r de la nature d'une résistance ohmique et tel que $r I$ soit l'équivalent de toutes les forces électriques motrices consommées en phase avec le courant. Nous appellerons r le facteur caractéristique de proportionnalité des f.e.m. consommées en phase avec le courant.
- 2^o De même, pour tenir compte des f.e.m. consommées en quadrature avec le courant, on peut déterminer un facteur résultant x de la nature d'une self induction et tel que $x I$ soit l'équivalent de toutes les f.e.m. consommées dans le circuit en quadrature avec le courant. Nous appelons x le facteur caractéristique de proportionnalité des f.e.m. consommées en quadrature avec le courant.
- 3^o Si en un point de potentiel V du système (potentiel par rapport à la terre) on place en dérivation entre le conducteur et la terre un circuit complexe quelconque, il y a lieu de calculer un facteur résultant g de la nature d'une conductance, et tel que $g V$ soit l'équivalent de tous les courants consommés en phase avec la f.e.m. Nous appelons g le facteur caractéristique de proportionnalité des courants consommés en phase avec la f.e.m.

4^o Pour tenir compte des courants consommés en quadrature avec la f.e.m., on peut déterminer un facteur résultant b de la nature d'une susceptance et tel que $b V$ soit l'équivalent de tous les courants consommés en quadrature avec la f.e.m. Nous appelons b le facteur caractéristique de proportionalité des courants consommés en quadrature avec la f.e.m.

De cette façon, il y a lieu de traiter le problème dans toute sa généralité et en tenant compte de tous les phénomènes possibles dans l'élément. Ainsi :

- r , caractérise la consommation de puissance réelle due aux résistances ohmiques, à la composante wattée de la mutuelle-inductance, à la composante wattée due à l'hystéresis magnétique et au rayonnement électromagnétique.
- x , caractérise la consommation de puissance apparente due à la self inductance, à la composante déwattée de la mutuelle-inductance.
- g , caractérise la consommation de puissance réelle due aux fuites à travers la matière isolante et aux décharges par effluves, la composante wattée de l'influence électrostatique, de l'hystéresis diélectrique et de la radiation électrostatique.
- b , caractérise la consommation de puissance apparente due aux composantes déwattées de la self induction, de la capacité et de l'influence électrostatique.

Pour préciser, considérons les deux exemples suivants :

- 1^o Le circuit élémentaire défini pour l'unité d'élément est représenté par le schéma de la fig. 4 (circuit de Kirchhoff).

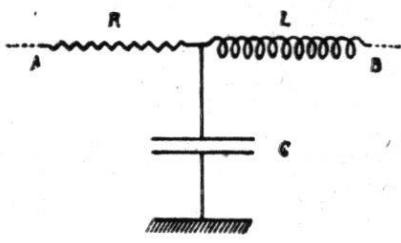


Fig. 4

On trouve pour les quatre facteurs caractéristiques les valeurs $r = R$, $x = L \omega$, $g = o$, $b = c \omega$.

2^o Le circuit élémentaire défini pour l'unité d'élément est représenté par le schéma de la fig. 5.

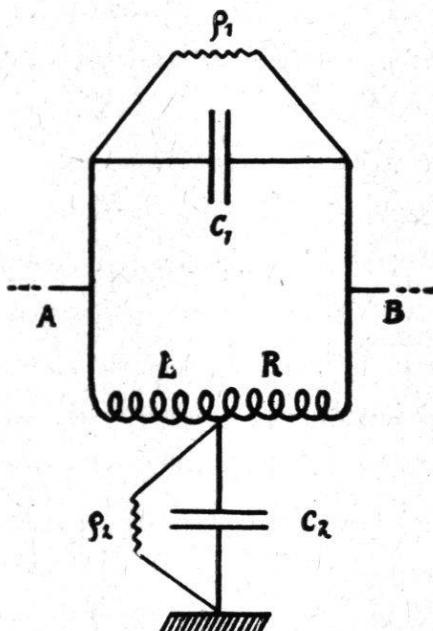


Fig. 5

On trouve pour les quatre facteurs caractéristiques les valeurs :

$$r = \frac{(R\varrho_1 + R^2 + L^2\omega^2) \varrho_1 (R^2 + L^2\omega^2)}{(R\varrho_1 + R^2 + L^2\omega^2) + \varrho_1^2 [L\omega - C_1\omega (R^2 + L^2\omega^2)]}$$

$$x = \frac{\varrho_1^2 (R^2 + L^2\omega^2) [L\omega - C_1\omega (R^2 + L^2\omega^2)]}{(R\varrho_1 + R^2 + L^2\omega^2) + \varrho_1^2 [L\omega - C_1\omega (R^2 + L^2\omega^2)]}$$

$$g = \frac{1}{\varrho_2}$$

$$b = C_2\omega.$$

On voit que les facteurs caractéristiques sont des constantes ou des fonctions plus ou moins compliquées de la pulsation ω .

Lorsque le circuit de l'unité d'élément est défini, les facteurs caractéristiques sont par le fait même définis.

Inversement, lorsque les facteurs caractéristiques sont donnés, on peut déterminer le circuit correspondant pour l'unité d'élément du système.

Comme exemple plus compliqué, on pourrait prendre celui d'un circuit complexe formé d'un primaire et d'un secondaire, comme un transformateur. Dans ce cas, l'unité de longueur du circuit est lui-même un petit transformateur élémentaire. Ici encore il est facile de dégager les quatre facteurs caractéristiques, il suffit, comme le fait Besson¹ de ramener le circuit double formé du primaire et du secondaire à un circuit simple correspondant.

On peut donc, d'une façon générale, lorsque chaque élément du système est assimilable à un ensemble complexe, définir les facteurs r, x, g, b , qui seront des fonctions de la pulsation et des conducteurs définissant le circuit élémentaire. D'une façon générale, on peut donc poser que :

$$\begin{aligned} r &= f_1(\omega) \\ x &= f_2(\omega) \\ g &= f_3(\omega) \\ b &= f_4(\omega). \end{aligned}$$

Nous admettons dans la suite du développement que ces fonctions existent, mais qu'elles ne sont pas déterminées, ce qui donne un caractère de généralité à la théorie.

Ensuite, pour le cas particulier du circuit de nos expériences nous justifierons certaines précisions sur la nature de l'une ou l'autre de ces fonctions.

2. Détermination de l'ensemble complexe relatif à l'unité d'élément du système.

Il est facile à présent de se rendre compte comment on peut demander à un schéma particulier la justification d'un phénomène particulier.

Pour résoudre par l'élaboration d'un tel schéma pour l'unité d'élément, le problème par exemple de la non har-

¹ BESSON, *Etude sur la résonance des transformateurs* — thèse
— Fribourg 1921.

Revue générale de l'Electricité, tome X, 1921, page 797.

monicité des partiels, il suffit d'aborder la question par la négative.

Nous avons trouvé que r , x , g , b sont des fonctions de ω . Nous résolvons le problème sans préciser la nature de ces fonctions de ω . Autrement dit, nous introduisons dans nos équations les grandeurs r , x , g , b , fonctions *arbitraires* de ω .

Ainsi nos équations nous fixent en fonction de r , x , g , b , (ou de l'une ou l'autre de ces valeurs) les fréquences correspondant aux différents harmoniques, c'est-à-dire la distribution des partiels en fonction de la fréquence, ce qui nous permet de préciser la nature des fonctions r , x , g , b , et de trouver ensuite le schéma définissant de telles fonctions.

On voit que ce procédé s'adresse à un phénomène particulier pour un circuit déterminé. Que pour un autre phénomène avec le même circuit, il y aurait lieu de définir également un schéma tel qui s'y justifie cet autre phénomène, mais rien n'indique en soi que les schémas ainsi définis pour deux phénomènes différents soient *identiques*. Nous reviendrons sur ce point au chapitre IV.

3. Equations de la circulation électrique. Forme imaginaire.

Nous utilisons pour la simplification du développement la méthode des imaginaires avec la restriction qu'elle comporte: phénomènes périodiques dans le temps, condition expérimentalement remplie pour le régime alternatif forcé que nous imposons au système.

Par rapport à un système d'axe quelconque fixant les origines des phases et les grandeurs des vecteurs, une force électromotrice alternative est représentée en un point par la grandeur imaginaire E et le courant alternatif par la grandeur imaginaire I .

Les lettres majuscules italiques représentent les grandeurs imaginaires.

Comptons la distance l à partir d'un point O du système qui a la f.e.m. imaginaire E et un courant imaginaire I . Comptons les l positivement dans le sens de la puissance décroissante et négativement dans le sens de la puissance croissante.

Considérons un circuit le long duquel se manifeste une absorption de courant due à l'existence de capacités propres ou de capacités par rapport à la terre.

Dans l'élément dl la f.e.m. absorbée en phase avec le courant est :

$$I r dl$$

la f.e.m. absorbée en quadrature avec le courant est :

$$j I x dl$$

la variation de la f.e.m. dans l'élément est donc représentée par :

$$\begin{aligned} -dE &= Ir dl + jIx dl \\ &= I(r + jx) dl \\ (1) \quad -\frac{dE}{dl} &= I(r + jx). \end{aligned}$$

Dans l'élément dl il y a une fuite de courant par le circuit en parallèle réuni à la terre (circuit figurant la capacité propre du système ou une capacité par rapport à la terre).

Le courant absorbé en phase avec la f.e.m. est représenté par :

$$E g dl$$

Le courant en quadrature avec la f.e.m. est représenté par :

$$j E b dl$$

la variation $-dI$ du courant entre l'entrée et la sortie de l'élément est représentée par :

$$\begin{aligned} -dI &= Eg dl + jEb dl \\ &= E(g + jb) dl \\ (2) \quad -\frac{dI}{dl} &= E(g + jb) \end{aligned}$$

Ces équations différentielles (1) et (2) sont symétriques en I et en E . Elles déterminent entièrement le problème.

Différentions les équations (1) et (2), nous trouvons :

$$(3) \quad \frac{d^2 E}{dl^2} = (r + j x) \frac{d I}{d l}$$

$$(4) \quad \frac{d^2 I}{dl^2} = (g + j b) \frac{d E}{d l}$$

en substituant (1) et (2) dans (3) et (4) on a les équations différentielles de I et E .

$$(5) \quad \begin{cases} \frac{d^2 E}{dl^2} = (r + j x) (g + j b) E = K^2 E \\ \frac{d^2 I}{dl^2} = (r + j x) (g + j b) I = K^2 I \end{cases}$$

en posant

$$(6) \quad K^2 = (r + j x) (g + j b)$$

ces deux équations (5) sont de même nature, par conséquent I et E sont des fonctions différentes seulement par les constantes d'intégration définies par les conditions aux limites.

L'intégrale générale de l'équation

$$\frac{d^2 V}{dl^2} = K^2 V$$

est de la forme :

$$V = A e^{kl} + B e^{-kl}$$

nous avons donc pour (5)

$$(7) \quad \begin{cases} I = A_1 e^{kl} + B_1 e^{-kl} \\ E = A_2 e^{kl} + B_2 e^{-kl} \end{cases}$$

e = base des logarithmes naturels.

Ces quatres constantes arbitraires A_1, A_2, B_1, B_2 , peuvent être ramenées à deux en tenant compte de (1) et de (2).

$$\frac{dI}{dl} = KA_1 e^{kl} - KB_1 e^{-kl} = -(g + j b) [A_2 e^{kl} + B_2 e^{-kl}]$$

$$\frac{dE}{dl} = KA_2 e^{kl} - KB_2 e^{-kl} = -(r + j x) [A_1 e^{kl} + B_1 e^{-kl}]$$

ce qui peut s'écrire en multipliant la première relation par $(r + j x)$ et la seconde par K :

$$(r + j x) KA_1 e^{kl} - (r + j x) KB_1 e^{-kl} = -(r + j x) (g + j b) [A_2 e^{kl} + B_2 e^{-kl}]$$

$$(r + j x) KA_1 e^{kl} - (r + j x) KB_1 e^{-kl} = -K^2 A_2 e^{kl} - K^2 B_2 e^{-kl}$$

$$-(r + j x) KA_1 e^{kl} - (r + j x) KB_1 e^{-kl} = K^2 A_2 e^{kl} - K^2 B_2 e^{-kl}$$

en additionnant

$$\begin{aligned} -2K(r + j x) B_1 e^{-kl} &= -2K^2 B_2 e^{-kl} \\ (r + j x) B_1 &= KB_2 \\ B_2 &= \frac{r + j x}{K} B_1 \\ B_2 &= \underline{\underline{\frac{K}{g + j b} B_1}} \end{aligned}$$

et par soustraction

$$\begin{aligned} 2K(r + j x) A_1 e^{kl} &= -2K^2 A_2 e^{kl} \\ (r + j x) A &= -KA_2 \\ A_2 &= -\frac{r + j x}{K} A_1 \\ A_2 &= \underline{\underline{-\frac{K}{g + j b} A_1}} \end{aligned}$$

en introduisant ces deux valeurs de A_2 et de B_2 dans nos équations nous trouvons:

$$(8) \left\{ \begin{array}{l} I = A_1 e^{kl} + B_1 e^{-kl} \\ E = -\frac{K}{(g + j b)} (A_1 e^{kl} - B_1 e^{-kl}) \end{array} \right.$$

nous pouvons aussi écrire

$$(9) \quad \begin{cases} I = -\frac{K}{r+jx} (A_2 e^{kl} - B_2 e^{-kl}) \\ E = A_2 e^{kl} + B_2 e^{-kl} \end{cases}$$

4. Cas du circuit des expériences.

Les équations (8) et (9) sont entièrement déterminées quand on fixe par les conditions aux limites deux quelconques des quatre constantes d'intégration A_1 , A_2 , B_1 , B_2 , et les deux groupes (8) et (9) montrent le caractère de dépendance qui lie I et E et qui est tel que si I est déterminé, E l'est par le fait même, et inversement si E est déterminé, I se trouve l'être également. On voit, quant aux conditions aux limites, que le problème se trouve entièrement déterminé quand on fixe deux relations d'état électrique du système. On peut prendre le voltage et le courant en un point du circuit, ou le voltage en un point et le courant en un autre point, ou encore le voltage en un point et le rapport du voltage au courant en un autre point.

Les conditions expérimentales de nos mesures (conditions que nous discuterons plus loin) sont fixées, comme données, par le voltage à l'extrémité A du système (côté génératrice) et par le rapport du voltage au courant, à l'extrémité B qui par une résistance ohmique R est reliée à la terre.

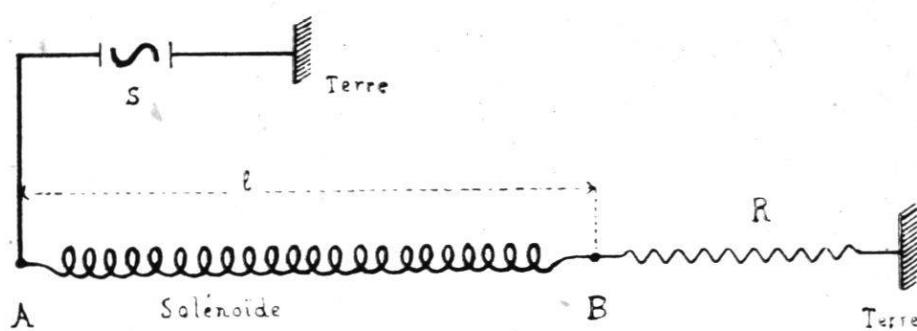


Fig. 6

Exprimons, à l'aide de l'équation (9) et des conditions aux limites le courant I en fonction de E . Nous prenons l'origine en A du côté de la génératrice.

En $A \dots l = 0$

$$(10) \quad \begin{cases} I_0 = -\frac{K}{r+jx} (A_2 - B_2) \\ E_0 = A_2 + B_2 \end{cases}$$

en $B \dots l = l_0 = \text{constante}$

$$(11) \quad \begin{cases} I_{l_0} = -\frac{K}{r+jx} (A_2 e^{klo} - B_2 e^{-klo}) \\ E_{l_0} = A_2 e^{klo} + B_2 e^{-klo} \end{cases}$$

les relations (11) avec la condition imposée donnent:

$$(12) \quad \frac{E_{l_0}}{I_{l_0}} = \frac{A_2 e^{klo} + B_2 e^{-klo}}{-\frac{K}{r+jx} (A_2 e^{klo} - B_2 e^{-klo})} = R$$

l'équation $E_0 = A_2 + B_2$ du groupe (10) et l'équation (12) fixent les constantes d'intégration; elles représentent deux équations à deux inconnus A_2 et B_2 desquelles on tire les valeurs de A_2 et B_2 .

$$\text{De (12)} \quad A_2 e^{klo} + B_2 e^{-klo} = -R \frac{K}{r+jx} (A_2 e^{klo} - B_2 e^{-klo})$$

$$A_2 (1 + R \frac{K}{r+jx}) e^{klo} = -B_2 (1 - R \frac{K}{r+jx}) e^{-klo}$$

de (10)

$$E_0 = A_2 + B_2$$

$$B_2 = E_0 - A_2$$

$$A_2 (1 + R \frac{K}{r+jx}) e^{klo} = A_2 (1 - R \frac{K}{r+jx}) e^{-klo} = -E_0 (1 - R \frac{K}{r+jx}) e^{-klo}$$

$$A_2 \left[(1 + R \frac{K}{r+jx}) e^{klo} - (1 - R \frac{K}{r+jx}) e^{-klo} \right] = -E_0 (1 - R \frac{K}{r+jx}) e^{-klo}$$

$$A_2 \left[(e^{klo} - e^{-klo}) + R \frac{K}{r+jx} (e^{klo} + e^{-klo}) \right] = -E_0 (1 - R \frac{K}{r+jx}) e^{-klo}$$

$$(13) \quad A_2 = - \frac{E_0 (1 - R \frac{K}{r + jx}) e^{-klo}}{(e^{klo} - e^{-klo}) + R \frac{K}{r + jx} (e^{klo} + e^{-klo})}$$

$$B_2 = \frac{E_0 (e^{klo} - e^{-klo}) + E_0 R \frac{K}{r + jx} (e^{klo} + e^{-klo}) + E_0 (1 - R \frac{K}{r + jx}) e^{-klo}}{(e^{klo} - e^{-klo}) + R \frac{K}{r + jx} (e^{klo} + e^{-klo})}$$

$$(14) \quad B_2 = \frac{E_0 (1 + R \frac{K}{r + jx}) e^{klo}}{(e^{klo} - e^{-klo}) + R \frac{K}{r + jx} (e^{klo} + e^{-klo})}$$

posons

$$(15) \quad C = \frac{A_2}{B_2}$$

$$(16) \quad C = \frac{-(1 - R \frac{K}{r + jx}) e^{-klo}}{(1 + R \frac{K}{r + jx}) e^{klo}} = - \frac{1 - R \frac{K}{r + jx}}{1 + R \frac{K}{r + jx}} e^{-2klo}$$

d'où finalement

$$E_0 = A_2 + B_2$$

$$A_2 = C B_2$$

$$E_0 = B_2 (I + C)$$

$$(17) \quad B_2 = \frac{E_0}{1 + C}$$

$$(18) \quad A_2 = \frac{E_0}{1 - C}$$

et les équations (9) deviennent

$$(19) \quad I = -E_0 \frac{K}{r+jx} \frac{1}{1+C} \left\{ C e^{kl} - e^{-kl} \right\}$$

$$(20) \quad E = E_0 \frac{1}{1+C} \left\{ C e^{kl} + e^{-kl} \right\}$$

expression sous forme imaginaire des équations représentant le courant et la tension en un point du système.

5. Equations du courant et de la tension. Forme réelle.

On peut tirer des expressions (19) et (20) représentant, sous la forme imaginaire, le courant et la tension, des relations intéressantes pour l'analyse des phénomènes, mais il est plus simple et plus immédiat de discuter sur des expressions sous forme réelle.

Prenons la phase de la tension à l'origine, pour origine des phases.

Nous avons de ce fait:
en $l = 0$

$$E_0 = \dot{E}_0 e^{j\omega t}$$

\dot{E}_0 étant l'amplitude réelle de la fonction alternative représentant la tension à l'origine. La valeur réelle e_0 correspond à la valeur imaginaire E_0 est:

$$e_0 = \dot{E}_0 \cos \omega t$$

Dans ces différentes équations intervient la grandeur K .

Nous avons posé K (équ. 6) comme la racine carrée du produit de deux grandeurs imaginaires, K est donc aussi une grandeur imaginaire.

Posons:

$$(21) \quad K = \alpha + j\beta.$$

Il suit:

$$(\alpha + j\beta)^2 = (r + jx)(g + jb)$$

ou

$$(\alpha^2 - \beta^2) + 2j\alpha\beta = (rg - xb) + j(rb + gx)$$

ce qui se résout par :

$$(22) \quad \begin{cases} a^2 - \beta^2 = rg - xb \\ 2\alpha\beta = rb + gx \end{cases}$$

les équations élevées au carré et additionnées donnent

$$(a^2 - \beta^2)^2 + 4\alpha^2\beta^2 = (rg - xb)^2 + (rb + gx)^2 = (r^2 + x^2)(g^2 + b^2) = z^2y^2$$

avec

$z = \sqrt{r^2 + x^2}$ = impédance résultante par unité de longueur

$y = \sqrt{g^2 + b^2}$ = admittance » » » »

donc

$$(23) \quad a^2 + \beta^2 = zy$$

de (22), (23), nous tirons :

$$(24) \quad a = \sqrt{\frac{1}{2}(z\gamma + rg - xb)}$$

$$(25) \quad \beta = \sqrt{\frac{1}{2}(z\gamma - rg + xb)}.$$

Dans le groupe des équations (9) intervient encore l'expression

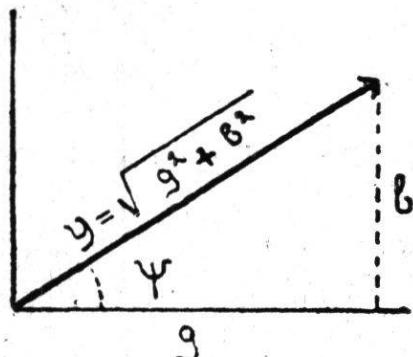
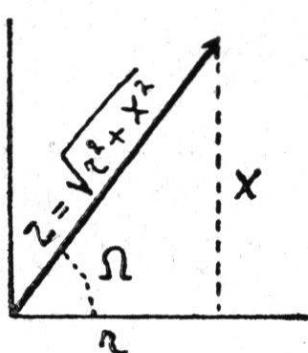
$$\frac{K}{r + jx} = \frac{a + j\beta}{r + jx}$$

que nous pouvons transformer de la façon suivante:

Posons :

$$\frac{a + j\beta}{r + jx} = a e^{j\delta}$$

Nous pouvons remarquer les relations suivantes:



$$r = z \cos \omega$$

$$x = z \sin \omega$$

$$\operatorname{tg} \omega = \frac{x}{r}$$

$$g = y \cos \Psi$$

$$b = y \sin \Psi$$

$$\operatorname{tg} \Psi = \frac{b}{g}$$

$$\begin{aligned} (\alpha + j\beta)^2 &= (g + jy)(r + jx) \\ &= zy(\cos \Psi + j \sin \Psi)(\cos \omega + j \sin \omega) \\ &= zy e^{j\Psi} e^{j\omega} = zy e^{j(\Psi+\omega)} \end{aligned}$$

$$(\alpha + j\beta) = \sqrt{zy} e^{j \frac{\Psi+\omega}{2}}$$

$$= \sqrt{zy} \left[\cos \frac{\Psi+\omega}{2} + j \sin \frac{\Psi+\omega}{2} \right]$$

d'où nous tirons deux nouvelles relations pour α et β .

$$(25) \quad \begin{cases} \alpha = \sqrt{zy} \cos \frac{\Psi+\omega}{2} \\ \beta = \sqrt{zy} \sin \frac{\Psi+\omega}{2} \end{cases}$$

On aura par conséquent:

$$\frac{\alpha + j\beta}{r + jx} = \frac{(\alpha + j\beta)(r - jx)}{r^2 + x^2} = \frac{\sqrt{zy} e^{j \frac{\Psi+\omega}{2}} z e^{-j\omega}}{z^2}$$

$$= \sqrt{\frac{y}{z}} e^{j \frac{\Psi-\omega}{2}}$$

en posant:

$$(27) \quad \delta = \frac{\Psi - \omega}{2}$$

nous avons:

$$(28) \quad \frac{a + j\beta}{r + jx} = \sqrt{\frac{y}{z}} e^{j\delta}$$

6. Expression sous forme réelle de la tension E .

Repronons l'expression (9) nous avons pour E

$$E = A_2 e^{kl} + B_2 e^{-kl}$$

introduisons les valeurs de A_2 et B_2 données par (13) et (14).

$$E = - \frac{E_0 (1 - R \frac{K}{r + jx}) e^{-klo} e^{kl}}{(e^{klo} - e^{-klo}) + R \frac{K}{r + jx} (e^{klo} + e^{-klo})} + \frac{E_0 (1 + R \frac{K}{r + jx}) e^{klo} e^{-kl}}{(e^{klo} - e^{-klo}) + R \frac{K}{r + jx} (e^{klo} + e^{-klo})}$$

en développant le numérateur.

$$(29) \quad E = -E_0 \frac{e^{-klo}}{D} e^{kl} + E_0 \frac{R \frac{K}{r + jx} e^{-klo}}{D} e^{kl} + E_0 \frac{e^{klo}}{D} e^{-kl} + E_0 \frac{R \frac{K}{r + jx} e^{klo}}{D} e^{-kl}$$

$$\quad (1) \qquad \qquad \qquad (2) \qquad \qquad \qquad (3) \qquad \qquad \qquad (4)$$

en appelant D le dénominateur

$$(30) \quad D = (e^{klo} - e^{-klo}) + R \frac{K}{r + jx} (e^{klo} + e^{-klo}).$$

Les composantes (1) et (3) représentent une onde directe et la même onde réfléchie à l'extrémité avec changement de signe.

Les composantes (2) et (4) représentent une onde directe et la même onde réfléchie sans changement de signe.

On vérifie sur la relation (29) pour $l = o$

on a bien
en effet.

$$E = E_0$$

$$E_{l=0} = E_0 \frac{\left(1 + R \frac{K}{r+jx}\right) e^{klo} - \left(1 - R \frac{K}{r+jx}\right) e^{-klo}}{D} = E_0$$

Sous la forme (29) la tension E est formée de 4 composantes. Ces composantes peuvent être ramenées à la forme $R e^{j\varphi}$, R se rapportant à l'amplitude de la composante et φ se rapportant à la phase de cette composante.

Il suffit pour cela de dégager de ces expressions le module R et l'argument φ .

Pour trouver le module C d'une expression complexe C une méthode simple consiste à chercher le conjugué C' et de faire les produits.

$$C^2 = C C'.$$

Ecrivons pour simplifier C_1, C_2, C_3, C_4 , les 4 composantes et C'_1, C'_2, C'_3, C'_4 , leur conjugué.

Nous avons pour la première

$$C_1 = -E_0 \frac{e^{-(\alpha + j\beta)o} e^{(\alpha + j\beta)l}}{\left(e^{(\alpha + j\beta)o} - e^{-(\alpha + j\beta)o}\right) + R \frac{a + j\beta}{r + jx} \left(e^{(\alpha + j\beta)o} + e^{-(\alpha + j\beta)o}\right)}$$

et pour son conjugué

$$C'_1 = -E_0 \frac{e^{-(\alpha - j\beta)o} e^{(\alpha - j\beta)l}}{\left(e^{(\alpha - j\beta)o} - e^{-(\alpha - j\beta)o}\right) + R \frac{a - j\beta}{r - jx} \left(e^{(\alpha - j\beta)o} + e^{-(\alpha - j\beta)o}\right)}$$

et formons le produit

$$(31) \quad C_1^2 = C_1 C'_1 = E_0^2 \frac{e^{-(\alpha + j\beta + \alpha - j\beta)o} e^{(\alpha + j\beta + \alpha - j\beta)l}}{DD'}$$

car au dénominateur nous avons à faire le produit de
 D (*equat (29)*) par son conjugué D'
Calculons DD'

$$DD' = \left\{ e^{(\alpha + j\beta)lo} - e^{-(\alpha + j\beta)lo} \right\} \left\{ e^{(\alpha - j\beta)lo} - e^{-(\alpha - j\beta)lo} \right\} \\ + R \frac{\alpha + j\beta}{r + jx} \left\{ e^{(\alpha + j\beta)lo} + e^{-(\alpha + j\beta)lo} \right\} \left\{ e^{(\alpha - j\beta)lo} - e^{-(\alpha - j\beta)lo} \right\} \\ + R \frac{\alpha - j\beta}{r - jx} \left\{ e^{(\alpha - j\beta)lo} + e^{-(\alpha - j\beta)lo} \right\} \left\{ e^{(\alpha + j\beta)lo} + e^{-(\alpha + j\beta)lo} \right\} \\ + R^2 \frac{(\alpha - j\beta)(\alpha + j\beta)}{(r - jx)(r + jx)} \left\{ e^{(\alpha + j\beta)lo} + e^{-(\alpha + j\beta)lo} \right\} \left\{ e^{(\alpha - j\beta)lo} + e^{-(\alpha - j\beta)lo} \right\}$$

$$DD' = e^{(\alpha + j\beta + \alpha - j\beta)lo} - e^{(\alpha + j\beta - \alpha + j\beta)lo} - e^{(\alpha - j\beta - \alpha - j\beta)lo} + e^{-(\alpha + j\beta + \alpha - j\beta)lo} \\ + R \frac{\alpha + j\beta}{r + jx} \left\{ e^{(\alpha + j\beta + \alpha - j\beta)lo} - e^{(\alpha + j\beta - \alpha + j\beta)lo} + e^{-(\alpha + j\beta - \alpha + j\beta)lo} - e^{-(\alpha + j\beta + \alpha - j\beta)lo} \right\} \\ + R \frac{\alpha - j\beta}{r - jx} \left\{ e^{(\alpha - j\beta + \alpha + j\beta)lo} - e^{(\alpha - j\beta - \alpha - j\beta)lo} + e^{-(\alpha - j\beta - \alpha - j\beta)lo} - e^{-(\alpha - j\beta + \alpha + j\beta)lo} \right\} \\ + R^2 \frac{\alpha^2 + \beta^2}{r^2 + x^2} \left\{ e^{(\alpha + j\beta + \alpha - j\beta)lo} + e^{(\alpha + j\beta - \alpha + j\beta)lo} + e^{-(\alpha + j\beta - \alpha + j\beta)lo} + e^{-(\alpha + j\beta + \alpha - j\beta)lo} \right\}$$

$$DD' = e^{2\alpha lo} + e^{-2\alpha lo} - e^{2j\beta lo} - e^{-2j\beta lo} + \\ + R \frac{\alpha + j\beta}{r + jx} \left\{ e^{2\alpha lo} - e^{-2\alpha lo} - e^{2j\beta lo} + e^{-2j\beta lo} \right\} \\ + R \frac{\alpha - j\beta}{r - jx} \left\{ e^{2\alpha lo} - e^{-2\alpha lo} + e^{2j\beta lo} - e^{-2j\beta lo} \right\} \\ + R^2 \frac{\alpha^2 + \beta^2}{r^2 + x^2} \left\{ e^{2\alpha lo} + e^{-2\alpha lo} + e^{2j\beta lo} + e^{-2j\beta lo} \right\}$$

$$DD^1 = e^{2\alpha lo} \left\{ 1 + R^2 \frac{\alpha^2 + \beta^2}{r^2 + x^2} + \frac{2R}{r^2 + x^2} (r\alpha + \beta x) \right\} + \\ + e^{-2\alpha lo} \left\{ 1 + R^2 \frac{\alpha^2 + \beta^2}{r^2 + x^2} - \frac{2R}{r^2 + x^2} (r\alpha + \beta x) \right\} +$$

$$\begin{aligned}
 & + e^{2j\beta lo} \left\{ -1 - R \left(\frac{a+j\beta}{r+jx} - \frac{a-j\beta}{r-jx} \right) + R^2 \frac{a^2 + \beta^2}{r^2 + x^2} \right\} \\
 & + e^{-2j\beta lo} \left\{ -1 + R \left(\frac{a+j\beta}{r+jx} - \frac{a+j\beta}{r+jx} \right) + R^2 \frac{a^2 + \beta^2}{r^2 + x^2} \right\} \\
 & = e^{2\alpha lo} \frac{1}{r^2 + x^2} \left\{ (r+Ra)^2 + (x+R\beta)^2 \right\} \\
 & + e^{-2\alpha lo} \frac{1}{r^2 + x^2} \left\{ (r-Ra)^2 + (x-R\beta)^2 \right\} +
 \end{aligned}$$

+ la somme de deux conjugués.

Or, la somme de deux conjugués est égale à deux fois la composante réelle des conjugués. En effet.

$$(a + jb) + (a - jb) = 2a$$

Cherchons cette composante réelle. Nous pouvons écrire

$$\left\{ \left(-1 + R^2 \frac{a^2 + \beta^2}{r^2 + x^2} \right) - j \left(\frac{2R}{r^2 + x^2} (r\beta - ax) \right) \right\} \left\{ \cos 2\beta lo + j \sin 2\beta lo \right\}$$

en développant on trouve pour la composante réelle:

$$\left(-1 + R^2 \frac{a^2 + \beta^2}{r^2 + x^2} \right) \cos 2\beta lo + \frac{2R}{r^2 + x^2} (r\beta - ax) \sin 2\beta lo$$

et finalement

$$\begin{aligned}
 (32) \quad DD'_1 &= \frac{1}{r^2 + x^2} \left\{ (r+Ra)^2 + (x+R\beta)^2 \right\} e^{2\alpha lo} \\
 & + \frac{1}{r^2 + x^2} \left\{ (r-Ra)^2 + (x-R\beta)^2 \right\} e^{-2\alpha lo} \\
 & + 2 \left(R^2 \frac{a^2 + \beta^2}{r^2 + x^2} - 1 \right) \cos 2\beta lo + \frac{4R}{r^2 + x^2} (r\beta - ax) \sin 2\beta lo.
 \end{aligned}$$

Posons

$$(33) \quad DD'_1 = \frac{A^2}{r^2 + x^2}$$

substituons la valeur de DD' dans l'équat (31)

$$C_1^2 = E_0^2 \frac{e^{-2\alpha l_0} e^{2\alpha l} (r^2 + x^2)}{A^2}$$

$$C_1 = E_0 \frac{z e^{-\alpha l_0}}{A} e^{\alpha l}.$$

Remarquons que toutes les composantes de l'équation (29) ont le même dénominateur et que ce dénominateur peut s'écrire

$$(34) \quad D = \sqrt{DD'} e^{j\xi} = \frac{A}{Z} e^{j\xi}$$

ou $\sqrt{DD'}$ est une constante donnée par l'équation (32) et ξ un angle constant qu'on pourrait facilement tirer de l'équation (30).

Ainsi, en tenant compte des relations (28) et (34)

$$\frac{K}{r+jx} = \sqrt{\frac{\gamma}{z}} e^{j\delta}$$

et de

$$K = \alpha + j\beta$$

les différentes composantes de l'équation (28) prennent les formes simples

$$C_1 = -E_0 \frac{e^{-(\alpha + j\beta)l_0}}{\frac{A}{Z} e^{j\xi}} e^{(\alpha + j\beta)l} = -E_0 \frac{z e^{\alpha(l-l_0)}}{A} e^{j(\beta(l-l_0)-\xi)}$$

$$C_2 = E_0 \frac{R \sqrt{\frac{\gamma}{z}} e^{j\delta} e^{-(\alpha + j\beta)l_0}}{\frac{A}{Z} e^{j\xi}} e^{(\alpha + j\beta)l} = E_0 \frac{\sqrt{\gamma z}}{A} R e^{\alpha(l-l_0)} e^{j[\beta(l-l_0)-\xi+\delta]}$$

$$C_3 = E_0 \frac{e^{(\alpha + j\beta)l_0}}{\frac{A}{Z} e^{j\xi}} e^{-(\alpha + j\beta)l} = E_0 \frac{Z}{A} e^{-\alpha(l-l_0)} e^{-j[\beta(l-l_0)+\xi]}$$

$$C_4 = E_0 \frac{R \sqrt{\frac{\gamma}{z}} e^{j\delta} e^{(\alpha+j\beta)l_0}}{\frac{A}{Z} e^{j\xi}} e^{-(\alpha+j\beta)l} = E_0 \frac{\sqrt{\gamma z}}{A} R e^{-\alpha(l-l_0)} e^{-j[\beta(l-l_0)-\xi-\delta]}$$

comme $E_0 = \dot{E}_0 e^{j\omega t}$ (tension à l'origine), on trouve finalement la valeur réelle correspondante de la tension

(35)

$$e = \frac{E_0}{A} \left\{ -z e^{\alpha(l-l_0)} \cos \left\{ \omega t + [\beta(l-l_0) - \xi] \right\} + R \sqrt{\gamma z} e^{\alpha(l-l_0)} \cos \left\{ \omega t + [\beta(l-l_0) - \xi + \delta] \right\} \right. \\ \left. + z e^{-\alpha(l-l_0)} \cos \left\{ \omega t - [\beta(l-l_0) + \xi] \right\} + R \sqrt{\gamma z} e^{-\alpha(l-l_0)} \cos \left\{ \omega t - [\beta(l-l_0) + \xi - \delta] \right\} \right\}$$

7. Expression sous forme réelle du courant I.

Reprendons l'expression (9) nous avons pour I

$$I = -\frac{K}{r+jx} (A_2 e^{kl} - B_2 e^{-kl})$$

introduisons les valeurs de A_2 et B_2 données par (13) et (14)

$$I = -\frac{K}{r+jx} \left\{ \frac{-E_0 (1 - R \frac{K}{r+jx}) e^{-klo} e^{kl}}{(e^{klo} - e^{-klo}) + R \frac{K}{r+jx} (e^{klo} + e^{-klo})} - \frac{E_0 (1 + R \frac{K}{r+jx}) e^{klo} e^{-kl}}{(e^{klo} - e^{-klo}) + R \frac{K}{r+jx} (e^{klo} + e^{-klo})} \right\}$$

en développant le numérateur

$$(36) \quad I = E_0 \frac{e^{-klo}}{D} \frac{K e^{kl}}{r+jx} - E_0 \frac{R \frac{K}{r+jx} e^{-klo}}{D} - \frac{K}{r+jx} e^{kl} + E_0 \frac{e^{klo}}{D} \frac{K}{r+jx} e^{-kl} + E_0 \frac{R \left(\frac{K}{r+jx} \right) e^{klo}}{D} - e^{-kl}$$

le dénominateur D est celui donné par l'équation (30). Nous pouvons donc écrire (34)

$$D = \frac{A}{Z} e^{j\xi}$$

nous avons aussi (28)

$$\frac{K}{r+jx} = \sqrt{\frac{\gamma}{z}} e^{j\delta}$$

l'équation (36) peut donc s'écrire :

$$I = E_0 \frac{e^{-(\alpha + j\beta)lo}}{\frac{A}{Z} e^{j\xi}} \sqrt{\frac{\gamma}{z}} e^{j\delta} e^{(\alpha + j\beta)l} - E_0 \frac{R \frac{\gamma}{z} e^{2j\delta} e^{-(\alpha + j\beta)lo}}{\frac{A}{Z} e^{j\xi}} e^{(\alpha + j\beta)l}$$

$$+ E_0 \frac{e^{(\alpha + j\beta)lo}}{\frac{A}{Z} e^{j\xi}} \sqrt{\frac{\gamma}{z}} e^{j\delta} e^{(\alpha + j\beta)l} + E_0 \frac{R \frac{\gamma}{z} e^{2j\delta} e^{(\alpha + j\beta)lo} e^{-(\alpha + j\beta)l}}{\frac{A}{Z} e^{j\xi}}$$

$$I = E_0 \frac{\sqrt{zy}}{A} e^{\alpha(l-lo)} e^{j[\beta(l-lo)-\xi+\delta]} - E_0 \frac{Ry}{A} e^{\alpha(l-lo)} e^{j[\beta(l-lo)+2\delta-\xi]}$$

$$+ E_0 \frac{\sqrt{zy}}{A} e^{-\alpha(l-lo)} e^{-j[\beta(l-lo)-\delta+\xi]} + E_0 \frac{Ry}{A} e^{-\alpha(l-lo)} e^{-j[\beta(l-lo)-2\delta+\xi]}$$

ce qui s'écrit sous forme réelle, puisque $E_0 = \dot{E}_0 e^{j\omega t}$

(37)

$$i = \frac{\dot{E}_0}{A} \left\{ \sqrt{zy} e^{\alpha(l-lo)} \cos \{ \omega t + [\beta(l-lo) - \xi + \delta] \} - R \gamma e^{\alpha(l-lo)} \cos \{ \omega t + [\beta(l-lo) + 2\delta - \xi] \} \right.$$

$$\left. + \sqrt{zy} e^{-\alpha(l-lo)} \cos \{ \omega t - [\beta(l-lo) - \delta + \xi] \} + R \gamma e^{-\alpha(l-lo)} \cos \{ \omega t - [\beta(l-lo) - 2\delta + \xi] \} \right\}$$

Nous avons donné le développement complet de la théorie pour un cas d'expérience déterminé. Les raisons du schéma d'expérience fig. (6) page 29 seront discutées plus loin.

Quant au développement complet, nous l'avons fait dans le but d'analyser, sous le même jour, des relations telles que: décalage entre le courant et la tension le long du système et à différentes fréquences, influence du facteur R qui place le solénoïde dans des conditions intermédiaires des cas limites: extrémité à la terre avec ventre de courant et nœud de tension, extrémité isolée avec nœud de courant et ventre de tension. Ces problèmes utilisent les formules générales (35) et (37). Leur étude n'est pas l'objet de ce travail.

Dans ce travail, la discussion porte sur l'analyse du phénomène de la non harmonicité des partiels. Pour cette analyse, à cause des conditions expérimentales imposées, les formules utilisées se réduisent (chap. IV) à des formes plus simples.

CHAPITRE III

1. Conditions expérimentales.

Pour nos expériences, nous avons adopté le dispositif suivant, donné par la figure (6) et pour lequel la théorie générale a été appliquée et nous a conduit au développement du paragraphe du chapitre précédent.

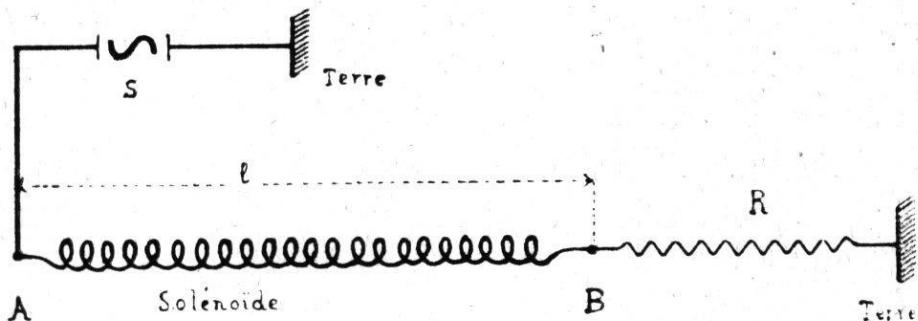


Fig. 6

Schématiquement, une source S de courant alternatif, de fréquence variable, a un de ses pôles réuni à la terre, l'autre est réuni à l'extrémité A d'un solénoïde AB , de longueur l . Le solénoïde AB figure dans le cas particulier de nos expériences le système complexe le long duquel vont se produire les ondes électriques. L'extrémité B du solénoïde est réunie à la terre par une résistance ohmique R .

Nous nous sommes préoccupés, avant tout, dans l'élaboration de ce schéma, de trouver un circuit qui se présente dans les conditions les plus favorables aux expériences et au calcul.

Il y a lieu de souligner un certain nombre de conditions qui doivent être nécessairement remplies.

a. — Pour produire des ondes électriques dans un solénïde les auteurs préconisent différents systèmes.

- a) Excitation forcée par liaison galvanique,
- b) Excitation par induction électromagnétique,
- c) Excitation par induction électrostatique.,

Or, dans le développement de la théorie, nous avons admis les facteurs caractéristiques r , x , g , b , définissant le système, comme étant des fonctions constantes le long du solénoïde, ce qui signifie, que nous avons admis un système homogène quant à la distribution des facteurs caractéristiques. Pratiquement, pour un solénoïde droit il est impossible de remplir cette condition, car si nous considérons la situation d'une spire vis-à-vis des spires voisines, nous voyons que les spires situées aux extrémités du solénoïde ne sont pas dans la même situation que par exemple les spires centrales. C'est donc dire que le caractère d'homogénéité n'existe pratiquement pas et cela d'autant moins que le solénoïde est plus court. Il est facile de concevoir un système où cette anomalie n'existerait pas ; ce serait le cas d'un solénoïde bobiné en forme de tore. Ce défaut d'homogénéité peut être facilement mis en évidence ; il se manifeste par une distribution irrégulière des nœuds et des ventres le long du système.

Concernant l'homogénéité du système, une cause de perturbation importante est celle qui s'introduit dans le cas d'excitation par induction électrostatique et surtout d'induction électromagnétique. Au solénoïde s'ajoute alors, localisé en un endroit déterminé, soit une capacité due à l'armature du condensateur du circuit d'excitation électrostatique, soit une induction-mutuelle due à la bobine d'excitation électromagnétique. Il en résulte qu'en cet endroit, les facteurs caractéristiques de l'unité d'élément du système sont différents du restant du circuit, et l'homogénéité du système est détruite.

L'excitation par induction électrostatique n'est pratiquement pas employée pour des systèmes comme les solénoïdes, à cause surtout des trop petites quantités d'énergie

utilisable. C'est le procédé qu'on utilise fréquemment dans les montages « Lecher », pour l'étude de la circulation électrique en très haute fréquence dans les systèmes composés de fils parallèles et de ponts.

Par contre, l'excitation par induction électromagnétique est très fréquemment employée pour la production d'ondes dans les solénoïdes. La méthode consiste à placer dans le voisinage du solénoïde et parallèlement à sa section, un petit bobinage faisant partie d'un circuit d'excitation à haute fréquence.

A ce système d'excitation se rattache le système Tesla, le système Oudin et les nombreux autres systèmes qui fonctionnent sur le même principe. L'excitation électromagnétique, généralement utilisée en T.S.F., a l'avantage de produire des phénomènes de grande intensité. Ainsi, le solénoïde qui sert à nos expériences, excité électromagnétiquement par une petite bobine (35 tours de fil, diamètre moyen 12,5 cm., largeur 3 cm.) placée à l'intérieur en son milieu, nous a donné dans des essais, pour la résonance demi-onde une différence de potentiel aux extrémités dépassant 65 300 volts. La lecture des tensions se faisait sur voltmètre electrostatique Abraham & Villard, placé aux extrémités du solénoïde ; la fréquence était 822, dans la bobine d'excitation soumise à une tension de 20 volts, circulait un courant de 5,2 ampères. Le courant secondaire au milieu du solénoïde était de 26 milliampères.

Nous pouvons, dans les mêmes conditions d'excitation, en élevant la fréquence, produire la résonance des autres partiels, mais la distribution irrégulière des nœuds et des ventres le long du solénoïde montre avant tout comment la présence du bobinage d'excitation vient troubler l'homogénéité du système.

Ces inconvénients n'existent pas dans le cas d'excitation par liaison galvanique. Le tableau ci-après montre quelle est la distribution des ventres de courant le long du solénoïde dans les deux cas, d'excitation électromagnétique et dans le cas d'excitation par contact galvanique.

Le tableau se rapporte à des partiels de même ordre: 7 demi-ondes pour l'excitation par induction, 7 demi-ondes pour l'excitation par contact galvanique. Les phénomènes sont du même ordre d'intensité.

<u>1^{er} CAS</u>	Position par rapport à une division en cm. des ventres de courant le long du solénoïds.
Excitation par induction électr.-magnétique	5,2 21,4 35,4 45,9 54,5 63,3 74,4 86,8 cm. distance entre les ventres 16,2 14 10,5 8,6 8,8 11,1 14,3
<u>2^{me} CAS</u>	Position des ventres de courant.
Excitation par liaison galvanique	8,6 22 33 43,7 54,4 65,3 77,2 90 cm. distance entre les ventres 13,4 11 10,7 10,7 10,9 11,9 12,8

Il ressort clairement que dans le premier cas la distance entre les ventres de courant varie beaucoup, elle passe de 8,6 à 16,2 cm., c'est-à-dire qu'elle double à peu près de valeur; dans le second cas au contraire, les différences sont beaucoup plus petites et plus régulières; dans les deux cas la distance entre ventres successifs est plus grande aux extrémités que vers le milieu de la bobine; cela provient certainement du manque d'homogénéité dû à la situation des spires extrêmes, défaut qui existe dans les deux cas, mais qui paraît plus accentué dans le premier cas, par le fait que la présence au milieu du solénoïde de la bobine d'excitation augmente les facteurs self et capacité des spires centrales, ce qui se traduit à la résonance par un rapprochement des ventres du courant.

Ces considérations ont leur importance, puisque dans les conditions où nous nous plaçons, il y a lieu avant tout de travailler sur un circuit qui se rapproche autant que possible du circuit idéal tel que l'exige la théorie.

b. — Dans l'ordre des perturbations causées, il y a lieu de souligner l'influence du rayonnement et des effluves qui se produisent dans le cas où les phénomènes de résonance sont très intenses. Dans l'exemple cité plus haut, de résonance demi-onde, avec 65 300 volts aux bornes, le rayonnement électrique était à même de rendre incandescent le gaz d'une lampe au néon, tenue à la main et placée à plus de 0,50 m. de l'extrémité du solénoïde. Il se produit de nombreuses effluves qui jaillissent des extrémités de la bobine et qui ne sont pas sans troubler le phénomène. Certes, dans notre théorie générale nous avons prévu le cas en introduisant dans nos équations les facteurs r et g , contenant des éléments qui ont la nature respectivement d'une résistance ohmique et d'une conductibilité ohmique (page 23) et qui tiennent compte des pertes d'énergie par rayonnement et des effluves dues à la mauvaise isolation, mais à cause de leur caractère imprécis, il y a lieu de diminuer autant que possible l'influence de ces facteurs qui ne sont pas fondamentaux, mais qui ont plutôt le caractère de facteurs de perturbation.

Ces considérations nous ont décidé à travailler avec des tensions aussi faibles que possible pour éliminer les effluves et rendre négligeable le rayonnement, à placer le solénoïde dans des conditions géométriques bien définies et pour ne pas causer de perturbations lors des mesures, en s'approchant du système de faire ces dernières à distance à la lunette.

c. — Au sujet des mesures, il y a lieu de faire certaines remarques. L'introduction d'appareils de mesure dans le circuit est cause très fréquemment de modifications qui, dans le circuit, peuvent changer complètement des conditions fondamentales imposées. Ainsi, dans le cas d'un solénoïde, on sait que des solutions caractéristiques existent suivant que l'une de ses extrémités est isolée où qu'elle se trouve mise à la terre. Dans un premier cas, il se produit à cette extrémité des phénomènes de résonance de tension. Dans le second cas des phénomènes de résonance

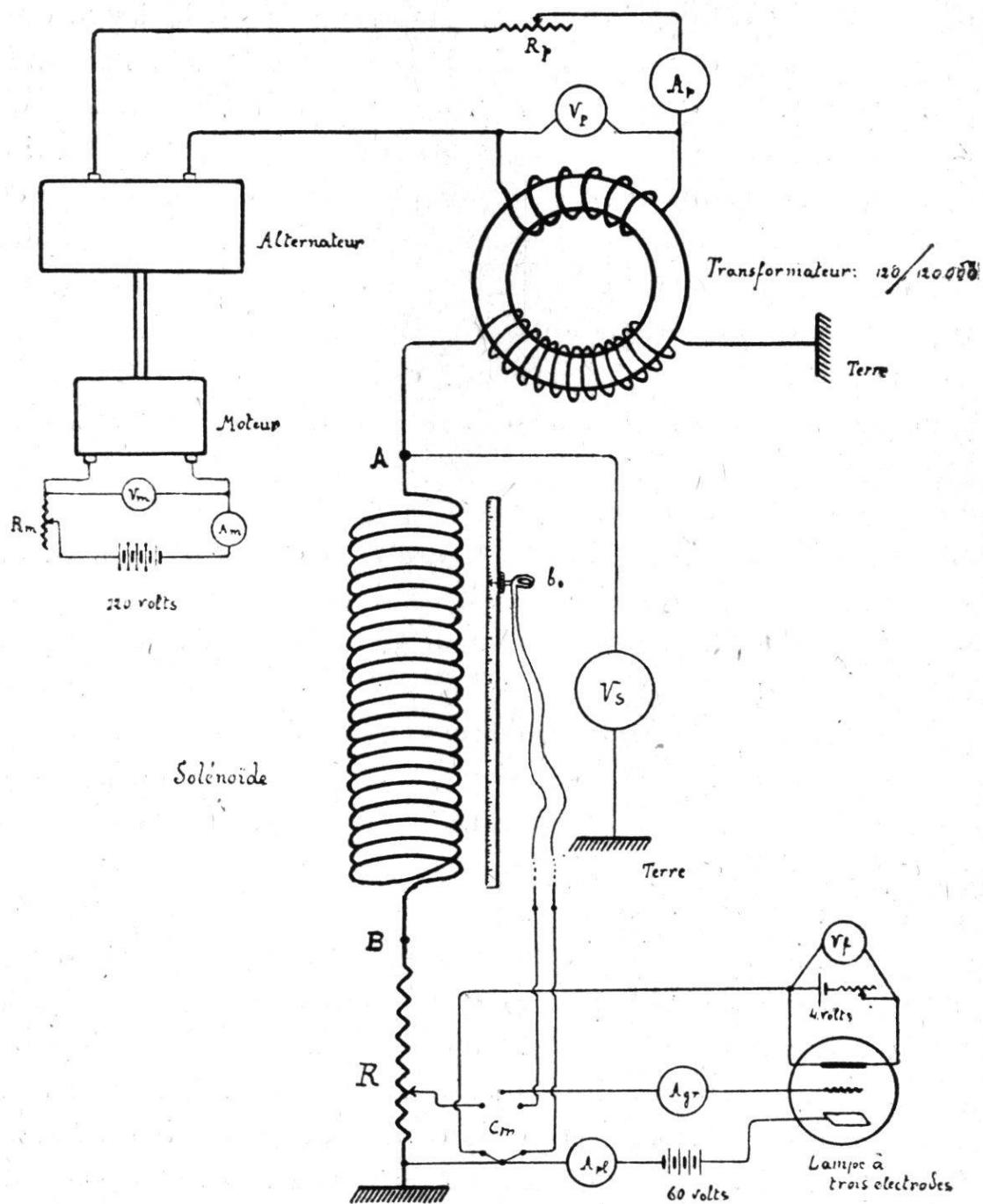
d'intensité; or, si l'on se propose d'étudier ce genre de résonance, on est obligé de placer entre l'extrémité isolée et la terre un voltmètre, c'est-à-dire un appareil qui, de par ses conditions de fonctionnement détruit la condition fondamentale pour l'existence de la résonance de tension. On peut faire une remarque analogue dans le cas de mesure de résonance d'intensité. La condition d'existence du phénomène est que l'extrémité soit mise à la terre, or, la mesure exige l'interposition d'un ampèremètre entre la terre et cette extrémité, c'est-à-dire d'un appareil qui introduit nécessairement une résistance, donc détruit la condition fondamentale qui est ici l'absence de résistance interposée entre l'extrémité de la terre. On est dans une situation analogue lorsque en acoustique on veut étudier ce qui se passe à l'extrémité d'un tuyau ouvert en vibration on est obligé de placer un petit appareil, une petite membrane, pour mesurer les tensions, et cet appareil placé à l'extrémité du tuyau change la condition parfaite imposée et dans le cas d'un tuyau fermé la mesure reviendra à faire une petite ouverture ce qui modifie plus ou moins le phénomène en changeant aussi les conditions fondamentales imposées. Il suit de là, que, pratiquement, aucune mesure ne se fait dans les conditions d'existence idéale du phénomène, qui sont pour ainsi dire des cas limites et la mesure nous place toujours dans une situation intermédiaire plus ou moins rapprochée de l'un ou de l'autre cas limite. Pour cette raison, il convient de développer la théorie qui correspond au cas réel, c'est-à-dire le cas de l'interposition d'un conducteur R entre l'extrémité de la bobine et la terre. Et dans les conditions $R = 0$ et $R = \infty$, nos équations donnent l'état électrique des deux cas limites extrêmes. Nous avons admis dans le cas de nos mesures que le conducteur interposé était de la nature d'une résistance ohmique, mais nous aurions très bien pu d'une façon plus générale introduire pour ce conducteur des grandeurs: résistance ohmique, self-induction, et capacité, en donnant à R les composantes d'une impédance. Par exemple des

mesures de tensions à l'extrémité à l'aide d'un voltmètre électrostatique interposé entre l'extrémité et la terre correspondrait au cas où R a la nature d'une capacité. Dans la pratique, pour que les mesures soient intéressantes, on cherche à s'écartez le moins possible de l'un ou de l'autre cas limite. Comme d'une part les mesures de résonance de tension à l'aide d'un voltmètre nous éloigne beaucoup plus du cas limite résonance d'intensité, nous avons déjà un argument en faveur de cette dernière mesure; d'autre part les considérations précédentes qui nous ont déterminé, pour sauver l'homogénéité du système à utiliser l'excitation par contact galvanique, nous imposait déjà des mesures de résonance d'intensité.

Ainsi, notre circuit correspond en quelque sorte à un circuit simple formé d'une self-induction et d'une capacité en série, circuit aux bornes duquel une tension constante serait appliquée et pour lequel on étudierait sur un ampèremètre le phénomène de résonance d'intensité.

Pour une tension constante, l'intensité du courant à la résonance va en diminuant avec les partiels croissants ce qui signifie qu'il faut pour une série de mesures fixer la tension appliquée suivant la sensibilité de l'appareil de mesure. Nous avons pu réduire cette tension jusqu'à 500 volts, et c'est cette valeur que nous avons gardée pour toute la série des mesures. Comme la source S n'est pas à même de fournir directement une tension élevée, nous avons interposé entre S et le circuit d'utilisation un transformateur qui soit à même de nous donner la tension constante exigée.

Schéma complet du circuit d'expériences :



2. Dispositif expérimental.

La source S est un alternateur à fer tournant denté¹ entraîné par un moteur à courant continu dont on peut faire varier la vitesse de rotation entre des limites qui sont pratiquement de 120 à 3000 tours à la minute. Le nombre

¹ Charles-Eugène GUYE, *L'Eclairage électrique*, t. IX, p. 157. 1896.

des dents étant de 200, la fréquence du courant produit s'étendra de 400 à 10 000. Cet alternateur construit par la Compagnie de l'Industrie électrique à Genève, comprend comme partie fixe un noyau cylindrique dans lequel le bobinage excitateur crée un champ parallèle à l'axe de la machine. Ce noyau se prolonge par un cylindre denté, de plus grand diamètre dans lequel les lignes de force magnétique s'épanouissent, suivant ainsi le chemin de réluctance minimum qui est créé par le fer tournant. Un conducteur isolé passe d'une encoche à l'autre en fermant dans une boucle simple les 400 dents du cylindre qui forment l'induit fixe de la machine.

Le fer tournant est une cloche dont la paroi intérieure, cylindrique, est entaillée de 200 dents; successivement elle ferme le circuit magnétique sur une encoche puis sur la dent voisine. La tension aux bornes est de 200 volts et l'intensité maximum 8 ampères.

La haute fréquence du courant ne permet pas de vérifier à l'oscillographe si la courbe de tension est sinusoïdale. Des essais ont été faits par la méthode de résonance de Pupin pour déceler les harmoniques éventuelles.

Ils ont permis de constater que l'amplitude des 11 premiers harmoniques est négligeable pour une excitation poussée jusqu'à 0,6 amp., valeur maximum que nous n'avons jamais dépassée.

Le nombre des tours de l'alternateur qui fixe la fréquence est déterminé à l'aide d'un compteur de mesures « Hasler » préalablement étalonné.

Le solénoïde qui figure dans notre cas, le système complexe le long duquel il y a propagation des ondes, est le secondaire d'une bobine de Ruhmkorff, construite par Klingelfuss. à Bâle. Cette bobine, à cause de caractéristiques spéciales et particulièrement de l'enroulement des spires, convient parfaitement pour la production à relativement basses fréquences, d'ondes électriques stationnaires. Cette

même bobine a déjà été utilisée et décrite par M. Grandy¹.

Devant supporter de hautes tensions, elle a été construite de telle façon que pour éviter le voisinage trop rapproché des segments conducteurs soumis à des différences de potentiel élevées, l'enroulement des spires au lieu d'être comme dans des bobines ordinaires, est faite par tranches. La fig (8) donne en coupe une section à travers quatre couches de spires successives. Sur l'isolation inférieure (*a*), l'enroulement partant de l'extérieur se dirige en spirale vers l'intérieur en restant dans le plan de la section, une seconde isolation (*b*) recouvre cette première couche. L'enroulement de la deuxième couche se fait alors de l'intérieur vers l'extérieur, mais différemment, en ce sens qu'on a régulièrement réparti les isolations, c'est-à-dire de façon que les spires extérieures des couches 1 et 2 qui se trouvent être soumises à des différences de potentiel plus élevées que les spires intérieures se trouvent aussi séparées par une isolation plus grande.

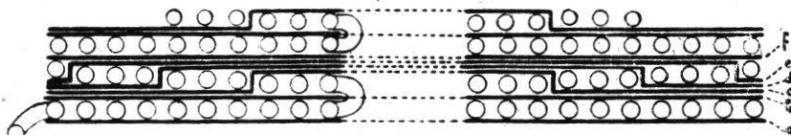


Fig. 8.

L'isolation *f* sépare la couche 2 de la couche 3 et, l'enroulement de la couche 3 est identique à l'enroulement de la couche 1. Toute la bobine est faite ainsi d'une juxtaposition de couches de spires. Elle a été divisée en deux parties, ceci pour permettre l'interposition d'un milliampermètre en un point de symétrie de la bobine et aussi pour permettre de placer un skléromètre pour les mesures en radiothérapie, usage pour lequel la bobine a été construite. Cette coupure crée une petite anomalie et trouble quelque peu l'homogénéité de l'ensemble, cependant, la

¹ M. GRANDY, *Untersuchungen über Eigenfrequenzen und verteilte Kapazität einer viellagigen Drahtspule*. Thèse, Fribourg — 1926.

distribution régulière des partiels le long de la bobine nous indique que la perturbation causée par la coupure est négligeable.

Les autres constantes de la bobine sont les suivantes:

Résistance de la bobine:

Première moitié	20 940 ohms
Deuxième moitié	19 100 ohms
Self-induction (50 périodes)	575 henrys
Nombre de tours	92 000
Longueur du fil	72 500 mètres
Longueur de la bobine avec son isolation .	118 cm.
Longueur de la bobine sans son isolation .	98 cm.
Epaisseur du fil	0,2 mm.
Diamètre intérieur de la bobine	14 cm.
Diamètre extérieur de la bobine	34 cm.

L'enroulement proprement dit, long de 98 cm. est noyé dans une isolation de cire; l'ensemble forme un cylindre de 118 cm. de longueur.

Les données techniques sont celles du constructeur, les données électriques ont été controlées au laboratoire.

Le transformateur élévateur de tension est un transformateur Siemens & Halske, à circuit magnétique fermé. Ses caractéristiques sont:

Rapport de transformation (50 périodes)... $120/120\,000$

La faible tension, 500 volts, exigée au secondaire du transformateur est fournie par un courant primaire très petit. Il en résulte que la déformation de l'onde de tension causée par l'hystérésis dans les tôles du transformateur, est dans ces conditions négligeable.

Les mesures d'intensité sont faites à l'aide d'un détecteur à lampe triode. Nous avons essayé successivement pour les mesures de courant un galvanomètre Duddell, un détecteur à galène, mais aucun de ces appareils ne nous a donné satisfaction, soit que leur sensibilité ne soit pas suffisante, soit surtout que leur réglage trop délicat et leur instabilité trop grande ne donne aucune régularité dans la mesure. Le détecteur à lampe a de nombreux avantages.

Il peut être réglé dans des conditions parfaitement déterminées de chauffage, de tension, ce qui permet de l'utiliser toujours dans un même état de fonctionnement.

Il est en outre de grande sensibilité. Pour nos mesures, nous avons utilisé le schéma de la Fig. (9). L'appareil de lecture est un micro-ampèremètre Ag placé sur le circuit de grille.

On utilise pour la détection la courbure de la caractéristique du courant de grille au voisinage du potentiel O de la grille.

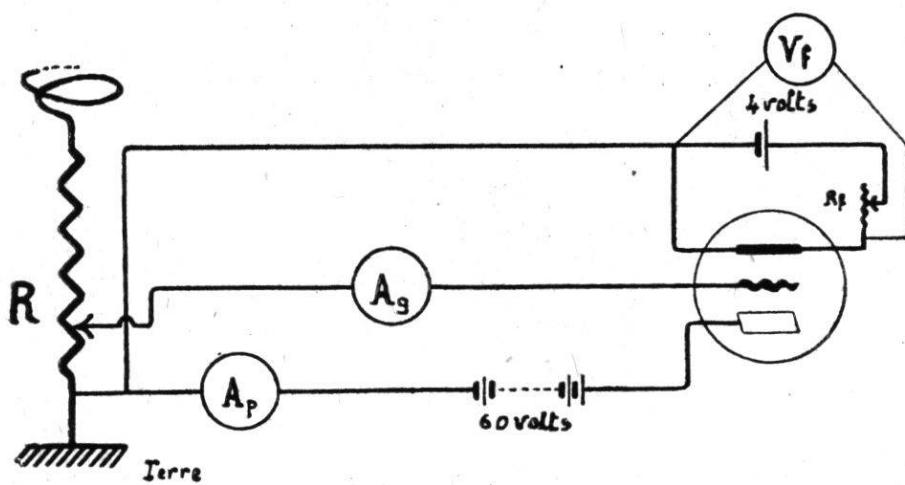


Fig. 9.

Pour un potentiel de grille variant de 0 à 0,9 volts, le courant de grille varie de 0 à $12 \cdot 10^{-6}$ ampères, le long d'une caractéristique de grille rigoureusement parabolique. On voit qu'il est aisé d'étalonner un tel appareil de mesure. Un autre avantage de ce système de mesures est que, placé comme l'indique le schéma, on peut changer sa sensibilité en variant r ; comme la résistance R est fixe, que le détecteur représente sur r une dérivation de résistance très grande, les constantes du circuit ne changent pratiquement pas.

Un commutateur C_m (fig. 7 page 50) permet la connection du circuit de la petite bobine b_0 avec le circuit du détecteur. La petite bobine b_0 (quelques spires de fil) est mobile le long du solénoïde (à l'intérieur ou à l'extérieur suivant le cas) et sert à déterminer à la résonance les ventres de courant, ce qui fixe l'ordre des partiels. Le com-

mutateur a été placé pour éviter l'installation inutile de deux détecteurs de mesures. Pratiquement, les mesures sont faites de la façon suivante: le détecteur est connecté sur r (r étant réglé pour le maximum de sensibilité fixé par l'échelle de Ag) lorsque par accroissement de la fréquence un maximum de courant dans le microampèremètre Ag est atteint, ce qui signifie qu'un régime de résonance a lieu dans le solénoïde, on maintient le régime à cette fréquence de résonance et, connectant le circuit du détecteur sur b_0 , on étudie, en déplaçant b_0 , la distribution des partiels.

La tension constante appliquée, 500 volts, est réglée à l'aide d'un voltmètre électrostatique multicellulaire de Lord Kelvin. Ce voltmètre est placé entre l'extrémité A de la bobine et la terre.

On peut discuter sur les perturbations apportées aux oscillations de la bobine du fait de la présence du transformateur et du voltmètre de mesure dans le circuit du solénoïde. Il n'y a en réalité pas lieu d'envisager de perturbations de par le fait que nous sommes ramenés aux mêmes conditions de mesure lorsque en courant alternatif à basse fréquence on étudie les phénomènes de résonance d'un système formé d'une capacité en série avec une self-induction. C'est au fond un phénomène de résonance localisée qu'on étudie, lequel phénomène dépend uniquement des éléments d'un segment du circuit et des conditions électriques imposées à cet élément et est indépendant du régime et du reste du circuit.

Des essais d'interruption du circuit du voltmètre électrostatique une fois la résonance atteinte, ont d'ailleurs montré que sa présence ne modifiait en rien le régime électrique.

CHAPITRE IV

CAS PARTICULIER, CONCLUSIONS THÉORIQUES, RÉSULTATS EXPÉRIMENTAUX.

1. Valeurs réelles de e et i dans le cas où la résistance R et l'amortissement α sont nuls.

Ensuite des restrictions spéciales développées au chapitre précédent, on peut admettre en première approximation pour le circuit de nos expériences, que l'amortissement α est négligeable. Nos mesures se font en outre sur un circuit où l'extrémité B du solénoïde est réunie directement à la terre sans l'intermédiaire de la résistance (fig. 6) ce qui revient à poser $R = 0$.

Ces deux restrictions $\alpha = 0$ et $R = 0$ introduites dans les équations générales donnent pour la tension e et le courant i des formules plus simples que les formules générales (35) et (37) trouvées au chapitre II. On peut introduire ces restrictions dans ces formules générales, pour retrouver les formules du cas particulier. Il est plus immédiat cependant de les tirer des équations sous forme imaginaire, (29), (30) et (36).

Calcul de la tension. — Les équations (29) et (30) donnent pour $R = 0$ et $\alpha = 0$

$$(29') \quad E = \dot{E}_0 e^{j\omega t} \frac{e^{klo} e^{-kl} - e^{-klo} e^{kl}}{D}$$
$$D = e^{klo} - e^{-klo}$$

comme $K = \alpha + j\beta$ et que $\alpha = 0$

$$E = \dot{E}_0 e^{j\omega t} \frac{e^{-j\beta(l-lo)} - e^{j\beta(l-lo)}}{e^{j\beta lo} - e^{-j\beta lo}}$$

$$E = \dot{E}_0 e^{j\omega t} \frac{\cos \beta(l - l_0) - j \sin \beta(l - l_0) - \cos \beta(l - l_0) - j \sin \beta(l - l_0)}{\cos \beta l_0 + j \sin \beta l_0 - \cos \beta l_0 + j \sin \beta l_0}$$

$$E = -\dot{E}_0 e^{j\omega t} \frac{\sin \beta(l - l_0)}{\sin \beta l_0}$$

ce qui donne pour la valeur réelle de la tension e

$$(38) \quad e = -\dot{E}_0 \cos \omega t \frac{\sin \beta(l - l_0)}{\sin \beta l_0}$$

On vérifie sur cette équation que l'on a bien à l'origine ($l = 0$) et à l'extrémité à la terre ($l = l_0$) les valeurs connues de la tension en effet

$$e_{l=0} = \dot{E}_0 \cos \omega t$$

$$e_{l=l_0} = 0$$

Calcul du courant. — L'équation (36) donne pour $R = 0$

$$I = \dot{E}_0 e^{j\omega t} \frac{K}{r + jx} \frac{e^{-klo} e^{kl} + e^{klo} e^{-kl}}{e^{klo} - e^{-klo}}$$

$$\text{avec } K = \alpha + j\beta \text{ et } \alpha = 0$$

$$(36') \quad I = \dot{E}_0 e^{j\omega t} \frac{j\beta}{r + jx} \frac{e^{j\beta(l - l_0)} + e^{-j\beta(l - l_0)}}{e^{j\beta l_0} - e^{-j\beta l_0}}$$

$$I = \dot{E}_0 e^{j\omega t} \frac{j\beta}{r + jx} \frac{\cos \beta(l - l_0) + j \sin \beta(l - l_0) + \cos \beta(l - l_0) - j \sin \beta(l - l_0)}{\cos \beta l_0 + j \sin \beta l_0 - \cos \beta l_0 + j \sin \beta l_0}$$

$$I = \dot{E}_0 e^{j\omega t} \frac{\beta}{r + jx} \frac{\cos \beta(l - l_0)}{\sin \beta l_0}$$

$$\text{en écrivant } \frac{1}{r + jx} = \frac{1}{\sqrt{r^2 + x^2}} e^{-j\varphi} \text{ avec } \operatorname{tg} \varphi = \frac{x}{r}$$

$$I = \dot{E}_0 e^{j(\omega t - \varphi)} \frac{\beta}{\sqrt{r^2 + x^2}} \frac{\cos \beta(l - l_0)}{\sin \beta l_0}$$

ce qui donne pour la valeur réelle i du courant

$$(39) \quad i = \dot{E}_0 \frac{\beta}{\sqrt{r^2 + x^2}} \frac{\cos \beta (l - l_0)}{\sin \beta l_0} \cos (\omega t - \varphi)$$

On tire de cette équation que, à l'origine, le courant a pour valeur

$$(40) \quad i_{l=0} = \dot{E}_0 \frac{\beta}{\sqrt{r^2 + x^2}} \frac{1}{\operatorname{tg} \beta l_0} \cos (\omega t - \varphi)$$

et pour le courant à l'extrémité de la bobine

$$(41) \quad i_{l=l_0} = \dot{E}_0 \frac{\beta}{\sqrt{r^2 + x^2}} \frac{1}{\sin \beta l_0} \cos (\omega t - \varphi)$$

2. Distribution du courant à la résonance le long du circuit.

L'équation (39) donne la loi de la distribution du courant le long du circuit.

Il y a résonance lorsque l'amplitude du courant est maximum, c'est-à-dire lorsque la relation suivante existe.

$$(42) \quad \beta l_0 = K \pi \quad K = 1, 2, 3, \dots$$

Dans ces conditions, la formule (39) indique que la grandeur théorique du courant est infinie. Ce cas est celui qui se présente lorsque l'amortissement est nul. Comme en réalité l'amortissement n'est jamais absolument nul, la valeur du courant n'est pas infiniment grande. On a ici l'analogie du cas, où en basse fréquence, dans un circuit sans résistance se trouvent en série une self et une capacité, le courant théorique à la résonance est infini; mais ici aussi, en réalité la résistance n'est jamais absolument nulle, c'est-à-dire que la résonance se manifeste par un maximum

du courant. Ceci nous permet donc de poser pour le coefficient de l'amplitude du courant, la relation:

$$\dot{E}_o \frac{1}{\sqrt{r^2+x^2}} \frac{\beta}{\sin \beta l_0} = M$$

où M est un nombre d'autant plus grand que l'amortissement est petit. De cette façon, le courant peut s'exprimer par la relation

$$i = M \cos \beta (l - l_0) \cos (\omega t - \varphi)$$

Le coefficient $\cos \beta (l - l_0)$ fixe la distribution du courant le long du circuit.

Nous avons à envisager différents cas suivant la valeur du facteur $K = 1, 2, 3, 4, \dots$ de la relation $\beta l_0 = K \pi$ qui détermine la résonance.

1^{er} cas $K = 1$ $\beta l_0 = \pi$ d'où $\beta = \frac{\pi}{l_0}$

d'où

$$\cos \beta (l - l_0) = \cos \frac{\pi}{l_0} (l - l_0) = \cos \pi \left(\frac{l}{l_0} - 1 \right)$$

Le coefficient $\cos \beta (l - l_0)$, par conséquent le courant, est alors maximum aux extrémités du circuit, au point $l=0$, $\cos \beta (l - l_0) = -1$ et au point $l = l_0$, $\cos \beta (l - l_0) = 1$; il n'est maximum en aucun autre point.

Ce coefficient, c'est-à-dire le courant est nul pour la seule valeur

$$\pi \left(\frac{l}{l_0} - 1 \right) = -\frac{\pi}{2} \quad l = \frac{l_0}{2}$$

Les autres multiples positifs ou négatifs de $\frac{\pi}{2}$ fournissent des valeurs pour l plus grandes ou plus petites que la longueur l_0 du circuit. Dans cette condition pour $K = 1$ le régime de vibration à la résonance est un régime d'on-

des stationnaires de une demi-onde. Nous dirons que c'est le régime du premier partiel.

2^{me} cas $K = 2$ $\beta l_0 = 2\pi$ d'où $\beta = \frac{2\pi}{l_0}$

$$\cos \beta (l - l_0) = \cos \frac{2\pi}{l_0} (l - l_0) = \cos 2\pi \left(\frac{l}{l_0} - 1 \right)$$

Le coefficient est alors maxima pour les valeurs de l suivantes :

$$l = 0 \dots \cos \beta (l - l_0) = \cos (-2\pi) = 1$$

$$l = \frac{l_0}{2} \dots \cos \beta (l - l_0) = \cos (-\pi) = -1$$

$$l = l_0 \dots \cos \beta (l - l_0) = \cos 0 = 1$$

il est nul pour :

$$l = \frac{l_0}{4} \dots \cos \beta (l - l_0) = \cos \left(-\frac{3\pi}{2} \right) = 0$$

$$l = \frac{3l_0}{4} \dots \cos \beta (l - l_0) = \cos \left(-\frac{\pi}{2} \right) = 0$$

Le régime de vibration est de deux demi-ondes. Nous dirons que ce régime est le régime du deuxième partiel.

On trouve de même pour

$K = 3 \dots$ 3^{me} partiel régime 3 demi-ondes

$K = 4 \dots$ 4^{me} partiel régime 4 demi-ondes

.....

$K = n \dots$ n^{me} partiel régime n demi-ondes.

Comme on le voit, ces différents régimes de résonance se manifestent toujours à l'extrémité $l = l_0$ réunie à la terre par un maximum de courant.

Nos mesures portent sur la variation des fréquences de résonance lorsqu'on modifie la capacité par rapport à la terre du système. Ensuite de la remarque précédente, il suffit pour déterminer ces fréquences de résonance de noter à l'aide d'un ampèremètre ou d'un autre mesureur

de courant placé à l'extrémité du circuit réunie à la terre, les fréquences qui correspondent à des maxima de courant. Le dispositif de mesure que nous avons utilisé pour ces déterminations de résonance est celui décrit au chapitre III, page 53. Le partiel correspondant à chacune des valeurs de résonance trouvées est déterminé à l'aide du dispositif décrit à la même page du chapitre III.

3. Relation entre les périodes de vibration des différents partiels d'un circuit simple: le circuit de Kirchhoff, de résistance nulle.

Si nous appliquons les résultats précédents au cas du circuit simple de Kirchhoff (page 22, fig. 4) de résistance nulle, nous trouvons des relations qui sont déjà connues. Les facteurs caractéristiques sont alors:

$$r = 0 \quad X = \underline{l} \omega \quad g = 0 \quad b = \underline{c} \omega$$

Nous vérifions que l'amortissement défini par l'équation (24)

$$a = \sqrt{\frac{1}{2} (z \gamma + rg - xb)}$$

$$\text{avec } z = \sqrt{r^2 + x^2} \quad \text{et } y = \sqrt{g^2 + b^2}$$

est théoriquement nul. La fonction β définie par l'équation (25) devient alors, avec les mêmes relations que précédemment pour z et y

$$\beta = \sqrt{xb}$$

$$\beta = \omega \sqrt{\underline{l} \underline{c}}$$

ou \underline{l} est la self par unité de longueur, et \underline{c} la capacité par unité de longueur.

Si nous rappelons les relations:

$$\text{Vitesse de propagation} \dots \dots \dots \dots \quad v = \frac{\omega}{\beta}$$

$$\text{Longueur d'onde} \dots \dots \dots \dots \quad \lambda = \frac{2\pi}{\beta}$$

$$\text{Période} \dots \dots \dots \dots \quad T = \frac{2\pi}{\omega}$$

on trouve : $\beta = \frac{2\pi}{T} \sqrt{l c}$

Pour le premier partiel (vibration demi-onde)

$$\beta l_0 = \pi \quad \text{où} \quad \beta = \frac{\pi}{l_0}$$

ce qui donne pour la période du premier partiel

$$T_1 = \frac{2\pi}{\beta} \sqrt{l c}$$

$$T_1 = 2 l_0 \sqrt{l c}$$

Comme la self totale est donnée par :

$$L = l_0 l \quad l_0 = \text{longueur du système}$$

et la capacité totale par

$$C = l_0 c$$

on a finalement pour la période

$$(42) \quad T_1 = 2 \sqrt{L C} \text{ vibration demi-onde.}$$

On aurait de même pour les autres partiels :

$$T_2 = \frac{1}{2} 2 \sqrt{L C}$$

$$T_3 = \frac{1}{3} 2 \sqrt{L C}$$

.....

$$T_n = \frac{1}{n} 2 \sqrt{L C}$$

Si l'on fait le rapport entre la période du premier partiel et les périodes de chacun des partiels supérieurs, on trouve :

$$\frac{T_1}{T_2} = 2, \quad \frac{T_1}{T_3} = 3, \quad \dots, \quad \frac{T_1}{T_n} = n.$$

Cette propriété des partiels d'avoir des périodes qui se suivent dans des rapports simples donnés par la suite

des nombres entiers 2, 3, 4..., s'énonce en disant que les partiels sont *harmoniques*. On voit donc que ce qui détermine l'harmonicité des partiels est dû à la nature de la fonction β d'être une fonction linéaire de la pulsation ω de la forme $\beta = \delta \omega$. Comme β est d'autre part la fonction $\beta = \sqrt{xb}$ des facteurs caractéristiques, il s'ensuit que les facteurs caractéristiques x et b doivent eux-mêmes être des fonctions linéaires de la forme $\delta \omega$.

L'amortissement a défini par la fonction (24) est nul dans le seul cas où les facteurs caractéristiques r et g sont nuls. En effet a est nul, lorsque :

$$z\gamma + rg - xb = 0$$

c'est-à-dire lorsque :

$$z\gamma + rg = xb$$

ou $\sqrt{(r^2 + x^2)(g^2 + b^2)} + rg = xb$

$$\sqrt{r^2 g^2 + r^2 b^2 + x^2 g^2 + x^2 b^2} + rg = xb$$

ce qui ne peut évidemment avoir lieu que lorsque $r = 0$ et $g = 0$, puisque r , x , g , et b sont essentiellement positifs.

En résumé si l'on rassemble les conditions pour que les partiels soient harmoniques : condition relative à la nature de la fonction β , condition relative à l'amortissement nul, on voit que le cas du circuit de Kirchhoff de résistance nulle est le seul pour lequel les partiels sont harmoniques.

Il est intéressant de comparer la formule (42) à la formule de Lord Kelvin $T = 2\pi\sqrt{L_0 C_0}$, qui donne la période de résonance propre d'un circuit formé d'une self ponctuelle L_0 et d'une capacité ponctuelle C_0 . On voit que ces deux formules diffèrent du facteur π . Il existe une relation entre les grandeurs L et L_0 et les grandeurs C et C_0 . Si l'on admet pour la relation entre L et L_0 la relation de Drude¹.

$$L_0 = \frac{2}{\pi} L$$

¹ BOUASSE, *Ondes Hertziennes*, p. 126.

il s'ensuit que la capacité du condensateur localisé C_0 doit avoir pour valeur

$$C_0 = \frac{1}{2\pi} C$$

Sur l'interprétation de la relation entre la formule de Lord Kelvin $T = 2\pi\sqrt{L_0 C_0}$ et la formule $T = 2\sqrt{LC}$ de la période d'un système simple, sans résistance, à self induction et à capacité uniformément réparties, nous renvoyons le lecteur à une note donnée à la fin de ce travail.

4. Relation entre les périodes de vibration des différents partiels d'un circuit complexe d'amortissement nul.

Lorsque l'amortissement est nul, la fonction β qui fixe les différents partiels à pour valeur $\beta = \sqrt{xb}$ où x et b ne sont pas de la forme $\varrho\omega$, par conséquent β n'est pas de la forme $\varrho\omega$ à moins que x soit une fonction reliée à b par une expression de la forme $bx = \varrho^2\omega^2R$, ce qui est exclu. Les partiels ne sont pas harmoniques. La relation $\beta l_0 = K\pi$ détermine la fréquence des partiels.

Si nous appelons $f(\omega)$ la fonction β de la pulsation, on a pour les différents partiels:

$f(\omega_1) = \frac{\pi}{l_0} \dots \dots \text{ 1er partiel, vibration demi-ondes}$

$$f(\omega_2) = 2 \frac{\pi}{l_0} \dots \dots \text{ 2me partiel, vibration 2 demi-ondes}$$

$f(\omega_3) = 3 \frac{\pi}{l_0} \dots \dots \text{ 3^{me} partiel, vibration 3 demi-ondes}$

$f(\omega_n) = n \frac{\pi}{l_0} \dots \dots \text{ n}^{\text{me}} \text{ partiel, vibration demi-ondes.}$

Chacune de ces équations détermine la valeur des pulsations $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \dots, \omega_n$ de chaque partiel; elles ne fournissent en général qu'une solution possible, les

solutions négatives et imaginaires étant exclues. On voit que les rapports qui déterminaient l'harmonicité des partiels deviennent alors :

$$\frac{f(\omega_2)}{f(\omega_1)} = 2, \quad \frac{f(\omega_3)}{f(\omega_1)} = 3, \dots \quad \frac{f(\omega_n)}{f(\omega_1)} = n.$$

On remarque qu'il est possible de la connaissance expérimentale des valeurs de résonance $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \dots, \omega_n$ de tirer des renseignements sur la nature de la fonction $\beta = f(\omega)$ et indirectement sur la nature des facteurs x et b qui définissent la fonction $\beta = \sqrt{x b}$, et par conséquent des renseignements sur la nature du circuit élémentaire à définir pour l'unité de longueur du circuit complexe étudié. Inversement, pour un circuit complexe donné, lorsqu'on admet le principe de la théorie qui conduit à définir la fonction β et qu'on donne le circuit élémentaire qui fixe les composants x et b de la fonction, on peut justifier expérimentalement le circuit élémentaire admis. C'est en général la méthode de travail des auteurs qui admettent comme base théorique les bases de la théorie que nous avons développée. Cette théorie conduit pour les circuits complexes à l'existence de partiels qui ne sont pas harmoniques. Pour cette raison, nous ne sommes pas d'accord avec une conclusion de Bouasse qui dans l'exemple cité à la page 16, interprète un résultat expérimental trouvé par Fleming, à la non harmonicité des partiels en y voyant un argument en faveur de sa thèse : on ne peut pas définir des facteurs caractéristiques par unité de longueur calculables indépendamment du courant. Mais ce qu'il faut se demander est ceci : Si un phénomène particulier — comme celui de la distribution des fréquences de résonance — semble justifier la théorie et définir les facteurs caractéristiques du circuit élémentaire, un autre phénomène, s'il justifie encore la théorie, ne devra-t-il pas conduire à l'existence de circuit élémentaire différent de celui défini par le premier phénomène ? Ou se dire aussi : pour un circuit complexe donné et un phénomène particulier

étudié, recevra-t-on lors d'une modification connue du circuit complexe, qui entraîne une modification correspondante du circuit élémentaire défini, une modification correspondante du phénomène étudié prévue par la théorie?

C'est à cette dernière question que nous avons essayé de répondre. Le phénomène des résonances d'un circuit complexe est le plus caractéristique et celui pour lequel on peut apporter une très grande précision dans les mesures ; il est en outre très simple de modifier d'une façon homogène le circuit complexe des expériences en changeant sa capacité par rapport à la terre. Nous étudions pour différentes valeurs la capacité par rapport à la terre, le régime de distribution des partiels. Il nous reste à étudier comment pour le circuit complexe de nos expériences, la théorie développée est applicable (condition relative à l'amortissement nul), d'étudier l'influence sur les facteurs caractéristiques et sur la fonction β qui fixe les fréquences de résonance, de la variation de la capacité par rapport à la terre et enfin de voir si la modification de certains résultats est celle prévue par la théorie.

5. Valeur de l'amortissement du circuit complexe de nos expériences.

Le circuit complexe qui sert à nos mesures est le solénoïde décrit au chapitre III, page 51. La seule condition que doit encore remplir ce circuit, pour que les résultats précédents lui soient applicables est que son amortissement soit nul. L'amortissement est défini par la condition (page 63).

$$z\gamma + rg - xb = 0$$
$$c.a.d, \sqrt{r^2 g^2 + r^2 b^2 + x^2 g^2 + x^2 b^2} + rg = xb$$

relation qui se réduit à :

$$\sqrt{r^2 b^2 + x^2 b^2} = xb, \text{ et } \sqrt{r^2 + x^2} = x$$

puisque g est nul (pas de perte ohmique de la terre), ce qui signifie que r^2 doit être négligeable devant x^2 .

Pour fixer un ordre de grandeur entre r^2 et x^2 , nous pouvons en première approximation assigner le solénoïde à un circuit de Kirchhoff, composé d'une résistance et d'une self induction distribuées homogènement le long du circuit, et d'une capacité répartie entre le solénoïde et la terre. Les constantes électriques du solénoïde (page 53) donnent alors pour les facteurs r et x par cm. de longueur

$$r = \frac{50.000}{100} \quad x = \frac{575}{100} \omega$$

la résistance totale étant d'environ $50\,000 \Omega$

la self totale étant de $575 L$

la longueur du solénoïde étant d'environ 100 cm.

Les fréquences de résonance variant entre les limites de 800 et 10000 (voir les tableaux 1 et 5, pages 74 et 76) nous avons pour ces valeurs extrêmes des valeurs de x qui sont :

$$x = \frac{575}{100} \cdot 2\pi \cdot 800 = 28.888 \text{ et } x = \frac{575}{100} \cdot 2\pi \cdot 10.000 = 361.000$$

ce qui donne pour le rapport $\frac{r^2}{x^2}$ de ces deux cas extrêmes

$$\frac{r^2}{x^2} = 3 \cdot 10^{-4} \quad \text{et} \quad \frac{r^2}{x^2} = 2 \cdot 10^{-6}$$

on voit que ce rapport varie donc entre $3 \cdot 10^{-4}$ et $2 \cdot 10^{-6}$ qui sont des nombres négligeables devant 1, par conséquent l'amortissement est quasi nul. Si l'on introduit pour les valeurs de r la résistance apparente due au skin-effet, les rapports ne changent pas d'ordre de grandeur. Ainsi donc, il est tout à fait légitime de considérer comme négligeable l'amortissement du circuit.

6. Influence de la capacité par rapport à la terre sur la distribution des partiels.

On admet que si un solénoïde homogène est situé à une certaine hauteur d'un sol homogène, et parallèlement

à lui, sa capacité par rapport au sol est homogènement répartie. On admet également que si l'on place parallèlement à un solénoïde un conducteur géométriquement homogène, suffisamment long, et relié à la terre, on détermine pour le système une nouvelle capacité homogènement répartie. Cette capacité s'appelle encore par généralisation : capacité par rapport à la terre. Il suit de là que dans chacun de ces cas la capacité par unité de longueur a une valeur c bien définie.

Le facteur b qui caractérise la capacité par rapport à la terre est alors de la forme $b = c \omega$.

Par conséquent la fonction β peut s'écrire:

$$\beta = \sqrt{xb} = \sqrt{c\omega \cdot g(\omega)} \quad \text{en posant} \quad x = g(\omega)$$

et les équations qui déterminent les différents partiels sont :

Les rapports successifs qui précédemment fixaient l'harmonicité des partiels, se réduisent aux relations:

$$\sqrt{\frac{\omega_1 \ g(\omega_1)}{\omega_2 \ g(\omega_2)}} = \frac{1}{2}, \quad \sqrt{\frac{\omega_1 \ g(\omega_1)}{\omega_3 \ g(\omega_3)}} = \frac{1}{3}, \dots$$

ces relations sont indépendantes de la capacité par rapport à la terre. De la connaissance expérimentale des valeurs $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$ elles fournissent des renseignements sur les variations de la fonction $x = g(\omega)$ donc sur la nature du circuit élémentaire.

Les équations (43) donnent pour les différentes valeurs de $g(\omega)$ aux fréquences de résonance $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$

$$(44) \quad \left\{ \begin{array}{l} g(\omega_1) = \frac{\pi^2}{l_0^2} \frac{1}{c \omega_1} \\ g(\omega_2) = \frac{\pi^2}{l_0^2} \frac{4}{c \omega_2} \\ \dots \dots \dots \\ g(\omega_n) = \frac{\pi^2}{l_0^2} \frac{n^2}{c \omega_n} \end{array} \right.$$

La valeur c est difficilement calculable, on ne peut donc pas calculer de ces relations la valeur exacte des $g(\omega_n)$ au différentes fréquences de résonance. Mais on peut calculer la variation relative de $g(\omega)$ en prenant pour unité arbitraire la valeur de $g(\omega_n)$ de l'une des fréquences de résonance. En effet le rapport:

$$(45) \quad \boxed{\frac{g(\omega_k)}{g(\omega_n)} = \frac{k^2}{n^2} \frac{\omega_n}{\omega_k}}$$

est indépendant de C la capacité par rapport à la terre.

Ce résultat est fondamental. Si donc le principe de la théorie est exact, toute modification de la capacité par rapport à la terre doit conduire pour le rapport:

$$\frac{g(\omega_n)}{g(\omega_k)}$$

d'un même $g(\omega_n)$ à des relations d'une même fonction

$$(46) \quad \frac{g(\omega)}{g(\omega_n)} \text{ de la pulsation } \omega$$

Ce résultat est à même d'être vérifié expérimentalement. Dans le but de modifier cette capacité, nous avons envisagé cinq cas:

1^{er} cas. — La bobine noyée dans son noyau de cire est sans aucun revêtement.

2^{me} cas. — On introduit, à l'intérieur de la bobine, centré sur son axe, un cylindre de zinc de 7 cm. de diamètre et de 1,25 m. de longueur.

3^{me} cas. — On introduit à l'intérieur de la bobine dans les mêmes conditions que précédemment, un cylindre de cuivre de 14 cm. de diamètre et de 1,25 m. de longueur.

4^{me} cas. — L'extérieur de la bobine est recouvert d'un revêtement de feuilles de staniol de façon à l'envelopper complètement. L'intérieur de la bobine est vide.

5^{me} cas. — Au revêtement de staniol on ajoute, à l'intérieur de la bobine, le cylindre de cuivre utilisé dans le 3^{me} cas, de façon à porter la capacité au maximum possible.

Il est à remarquer que, dans le cas d'adjonction métallique en vue d'augmenter la capacité par rapport à la terre, le métal a été choisi de façon à ne pas modifier l'induction du système, comme cela aurait eu lieu avec le fer ; en outre pour éviter des phénomènes secondaires comme des courants d'induction dans un cylindre fermé, il a été prévu tout le long d'une des arêtes du revêtement une coupure pour empêcher qu'en aucune section du revêtement il n'existe de circuit métallique fermé. Tous ces revêtements métalliques sont mis à la terre.

Nous donnons ici les tableaux et les graphiques correspondants, des résultats obtenus pour chacun des cinq cas.

La première colonne de chaque tableau donne l'ordre des partiels. La seconde donne la fréquence de la vibration de ces partiels. La troisième donne la fréquence qu'aurait le fondamental si le partiel appartenait à une suite harmonique ; ces valeurs font bien ressortir, surtout lorsqu'on les traduit graphiquement, le caractère de non harmonicité des partiels (voir graphique, II, page 77). La troisième colonne donne le rapport $g(\omega_k)/g(\omega_7)$ de la valeur de $g(\omega_k)$ de chacun des six premiers partiels à la valeur $g(\omega_7)$ du 7^{me} partiel. Ce rapport est calculé à l'aide de la relation (45). Pour éliminer dans le rapport $g(\omega_k)/g(\omega_n)$ la

capacité c par rapport à la terre, nous sommes obligés dans chacun des cas d'utiliser une des valeurs de $g(\omega_n)$ définis par l'un des partiels. Comme d'autre part, la fonction générale (46) $g(\omega)/g(\omega_n)$, indépendante de la capacité c , qu'il s'agit de dégager, est rapportée à la valeur $g(\omega_n)$ d'un ω_n constant pour toutes les valeurs de la capacité c , nous avons pris pour cette unité, qui est arbitraire, la valeur $g(2\pi \cdot 8966,6)$ du cas 1. Cela revient à dire que réduites à cette unité, les fonctions $g(\omega)/g(\omega_7)$ des autres cas, sont des fonctions qui doivent se confondre avec la fonction $g(\omega)/g(2\pi \cdot 8966,6)$. Si l'on admet en première approximation pour la fonction $g(\omega)/g(2\pi \cdot 8966,6)$ du cas 1, une fonction dont la traduction graphique s'obtient en réunissant par des droites les points représentatifs des valeurs $g(\omega_k)/g(2\pi \cdot 8966,6)$ du cas 1, obtenu de la connaissance expérimentale des valeurs ω_k et de l'application de la formule (45), on peut donc dire que ramené à cette unité $g(2\pi \cdot 8966,6)$ le rapport, par exemple $g(\omega_7)g(\omega_7) = 1$ des autres cas, doit coïncider avec les points représentatifs $g(\omega_7)/g(2\pi \cdot 8966,6)$ que donne la fonction $g(\omega)/g(2\pi \cdot 8966,6)$ pour les différentes valeurs ω_7 de ω de chacun des autres cas. Ce facteur de réduction a été calculé pour les ω_7 de chaque cas, par interpolation linéaire. Ces facteurs de réduction ont pour valeur:

cas 2	facteur de réduction	$r_2 = 0,993$
cas 3	»	$r_3 = 0,988$
cas 4	»	$r_4 = 0,937$
cas 5	»	$r_5 = 0,927$

Les valeurs de la fonction $g(\omega)/g(2\pi \cdot 8966,6)$ obtenues ainsi après réduction sont données respectivement pour chacun des cinq cas, à la dernière colonne de chacun des tableaux et par le graphique IV.

La fonction $g(\omega)$ définie par le facteur caractéristique x est, d'après la théorie admise, tout à fait définie pour un circuit complexe donné et indépendante de la capacité par rapport à la terre. Ce qui signifie que les courbes du gra-

phique IV qui la représentent à un facteur de réduction près, devrait se confondre en une seule courbe. Cette non-concordance que fait ressortir le graphique IV fait dire que *la fonction $g(\omega)$ n'est pas indépendante de la capacité par rapport à la terre.*

Ceci est en contradiction absolue avec la théorie admise. C'est le résultat fondamental de notre travail. C'est sur ce résultat que portera notre discussion et que nous tirerons les conclusions qui s'imposent.

Nous avons également indiqué, sur le graphique IV la droite d . Elle représente la fonction

$$\frac{g(\omega)}{g(2\pi \cdot 8966,6)} = \frac{L\omega}{L(2\pi \cdot 8966,6)}$$

qui caractérise un circuit de Kirchhoff de résistance nulle, où les partiels sont harmoniques et qui aurait comme 7^{me} partiel, un partiel de fréquence 8966,6.

Nous avons de même traduit graphiquement les résultats des colonnes 2 et 3 des tables. Sur le graphique I l'ordre des partiels est porté en abscisse, la fréquence des partiels, donnée par la colonne 2 des tables, est portée en ordonnée. Nous y avons également indiqué la droite d construite en partant de la fréquence du 7^{me} partiel du 1^{er} cas. Cette droite donne la fréquence des autres partiels dans le cas d'une distribution harmonique qui aurait comme 7^{me} partiel, le 7^{me} partiel du 1^{er} cas. Cette droite sert à faire ressortir la non-harmonicité de la distribution. Ce graphique montre l'irrégularité de la distribution des partiels, comment l'allure oscillante de chacune des courbes a des singularités qui se retrouvent sur chaque courbe. Il montre aussi, par rapport à la droite d que les écarts qui existent entre les fréquences d'une distribution harmonique et les fréquences mesurées sont d'un même ordre de grandeur pour les partiels inférieurs que pour les partiels supérieurs, c'est-à-dire pour les fréquences inférieures que pour les fréquences plus élevées.

Le graphique construit à l'aide des valeurs de la colonne 3 des tables donne la fréquence du fondamental correspondant au partiel, dans le cas où ce partiel appartiendrait à une suite harmonique. Ce graphique montre d'une façon particulièrement évidente le rôle que joue la capacité par rapport à la terre sur les différents partiels : On peut conclure ceci : *La capacité par rapport à la terre est un facteur de première importance dont dépend la fréquence des partiels. L'influence de cette capacité est considérable sur la fréquence des partiels d'ordre inférieur, elle va en diminuant à mesure que s'élève l'ordre des partiels.*

A considérer le caractère de convergence des courbes du graphique II, il semble qu'à des fréquences plus élevées cette capacité a une importance moins fondamentale, ou tout au moins que les variations que nous lui avons imposées deviennent assez rapidement négligeables. Malheureusement il nous a été impossible de contrôler si cette convergence des courbes s'accentuait pour des fréquences plus élevées que celle qui nous a déterminé le 7^{me} partiel ; l'alternateur qui nous servait de source ne pouvant pas dépasser 10 000 périodes.

Il faut remarquer que les résultats indiqués des colonnes 2 et 3, traduits sur les graphiques I et II sont des résultats de la seule expérience, indépendants donc d'aucune théorie.

Notons encore, que les irrégularités de la distribution des partiels que font ressortir les graphiques I et II ne sont pas propres à notre circuit d'expérience. On en retrouve, en effet, d'analogues ailleurs, il est facile de s'en rendre compte en traduisant graphiquement les résultats de Fleming donnés à la 17 page de ce travail.

1^{er} TABLEAU

1^o CAS: La bobine est sans aucun revêtement.				
Ordre des partiels	Fréquence des partiels	Fréquence du fondamental correspondant au partielle (Cas harmon.)	Rapport	Rapport $g(\omega_k)$
			$g(\omega_k)$	$g(2\pi \cdot 8966,6)$ après réduction Facteur de réduction : $r = 1$
1	2600	2600	0,07037	0,07037
2	3775	1885	0,1941	0,1941
3	4500	1500	0,3659	0,3659
4	5686,5	1421,6	0,5148	0,5148
5	6316,5	1263,3	0,7242	0,7242
6	7400	1233,4	0,8902	0,8902
7	8966,6	1280,9	1	1
Courbe I Graphique I		Courbe I Graphique II	Courbe I Graphique III	Courbe I Graphique IV

2^{me} TABLEAU

2^o CAS: On introduit à l'intérieur de la bobine, un cylindre de 7 cm. de diamètre.				
Ordre des partiels	Fréquence des partiels	Fréquence du fondamental correspondant au partielle (Cas harmon.)	Rapport	Rapport $g(\omega_k)$
			$g(\omega_k)$	$g(2\pi \cdot 8966,6)$ après réduction Facteur de réduction : $r = 0,993$
1	2070	2070	0,0874	0,0867
2	3466,6	1733,3	0,2088	0,2073
3	4213,3	1404,4	0,3885	0,3857
4	5460	1365	0,5302	0,5264
5	6050	1210	0,7477	0,7424
6	7340	1223,4	0,8875	0,8812
7	8866,6	1266,6	1	0,993
Courbe II Graphique I		Courbe II Graphique II	Courbe II Graphique III	Courbe II Graphique IV

3^{me} TABLEAU

3^o CAS: On introduit à l'intérieur de la bobine un cylindre de 14 cm. de diamètre.

Ordre des partiels	Fréquence des partiels	Fréquence du fondamental correspondant au partiel (Cas harmon.)	Rapport $g(\omega_k)$	Rapport $g(\omega_k)$
				$g(2\pi \cdot 8966,6)$ après réduction
1	1383,3	1383,3	0,1294	0,1279
2	2750	1375	0,261	0,258
3	3693,3	1231,1	0,437	0,4319
4	5033,3	1258,3	0,571	0,5644
5	5666,6	1133,3	0,792	0,7829
6	7266,6	1211,1	0,89	0,8797
7	8803	1257,6	1	0,988
Courbe III Graphique I		Courbe III Graphique II	Courbe III Graphique III	Courbe III Graphique IV

4^{me} TABLEAU

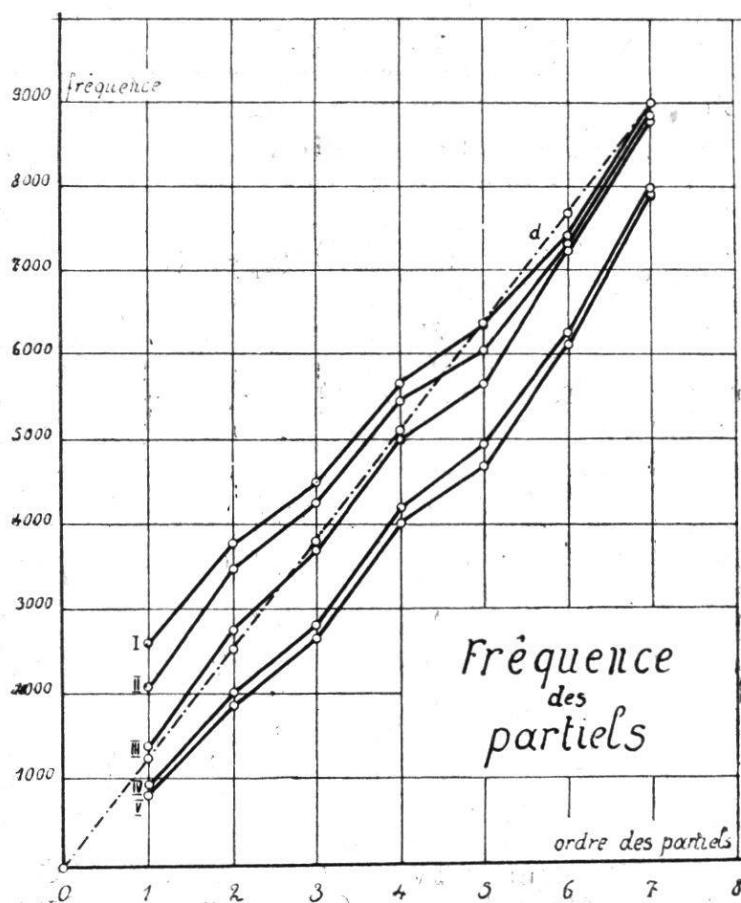
4^o CAS: L'extérieur de la bobine est recouvert d'un revêtement de feuilles de staniol.

Ordre des partiels	Fréquence des partiels	Fréquence du fondamental correspondant au partiel (Cas harmon.)	Rapport $g(\omega_k)$	Rapport $g(\omega_k)$
				$g(2\pi \cdot 8966,6)$ après réduction
1	939,6	939,6	0,174	0,1631
2	2040	1020	0,3206	0,3006
3	2803,3	934,5	0,5247	0,4920
4	4200	1050	0,6226	0,5838
5	4933,3	986,6	0,8283	0,7766
6	6233,3	1038,9	0,944	0,8851
7	8010	1144,3	1	0,937
Courbe IV Graphique I		Courbe IV Graphique II	Courbe IV Graphique III	Courbe IV Graphique IV

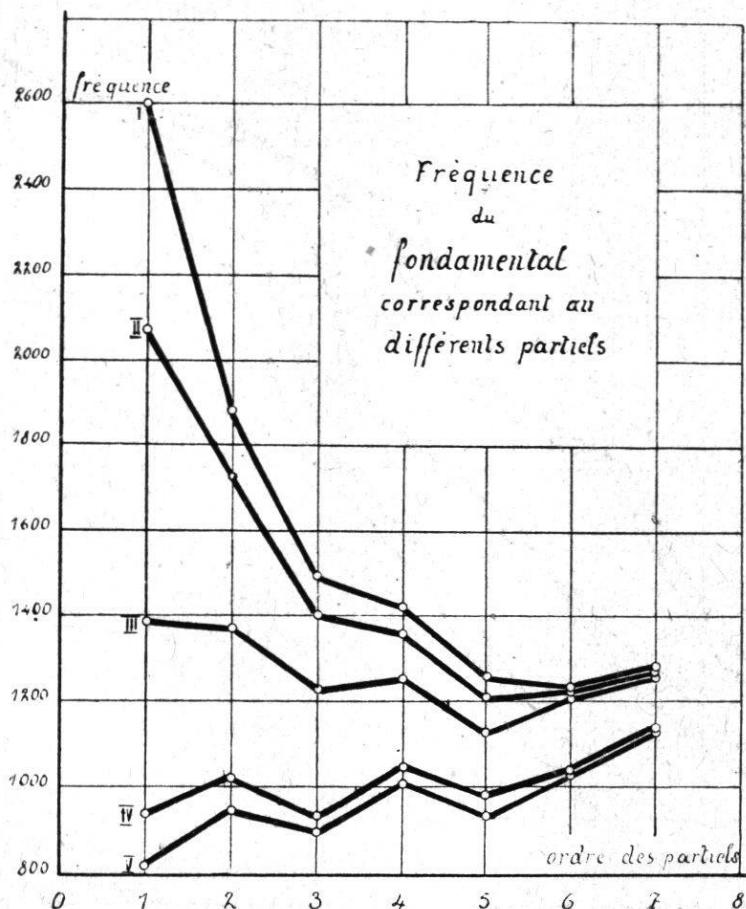
5^{me} TABLEAU

5^o CAS: On introduit à l'intérieur de la bobine recouverte de staniol un cylindre de 14 cm. de diamètre.

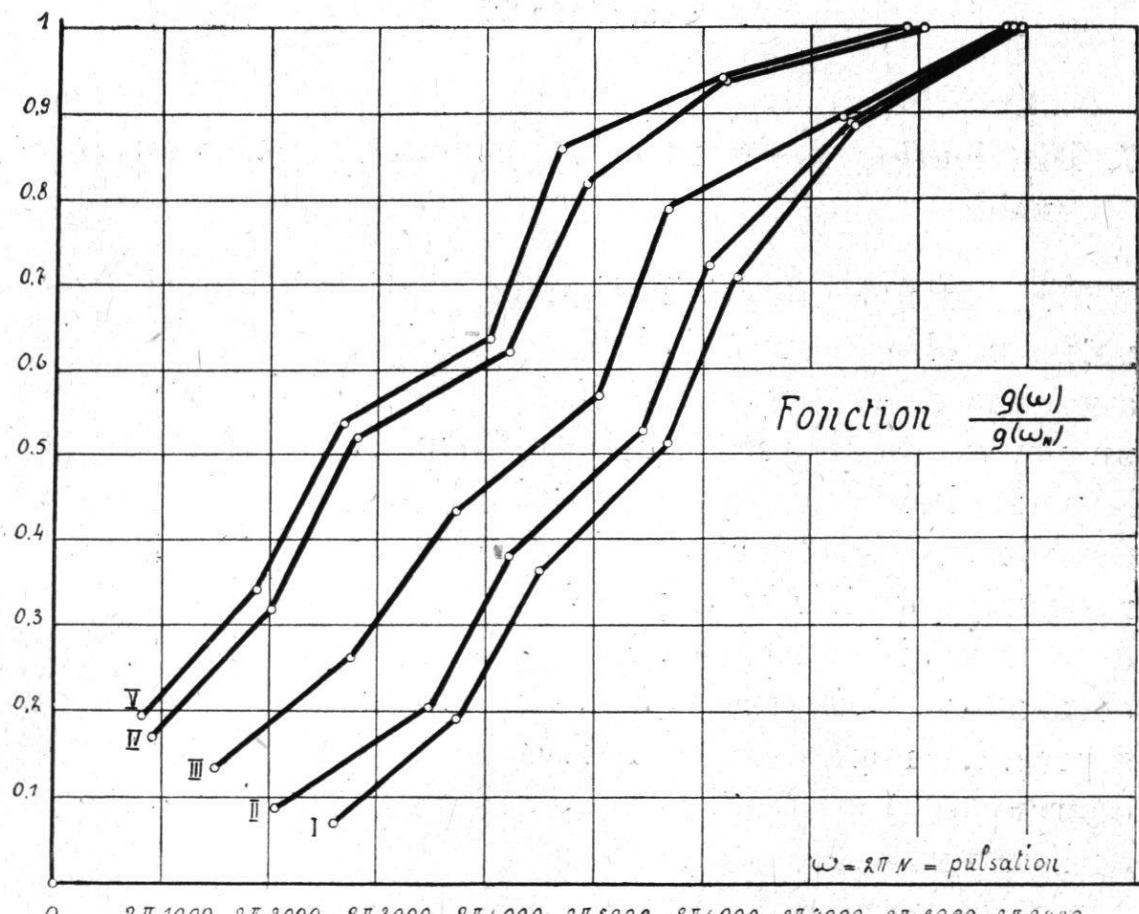
Ordre des partiels	Fréquence des partiels	Fréquence du fondamental correspondant au partiel (Cas harmon.)	Rapport	Rapport $g(\omega_k)$
			$g(\omega_k)$	$g(2\pi \cdot 8966,6)$ après réduction Facteur de réduction : $r = 0,927$
1	820	820	0,1974	0,1831
2	1896,6	948,3	0,3414	0,3166
3	2693,3	897,7	0,541	0,5018
4	4046,6	1011,6	0,6401	0,5937
5	4693,3	938,6	0,8624	0,7999
6	6200	1033,4	0,94	0,8719
7	7933,3	1133,3	1	0,927
Courbe V Graphique I		Courbe V Graphique II	Courbe V Graphique III	Courbe V Graphique IV



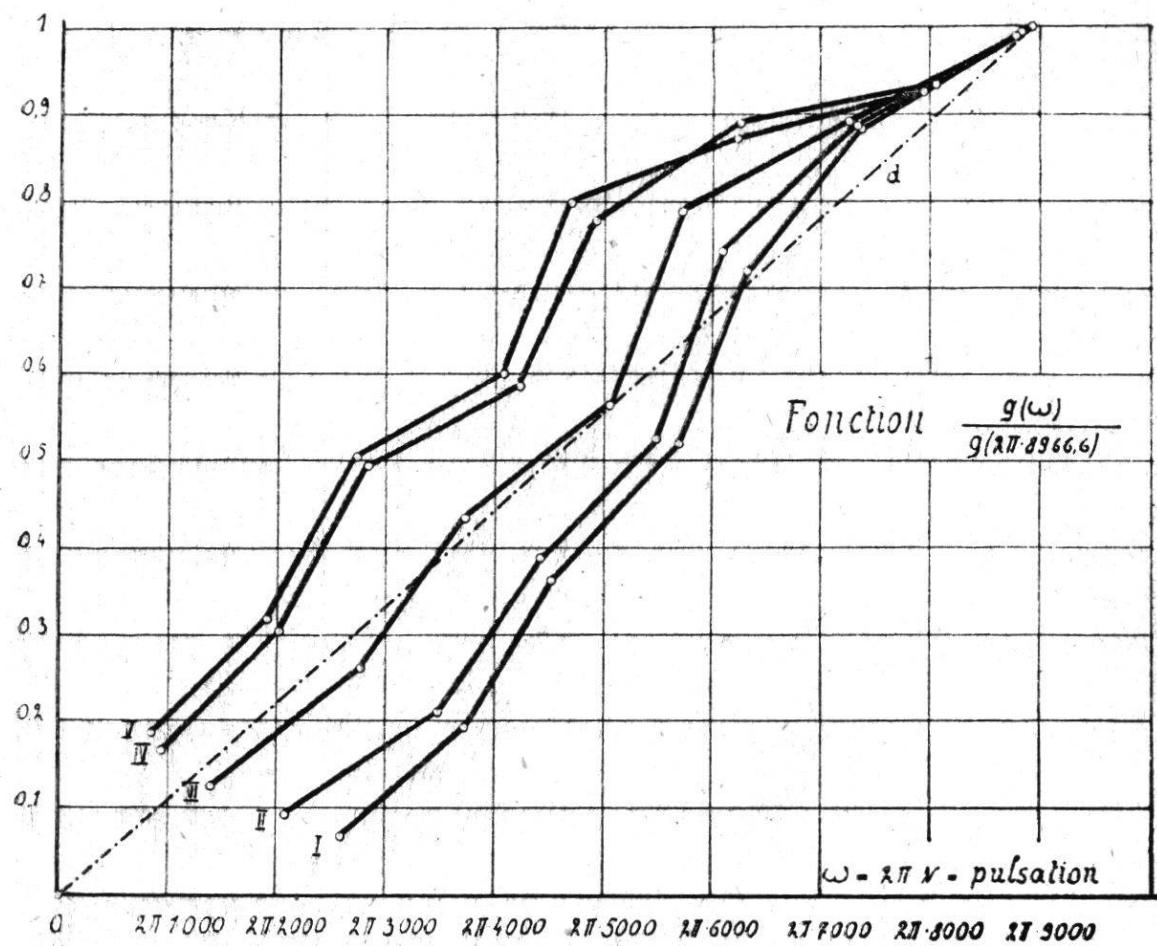
Graphique I.



Graphique II.



Graphique III.



Graphique IV.

7. Distribution des ventres de courant le long du solénoïde.

Si l'on note la distribution des partiels le long du solénoïde on observe un fait intéressant. Pour notre solénoïde avec une de ses extrémités à la terre, il doit se produire un ventre de courant à cette extrémité. Or, en déplaçant la petite bobine de contrôle qui sert à repérer la position des ventres de courant (voir page 81), on remarque à la résonance qu'il n'y a pas à cette extrémité un ventre de courant bien localisé. Il en est de même du ventre de courant qui doit exister à l'autre extrémité du côté de la source. Le maximum de flux qui caractérise le ventre de courant occupe toute une plage du solénoïde à partir de l'extrémité. Les dimensions de cette plage varient avec l'ordre des partiels, dans notre cas elle est longue d'environ

29 cm. à chaque extrémité, à la vibration du premier partiel; elle va en diminuant jusqu'à une valeur d'environ 8,6 cm. à la vibration du 7^{me} partiel; elle conserve sensiblement la même valeur pour les partiels supérieurs.

Nous avons pensé qu'il y avait peut-être là une explication des résultats précédents. Que pour des raisons que nous ne pouvons pas expliquer (peut-être la situation des couches extérieures) ce n'était pas toute la bobine qui participait à la vibration en ondes stationnaires mais seulement la partie comprise entre les deux plans qui délimitent les plages, là où le flux commence à varier. Dans ces conditions il n'y aurait pas lieu d'introduire dans les équations (44) une valeur constante l_0 pour la longueur du solénoïde, mais des longueurs effectives $l_1, l_2, l_3 \dots$ suivant les partiels. Nous donnons (page 82) pour le 4^{me} cas étudié, celui du solénoïde recouvert de staniol, le tableau de la distribution des ventres de courant. La position de ces ventres est repérée par rapport à une division en cm. de la longueur du solénoïde. Pour chaque partiel nous indiquons deux distributions. La première est la distribution théorique des ventres de courant lorsqu'on admet pour la longueur, la longueur totale du solénoïde (dans notre cas $l = 98 \text{ cm.}$). La seconde distribution, est celle que donne l'expérience.

En gardant les mêmes caractéristiques pour l'unité de l'élément et en prenant pour longueur effective la longueur de la bobine située entre les deux plans qui limitent les plages terminales, nous avons pour ce 4^{me} cas les longueurs effectives suivantes:

1 ^{re}	partiel	$l_1 = 39,4 \text{ cm.}$
2 ^{me}	»	$l_2 = 59,4 \text{ cm.}$
3 ^{me}	»	$l_3 = 70,7 \text{ cm.}$
4 ^{me}	»	$l_4 = 76 \text{ cm.}$
5 ^{me}	»	$l_5 = 77,6 \text{ cm.}$
6 ^{me}	»	$l_6 = 79,4 \text{ cm.}$
7 ^{me}	»	$l_7 = 81,4 \text{ cm.}$

Introduites dans les équations (44) ces valeurs fournissent pour le rapport $g(\omega_k) / g(\omega_7)$ les grandeurs suivantes :

le rapport $\frac{g(\omega_k)}{g(\omega_7)}$ ayant pour valeur : $\frac{g(\omega_k)}{g(\omega_7)} = \frac{K^2}{49} \cdot \frac{8010}{\omega_k} \cdot \frac{l_7^2}{l_k^2}$

$$\frac{g(\omega_1)}{g(\omega_7)} = 0,7426$$

$$\frac{g(\omega_2)}{g(\omega_7)} = 0,602$$

$$\frac{g(\omega_3)}{g(\omega_7)} = 0,6955$$

$$\frac{g(\omega_4)}{g(\omega_7)} = 0,7142$$

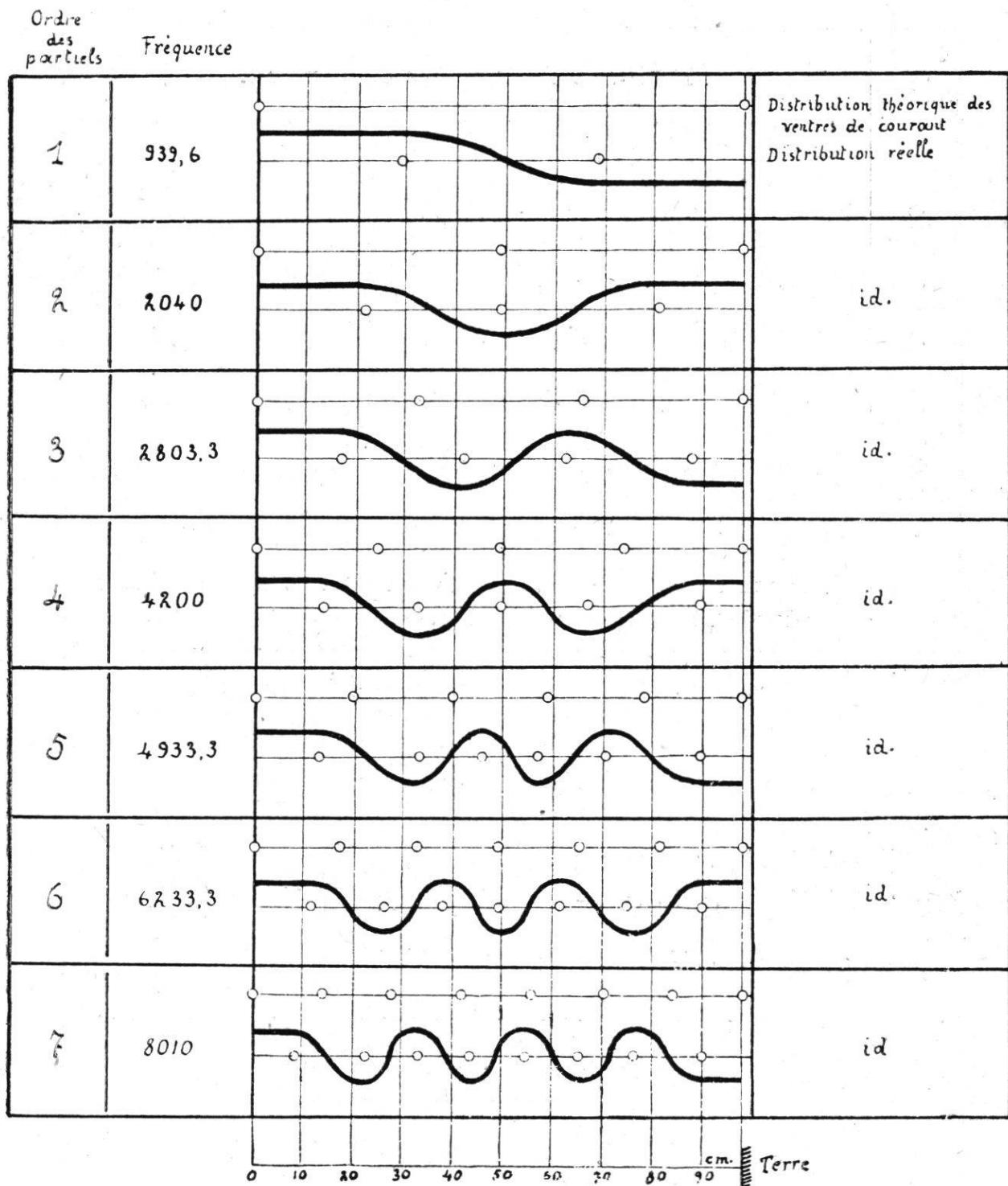
$$\frac{g(\omega_5)}{g(\omega_7)} = 0,9114$$

$$\frac{g(\omega_6)}{g(\omega_7)} = 0,9921$$

Ces valeurs reportées sur le graphique III montrent que cette façon d'expliquer la discordance ne résout nullement la difficulté car, appliquée aux autres cas, pour lesquels les longueurs effectives correspondantes sont approximativement égales, cette opération ne fait qu'effectuer un déplacement dans le même sens de toutes les courbes sans opérer le rapprochement qu'exige la théorie.

Distribution des partiels.

CAS IV: La bobine est recouverte de staniol.



La position des ventres de courant correspond aux valeurs suivantes.

Ordres des partiels	Positions des ventres de courant.							
1						29	68,4	
2				21,6	49,4			81
3				16,9	41,7	61,9	87,6	
4	13,6	32,6	49,3	67	89,6			
5	12,3	32,8	45,1	56,3	70,1	89,9		
6	10,5	25	37,1	49,7	60,6	74	89,9	
7	8,6	22	33	43,7	54,4	65,3	77,2	90
	Valeurs rapportées à une division en cm. d'une échelle placée le long du solénoïde.							

Discussion.

La théorie que nous avons développée conduit, avec les restrictions qu'elle comporte, aux relations (44), page 69, desquelles relations nous avons tiré la fonction $\frac{g(\omega)}{R}$, R étant une constante, la théorie définie $g(\omega)$ une fonction de la pulsation, et des éléments: résistances, selfs, capacités du circuit, mais une fonction indépendante de la capacité par rapport à la terre. Or, en modifiant cette capacité, nous avons prouvé expérimentalement, à l'aide des fonctions réduites, qu'il n'existe pas de fonction $g(\omega)$ indépendante de la capacité par rapport à la terre. Ce résultat est en contradiction formelle avec la théorie. Il y a lieu de souligner que le contrôle ne porte pas sur une simple vérification expérimentale de grandeurs numériques don-

nées par une théorie, mais sur l'existence d'une fonction de définition de cette théorie.

Précisons pour la critique la position du problème et la suite logique de nos raisonnements. Le problème de la circulation électrique en haute fréquence pose la question suivante: Peut-on assigner l'unité d'élément d'un système complexe à un circuit défini de selfs-inductions, résistances, capacités, d'inductions mutuelles, pour interpréter dans ce système la circulation électrique en haute fréquence ? Et nous nous sommes demandé : de quelle manière peut-on par voie expérimentale répondre à la question posée ?

La solution expérimentale est évidemment la suivante: Si d'une part la réponse à la question posée est négative, et si, d'autre part on se sert pour interpréter les phénomènes d'une théorie basée sur l'existence de tels circuits élémentaires, des contradictions doivent surgir entre la théorie et l'expérience.

Mais comme nous l'avons souligné dans le chapitre I à la page 15, et comme nous l'avons démontré dans le chapitre IV, à la page 65, un seul phénomène et un circuit complexe qu'on ne modifie pas, ne suffisent pas pour confronter la théorie et l'expérience, car il est possible d'imaginer des circuits parfaitement définis pour l'unité d'éléments du circuit complexe donné à l'aide desquels la théorie est capable d'interpréter exactement le phénomène étudié. Il faut donc si l'on ne modifie pas le circuit complexe se servir de plusieurs phénomènes différents, sinon alors se servir d'un seul phénomène et modifier le circuit complexe. Pour des raisons d'ordre expérimental, c'est cette deuxième façon de procéder que nous avons utilisée.

Le nombre des phénomènes caractéristiques susceptibles d'être soumis à un contrôle expérimental précis est excessivement limité. Le plus simple, le plus caractéristique et le seul pour lequel les mesures peuvent être faites avec une grande précision est celui de la non-harmonicité des partiels. C'est le phénomène que nous avons utilisé. En vue de modi-

fier le circuit complexe donné, nous avons fait varier la valeur de sa capacité par rapport à la terre. Il n'est pas possible de modifier d'une façon définie d'autres éléments d'un circuit complexe, car toute autre modification porte sur la nature essentielle du circuit complexe qui est sa construction, le mode d'enroulement des fils, la disposition des spires, etc., donc sur la nature d'un système où les influences électriques et magnétiques ne peuvent pas être rigoureusement définies. La définition d'un tel système conduit à introduire certaines hypothèses qu'il est impossible de vérifier. Il nous était d'ailleurs naturellement impossible de modifier de cette façon le solénoïde de nos expériences.

Ayant admis la théorie qui définit les quatre facteurs caractéristiques r , x , g , et b , (page 20) nous avons traduit la modification de la capacité par rapport à la terre, par la variation de la grandeur c définissant le facteur caractéristique $b = c\omega$. Ceci n'est pas une hypothèse puisque dans la théorie le facteur b traduit la fuite d'énergie électrique due au courant $E b dl$ (page 22) absorbé en quadrature avec la force électro-motrice, cette fuite d'énergie est le propre d'une capacité en dérivation définissant essentiellement la capacité par rapport à la terre.

Dans le cas particulier du circuit de nos expériences, nous avons, en outre, admis négligeables les facteurs r et g , simplification justifiée pour le facteur r à la page 66 et justifiée pour le facteur g à la page 47, le facteur g ayant essentiellement la nature d'un facteur de conductibilité, définissant un courant en phase avec la force électro-motrice, due aux effluves et aux pertes ohmiques dans le diélectrique du condensateur défini par la capacité par rapport à la terre, pertes qu'il y a lieu de négliger pour une bobine utilisée sous une tension de 500 volts et qui est construite pour supporter des tensions de l'ordre de 200 000 volts. La valeur négligeable des facteurs r et g , rend négligeable l'amortissement α du système, (page 66).

Dans ces conditions, la théorie développée au chapitre IV et la mesure de la fréquence des partiels permettent de connaître à un facteur constant près, la fonction $g(\omega)$ qui est le facteur caractéristique x . Ce facteur x est essentiellement indépendant, si la théorie est exacte, du facteur b défini par la capacité par rapport à la terre. Or l'expérience a prouvé d'une façon évidente qu'il n'en était rien (page 78, graphique IV) résultat qui ne peut être impliqué qu'à la seule théorie et qui fournit une preuve expérimentale tout à fait nette des arguments de Bouasse et de Brillouin.

En haute fréquence, il y a donc lieu de distinguer deux cas nettement distincts, suivant la nature du système conducteur. Dans le premier cas, le circuit est électriquement défini par les quatre facteurs r , x , g , et b , fonctions des éléments constitutifs du circuit et de la pulsation. C'est le cas des circuits décrits à la page 13 du chapitre I où l'état de la circulation électrique d'un élément du circuit ne dépend que de l'élément et des éléments immédiatement voisins. C'est le cas principalement du circuit de Kirchhoff, mais c'est aussi le cas de circuits que l'on peut imaginer, plus compliqués que celui de Kirchhoff, où le facteur x , par exemple, ne serait pas simplement défini par une fonction linéaire $L\omega$ de la pulsation. Pratiquement, de tels circuits n'existent pas. Le second cas est celui de tous les autres circuits où la circulation électrique dans un élément dépend non seulement de l'élément et des éléments immédiatement voisins, mais de tous les éléments du circuit. C'est le cas en général des circuits complexes, de la bobine de nos expériences, de tous les solénoïdes, des transformateurs, etc. Dans ce second cas, il existe encore des facteurs caractéristiques r , x , g , b , mais ces facteurs ne sont plus, comme dans le premier cas, des facteurs fonctions des seuls éléments constitutifs du circuit et de la pulsation, mais encore des valeurs du courant et de la tension en d'autres points du circuit. De sorte que les équations différentielles qu'il y a lieu de poser dans ce second cas,

ont la forme des équations différentielles ordinaires, mais n'en ont pas la nature, puisque les facteurs qui les caractérisent sont des fonctions des variables i et e en d'autres points du circuit.

Ce sont ces considérations sur la nature des différents circuits qui nous ont amenés à la classification des conducteurs faite dans l'introduction de ce travail: circuits simples déterminant des équations différentielles définies, circuits complexes déterminant des équations différentielles non définies.

Conclusions.

L'expérience confirme les conclusions théoriques de Bouasse, relatives à l'existence de schémas définis pour l'unité d'élément d'un système complexe, schémas déterminant pour les facteurs r , x , g , b , du groupe d'équations :

$$(K) \quad \left\{ \begin{array}{l} -\frac{\delta e}{\delta l} - x \frac{\delta i}{\delta t} = ri \\ -\frac{\delta i}{\delta l} - b \frac{\delta e}{\delta t} = ge \end{array} \right.$$

des fonctions définies de la seule pulsation ω et les conducteurs définissant le circuit.

De telles fonctions dans le cas de systèmes complexes n'existent pas.

On doit donc conclure que si les facteurs r , x , g , b , sont des fonctions de la pulsation et des conducteurs définissant le circuit, ce sont aussi des fonctions du courant et de la tension dans l'élément considéré et dans les autres éléments du système. Comme le courant et la tension dépendent des conditions aux limites, les équations (K) qui se présentent *sous la forme* d'équations différentielles aux dérivées partielles, ne sont pas en réalité des équations différentielles au sens de la définition.

Il s'ensuit que si les solutions trouvées par les procédés d'intégration ordinaire, rendent compte de l'ensemble des phénomènes et peuvent même donner des précisions sur un phénomène particulier, elles ne sont jamais que de plus ou moins grossières approximations.

Par conséquent, si l'on veut chercher dans cette voie la véritable solution théorique de la circulation électrique en haute fréquence dans les circuits complexes, il faut demander aux mathématiques d'étendre, en quelque sorte, à ces nouvelles formes, la notion d'équations différentielles et d'en indiquer les méthodes de résolution.

N O T E

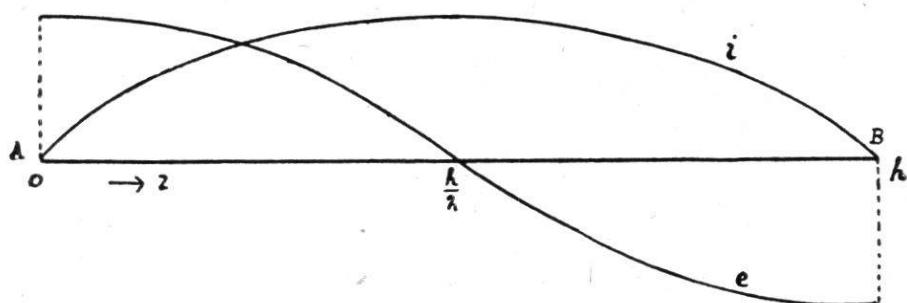
Sur l'interprétation de la formule $T = 2\sqrt{LC}$. de la période de vibration d'un conducteur filiforme vibrant en oscillation demi-onde.

Prenons le cas simple à constantes parfaitement définies, d'un fil rectiligne F , de longueur h , de résistance nulle, de self-induction par unité de longueur l , et de capacité propre par unité de longueur c . Le système est supposé homogène quant à la distribution des constantes caractéristiques.

Lorsque le fil vibre en demi-onde la distribution électrique est donnée par la formule :

$$(1) \quad i = I_0 \sin \frac{2\pi z}{\lambda} \cos \omega t$$

$$(2) \quad v = V_0 \cos \frac{2\pi z}{\lambda} \sin \omega t$$



l'origine étant en A , et les z comptés positivement dans la direction AB .

On a donc, équation (1) $z = 0 \quad i = 0$

$$z = h = \frac{\lambda}{2} \quad i = 0$$

$$\lambda = 2h$$

D'autre part, les éléments \underline{L} , (self par unité de longueur) étant distribués en série, on a:

$$(3) \quad L = h \underline{L}$$

représentant la self totale du fil, définie pour un courant uniforme le long du fil (répartition uniforme du courant dans le long du fil).

De même, les éléments \underline{c} , capacité propre par unité de longueur étant distribués en parallèle le long du fil on a:

$$(4) \quad C = h \underline{c}$$

représentant la capacité propre totale définie, pour une distribution uniforme du potentiel le long du système.

On démontre, d'autre part, que la vitesse de l'onde est donnée par la formule:

$$v = \frac{1}{\sqrt{\underline{L} \underline{c}}} \text{ unités électr. magn.}$$

ce qui donne avec:

$$\begin{aligned} \lambda &= v T & T &= \text{période} \\ T &= \frac{\lambda}{v} = \lambda \sqrt{\underline{L} \underline{c}} = 2h \sqrt{\underline{L} \underline{c}} \\ (5) \quad T &= 2 \sqrt{LC} \end{aligned}$$

Or dans le cas d'oscillations électriques, pour un système formé des éléments ponctuels L_0 et C_0 , on a pour la période propre la formule de Lord Kelvin:

$$(6) \quad T = 2\pi \sqrt{L_0 C_0}$$

Si l'on essaye une analogie entre les formules (5) et (6) on est amené à une relation entre L et L_0 entre C et C_0 .

Il faut démontrer que si l'on a:

$$(7) \quad L_0 = \frac{2}{\pi} L \dots \text{formule de Drude}$$

on doit avoir

$$(8) \quad C_0 = \frac{1}{2\pi} C$$

Remarquons tout d'abord que les expressions (7) et (8) introduites dans l'équation (6) donnent l'équation (5).

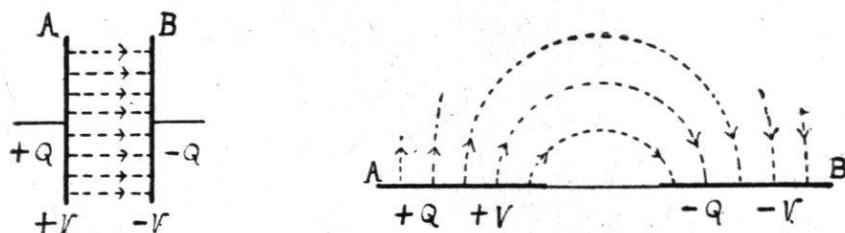
La formule (7) est celle de Drude pour les oscillations demi-onde¹.

Un condensateur est caractérisé par deux armatures métalliques portant l'une une charge $+Q$, l'autre une charge $-Q$ et dans le cas le plus simple l'une est au potentiel $+V$ l'autre au potentiel $-V$. Entre les deux armatures existe un flux d'induction électrique. La capacité du condensateur est défini par la formule:

$$(9) \quad C_0 = \frac{Q}{2V}$$

Un doublet électrique est formé de deux charges électriques égales et de signes contraires $+Q$ et $-Q$, supportées en général par deux éléments matériels identiques, respectivement aux potentiels $+V$ et $-V$. La longueur du doublet (distance entre les charges $+Q$ et $-Q$) est infiniment petite. Nous appellerons aussi doublet électrique un système répondant à la définition précédente mais dont la distance entre les charges est finie.

Considérons le cas de deux éléments conducteurs plans identiques A et B entre lesquels existe un flux d'induction électrique. Si ces deux éléments sont placés en face l'un de l'autre, ils forment un condensateur, placé dans le prolongement l'un de l'autre ils forment un doublet.



La charge et le potentiel des éléments A et B sont respectivement $+Q$, $-Q$ et $+V$, $-V$.

On peut considérer le doublet comme un condensateur dont on aurait déplacé les armatures pour les mettre dans

¹ BOUASSE, *Ondes hertziennes*, p. 126, § 74.

le prolongement l'une de l'autre. Dans le condensateur les lignes de forces électriques sont des droites normales aux armatures, dans le doublet les lignes de forces électriques sont des lignes courbes qui aboutissent normalement aux armatures.

On appelle *capacité propre* d'un corps, une grandeur définie par la relation:

$$\underline{C} = \frac{Q}{V}$$

Q étant la charge du corps

V étant son potentiel.

La notion de capacité propre est en soi indépendante de la notion de flux d'induction électrique.

Pour les éléments A et B d'un doublet ou d'un condensateur on a :

Capacité propre de l'élément A ... $\underline{C} = \frac{Q}{V}$

Capacité propre de l'élément B ... $\underline{C} = \frac{-Q}{V} = \frac{Q}{-V}$

D'autre part, le doublet est équivalent, comme nous venons de le voir au condensateur défini par la relation (9) il suit de là que :

$$\frac{C_0}{\underline{C}} = \frac{1}{2}$$

(10)

$$C_0 = \boxed{\frac{C}{2}}$$

Remarque :

1. — La capacité d'un condensateur ou d'un doublet en fonction de la capacité propre de ses éléments, est donnée par la formule de la capacité résultante d'un système formé de deux condensateurs en série, chacun des deux condensateurs ayant comme valeur, la valeur de la capacité propre de chacun des éléments.

En effet soit $+Q, V_1$ charge et potentiel de l'élément A
 $-Q, V_2$ charge et potentiel de l'élément B
 La capacité du condensateur a pour valeur:

$$C = \frac{Q}{V_1 - V_2}$$

D'autre part la capacité propre de l'élément A est: $C_A = \frac{+Q}{V_1}$

la capacité propre de l'élément B est: $C_B = \frac{-Q}{V_2}$

La capacité résultante d'un système formé de deux condensateurs C_A et C_B en série a pour valeur:

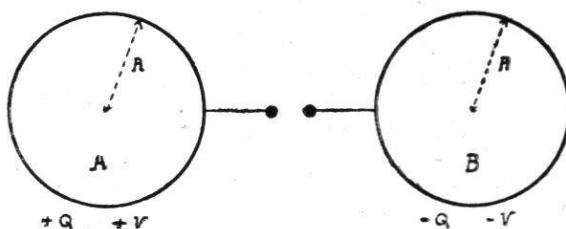
$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_A} + \frac{1}{C_B} = \frac{V_1}{Q} + \frac{V_2}{-Q}$$

d'où

$$C = \frac{Q}{V_1 - V_2} \quad c. q. f. d.$$

2. — La relation (10) peut s'énoncer en disant que: *La capacité d'un condensateur équivalent à un doublet est égale à la moitié de la capacité propre d'un élément du doublet*, ou aussi, puisque la capacité propre totale d'un doublet est égale à la somme des capacités propres des éléments du doublet: *La capacité d'un condensateur équivalent à un doublet est égale au quart de la capacité propre totale du doublet*.

Exemple¹: Soit un doublet formé de deux sphères (doublet de Hertz).



Soit R le rayon des sphères.

¹ BOUASSE, *Ondes hertziennes*, p. 167, § 99.

la capacité propre de la sphère A a pour valeur: $C = \frac{Q}{V} = R$

la capacité propre de la sphère B a pour valeur: $C = \frac{-Q}{-V} = R$

la capacité propre totale du doublet a pour valeur: $C = 2R$
la capacité du condensateur équivalent au doublet a pour valeur:

$$C_0 = \frac{R}{2}$$

Si on soumet un point d'un conducteur (un segment de fil, par exemple), à une tension V_0 et que la distribution de la charge soit telle que tous les points du conducteur se trouvent au même potentiel V_0 , on a, si le conducteur est électriquement homogène de capacité propre c par unité de longueur, pour la charge Q_0 que reçoit le conducteur, la relation:

$$(11) \quad Q_0 = V_0 c l_0 = V_0 C$$

l_0 étant la longueur du conducteur et $c l_0 = C$ sa capacité propre totale.

Si pour une raison spéciale, le potentiel n'a pas la même valeur en chaque point de ce même conducteur, $v = f(l)$, l étant la coordonnée de longueur du point considéré, la charge d'un élément dl du conducteur a pour valeur:

$$dQ = v c dl$$

définissant la *charge effective* Q_e

$$(12) \quad Q_e = c \int_0^{l_0} v dl = KV_0$$

ou K est la *capacité effective* du conducteur, valeur différente de C à cause de la distribution irrégulière du potentiel.

On a entre K et C la relation:

$$(13) \quad \frac{Q_0}{Q_e} = \frac{C}{K} \quad K = C \frac{Q_e}{Q_0} = \frac{Q_e}{V_0}$$

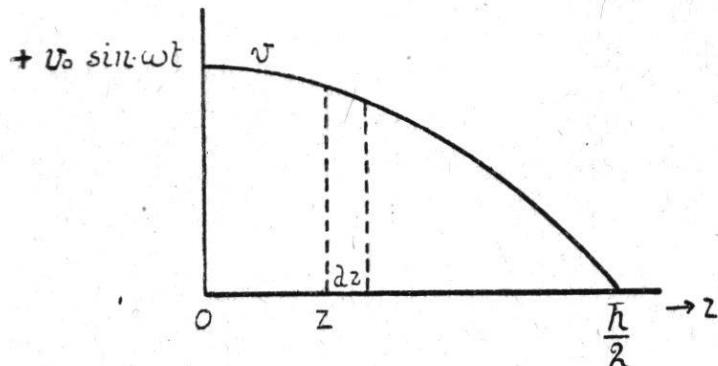
Dans le cas d'une distribution irrégulière de la tension K est la capacité du condensateur équivalent au conducteur. Nous supposons, ce qui correspond au cas qui nous intéresse, que dans tout l'intervalle $(0 - l_0)$, le potentiel est toujours positif ou toujours négatif.

Considérons le fil, électriquement homogène, défini au début. La distribution du potentiel est donnée par la formule (2):

$$(2) \quad V = V_0 \cos \frac{2\pi z}{\lambda} \sin \omega t$$

La moitié $\frac{h}{2}$ du fil est à un potentiel positif, l'autre moitié est à un potentiel négatif. Le potentiel varie de la valeur $V_0 \sin \omega t$, au point $z = 0$ à la valeur 0 , au point $z = \frac{h}{2}$. On peut donc raisonner en disant que si l'on applique en un point du fil le potentiel $V_0 \sin \omega t$, ce potentiel se répartit suivant la formule (2).

Calculons la charge effective de la moitié du fil.



On a: $dQ = v c dz$
pour l'élément dz de capacité propre $c dz$ de potentiel v
et pour la charge effective (formule 12).

$$Q_e = c \int_0^{\frac{h}{2}} v_0 \cos \frac{2\pi z}{\lambda} \sin \omega t dz$$

$$Q_e = c v_0 \sin \omega t \int_0^{\frac{h}{2}} \cos \frac{2\pi z}{\lambda} dz$$

$$Q_e = c v_0 \sin \omega t \left[\frac{\lambda}{2\pi} \sin \frac{2\pi z}{\lambda} \right]_0^{\frac{h}{2}} \quad \lambda = 2h$$

$$Q_e = c v_0 \sin \omega t \frac{2h}{2\pi} \sin \frac{2\pi}{2h} \frac{h}{2}$$

$$Q_e = \frac{1}{\pi} c h v_0 \sin \omega t$$

Ce qui donne pour la capacité effective (formule 13)

$$K = C_1 \frac{Q_e}{Q_o} = C_1 \frac{\frac{1}{\pi} c h v_o \sin \omega t}{Q_o}$$

C_1 est la capacité propre de la moitié du fil: $C_1 = c \frac{h}{2}$

Q_o la charge du fil donnée par la formule (11)

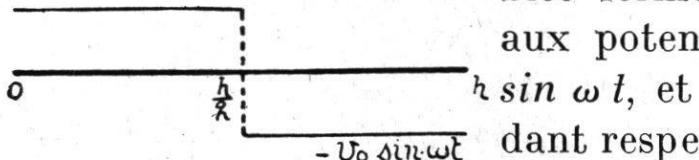
$$Q_o = v_o \sin \omega t \cdot c \frac{h}{2}$$

d'où

$$K = \frac{1}{\pi} c h = \frac{1}{\pi} C$$

C étant la capacité propre totale (formule 4)

le fil vibrant en demi-onde est donc équivalent à un doublot formé de deux armatures aux potentiels respectifs $+ V_o \sin \omega t$ et $- V_o \sin \omega t$, et possédant respectivement les charges



$+ \frac{1}{\pi} C v_o \sin \omega t$ et $- \frac{1}{\pi} C v_o \sin \omega t$. La capacité effective de chaque armature étant :

$$K = \frac{1}{\pi} C$$

D'après la formule (10) la capacité du condensateur a pour valeur:

$$C_o = \frac{1}{2\pi} C$$

c. q. f. d.

Il y a donc bien lieu de considérer dans l'analogie entre d'une part la formule $T = 2\pi \sqrt{L_o C_o}$ de Lord Kelvin, de la période propre d'un système formé d'un condensateur localisé de capacité C_o , et d'une self induction localisée L_o , et d'autre part la formule $T = 2\sqrt{LC}$ d'un fil vibrant en demi-onde, possédant une self induction propre

L (définie pour un courant homogène) et une capacité propre C (définie pour une charge homogène) les relations:

$$\left\{ \begin{array}{l} L_0 = \frac{2}{\pi} L \\ C_0 = \frac{1}{2\pi} C \end{array} \right.$$

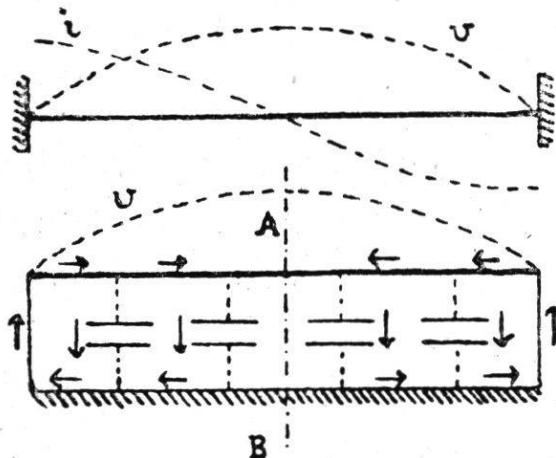
Il ne faut pas perdre de vue dans la recherche des valeurs de la self effective et de la capacité effective d'un système vibrant en ondes stationnaires que la self effective est donnée par le flux magnétique (indépendamment de son signe) qu'impose la distribution, tandis que le signe des charges électriques et la circulation du flux d'induction électrique interviennent dans la définition de la capacité effective. Or, l'existence de vibration en ondes stationnaires implique naturellement aussi la condition d'existence des courants fermés. Ces courants fermés sont composés des courants de conduction dans les conducteurs du système et des courants de déplacement dans le diélectrique. Les courants de déplacement utilisent les lignes d'inductions électriques, ces lignes partent d'un élément du système pour aboutir à un autre élément du système. Ce sont ces deux éléments correspondants qui avec leur charge et leur potentiel définissent le doublet et le condensateur élémentaire correspondant.

Nous avons tenu compte de ces considérations dans l'étude du fil vibrant en demi-onde avec nœuds de courant et ventres de potentiel aux extrémités. Mais qu'en est-il de la même formule $T = 2\sqrt{LC}$ d'un fil vibrant en demi-onde avec nœuds de potentiel et ventres de courant aux extrémités ? Ici les charges électriques à un instant donné ont le même signe en tous les points du système. Il n'y a donc pas lieu de considérer le fil en vibration comme un doublet possédant des charges effectives et définissant la capacité du condensateur du correspondant. C'est qu'en réalité les deux systèmes sont très différents. Dans le premier état de vibration le système fil peut être considéré

comme un système « complet » dans ce sens que par lui-même avec ses seuls et uniques éléments la vibration peut exister. Il n'en est pas de même du fil vibrant suivant le second mode. Dans ce cas le système fil doit être considéré comme un système « incomplet » dans ce sens que par lui-même avec ses seuls et uniques éléments, la vibration ne peut pas exister. En effet, une telle vibration exige que les extrémités du fil soient réunies à des capacités très grandes ce qui a lieu pratiquement lorsqu'on les réunit à la terre ; ces capacités additionnelles (ou la terre) interviennent dans la vibration. Le système « complet » est celui formé du fil et des capacités additionnelles tandis que le fil seul n'est qu'un élément du système « complet » et forme bien un système « incomplet ». On voit que la notion du système « complet » et « incomplet » est relative au genre de vibration.

Dans le premier cas les courants de déplacements utilisent les lignes d'inductions électriques qui partent de certains éléments du fil (les éléments chargés positivement) pour aboutir plus ou moins directement à d'autres éléments du fil (les éléments chargés négativement).

Dans le second cas la vibration demi-onde avec ventres de courants aux extrémités du fil est donnée par les formules :



$$i = I_0 \cos \frac{2\pi z}{\lambda} \sin \omega t$$

$$v = v_0 \sin \frac{2\pi z}{\lambda} \cos \omega t$$

où $z = h = \frac{\lambda}{2}$ = longueur du fil.

Les extrémités du fil sont réunies à la terre par exemple.

Les courants de déplacement n'utilisent plus les lignes du flux électrique qui partent des éléments du fil chargés positivement pour aboutir aux éléments du fil chargés

négativement, puisque à un instant donné les charges sont toutes positives ou toutes négatives.

Les courants de déplacement suivent les lignes d'induction électrique qui relient les éléments du fil aux capacités additionnelles (terre).

On se rend facilement compte sur la figure qui représente à un instant donné la circulation des courants pendant la vibration du système qu'il n'y a pas comme dans le cas précédent d'échanges d'énergie par courants de déplacement entre les éléments du fil entre eux, mais que les échanges d'énergie ont lieu entre les éléments du fil et les capacités additionnelles. Il suit de la symétrie du système par rapport à la droite $A B$ que la partie droite du fil vibre pour ainsi dire indépendamment de la partie gauche et qu'il est en quelque sorte possible de couper le circuit suivant cette ligne de symétrie sans modifier l'état de vibration de ces parties. Le système « complet » du fil et des capacités additionnelles vibrant ainsi en demi-onde peut être considéré comme formé de deux systèmes « complets » indépendants vibrant en quart d'onde.

La self propre totale L du fil (défini pour un courant homogène) et C la capacité propre totale du fil (défini pour une charge homogène) fournissent pour chacune des moitiés du fil les valeurs L' et C' de la self propre et de la capacité propre égale à :

$$L' = \frac{L}{2} \quad C' = \frac{C}{2}$$

Ensuite de la distribution sinusoïdale des courants et des potentiels la self effective a pour valeur:

$$L_0 = \frac{2}{\pi} L' = \frac{L}{\pi}$$

et la capacité propre effective qui sert à déterminer la capacité du condensateur localisé a pour valeur:

$$C'_0 = \frac{2}{\pi} C' = \frac{C}{\pi}$$

en vertu de la remarque 1, page 91 où $V_2 = O$, $C_0 = \infty$, la capacité du condensateur localisé a la même valeur que la capacité propre effective C'_0 , donc

$$C_0 = C'_0 = \frac{C}{\pi}$$

En introduisant ces valeurs dans la formule de Lord Kelvin on retrouve bien l'égalité:

$$T = 2\pi \sqrt{L_0 C_0} = 2\sqrt{LC} \quad \text{c. q. f. d.}$$

On retrouve de même la formule $T = 4\sqrt{LC}$ d'un fil vibrant en quart d'onde si en ne considérant que la moitié du fil on introduit, comme dans la formule (1) les valeurs

$$L_0 = \frac{2}{\pi} L' = \frac{2}{\pi} L \text{ pour la self effective du fil et}$$

$$C_0 = \frac{2}{\pi} C' = \frac{2}{\pi} C \text{ pour la capacité propre effective du fil en tenant compte que dans ce cas } C' = C \text{ et } L' = L.$$

Mais au point de vue de l'énergie électrique et magnétique le fil vibrant en demi-onde avec ventres de courant aux extrémités est équivalent à deux systèmes identiques vibrant ensemble et possédant chacun une self localisée L'_0 de valeur $L'_0 = \frac{L}{\pi}$ et un condensateur localisé

C'_0 , de valeur $C'_0 = \frac{C}{\pi}$. Par conséquent le fil est capable de fournir la même énergie électrique qu'un condensateur localisé de valeur $C_0 = 2C'_0 = 2\frac{C}{\pi}$ et la même

énergie magnétique qu'une self localisée de valeur $L_0 = 2L'_0 = \frac{2L}{\pi}$. Par contre l'énergie électrique et magnétique du fil vibrant en demi-onde avec nœuds de courant aux extrémités est pour l'énergie électrique, la même que celle d'un condensateur localisé de valeur $C_0 = \frac{C}{2\pi}$

et pour l'énergie magnétique la même que celle d'un self localisée de valeur $L_0 = \frac{2}{\pi} L$.

On voit que suivant qu'il s'agit de déterminer les éléments self localisées et capacité localisée d'un circuit ayant la même période propre que celle du système vibrant en demi-onde, on obtient des relations qui sont les mêmes pour les deux genres de vibrations (nœuds de courant ou ventres de courant aux extrémités), tandis que si l'on s'agit de déterminer la valeur d'une self localisée et la capacité d'un condensateur localisé capables de fournir respectivement la même énergie magnétique et la même énergie électrique que le système, les valeurs ne sont pas les mêmes pour les différents genres de vibration en demi-onde et elles diffèrent dans un des cas des valeurs relatives à la période qui sont introduites dans la formule de Lord Kelvin.

On fait les mêmes raisonnements pour l'interprétation des formules $T = \frac{2}{K} \sqrt{LC}$ ($K = 2, 3, 4\dots$) qui fixent la période des autres partiels du fil.

On a par exemple pour le second partiel ($K = 2$) vibration en deux demi-ondes la formule $T = \sqrt{LC}$.

Si le système a ses extrémités isolées (nœuds de courant aux extrémités) les échanges d'énergies ont lieu uniquement entre les éléments du fil. Le tout est équivalent à deux systèmes identiques vibrant en demi-ondes. La self effective L_0 de chacune des moitiés du fil est donc égale à $\frac{2}{\pi} L'$, où L' la self propre de la moitié du fil

est égale à $\frac{L}{2}$. Au point de vue de la capacité chacune des moitiés du fil est équivalente à un doublet, lequel est équivalent à un condensateur de valeur, $C_0 = \frac{1}{2\pi} C' = \frac{1}{2\pi} \frac{C}{2}$, C' étant la capacité propre de la moitié du fil.

On a donc les relations:

$$L_0 = \frac{L}{\pi} \quad C_0 = \frac{C}{4\pi}$$

Ces valeurs introduites dans la formule de Lord Kelvin donne bien l'égalité:

$$T = 2\pi \sqrt{L_0 C_0} = \sqrt{LC} \quad \text{c. q. f. d.}$$

Le raisonnement est analogue lorsque le système vibre avec nœuds de courant aux extrémités. En tenant compte que les échanges d'énergie par courant de déplacement se font entre les éléments du fil d'une part et les capacités additionnelles d'autre part.

Au point de vue de l'énergie électrique et magnétique on trouve dans ce cas aussi que les valeurs de la self localisée et que la capacité du condensateur localisé fournissant respectivement la même énergie électrique et la même énergie magnétique que l'ensemble du système vibrant en deux demi-ondes, ont des valeurs différentes suivant qu'il s'agit d'une vibration avec nœuds de courant ou ventres de courant aux extrémités. Elles diffèrent également des valeurs obtenues dans l'interprétation précédente de la période du fil en fonction de ses éléments propres et des valeurs de la self localisée et du condensateur localisé qu'il faut introduire dans la formule de Lord Kelvin.

La démonstration est la même et les remarques sont analogues pour l'interprétation de la vibration des autres partiels du système.

D'une façon générale, il faut souligner à ce sujet les remarques suivantes:

1^o — Les confusions qui proviennent de notions trop imprécises comme par exemple: self répartie, capacité répartie, self équivalente à la self répartie d'un système, condensateur équivalent à une capacité répartie, etc.

2^o — Le fait que, notamment les traités de T.S.F., utilisent constamment les formules de la basse fréquence pour l'étude de la haute fréquence. Comme la distribution des charges électriques et des potentiels est irrégulière, il

y a lieu de faire des interprétations analogues à celles que nous venons de faire. Ces interprétations demandent des précisions et sont toujours de nature délicate. Nous soulignons en particulier un résultat important qui est très souvent indiqué incorrectement. Par rapport à sa capacité propre totale C , la capacité d'un fil (antenne parfaite) vibrant en quart d'onde est équivalente à celle d'un condensateur de valeur $C_0 = \frac{2}{\pi} C$, tandis que la capacité de fil vibrant en demi-onde (antenne et contre-poids) est équivalente à celle d'un condensateur de valeur $C_0 = \frac{1}{2\pi} C$.

3^o — Le caractère arbitraire de ces interprétations puisqu'il s'agit toujours de préciser si on se place au point de vue de la période d'un système équivalent ayant self et condensateur localisés, ou de la recherche d'une self localisée ou de la capacité d'un condensateur localisé capable de fournir respectivement la même énergie magnétique et la même énergie électrique que l'ensemble du système (problème de l'énergie d'une antenne).

4^o — Le nombre très limité de cas où cette interprétation est possible, cas qui se limitent à ceux des circuits simples à constantes parfaitement définies lorsqu'on a précisé la vibration en ondes stationnaires. Cette interprétation est impossible pour les circuits simples quand on ne connaît pas la vibration en ondes stationnaires, elle est toujours impossible pour les circuits complexes (qui sont de beaucoup les plus nombreux), car on ne peut pas définir les constantes par unité de longueur de circuit. Certes, dans les circuits complexes les phénomènes de la vibration sont bien dus à des éléments de la nature self induction, et capacité répartie le long du système mais il n'existe aucune possibilité d'évaluer numériquement leurs grandeurs. Ces grandeurs à évaluer sont des variables, fonction des éléments du circuit, de la pulsation du courant et de la tension en chaque point du système.

