Zeitschrift: Mémoires de la Société Fribourgeoise des Sciences Naturelles. Mathématique et physique = Mitteilungen der Naturforschenden Gesellschaft in Freiburg. Mathematik und Physik

Herausgeber: Société Fribourgeoise des Sciences Naturelles

Band: 4 (1921)

Artikel: Über die Prismenmethode zur Bestimmung der Brechungsindizes optisch zweiachsiger Kristalle ohne Absorptions- und Drehungsvermögen

Autor: Weber, Leonhard

Kapitel: III: Experimentelle Prüfung der im zweiten Teil entwickelten Methode

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-306876

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 23.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

III. TEIL

Experimentelle Prüfung der im zweiten Teil entwickelten Methode.

53. Die im zweiten Teil erläuterte Methode zur Bestimmung der Brechungsindizes optisch zweiachsiger Kristalle wurde an je einem Prisma von

Kupfervitriol,
Colemanit und
Euklas

geprüft. Die dabei gewonnenen Erfahrungen sollen im folgenden samt den erzielten Resultaten mitgeteilt werden.

54. Die Beobachtungen wurden mit Hilfe eines Fueßschen Goniometers Modell II ausgeführt. Als Lichtquelle diente eine mit Helium gefüllte Geißlerröhre, doch konnte auch im günstigsten Falle (Euklas) nur auf vier Linien eingestellt werden: rot (668 $\mu\mu$), gelb (588), grün (502) und indigo (447). Als Spalt wurde der Webskysche gewählt, weil er die Schärfe mit großer Helligkeit verbindet. Wegen der geringen Zahl von Linien konnte keine störende Übereinanderlagerung der Farben eines und desselben Spektrums entstehen.

55. Bei den verschiedenen Ablesungen wurde im allgemeinen folgender Gang eingehalten. Nachdem das Prisma zentriert, justiert und in jene Lage gebracht war, welche für die Beobachtung des gebrochenen Lichtes geeignet erschien, wurden der Teilkreis sowie die Achse des Kristallträgers festgeklemmt und die Fernrohrachse in die Verlängerung der Kollimatorachse gerückt, um das Azimut des unabgelenkten Spaltbildes zu ermitteln. Der größeren Genauigkeit wegen wurden Einstellung und Ablesung dreimal vorgenommen, nachdem das Prisma zuvor aus dem Zentrum des Gesichtsfeldes entfernt worden war. Hierauf wurde die Prismenkante wieder mit dem Fadenkreuz zur Deckung gebracht, sodann das Fernrohr herumgedreht, bis das an der Eintrittsebene reflektierte Spaltbild sich mit dem Fadenkreuz deckte.

Diese Einstellung wurde zweimal vorgenommen. Nachher wurde das Fadenkreuz der Reihe nach auf die einzelnen Farben der beiden Spektra (zuerst des weniger abgelenkten und dann des stärker abgelenkten) von rot bis indigo und dann zurück von indigo bis rot eingestellt. Wenn sich die zwei durch Doppelbrechung erzeugten Spektra überlagerten, wurden sie durch einen vor das Auge gehaltenen Nikol unterschieden. Nach diesen Ablesungen wurde wieder eine zweimalige Einstellung des reflektierten Lichtes gemacht, hernach in der beschriebenen Weise neuerdings auf die beiden Spektra eingestellt und das Fernrohr zum Schlusse, nachdem das Azimut des reflektierten Spaltbildes vorher noch zweimal abgelesen war, dreimal auf das unabgelenkte Spaltbild (bei weggerücktem Prisma) gerichtet.

56. Folgende Tabelle III, die dem Beobachtungsheft aufs Geratewohl entnommen ist, zeigt, welche Genauigkeit erzielt

Tabelle III.

Reflekt.	Direkt.	He	Abgelenkt. Spaltbild			
200° 38½′	299° 30′	rot (668 μμ)	323° 02⅛′	01⅞′	02′	01½′
38¼	29¾	gelb (588 μμ)	08⅞	09	38⅞	09
38½	29⅞	grün (502 μμ)	19⅜	19⅝	19⅝	19⅜
38½	30	indigo (447 μμ)	30⅜	30⅜	30½	30⅝
38¾	29⅞	rot (668 μμ)	20¾	20⅝	20¼	20⅛
38½	30	gelb (588 μμ)	27⅝	27⅝	27⅝	27⅝
		grün (502 μμ)	38⅛	38¼	38⅜	38¼
		indigo (447 μμ)	48⅝	49	49¼	49⅛

werden kann. Bemerkt sei noch, daß bei der Ablesung die Achtelsminuten geschätzt wurden. Die Teilung erlaubt bekanntlich die direkte Ablesung von halben Minuten. Viertelsminuten können leicht geschätzt werden. Um aber genau eine solche zu haben, müssen zwei aufeinanderfolgende Teilstriche des Nonius so zwischen zwei aufeinanderfolgenden Strichen des Teilkreises liegen, daß das Intervall zwischen den beiden Strichen links gleich dem Intervall zwischen den beiden Strichen rechts ist. Besteht ein merklicher Unterschied, so wird mit Benutzung von Achtelsminuten eine größere Genauigkeit erzielt.

57. Aus den Azimuten des reflektierten, nicht abgelenkten und abgelenkten Spaltbildes berechnen sich in einfacher Weise die beiden Winkel i_0 und i_1. Zur Berechnung von ψ und q dienen die bekannten Formeln (die Bedeutung der Buchstaben ist dieselbe wie früher; vergl. auch Fig. 1)

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\Gamma}{2}-r_1\right)=\operatorname{tg}\left(r_0-\frac{\Gamma}{2}\right)=\operatorname{tg}\frac{\Gamma}{2}\cdot\operatorname{tg}\left(i_0-\frac{\Gamma+\Delta}{2}\right)\operatorname{cotg}\frac{\Gamma+\Delta}{2}$$

$$q=\frac{\sin r_0}{\sin i_0}=\frac{\sin r_1}{\sin i_1}$$

$$\psi=\frac{\pi}{2}-r_0.$$

Die Rechnungen wurden tabellarisch angeordnet. Es genüge ein beliebig gewähltes Beispiel (Colemanit) mitzuteilen (vergl. Tab. IV). Dabei soll ausdrücklich bemerkt werden, daß bei den entsprechenden Messungen, abweichend von den Festsetzungen des § 34, die Eintrittsfläche zur xz-Ebene gewählt wurde. Sofern man sich nämlich die Formel

$$\operatorname{tg}\left(r_0-\frac{\Gamma}{2}\right)=\operatorname{tg}\frac{\Gamma}{2}\operatorname{tg}\left(i_0-\frac{\Gamma+\Delta}{2}\right)\operatorname{cotg}\frac{\Gamma+\Delta}{2}$$

bedient, erzielt man bei dieser Stellung den großen Vorteil, daß die Berechnung von i_1 dahinfällt und für die einzelnen Farben der beiden Spektra einer Beobachtungsreihe q_i (bei Colemanit also 6 Werte) stets denselben Nenner hat, was beim logarithmischen Rechnen eine nicht zu unterschätzende Vereinfachung ist. Um aber bei den einmal abgeleiteten Formeln

bleiben zu können, wurde, wenn die Eintrittsfläche als xz-Ebene diente, der ganze Kristall um eine zur brechenden Kante senkrechte Achse gedreht gedacht, so daß die positive Richtung der z-Achse von oben nach unten lief.

Tabelle IV. Rechnungs-Schema.

	rot	gelb	grün	rot	gelb	grün
	6′07″	9′51″	−5′38″	6′28″	9′19″	
A	223° 39′ 23″	223° 45′ 30″	223° 55′ 21″	223° 49′ 43″	223° 56′ 11″	224° 05′ 30″
D	203° 59′ 50″	203° 59′ 50″	203° 59′ 50″	203° 59′ 50″	203° 59′ 50″	203° 59′ 50″
Δ	19° 39′ 33″	19° 45′ 40″	19° 55′ 31″	19° 49′ 53″	19° 56′ 21″	20° 05′ 40″
Γ	28° 21′ 29″	28° 21′ 29″	28° 21′ 29″	28° 21′ 29″	28° 21′ 29″	28° 21′ 29″
$\Gamma+\Delta$	48° 01′ 02″	48° 07′ 09″	48° 17′ 00″	48° 11′ 22″	48° 17′ 50″	48° 27′ 09″
$\frac{\Gamma+\Delta}{2}$	*24° 00′ 31″*	*24° 03′ 35″*	*24° 08′ 30″*	*24° 05′ 41″*	*24° 08′ 55″*	*24° 13′ 35″*
i_0	45° 31′ 17″	45° 31′ 17″	45° 31′ 17″	45° 31′ 17″	45° 31′ 17″	45° 31′ 17″
$i_0-\frac{\Gamma+\Delta}{2}$	*21° 30′ 46″*	*21° 27′ 42″*	*21° 22′ 47″*	*21° 25′ 36″*	*21° 22′ 22″*	*21° 17′ 42″*
	3′04″	4′55″	−2′49″	3′14″	4′40″	
$\log \operatorname{tg} \frac{\Gamma}{2}$	9,4025183	9,4025183	9,4025183	9,4025183	9,4025183	9,4025183
$\log \operatorname{tg}\left(i_0-\frac{\Gamma+\Delta}{2}\right)$	9,5953975 2840	9,5942851 2598	9,5924263 2916	9,5935423 2229	9,5924263 1365	9,5905617 2614
	8,9981998	8,9970632	8,9952362	8,9962835	8,9950811	8,9933414
$-\log \operatorname{tg} \frac{\Gamma+\Delta}{2}$	9,6485831 1756	9,6496023 1980	9,6512974 1693	9,6502809 2317	9,6512974 3103	9,6529881 1969
$\log \operatorname{tg}\left(r_0-\frac{\Gamma}{2}\right)$	9,3494411 3290 1121	9,3472629 69494 3135	9,3437695 3578 4117	9,3457709 552 157	9,3434734 3578 1156	9,3401564 397391 4173
$r_0-\frac{\Gamma}{2}$	12° 36′ 11″	12° 32′ 31″	12° 26′ 41″	12° 30′ 01″	12° 26′ 11″	12° 20′ 41″
$\frac{\Gamma}{2}$	14° 10′ 45″	14° 10′ 45″	14° 10′ 45″	14° 10′ 45″	14° 10′ 45″	14° 10′ 45″
r_0	*26° 46′ 56″*	*26° 43′ 16″*	*26° 37′ 26″*	*26° 40′ 46″*	*26° 36′ 56″*	*26° 31′ 26″*

(Fortsetzung der Tabelle IV.)

	rot	gelb	grün	rot	gelb	grün
	9,9507138	9,9509685	9,9513492	9,9511590	9,9513492	9,9517282
log cos 26⁰ ..	+ 42	— 170	— 275	— 487	+ 42	— 273
	9,9507180	9,9509515	9,9513217	9,9511103	9,9513534	9,9517009
log cos² 26 ..	9,9014360	9,9019030	9,9026434	9,9022206	9,9027068	9,9034018
	11	8995	392	05	44	3993
	49	35	42	01	24	25
$\sin^2 \psi$	*0,796959*	*0,797817*	*0,799178*	*0,798400*	*0,799294*	*0,800575*
	9,6538084	9,6528059	9,6512966	9,6520521	9,6512966	9,6497807
log sin 26⁰ ..	— 167	+ 669	1092	1928	— 168	1097
	9,6537917	9,6528728	9,6514058	9,6522449	9,6512798	9,6498904
log sin² 26⁰ ..	9,3075834	9,3057456	9,3028116	9,3044898	9,3025596	9,2997808
	16	382	76	690	474	687
	18	74	40	208	122	121
$\cos^2 \psi$	*0,203041*	*0,202183*	*0,200822*	*0,201600*	*0,200706*	*0,199425*
log 2	0,3010300	0,3010300	0,3010300	0,3010300	0,3010300	0,3010300
log sin ψ	9,9507180	9,9509515	9,9513217	9,9511103	9,9513534	9,9517009
log cos ψ	9,6537917	9,6528728	9,6514058	9,6522449	9,6512798	9,6498904
	9,9055397	9,9048543	9,9037575	9,9043852	9,9036632	9,9026213
	68	07	2	01	596	174
	29	36	3	51	36	39
$2 \sin \psi \cos \psi$	*0,804525*	*0,803257*	*0,801231*	*0,802389*	*0,801057*	*0,799137*
log sin r	9,6537917	9,6528728	9,6514058	9,6522449	9,6512798	9,6498904
log sin i	9,8534013	9,8534013	9,8534013	9,8534013	9,8534013	9,8534013
log q	9,8003904	9,7994715	9,7980045	9,7988436	9,7978785	9,7964891
log q²	9,6007808	9,5989430	9,5960090	9,5976872	9,5957570	9,5929782
	769	327	30	42	497	57
	39	103	60	30	73	25
q²	*0,398824*	*0,397140*	*0,394465*	*0,395993*	*0,394237*	*0,391722*

58. Bei der Berechnung von $\sin^2 \psi$, $2 \sin \psi \cos \psi$ und $\cos^2 \psi$ ist zu beachten, daß derjenige Wert von $2 \sin \psi \cos \psi$, welcher mit Hilfe der Logarithmen von $\sin \psi$ und $\cos \psi$ gefunden wird, für ein gewisses Intervall des Argumentes ψ im allgemeinen verschieden ist von dem-

jenigen Wert, der sich dadurch ergibt, daß das Produkt der Zahlenwerte von $\sin^2\psi$ und $\cos^2\psi$ radiziert wird. Zur Erläuterung mögen die beiden in der Tabelle V zusammengestellten Beispiele dienen. In den beiden ersten Kolonnen sind die Logarithmen der in Betracht kommenden trigonometrischen Funktionen und ihrer Quadrate hingeschrieben; die drei folgenden Kolonnen enthalten die auf Grund dieser Logarithmen gefundenen Werte von $\sin^2\psi$, $\cos^2\psi$ und $2\sin\psi\cos\psi$, während in der letzten Kolonne die aus den hingeschriebenen sechsstelligen Werten von $\sin^2\psi$ und $\cos^2\psi$ berechnete Größe von $2\sin\psi\cos\psi$ vermerkt ist.

Tabelle V.

ψ	$\log\sin\psi$ $\log\sin^2\psi$	$\log\cos\psi$ $\log\cos^2\psi$	$\sin^2\psi$	$\cos^2\psi$	$2\sin\psi\cos\psi$	$2\sqrt{\sin^2\psi\cos^2\psi}$
1^0	8,2418553 6,4837106	9,9999338 9,9998676	0,000305	0,999695	0,034899	0,034923
4^0	8,8435845 7,6871690	9,9989408 9,9978816	0,004866	0,995134	0,139173	0,139173

Die Ungleichheit der Zahlen der beiden letzten Kolonnen für $\psi = 1^0$ ist ebenso augenfällig wie ihre Übereinstimmung für $\psi = 4^0$.

Der Grund für dieses eigenartige Verhalten liegt darin, daß bei der logarithmischen Berechnung von $2\sin\psi\cos\psi$ im Falle von $\psi = 1^0$ für $\sin^2\psi$ der Wert

$$\sin^2 1^0 = \frac{0{,}304586}{1000}$$

in Betracht gezogen wird, während im zweiten Fall $\sin^2 1^0 = 0{,}000305$ zur Geltung kommt. Demnach ergibt bei der logarithmischen Rechnung $\sin^2\psi\cos^2\psi$ einen Bruch mit dem Nenner 1000, dessen Zähler ungefähr um 4 Einheiten der vierten Dezimale kleiner ist wie im Fall, wo

$$\sin^2 1^0 = 0{,}000305$$

gesetzt wird. Inwieweit dieser Unterschied das Endresultat beeinflußt, kann aus der Formel

$$d\,(2\sqrt{a\,x}) = \sqrt{\frac{a}{x}} \cdot dx$$

abgeschätzt werden. Wird darin

$$x = 0{,}304586$$

$$a = \frac{0{,}999695}{1000} \text{ und}$$

$$dx = 0{,}0004$$

gesetzt, so ergibt sich für die Variation des fraglichen Ausdruckes

$$d\,(2\sqrt{a\,x}) = 0{,}000023,$$

was mit der Differenz der beiden in der Tabelle aufgeführten Werte bestens übereinstimmt. Der richtigere Wert von $2\sin\psi\cos\psi$ ist selbst-

verständlich der aus den Tafeln gefundene und nicht der nach der anderen Methode berechnete.

Für $\psi = 4^0$ wird die Übereinstimmung der beiden Werte aus dem Grunde so vollkommen, weil $\sin^2 4^0 = 0{,}00486597$ von dem bei der Rechnung verwendeten ($= 0{,}004866$) nur um ca. $0{,}000003 \cdot 10^{-2}$ verschieden ist. Verfährt man wie soeben, so ergibt sich der Fehler im ganzen zu ca. 0,0000005. Natürlich spielt hier das günstige Zusammenwirken der Umstände wesentlich mit, da im ungünstigsten Fall der Fehler ungefähr sieben Einheiten der sechsten Dezimale ausmachen müßte.

59. Am umständlichsten war die Beobachtung jener Wellen, deren Ebenen im Kristall den Grenzflächen parallel sind. Solange es sich nur darum handelt, die Ablenkung usw. (also q und ψ) festzustellen, ist es natürlich bei weitem das Einfachste, wenn man die Grenzebene, zu der die Wellenebene parallel sein soll, senkrecht zur Kollimatorachse stellt. Das bietet keine Schwierigkeit. Bestimmt man nämlich bei festgeschraubtem Teilkreis und Kristallträger die Azimute des reflektierten und des nicht abgelenkten Spaltbildes, so gibt die Halbierende des Nebenwinkels der Fernrohrstellungen für das reflektierte und direkt durchgehende Licht die Flächennormale an, die man durch Drehung des mit dem Kristallträger verbundenen Teilkreises um den berechneten Winkel leicht in die Verlängerung der Kollimatorachse bringen kann.[1]) Indessen ist diese Anordnung nicht geeignet, um den Schwingungszustand der zur Austrittsfläche parallelen Wellenebenen zu untersuchen.

Zum Zwecke dieser Bestimmung wurde ursprünglich die Austrittsebene senkrecht zur Fernrohrachse gestellt (mit Hilfe von Manipulationen, die den soeben erwähnten vollständig entsprechen) und dann das Fernrohr samt dem mit dem Kristallträger festverschraubten Teilkreis soweit gedreht, bis das abgelenkte Spaltbild in der Mitte des Gesichtsfeldes erschien. Die erforderlichen Operationen sind aber sehr umständlich und zeitraubend, da es nur durch vielfaches Probieren und Ablesen gelingt, das genannte Spaltbild derart mit dem Fadenkreuz zur Deckung zu bringen, daß Teilkreis und Fernrohr in der bestimmten gegenseitigen Lage sind. Man kann

---

[1]) Vergl. v. Groth, Physikalische Krystallographie 4. Aufl. Seite 694.

aber in etwas anderer Weise verfahren, um die gewünschte Einstellung mit jeder beliebigen Genauigkeit zu erzielen. Hierzu dreht man das Fernrohr zuerst so, daß seine neue Lage zur alten symmetrisch ist bezüglich der verlängerten Kollimatorachse (Drehung $= 2\Delta$). Hierauf dreht man das Prisma, welches mit der Eintrittsfläche senkrecht zur Kollimatorachse steht, samt dem Teilkreis, um $180^0 \pm \Delta$ (je nach dem Drehsinn), während das Fernrohr festgeklemmt bleibt. Durch diese beiden Drehungen sind Kollimator und Fernrohr sozusagen vertauscht worden, wogegen infolge der Umkehrbarkeit der Lichtwege die Richtung der Lichtausbreitung in bezug auf das Prisma (vom Fortpflanzungssinn abgesehen) unverändert geblieben ist. War also das Fernrohr anfänglich auf irgendein Spaltbild eingestellt, so wird es auch in der zweiten Lage richtig eingestellt sein.

An Hand der Fig. 7 kann man sich hiervon leicht vergewissern. Sei AOB die Anfangsstellung des Prismas, OC und OF die Richtungen der Kollimator- bzw. Fernrohrachse. Bringt man letztere mit der Richtung OF′ zur Deckung (FOF′ $= 2\Delta$) und dreht dann das Prisma bei festgeklemmtem Fernrohr in der Pfeilrichtung um $180^0 - \Delta$, so wird OC mit OF′, AOB mit A′OB′ und OF mit OC zusammenfallen, d. h. es ist als ob in der Tat Fernrohr und Kollimator ihre Rollen vertauscht hätten.[1])

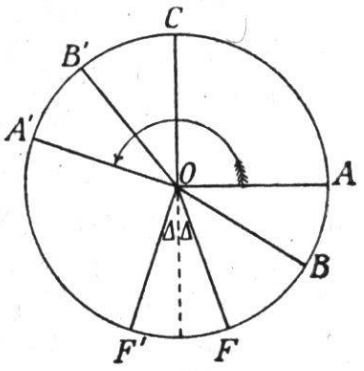

Fig. 7

60. Zur Bestimmung der Schwingungsrichtungen dieser zur Austrittsfläche parallelen Wellenebenen wurde auf den Kollimator (zwischen Lichtquelle und Spaltöffnung) und das Fernrohr (zwischen Auge und Okular) je ein Nikol aufgeklemmt, dessen Drehung an einem größeren Teilkreis mit Hilfe eines Nonius auf Zehntelsgrade genau abgelesen werden konnte. Der Nikol vor dem Kollimator diente dazu, das einfallende Licht so zu polarisieren, daß das eine der beiden Spektren

---

[1]) Daß diese Einstellungen wesentlich erleichtert würden, falls auch der Kollimator beweglich wäre, ist unmittelbar verständlich.

(zur Vermeidung störender Lichteindrücke oder Überlagerung der beiden Spektra) verschwand.

61. Die wichtigste Arbeit vor Gebrauch des Analysators war die Orientierung seines Teilkreises in bezug auf die Drehachse des Instrumentes (z-Achse). Dazu dienten zwei natürliche Kristallprismen von Apatit und Euklas. Bei dem Apatitprisma war die brechende Kante parallel der optischen Achse, die Schwingungsrichtungen des austretenden Lichtes also horizontal und vertikal. Die Austrittsebene des Euklasprismas war eine Fläche aus der Zone der Orthohemidomen, während die brechende Kante im Klinopinakoid lag. Da der Kristall überdies so aufgestellt war, daß die Normalen der austretenden Wellenebenen auf der Austrittsfläche senkrecht standen, waren ihre Schwingungsrichtungen ebenso wie beim Apatitprisma horizontal und vertikal.

Die Einstellung auf maximale Dunkelheit gab keine günstigen Resultate; es erschien vielmehr angezeigt, den Nikol einmal rechtsherum und nachher linksherum so weit zu drehen, bis die Sichtbarkeit des Spaltbildes praktisch verschwand.[1]) Die Beobachtungsdaten mögen hier folgen. Es verschwindet die

	schnellere		langsamere	
	Welle bei			
Apatit I	137,90°	138,60°	228,05°	228,50°
	138,50	138,60	228,40	228,60
	138,60	138,00	228,00	228,20
Apatit II	138,65	138,90	228,30	228,65
	138,15	138,80	228,55	228,35
	138,40	138,75	228,25	228,15
Euklas I	228,45	228,75	137,95	138,65
	228,60	228,55	138,25	138,50
	228,20	228,65	138,15	138,15
Euklas II	228,00	228,60	138,70	138,10
	228,35	228,55	138,00	138,35
	228,35	228,45	137,95	138,65

[1]) Es war die Vorsorge getroffen, daß möglichst wenig Nebenlicht in das Fernrohr eindrang. Die Spaltbilder erschienen darum auf einem dunklen Hintergrund, so daß das Verschwinden mit verhältnismäßig großer Genauigkeit festgestellt werden konnte.

Die zweiten Beobachtungsreihen wurden einige Tage später als die anderen gemacht, nachdem inzwischen die Schwingungsazimute der drei Kristalle, an denen die Methode erprobt werden sollte, bestimmt waren.

Die Mittel obiger Versuche sind:

Apatit I	138,33° ± 0,219	228,15° ± 0,126
	138,40 ± 0,200	228,43 ± 0,120
Apatit II	138,40 ± 0,144	228,37 ± 0,093
	138,82 ± 0,044	228,38 ± 0,145
Euklas I	138,12 ± 0,088	228,42 ± 0,117
	138,43 ± 0,148	228,65 ± 0,058
Euklas II	138,22 ± 0,242	228,23 ± 0,117
	138,37 ± 0,159	228,53 ± 0,045

Diese Zahlen zeigen zunächst, daß der Analysator während der Versuche seine Stellung nicht änderte. Ferner zeigen sie die fast unerwartet genaue Bestimmungsfähigkeit dieser Schwingungsazimute. Die den einzelnen Mittelwerten beigefügten Fehler sind nämlich die sogen. mittleren quadratischen Fehler des Mittelwertes. Zu ihrer Berechnung bestimmt man zuerst den Mittelwert, sucht hierauf den Fehler jeder Beobachtung, dividiert die Summe ihrer Quadrate durch $n(n-1)$, falls n die Anzahl der Beobachtungen bedeutet, und zieht die Wurzel. Symbolisch schreibt man

$$M = \sqrt{\frac{[\varepsilon\varepsilon]}{n(n-1)}}.$$

Ähnlich wie die Beobachtungsgrößen zu Teilmitteln vereinigt wurden, können sie auch zu einem Gesamtmittel zusammengefaßt werden. Man findet

138,3854° ± 0,0635 228,3958° ± 0,0442.

Die geringe Abweichung von der theoretisch geforderten Differenz der beiden letzten Zahlen ist beachtenswert!

Bedenkt man, daß jede Beobachtung der einen Reihe füglich auch als Beobachtung der anderen Reihe gedeutet werden kann, falls man 90° addiert oder subtrahiert, so kommt endgültig

$$\left.\begin{matrix}138{,}3906^\circ\\228{,}3906^\circ\end{matrix}\right\} \pm 0{,}0383,$$

so daß die Ungenauigkeit kleiner wie $2^1/_3$ Bogenminuten wird.

Diesem Ergebnis zufolge verschwindet beim Apatitprisma die schnellere Welle bei der Nikolstellung 138,39°, die langsamere bei 228,39°. Die Doppelbrechung des Apatit ist negativ, d. h. $\omega > \varepsilon$, die schnellere Welle ist daher die außerordentliche, ihre Schwingungsrichtung im vorliegenden Fall also parallel der brechenden Kante, d. h. vertikal. Vertikal schwingendes Licht wird demnach vom Analysator nicht durchgelassen, wenn er auf 138,39° eingestellt ist. **Der Nullpunkt für die Zählung der Schwingungsazimute ist darum 228,39°.**

62. Es erübrigt noch ein Wort über Γ, d. h. den brechenden Winkel des Prismas, der in dreifacher Hinsicht bedeutungsvoll ist. Zunächst kommt er bei der Ermittlung der R_{ik} und R'_{ik} in Betracht, weil die der Eintrittsebene parallelen Wellenebenen an der Austrittsfläche total reflektiert werden, sobald

$$\sin \Gamma > q$$

(wo q wie früher die Wellennormalengeschwindigkeit bezeichnet). In der folgenden Tabelle VI sind unter Γ_m die den darüber geschriebenen Werten von q entsprechenden oberen Grenzen von Γ eingetragen, unter der Voraussetzung, daß es sich um isotrope Prismen handle — eine Annahme, die keine Beschränkung bedeutet, da es ja nur darauf ankommt, einen Einblick in die Größenordnung der auftretenden Winkel usw. zu geben.

Tabelle VI

q	0,40	0,45	0,50	0,55	0,60	0,65	0,70	0,75
Γ_m	23° 34′ 41″	26° 44′ 37″	30° 00′ 00″	33° 22′ 01″	36° 52′ 12″	40° 32′ 30″	44° 25′ 37″	48° 35′ 25″

Wie sich später zeigen wird, spielt zweitens der Prismenwinkel eine nicht zu unterschätzende Rolle bei der Bestimmung von P_{11} und P_{12}, von denen insbesondere die letztere Größe genauer wird, wenn es möglich ist, die Beobachtungen bei solchen Einfallswinkeln vorzunehmen, daß einem nicht zu kleinen Koeffizienten von P_{12} ein ungefähr gleich großer mit dem umgekehrten Vorzeichen entspricht. Nach Gleichung X ist dieser Koeffizient gegeben durch $2\,q^2 \sin\psi \cos\psi$. Die genannte Forderung ist also im wesentlichen erfüllt, wenn es gelingt, für ψ solche Werte zu wählen, daß $2 \sin\psi \cos\psi$ möglichst groß wird, sowohl nach der negativen wie nach der positiven Seite.

Hat der Prismenwinkel den vorhin genannten Wert Γ_m, so variiert, wenn vom Bewegungssinn des Lichtes abgesehen wird, ψ zwischen $\pi/2 - \Gamma_m$ und $\pi/2$, falls man stetig von streifender zu senkrechter Inzidenz übergeht. Wird aber der Prismenwinkel Γ verkleinert, so erfolgt der streifende Austritt erst für $\psi = \Gamma_m - \Gamma + \pi/2$. Es gilt daher die Doppelungleichung

$$\frac{\pi}{2} - \Gamma_m \leqq \psi \leqq \Gamma_m - \Gamma + \frac{\pi}{2}.$$

Solange $\Gamma_m - \Gamma < 45^0$ ist, wächst der maximale Wert von $2 \sin \psi \cos \psi$, absolut genommen, mit dieser Differenz und ist gleich $-\sin 2 (\Gamma_m - \Gamma)$. Die extremen Werte dieser Funktion sind in Tabelle VII eingetragen unter der Voraussetzung, daß der Prismenwinkel Γ der Reihe nach 5^0, 10^0, 15^0 und 20^0 kleiner ist wie sein größter Wert Γ_m.

Tabelle VII.

$\Gamma_m - \Gamma$	5^0	10^0	15^0	20^0
Extr. $2 \sin \psi \cos \psi$	$-0{,}173648$	$-0{,}342020$	$-0{,}500000$	$-0{,}642788$

Einen gleich großen positiven Wert von $2 \sin \psi \cos \psi$ zu finden, wird im allgemeinen keine Schwierigkeit machen.

Es ist jedoch zu beachten, daß für Werte von ψ, welche kleiner sind als der dem Minimum der Ablenkung zugeordnete, die Breite des Spektrums sich schnell verringert und bald so klein wird, daß ein unscheinbarer Einstellungs- oder Ablesungsfehler den Wert von q wesentlich zu beeinflussen vermag. Anderseits nimmt mit wachsendem ψ die Breite der Signalbilder rasch zu, so daß wegen der Verzerrung und Verschwommenheit derselben eine genaue Einstellung abermals erschwert wird. Diese beiden Umstände haben zur Folge, daß man sich den Grenzen

$$\frac{\pi}{2} - \Gamma_m < \psi < \Gamma_m - \Gamma + \frac{\pi}{2}$$

nie allzusehr nähern kann.

In dritter Linie beeinflußt Γ die Genauigkeit von a_{23}, wofür sich der Ausdruck

$$a_{23} = \frac{(q_1'^2 - q_2'^2) \sin \varepsilon \cos \varepsilon + a_{13} \cos \Gamma}{\sin \Gamma}$$

ergab. Angenommen, der mittlere Fehler η von $(q_1'^2 - q_2'^2) \sin \varepsilon \cos \varepsilon$ und a_{13} sei ungefähr derselbe (hierüber später mehr), so gibt die Ausgleichungsrechnung für den mittleren quadratischen Fehler von a_{23} den Ausdruck

$$\pm \frac{\eta \sqrt{1 + \cos^2 \Gamma}}{\sin \Gamma}.$$

Nun ist

$$\frac{d}{d\Gamma}\left(\frac{\sqrt{1+\cos^2\Gamma}}{\sin\Gamma}\right) = -\frac{2\cos\Gamma}{\sin^2\Gamma\sqrt{1+\cos^2\Gamma}}$$

notwendig negativ, d. h. der mittlere Fehler von a_{23} nimmt mit wachsendem Prismenwinkel ab. Der Anschaulichkeit wegen sind die Werte von

$$\frac{\sqrt{1+\cos^2\Gamma}}{\sin\Gamma}$$

in Tabelle VIII für einige Prismenwinkel aufgeführt.

Tabelle VIII.

Γ	45	40	35	30	25	20	15
$\sqrt{1+\cos^2\Gamma} : \sin\Gamma$	1,73205	1,95973	2,25371	2,64575	3,19340	4,01214	5,37182

Man erkennt aus den drei Tabellen VI, VII und VIII ohne weiteres, daß namentlich für den zweiten Fall ein kleinerer Prismenwinkel vorteilhafter ist wie ein größerer, während für den dritten Fall gerade das Gegenteil zutrifft. Es hält deshalb äußerst schwer, eine allgemein gültige Regel aufzustellen, um so mehr, als, wie bekannt, auch die Genauigkeit der q-Werte durch den Prismenwinkel beeinflußt wird. So viel scheint aber nach den gemachten Erfahrungen festzustehen, daß neben anderen Messungen auch solche vorzunehmen sind, für welche $\cos^2\psi$ nicht allzu klein wird und die Koeffizienten von P_{12} entgegengesetztes Vorzeichen haben.

Nun sollen die Untersuchungsergebnisse der drei Kristalle einzeln besprochen werden.

A. Kupfervitriol $= SO_4Cu \cdot 5H_2O$.

$$a : b : c = 0{,}5721 : 1 : 0{,}5554$$

$$\alpha = 82^0 5' \quad \beta = 107^0 8' \quad \gamma = 102^0 41' \quad \text{(Barker[1])}$$

63. Für die Messungen diente ein Kristall, der unter vielen selbstgezogenen als der geeignetste erschien. Die Flächen der vertikalen Prismenzone waren daran meistens glänzend, aber stark gerillt, Über ihre nähere Lage und Beschaffenheit orientiert die nachstehende Übersicht.

m	(110)	$220^0\,59^3/_4{}'$	Reflex gut
λ	$(\bar{1}20)$	$321^0\,25'$	Schimmer

[1]) Vergl. Groth, Chem. Kristallographie II. 419.

μ	$(\bar{1}10)$	$343^0\,42^1/_2{}'$	doppelt
a	$(\bar{1}00)$	$16^0\ \ 9^1/_2{}'$	gut, infolge der Politur (siehe unten) etwas aus der Zone gerückt.
m	$(\bar{1}\bar{1}0)$	$41^0\,10'$	sehr breit
b	$(0\bar{1}0)$	$94^0\,29'$	Schimmer
λ	$(1\bar{2}0)$	$141^0\,56'$	Schimmer
μ	$(1\bar{1}0)$	$164^0\,17'$	breit
a	(100)	$195^0\,35'$	sehr breit.

Die Richtigkeit der Aufstellung folgt aus der Gegenüberstellung der gemessenen und der aus den Parametern berechneten[1]) Winkeln.

	gemessen	berechnet
$(100):(0\bar{1}0)$	$101^0\,06'$	$100^0\,54'$
$(100):(110)$	$25^0\,24^3/_4{}'$	$26^0\,07'$
$(110):(1\bar{1}0)$	$56^0\,42^3/_4{}'$	$57^0\,16'$
$(110):(\bar{1}10)$	$122^0\,42^3/_4{}'$	$122^0\,44'$
$(100):(1\bar{2}0)$	$53^0\,39'$	$53^0\,50'$.

Das obere Ende des Kristalls ist ganz unentwickelt; am unteren konnten die Flächen q und ω durch folgende Messungen sichergestellt werden.

m	(110)	$185^0\,59^3/_4{}'$	$72^0\,13^3/_4{}'$	$72^0\,2'$ (berechnet)
ω	$(1\bar{1}\bar{1})$	$258^0\,13^1/_2{}'$		
m	(110)	$191^0\,25^1/_2{}'$	$118^0\,19^1/_2{}'$	
q	$(0\bar{1}\bar{1})$	$309^0\,45'$		

Aus der letzten Messung berechnet sich

$$(110):(011) = 61^0\,40^1/_2{}'$$

während Barker $61^0\,47'$ gemessen hat.

64. Als optisches Prisma dienten die Flächen (110) und $(\bar{1}00)$, von denen die letztere von der Firma Dr. Steeg & Reuter poliert und dadurch, wie bereits in der Winkeltabelle bemerkt, in ihrer Lage etwas verändert wurde. Die Beschaffenheit des Kristalls gestattet leider nicht, ihre genauere Lage zu bestimmen. Für die Berechnung der Hauptlichtgeschwindigkeiten ist dieser Mangel absolut belanglos, ergibt aber für die Orientierung der Hauptschwingungsrichtungen eine gewisse

[1]) Vergl. Groth. Chem. Krist. l. c.

Unsicherheit. Beim vorliegenden Prismenwinkel, der sich aus zwölf Messungen zu $24^0 52^1/_4{}'$ fand, kann sie in besonderen Fällen einen Betrag erreichen, der etwas mehr wie doppelt so groß ist als die immerhin kleine Abweichung der Fläche aus ihrer Soll-Lage.

65. Von den weiter oben genannten vier Linien des Heliumspektrums konnten nur zwei erkannt werden, die gelbe (588) und grüne (502). Die Einstellung auf die erstere bot im allgemeinen keine Schwierigkeit. Ebenso war die grüne meistens recht scharf und deutlich wahrnehmbar. Doch ist zu bemerken, daß im Gegensatz zu jenen Wellenebenen, welche ungebrochen aus der natürlichen Prismenfläche austreten, die aus der künstlichen Grenzfläche ungebrochen austretenden Wellenebenen außerordentlich schwache und verschwommene Spaltbilder erzeugten.[1]) Infolgedessen konnten die q'_i und ε' und damit die R'_{ik} also auch a_{23} nicht mit großer Zuverlässigkeit bestimmt werden. Allein mit Rücksicht auf die bei der Bearbeitung des Zahlenmaterials verwendete Zeit,[2]) wie auch im Hinblick auf die Zeitlage, welche die Beschaffung eines neuen Prismas verunmöglichte, erschien es statthaft, sich mit der erreichten Genauigkeit zu begnügen, um so mehr als die erzielten Resultate an der praktischen Verwertbarkeit der angegebenen Methode keinen Zweifel zulassen.

66. Beim Kupfervitriol wurden für He- gelb (588) zu 17 verschiedenen Einfallswinkeln die zusammengehörigen Wertpaare (im ganzen 34) von q und ψ bestimmt. Für He- grün war die Bestimmung nur bei 14 Einfallswinkeln möglich und lieferte somit 28 Wertpaare von q und ψ. In der Tabelle IX

---

[1]) Schuld hieran waren zwei Umstände: einerseits mußte, um ein einheitliches Signalbild zu erhalten, (110) größtenteils mit Tusche zugedeckt werden, und anderseits war auf der Kunstfläche $(\bar{1}00)$ die Politur einer Randstelle etwas angegriffen und darum weniger durchsichtig. Nun traf es sich, daß die Wellen, welche durch (110) eintraten, beim genannten Austritt durch $(\bar{1}00)$ (und nur in diesem Fall) die beschädigte Stelle passieren mußten.

[2]) Wie aus dem II. Teil, § 40, ersichtlich ist, wurden die Schwingungsazimute der zu $(\bar{1}00)$ parallelen Wellen erst nachträglich bestimmt.

Tabelle IX.

	$\frac{\pi}{2} - \psi'$	$\frac{\pi}{2} - \psi''$	q'^2	q''^2 (interpoliert)	$q_1''^2$
1	24° 59,725		0,435134	0,420811	
		24° 33,066			0,420753
2	24° 52,250		0,435062	0,420785	
		24° 52,250			0,420785
3	21° 48,609		0,434236	0,420412	
		21° 26,462			0,420349
4	19° 48,776		0,433603	0,420071	
		19° 29,234			0,420015
5	2° 13,776		0,429271	0,419925	
		2° 29,458			0,419924
6	0° 33,797		0,428928	0,419958	
		0° 50,106			0,419955
7	0° 00,000		0,429096	0,420216	
		0° 00,000			0,420216
8	— 1° 04,675		0,428562	0,419983	
		— 0° 47,846			0,419973
9	— 2° 40,036		0,428217	0,420026	
		— 2° 22,842			0,420030
10	— 4° 11,917		0,427880	0,420045	
		— 3° 54,287			0,420012
11	— 5° 39,277		0,427586	0,420149	
		— 5° 21,662			0,420176
12	— 7° 01,715		0,427284	0,420070	
		— 6° 43,557			0,420051
13	— 8° 20,676		0,426954	0,420152	
		— 8° 02,655			0,420133
14	—12° 51,088		0,425833	0,420004	
		—12° 45,700			0,420001
15	—13° 54,578		0,425635	0,420082	
		—13° 48,959			0,420034
16	—14° 05,393		0,425479	0,419990	
		—13° 59,762			0,419942
17	—14° 42,169		0,425364	0,420002	
		—14° 36,458			0,419994

sind die Werte für He- gelb angegeben. Alle q^2-Werte sind auf 6 Dezimalen berechnet. Sie dürften aber kaum auf mehr als eine oder zwei Einheiten der vierten Dezimale genau sein. Beweis hierfür sind z. B. die unregelmäßig zu- und abnehmenden Werte der fünften Kolonne. Auch sei erwähnt, daß die q^2-Werte der siebenten Querreihe merklich aus der Ordnung herausfallen, obwohl sie die Mittel von fünf Beobachtungsreihen sind, die zu verschiedenen, mehrere Monate auseinanderliegenden Zeiten angestellt wurden. Die vierte Dezimale der q^2-Werte ist also kaum mehr zuverlässig. Wenn gleichwohl noch weitere Stellen berechnet und mitgeteilt wurden, so geschah es, um einerseits die Ungenauigkeit der vierten Dezimale durch die Abrundungsfehler nicht zu vergrößern (z. B. in der fünften Kolonne), andererseits um auf Grund dieser „zufälligen Fehler" mit Hilfe der Ausgleichungsrechnung möglichst gute Werte von a_{ik} zu berechnen.

67. Die erste große Schwierigkeit, die sich bot, war die Berechnung der P_{ik} und Q_{ik}, die sich, wie früher bemerkt, als Wurzeln eines Systems von sechs linearen Gleichungen ergeben. Theoretisch und praktisch kann zwar ein solches System im allgemeinen mit jeder wünschbaren Genauigkeit gelöst werden. Im vorliegenden Fall bietet sich sogar eine nicht unbedeutende Vereinfachung, indem P_{22} und Q_{22} gleich der Summe bzw. gleich dem Produkt der Geschwindigkeiten jener beiden Wellen sind, die ungebrochen durch die zx-Ebene aus dem Kristall heraustreten, denn hierbei reduziert sich die Gleichung X wegen der Bedingung

$$\psi = \frac{\pi}{2}$$

auf die einfache Form

$$q^4 - P_{22}\, q^2 + Q_{22} = 0,$$

womit die obige Behauptung bewiesen ist. Sind aber P_{22} und Q_{22} bekannt, so bleiben nur mehr vier Gleichungen mit vier Unbekannten zu lösen, was die Aufgabe selbstverständlich wesentlich vereinfachte, wenn nur nicht durch die Substitution von P_{22} und Q_{22} die Absolutglieder so verkleinert würden, daß die Fehlerhaftigkeit der

Beobachtungswerte allzu schwer ins Gewicht fiele. Auch ist es möglich, — und die Rechnung hat dies mehrfach bewiesen — daß sich die gesuchten Unbekannten in Form von Brüchen ergeben, deren Zähler und Nenner vier, fünf und vielleicht noch mehr Nullen vor der ersten geltenden Dezimalstelle aufweisen. Welchen Verlaß man aber auf die materielle (nicht formelle) Richtigkeit eines solchen Resultates noch haben kann, ist leicht zu erraten.

Über die allgemeine Gültigkeit dieser in verschiedenen Einzelfällen gefundenen Resultate kann man sich durch folgende Überlegung vergewissern. Denkt man sich nämlich die Substitution der Werte von P_{22} und Q_{22} in Gleichung X ausgeführt, so verbleiben vier Gleichungen von der Form

$$Q_{11} \cos^2 \psi_i - 2 Q_{12} \sin \psi_i \cos \psi_i - P_{11} q_i^2 \cos^2 \psi_i + 2 P_{12} q_i^2 \sin \psi_i \cos \psi_i = A_i$$

Ihre Determinante wird, vom Vorzeichen abgesehen,

$$\Delta(q, \psi) \equiv 4 \cos \psi_1 \cos \psi_2 \cos \psi_3 \cos \psi_4 \begin{vmatrix} \cos \psi_1 & \sin \psi_1 & q_1^2 \cos \psi_1 & q_1^2 \sin \psi_1 \\ \cos \psi_2 & \sin \psi_2 & q_2^2 \cos \psi_2 & q_2^2 \sin \psi_2 \\ \cos \psi_3 & \sin \psi_3 & q_3^2 \cos \psi_3 & q_3^2 \sin \psi_3 \\ \cos \psi_4 & \sin \psi_4 & q_4^2 \cos \psi_4 & q_4^2 \sin \psi_4 \end{vmatrix}.$$

Es ist natürlich überaus schwierig, die obere Grenze dieses Ausdruckes zu finden, zumal die darin auftretenden q_i^2-Größen ebenfalls von ψ_i abhängen, und ψ_i nicht unbeschränkt variabel ist. Man kann aber durch folgende Überlegung zu einem angenäherten Resultat gelangen: Das Problem, um welches es sich hier handelt, ist im Grunde genommen die Bestimmung der Kurve C. Aber genau so, wie man durch zwei sehr nahe bei einander gelegene Punkte (d. h. Kreise mit sehr kleinem Radius, Beobachtungsfehler!) gerade Linien von beträchtlicher Divergenz legen kann, ebenso muß die eindeutige experimentelle Bestimmung der Kurve unmöglich sein, sobald die hierzu nötigen Punkte zu nahe beieinander gelegen sind. Da die Substitution P_{22} und Q_{22} geometrisch die Bestimmung der Kurvenabschnitte auf der y-Achse bedeutet, und da die Kurve durch vier weitere „Punkte" (Beobachtungsfehler!) bestimmt ist, so wird es wohl das Vorteilhafteste sein, wenn diese Punkte so gewählt werden, daß sie auf dem inneren und äußeren Kurvenzweig zu beiden Seiten der y-Achse und in nicht zu kleinem Abstand davon zu liegen kommen. Für diesen Fall muß dann aus Analogiegründen, im allgemeinen wenigstens, die Determinate $\Delta(q, \psi)$ einen ebenfalls möglichst günstigen Wert annehmen. Wie nun aus der Tabelle IX ersichtlich ist, bleiben die q^2-Werte des inneren Kurventeiles fast konstant, so daß man ohne großen Fehler etwa

$$q_1^2 = q_2^2 = q^2 = 0{,}420000$$

setzen kann. Sind ferner q_3 und q_4 zwei Radienvektoren des äußeren Kurvenzweiges, so erhält man für die Determ. $\Delta(q, \psi) = 4(q^2 - q_3^2) \times (q^2 - q_4^2) \sin(\psi_1 - \psi_2) \cdot \sin(\psi_3 - \psi_4) \cdot \cos\psi_1 \cos\psi_2 \cos\psi_3 \cos\psi_4$. Ihr absoluter Wert wird, wie leicht einzusehen ist, für den inneren Kurvenzweig am größten, wenn, um beim Beobachtungsmaterial zu verbleiben,

$$\psi_1 = \pi/2 - 24^0\,59,725'$$
$$\psi_2 = \pi/2 + 14^0\,42,169'$$

gesetzt wird. Im weiteren zeigt sich, daß, um einen möglichst großen Wert zu erhalten, die nämlichen Azimute auch für den äußeren Kurvenzweig zu nehmen sind. Man findet so

$$\Delta(q, \psi) = 0{,}00000144.$$

Jede andere Kombination von zwei äußeren und zwei inneren Kurvenpunkten muß einen kleineren, also ungünstigeren Wert für $\Delta(q, \psi)$ ergeben. Wollte man z. B. nach Substitution von P_{22} und Q_{22} nur innere Kurvenpunkte in Betracht ziehen, so würde $\Delta(q, \psi)$, weil alle $q_1''^2$ fast gleich sind, dem Grenzwert null sehr nahe kommen. Denselben Wert erhielte man, falls man von den vier fraglichen Punkten drei auf dem inneren Teile wählen würde. Weiter auf diese und andere Kombinationen einzugehen, ist zwecklos, da der obige Wert, wenn nicht das überhaupt erreichbare Maximum, so doch die Größenordnung desselben angibt.

68. Zur Umgehung dieser Schwierigkeit erwies sich das folgende Verfahren geeignet. Nennt man q' und q'' die beiden Wellengeschwindigkeiten, die einer gegebenen Richtung ψ entsprechen, so gelten wegen der bekannten Eigenschaft der Gleichungen zweiten Grades die Beziehungen

$$P_{11} \cos^2\psi + P_{22} \sin^2\psi - 2\,P_{12} \sin\psi \cos\psi = q'^2 + q''^2$$
$$Q_{11} \cos^2\psi + Q_{22} \sin^2\psi - 2\,Q_{12} \sin\psi \cos\psi = q'^2\,q''^2.$$

Da P_{22} und Q_{22} bekannt sind, so genügen zwei ψ-Werte im Verein mit den vier zugehörigen q-Werten, um P_{11} und P_{12} bzw. Q_{11} und Q_{12} wenigstens angenähert zu bestimmen. Diese Berechnung wird genauer, wenn, worauf früher § 62 schon verwiesen wurde, die beiden ψ-Werte so gewählt werden, daß $\sin\psi_1 \cos\psi_1$ und $\sin\psi_2 \cos\psi_2$ nicht zu klein sind und entgegengesetztes Vorzeichen haben, da sich dann bei der Elimination von P_{12} (resp. Q_{12}) die Absolutglieder, deren Vorzeichen in allen praktisch vorkommenden Fällen gleich sind, addieren, ebenso wie der Nenner, der $\cos^2\psi_1 + \cos^2\psi_2$ wird. Angenommen, es wäre

$\cos\psi_1 = -\cos\psi_2 = 0{,}16$ d. h. $\psi_1 = \text{ca}\,81^0$ und $\psi_2 = \text{ca}\,99^0$, so würde

$$\cos^2\psi_1 + \cos^2\psi_2 > 0{,}05,$$

und da im Falle des Kupfervitriols P_{11} von der Größenordnung 0,8 ist, so würde der Zähler von der Größenordnung 0,04 sein, und P_{11} könnte auf ungefähr drei Dezimalen genau[1]) ermittelt werden.

Leider stellen sich der praktischen Verwertung dieses Gedankens experimentelle Schwierigkeiten entgegen, da es nicht möglich ist, die einem beliebigen ψ-Wert entsprechenden zwei q-Werte am Goniometer zu bestimmen. Prüft man aber im Falle des Kupfervitriols die $q_1''^2$-Werte näher, so findet man, daß sie sich nur unbedeutend mit ψ ändern. Eine einfache Interpolation muß es darum ermöglichen, die verlangten q''^2-Werte zu berechnen. Das ist nun in diesem Fall geschehen und die gefundenen Werte sind in der vierten Kolonne der Tabelle IX eingetragen.

Sollten sich in einem anderen Falle beide q-Werte stark mit ψ ändern, so hätte man ψ derart um $d\psi$ zu ändern, daß die Welle sich ungefähr in der verlangten Richtung fortpflanzt, worauf man dann die Interpolation noch anzuwenden hätte. Unter Umständen würde auch eine Interpolation zum Ziele führen, die mehr wie zwei q-Werte berücksichtigt.

69. Die in der angegebenen Art und Weise berechneten P_{ik}- und Q_{ik}-Werte hängen von allen Zufälligkeiten der Beobachtungsfehler ab und sind darum nur von mäßiger Genauigkeit[2]). Mit Hilfe der Ausgleichungsrechnung wird es aber möglich sein, bedeutend genauere Resultate zu erhalten. Zu ihrer vorteilhaften Anwendung ist aber erfordert, daß ziemlich viele und möglichst genaue Beobachtungen angestellt werden, die sich über ein umfangreiches Intervall der ψ-Werte erstrecken sollten und an den beiden Grenzen gegen die Totalreflexion hin vielleicht etwas zu häufen wären. Auch sind den Rechnungen die linearen Gleichungen

---

[1]) Man könnte übrigens die Rechnung für mehrere ψ_1- und ψ_2-Werte durchführen und als Näherungswerte für P_{11} und P_{12} (resp. Q_{11} und Q_{12}) die Durchschnittswerte der verschiedenen Ergebnisse einführen.

[2]) Die Fehler von P_{11} und P_{12} (resp. Q_{11} und Q_{12}) können, wie die obigen Auseinandersetzungen zeigen, zehn- und mehrmal größer sein wie diejenigen von P_{22} resp. Q_{22}.

$$\cos^2\psi_i P_{11} + \sin^2\psi_i P_{22} - 2\sin\psi_i \cos\psi_i P_{12} = q_i'^2 + q_i''^2$$
$$\cos^2\psi_i Q_{11} + \sin^2\psi_i Q_{22} - 2\sin\psi_i \cos\psi_i Q_{12} = q_i'^2 q_i''^2$$

zugrunde zu legen, und $q_i'^2 + q_i''^2$ bzw. $q_i'^2 q_i''^2$ als Beobachtungsgrößen anzusehen. Nennt man p_{ik} und q_{ik} die Verbesserungen, welche an den Näherungswerten anzubringen sind, um die wahrscheinlichsten Werte von P_{ik} und Q_{ik} zu erhalten, so ergeben sich die Fehlergleichungen (v ist nachfolgend überall als ν zu lesen)

$$\cos^2\psi_v p_{11} + \sin^2\psi_v p_{22} - 2\sin\psi_v \cos\psi_v p_{12} = \varepsilon_v$$
$$\cos^2\psi_v q_{11} + \sin^2\psi_v q_{22} - 2\sin\psi_v \cos\psi_v q_{12} = \eta_v,$$

wo ε_v und η_v die Fehler sind. Man kann diesen Gleichungen eine für die Rechnung bequemere Form geben, wenn man

$$p_{11} = \mathfrak{p}_{11} \qquad p_{22} = \mathfrak{p}_{11} + \mathfrak{p}_{22} \qquad p_{12} = \mathfrak{p}_{12}$$
$$q_{11} = \mathfrak{q}_{11} \qquad q_{22} = \mathfrak{q}_{11} + \mathfrak{q}_{22} \qquad q_{12} = \mathfrak{q}_{12}$$

setzt, nämlich

$$\mathfrak{p}_{11} + \sin^2\psi_v \mathfrak{p}_{22} - 2\sin\psi_v \cos\psi_v \mathfrak{p}_{12} = \varepsilon_v$$
$$\mathfrak{q}_{11} + \sin^2\psi_v \mathfrak{q}_{22} - 2\sin\psi_v \cos\psi_v \mathfrak{q}_{12} = \eta_v.$$

Ist n die Anzahl der Beobachtungen, so berechnen sich die $\mathfrak{p}_{ik}$ aus den drei folgenden Gleichungen.

$$n\,\mathfrak{p}_{11} + \sum_{v=1}^{n} \sin^2\psi_v \mathfrak{p}_{22} + 2\sum_{v=1}^{n} \sin\psi_v \cos\psi_v (-\mathfrak{p}_{12}) = \sum_{v=1}^{n} \varepsilon_v$$

$$\sum_{v=1}^{n} \sin^2\psi_v \mathfrak{p}_{11} + \sum_{v=1}^{n} \sin^4\psi_v \mathfrak{p}_{22} + 2\sum_{v=1}^{n} \sin^3\psi_v \cos\psi_v (-\mathfrak{p}_{12}) = \sum_{v=1}^{n} \varepsilon_v \sin^2\psi_v$$

$$2\sum_{v=1}^{n} \sin\psi_v \cos\psi_v \mathfrak{p}_{11} + 2\sum_{v=1}^{n} \sin^3\psi_v \cos\psi_v \mathfrak{p}_{22} + 4\sum_{v=1}^{n} \sin^2\psi_v \cos^2\psi_v (-\mathfrak{p}_{12}) = 2\sum_{v=1}^{n} \varepsilon_v \sin\psi_v \cos\psi_v$$

Die Gleichungen für die $\mathfrak{q}_{ik}$ sind diesen ganz analog.

70. Auf die Frage, ob die Determinante dieses Systems nicht auch unendlich klein werde, kann man unter gewissen vereinfachenden Voraussetzungen eine allgemeine Antwort geben. Angenommen, man hätte n Beobachtungen gemacht, von deren zugehörigen ψ-Werten je zwei benachbarte sich um die konstante Größe φ unterscheiden, — eine Annahme, die nur angenähert verwirklicht sein kann, aber den tatsächlich in Betracht kommenden Verhältnissen angepaßt ist — so kommt

$$\psi_v = \psi - (v - 1)\,\varphi,$$

wo ψ etwa den größten der ψ_v-Werte bezeichnen mag. Nun beachte man, daß die auftretenden Koeffizienten folgenderweise transformiert werden können.

$$\sum_1^n \sin^2 \psi_v = \sum_1^n \frac{1-\cos 2\psi_v}{2} = \frac{n}{2} - \frac{1}{2}\sum_1^n \cos 2\psi_v$$

$$2\sum_1^n \sin\psi_v \cos\psi_v = \sum_1^n \sin 2\psi_v$$

$$\sum_1^n \sin^4 \psi_v = \sum_1^n \frac{1-2\cos 2\psi_v + \cos^2 2\psi_v}{4} = \sum_1^n \frac{3-4\cos 2\psi_v + \cos 4\psi_v}{8}$$

$$= \frac{3n}{8} - \frac{1}{2}\sum_1^n \cos 2\psi_v + \frac{1}{8}\sum_1^n \cos 4\psi_v$$

$$2\sum_1^n \sin^3 \psi_v \cos\psi_v = \sum_1^n \sin 2\psi_v \frac{1-\cos 2\psi_v}{2} = \frac{1}{2}\sum_1^n \sin 2\psi_v - \frac{1}{4}\sum_1^n \sin 4\psi_v$$

$$4\sum_1^n \sin^2 \psi_v \cos^2 \psi_v = \sum_1^n \sin^2 2\psi_v = \sum_1^n \frac{1-\cos 4\psi_v}{2} = \frac{n}{2} - \frac{1}{2}\sum_1^n \cos 4\psi_v \,.$$

Unter den gemachten Voraussetzungen sind diese Summen bekanntlich ausführbar, und wenn man, um $\Sigma \cos 2\psi_v$ und $\Sigma \cos 4\psi_v$ bzw. $\Sigma \sin 2\psi_v$ und $\Sigma \sin 4\psi_v$ gleichzeitig behandeln zu können, allgemeiner schreibt

$$\Sigma \cos 2m\psi_v \text{ und } \Sigma \sin 2m\psi_v \,,$$

so kommt

$$\Sigma \cos 2m\psi_v = \cos 2m\psi + \cos 2m(\psi-\varphi) + \ldots\ldots \cos 2m[\psi-(n-1)\varphi]$$
$$\Sigma \sin 2m\psi_v = \sin 2m\psi + \sin 2m(\psi-\varphi) + \ldots\ldots \sin 2m[\psi-(n-1)\varphi].$$

Nach Multiplikation der zweiten Summe mit

$$i \equiv \sqrt{-1}$$

folgen auf Grund der bekannten Eulerschen Formeln die nachstehenden Gleichheiten.

$$\Sigma \cos 2m\psi_v + i\,\Sigma \sin 2m\psi_v =$$

$$e^{2mi\cdot\psi} + e^{2mi\cdot(\psi-\varphi)} + \ldots\ldots + e^{2mi\cdot[\psi-(n-1)\varphi]}$$

$$= e^{2mi\cdot\psi}\left[1 + e^{-2mi\cdot\varphi} + e^{-2mi\cdot 2\varphi} + \ldots\ldots e^{-2mi\cdot(n-1)\varphi}\right]$$

$$= e^{2mi\cdot\psi}\cdot\frac{1-e^{-2mni\cdot\varphi}}{1-e^{-2mi\cdot\varphi}} = e^{2mi\cdot\psi}\cdot\frac{1-e^{-2mni\cdot\varphi}}{1-e^{-2mi\cdot\varphi}}\cdot\frac{1-e^{2mi\cdot\varphi}}{i-e^{2mi\cdot\varphi}}$$

$$= \frac{e^{2mi\cdot\psi} + e^{2mi\cdot[\psi-(n-1)\varphi]} - e^{2mi\cdot[\psi-n\varphi]} - e^{2mi\cdot[\psi+\varphi]}}{2-2\cos 2m\varphi}.$$

Drückt man in dieser letzten Formel die Exponentialfunktionen wiederum durch trigonometrische Funktionen aus, so erhält man, da

der reelle (bzw. imaginäre) Teil links gleich dem reellen (bzw. imaginären) Teil rechts sein muß, folgende zwei Ausdrücke.

$$\Sigma \cos 2m\psi_v = \frac{\cos m\,[2\psi-(n-1)\varphi]\cos m\,(n-1)\varphi - \cos m\,[2\psi-(n-1)\varphi]\cos m\,(n+1)\varphi}{1-\cos 2m\varphi}$$

$$= \cos m\,[2\psi-(n-1)\varphi]\,\frac{\sin m\,n\,\varphi}{\sin m\,\varphi} \equiv c_m$$

$$\Sigma \sin 2m\psi_v = \frac{\sin m\,[2\psi-(n-1)\varphi]\cos m\,(n-1)\varphi - \sin m\,[2\psi-(n-1)\varphi]\cos m\,(n+1)\varphi}{1-\cos 2m\varphi}$$

$$= \sin m\,[2\psi-(n-1)\varphi]\,\frac{\sin m\,n\,\varphi}{\sin m\,\varphi} \equiv s_m.$$

Nun kann man die Determinante des Gleichungssystems folgenderweise entwickeln.

$$\Delta \equiv \begin{vmatrix} n & \frac{n}{2}-\frac{c_1}{2} & s_1 \\ \frac{n}{2}-\frac{c_1}{2} & \frac{3n}{8}-\frac{c_1}{2}+\frac{c_2}{8} & \frac{s_1}{2}-\frac{s_2}{4} \\ s_1 & \frac{s_1}{2}-\frac{s_2}{4} & \frac{n}{2}-\frac{c_2}{2} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} n & \frac{n}{2}-\frac{c_1}{2} & s \\ \frac{n}{2}+\frac{c_1}{2} & \frac{n}{8}-\frac{c_2}{8} & \frac{s_1}{2}+\frac{s_2}{4} \\ s_1 & \frac{s_1}{2}-\frac{s_2}{4} & \frac{n}{2}-\frac{c_2}{2} \end{vmatrix} =$$

$$= -\frac{1}{16} \begin{vmatrix} n & 2(n-c_1) & 2s_1 \\ n+c_1 & n-c_2 & 2s_1+s_2 \\ s_1 & 2s_1-s_2 & n-c_2 \end{vmatrix}.$$

Die zweite Determinante findet man aus der ersten, indem man die erste Querreihe von der zweiten subtrahiert. Multipliziert man in dieser zweiten Determinante die zweite und dritte Vertikalreihe mit dem Faktor 2, die zweite Horizontalreihe aber mit 4, so kommt die dritte Determinante. Durch Ausführung der Operationen und Substitution der entsprechenden Werte folgt die weitere Formel

$$\Delta = \frac{1}{16}\left[n^3 - n\,(s_2^2+c_2^2) - 2n\,(s_1^2+c_1^2) + 2c_2\,(c_1^2-s_1^2) + 4c_1\,s_1\,s_2\right]$$

$$= \frac{1}{16}\left[n^3 - n\,\frac{\sin^2 2n\varphi}{\sin^2 2\varphi} - 2n\,\frac{\sin^2 n\varphi}{\sin^2\varphi} + 2\,\frac{\sin 2n\varphi}{\sin 2\varphi}\cdot\frac{\sin^2 n\varphi}{\sin^2\varphi}\right].$$

Die Variation dieses Ausdruckes für variierende n und φ ist aus der nachfolgenden Tabelle X ersichtlich.[1])

---

[1]) Bei der Auflösung des fraglichen Gleichungssystemes kommt die Determinantenrechnung allerdings kaum in Betracht, da es aus verschiedenen Gründen vorteilhafter ist, sich der üblichen Methode zu bedienen. Die Resultate ergeben sich hiernach in Form von Brüchen, deren Nenner kleiner ist wie der Wert der Determinante und je nach der Größe von n usw. zwischen 0,005 und 2,9 schwanken kann.

Tabelle X.

n	φ	Δ
5	8	0,017920
10	4	0,17154
20	2	1,4309
40	1	11,565

71. Sind damit jene Werte von P_{ik} und Q_{ik} bekannt, welche sich aus den Beobachtungen als die wahrscheinlichsten finden lassen, so wird es sich darum handeln, die a_{ik} zu bestimmen. In welcher Art und Weise dies zu geschehen hat, wurde bereits früher gesagt. Es genüge hier, die gefundenen Zahlen, soweit wie nötig, anzugeben.

Für die Schwingungsrichtungen der parallel zu den Grenzflächen austretenden Wellen wurden folgende Azimute gefunden:

Wellenebenen parallel xz: $\varepsilon = 12^0{,}77$

Wellenebenen parallel der anderen Grenzfläche: $\varepsilon' = -8^0$ ca.

Es wurde früher schon (§ 65) darauf hingewiesen, daß die letztere Bestimmung sehr schwierig war, indem in dieser Stellung das Spaltbild überaus schwach und unbestimmt erschien. Dementsprechend werden auch die Endresultate nicht allzu sicher sein können.

72. Ein Punkt verdient hier aber spezielle Erwähnung. Wie bekannt ist die Schwingungsrichtung der parallel zu den Grenzflächen austretenden Wellenebenen für verschiedene Farben im allgemeinen verschieden. Allerdings ist diese Dispersion für gewöhnlich gering und wurde hier vernachlässigt. Der Fehler ist wegen des kleinen Spektralbereiches kaum bedeutungsvoll. Unter günstigen Umständen, wo man über große, tadellose Prismen verfügt, welche helle Signalbilder entwerfen, dürfte es bei sorgfältigster Messung möglich sein, diese Dispersion der Schwingungsrichtungen experimentell zu konstatieren, insbesondere wenn man sich statt des gewöhnlichen Nikolschen Prismas einer genaueren Vorrichtung

zur Bestimmung der Schwingungsrichtungen bedienen würde. Werden dann aber die verschiedenen zusammengedrängten Linien des Spektrums diese Bestimmung nicht erschweren oder gar verunmöglichen? Wahrscheinlich wohl. Es dürfte darum geraten sein, das Licht schon außerhalb des Kollimators durch ein Prisma zu zerlegen und nur absolut homogenes Licht auf das Kristallprisma durch den Kollimator auffallen zu lassen.

73. Da gerade von der Dispersion der Schwingungsrichtungen die Rede ist, so mag hier der geeignete Ort sein, um den Einfluß zu studieren, den ein Fehler in der Bestimmung von ε auf die Berechnung von a_{ik} ausüben muß. Es ist

$$a_{11} = q_1^2 \sin^2 \varepsilon + q_2^2 \cos^2 \varepsilon$$
$$a_{13} = (q_1^2 - q_2^2) \sin \varepsilon \cos \varepsilon$$
$$a_{33} = q_1^2 \cos^2 \varepsilon + q_2^2 \sin^2 \varepsilon$$

Werden q_1 und q_2 als richtig vorausgesetzt, so wird

$$d\,a_{11} = (q_1^2 - q_2^2) \sin 2\varepsilon \, d\varepsilon$$
$$d\,a_{13} = (q_1^2 - q_2^2) \cos 2\varepsilon \, d\varepsilon$$
$$d\,a_{33} = -(q_1^2 - q_2^2) \sin 2\varepsilon \, d\varepsilon.$$

a_{11} und a_{33} ändern sich also um die gleiche Größe, aber im entgegengesetzten Sinn. — Wie man sieht, ändern sich a_{33} und a_{11} um den größten Betrag, wenn $\varepsilon = \pi/4$ oder $3\pi/4$, um den kleinsten aber, wenn $\varepsilon = 0$ oder $\pi/2$. Bei a_{13} sind die Verhältnisse gerade umgekehrt. In der folgenden Tabelle XI sind die Änderungen für einige Werte von ε zusammengestellt unter der Voraussetzung, daß

$$d\varepsilon = 30' = 0{,}008727 \text{ und}$$
$$q_1^2 - q_2^2 = 0{,}1000.$$

Im vorliegenden Fall, wo $q_1^2 - q_2^2 = 0{,}009$ ist und $\varepsilon = 12\,{}^1/_2$ (angenähert), wird nach der Tabelle durch Interpolation

$$d\,a_{ii} = \pm \frac{9}{100} \times 0{,}000 \frac{2985 + 4363}{2} = \pm \frac{9}{100}\, 0{,}0003674 = \pm 0{,}000033 \text{ und}$$

$$d\,a_{ik} = \pm \frac{9}{100} \times 0{,}000 \frac{8200 + 7558}{2} = \frac{9}{100} \times 0{,}0007879 = 0{,}000071.$$

Ohne Interpolation bekommt man die genaueren Werte

$$d\,a_{ii} = \pm 0{,}000034_{35}$$
$$d\,a_{ik} = \pm 0{,}000071_{55}.$$

Man erkennt hieraus, daß es bei sorgfältiger Beobachtung möglich sein muß, a_{11}, a_{13} und a_{33} mit großer Genauigkeit zu ermitteln, falls die Beschaffenheit und Größe des Prismas eine präzise Arbeit gestatten.

Bei dieser Untersuchung wurde die Richtigkeit von q_1^2 und q_2^2 ($d\,q_1^2 = d\,q_2^2 = 0$) ausdrücklich vorausgesetzt. Es braucht allerdings eine vielmal wiederholte Einstellung und Messung, um hierfür ganz befriedigende Mittelwerte zu erhalten.

Tabelle XI.

$q_1^2 - q_2^2 = 0{,}1$; $d\varepsilon = 0{,}008727$	ε	0^0	5^0	10^0	15^0	20^0	25^0	30^0	35^0	40^0	45^0
		90^0	85^0	80^0	75^0	70^0	65^0	60^0	55^0	50^0	
	$d\,a_{11}$, $d\,a_{33}$	$0_3 0000$	$0_3 1515$	$0_3 2985$	$0_3 4364$	$0_3 5610$	$0_3 6685$	$0_3 7558$	$0_3 8200$	$0_3 8594$	$0_3 8727$
	$d\,a_{13}$	$0_3 8727$	$0_3 8594$	$0_3 8200$	$0_3 7558$	$0_3 6685$	$0_3 5610$	$0_3 4364$	$0_3 2985$	$0_3 1515$	$0_3 0000$

74. Für die drei Polarisationskonstanten a_{11}, a_{13} und a_{33}, sowie die drei Größen R'_{11}, R'_{13} und R'_{33} ergaben sich folgende Werte.

He-gelb (588)		He-grün (502)	
$a_{11} =$	0,428512	$a_{11} =$	0,425213
$a_{13} =$	$-0{,}001919$	$a_{13} =$	$-0{,}001904$
$a_{33} =$	0,420527	$a_{33} =$	0,417291
$R'_{11} =$	0,434804	$R'_{11} =$	0,430981
$R'_{13} =$	$-0{,}001972$	$R'_{13} =$	$-0{,}001960$
$R'_{33} =$	0,421048	$R'_{33} =$	0,417312.

Der Bedeutung nach sollte

$$a_{33} = R'_{33}$$

sein. Die Übereinstimmung der gefundenen Zahlen ist ziemlich befriedigend (namentlich für He-grün) und läßt erkennen, welche Genauigkeit etwa erzielt werden könnte. Als zuverlässigere Zahl empfiehlt es sich, den Mittelwert beider einzuführen.

Weiterhin berechnet sich nach der Formel (Gl. XI c)

$$a_{23} \sin\Gamma - a_{31} \cos\Gamma \equiv - R'_{13}$$

der Wert von a_{23}, so daß sich folgende Näherungswerte ergeben.

He-gelb (588)		He-grün (502)	
$a_{11} =$	0,428512	$a_{11} =$	0,425213
$a_{33} =$	0,420788	$a_{33} =$	0,417302
$a_{13} =$	$-0{,}001919$	$a_{13} =$	$-0{,}001904$
$a_{23} =$	0,000549	$a_{23} =$	0,000553.

Anderseits erhält man auf Grund der Ausgleichsrechnung nach dem oben erläuterten Verfahren bzw.

$P_{11} =$	0,852014	0,843610
$P_{22} =$	0,848938	0,842502
$P_{12} =$	$-$0,007371	$-$0,007250.

und findet hieraus, wenn man vom oben ermittelten Näherungswert

$a_{33} =$	0,420788	0,417302

ausgeht,

$a_{11} =$	0,428150	0,425200
$a_{22} =$	0,431226	0,426308
$a_{33} =$	0,420788	0,417302
$a_{23} =$	0,000549	0,000553
$a_{31} =$	$-$0,001919	$-$0,001904
$a_{12} =$	$-$0,007371	$-$0,007250.

Zu diesen Werten wurden Verbesserungen berechnet auf Grund der Ausdrücke

$$\cos^2\psi_i\,(a_{22} + a_{33}) + \sin^2\psi_i\,(a_{33} + a_{11}) - 2\sin\psi_i\cos\psi_i\,a_{12} = q_i'^2 + q_i''^2$$

und

$$\cos^2\psi_i\,(a_{22}\,a_{33} - a_{23}^2) + \sin^2\psi_i\,(a_{33}\,a_{11} - a_{13}^2) - 2\sin\psi_i\cos\psi_i\,(a_{12}\,a_{33} - a_{23}\,a_{31}) = q_i'^2\,q_i''^2.$$

Für a_{23} und a_{31} findet man keine plausiblen Verbesserungen, weil die zugehörigen Koeffizienten äußerst klein sind. Sie wurden darum ohne weiteres als richtig angenommen. Unter dieser Voraussetzung bekommt man als endgültige Werte der Polarisationskonstanten

He-gelb (588)		He-grün (502)	
$a_{11} =$	0,428291	$a_{11} =$	0,425205
$a_{22} =$	0,431099	$a_{22} =$	0,426320
$a_{33} =$	0,420677	$a_{33} =$	0,417299
$a_{23} =$	0,000549	$a_{23} =$	0,000553
$a_{31} =$	$-$0,001919	$a_{31} =$	$-$0,001904
$a_{12} =$	$-$0,007411	$a_{12} =$	$-$0,007254.

Man hätte bei der Anwendung der Ausgleichungsrechnung noch in anderer Weise verfahren können. Es wurden auch mehrere Methoden versucht; sie befriedigen aber ebenso wenig, wie die soeben mitgeteilte. Der tiefere Grund ist der,

daß bei der Linearmachung der quadratischen Gleichungen Glieder vernachlässigt werden müssen, deren Summe mit dem Fehler ε vergleichbar wird.

Weitere Versuche und Rechnungen werden hierüber völlige Klarheit bringen.

75. Nach Auffindung der a_{ik} bestimmen sich die Hauptlichtgeschwindigkeiten als Wurzeln einer Gleichung dritten Grades (Gleichung XIV), welche die merkwürdige Eigenschaft hat, daß der Koeffizient von x^2 sechs, derjenige von x zwölf und das Absolutglied 18 Dezimalstellen haben. Und einzig diese Gleichung hat notwendigerweise drei reelle Wurzeln, während die Abkürzung sämtlicher Koeffizienten auf die nämliche Stellenzahl zu komplexen Wurzeln führen kann. Es ist interessant, diesen Sachverhalt wenigstens in einem Fall numerisch zu verfolgen. Für Kupfervitriol He- gelb ist

$$x^3 - 1{,}280067\,x^2 + 0{,}546102'521956\,x - 0{,}077647'237781'243428 = 0$$

die fragliche Gleichung. Ihre Wurzeln sind

$$a^2 = 0{,}437401 \qquad b^2 = 0{,}422722 \qquad c^2 = 0{,}419944.$$

Daraus findet sich

$$\alpha = 1{,}512029 \qquad \beta = 1{,}538058 \qquad \gamma = 1{,}543136.$$

Hätte man die Koeffizienten der obenstehenden Gleichung auf sechs Dezimalen gekürzt, die Gleichung also in der Form

$$x^3 - 1{,}280067\,x^2 + 0{,}546103\,x - 0{,}077647 = 0$$

geschrieben, so hätten sich als Lösungen folgende Zahlen ergeben.

$$a^2 = 0{,}434984 \qquad b^2 = 0{,}428534 \qquad c^2 = 0{,}416549$$
$$\alpha = 1{,}51622 \qquad \beta = 1{,}52759 \qquad \gamma = 1{,}54941.$$

Kürzt man endlich die Koeffizienten obiger Gleichung dritten Grades noch mehr, d. h. schreibt man die Gleichung in der Form

$$x^3 - 1{,}2801\,x^2 + 0{,}5461\,x - 0{,}0776 = 0,$$

so erhält man als Wurzeln

$$x_1 = 0{,}391381'293255$$
$$x_2 = 0{,}444359'353373 + 0{,}028581'257576\,i$$
$$x_3 = 0{,}444359'353373 - 0{,}028581'257576\,i.$$

Selbstverständlich setzt das Rechnen mit solchen Zahlen

geeignete Hilfsmittel voraus. Im vorliegenden Fall diente eine Multiplikationsmaschine, System „Millionär" aus der Fabrik von Dämen-Schmid & Cie., Zürich, die den gewöhnlichen Additions-Rechenmaschinen weit überlegen ist.

76. Über die Berechnung der Richtungskosinus der optischen Symmetrieachsen ist nicht viel zu sagen. Beachtenswert ist, daß $a_{ii} - \lambda$ von der Größenordnung der a_{ik} wird. Die beiden ersten Dezimalstellen werden also null. Die Folge davon ist, daß die prozentuelle Sicherheit der Koeffizienten bedeutend abgenommen hat. Inwieweit dadurch für die Orientierung weniger genaue Werte herauskommen wie für die Lichtgeschwindigkeiten, ist sehr schwierig zu sagen, da die Ausdrücke kompliziert, unübersichtlich und der analytischen Behandlung nicht leicht zugänglich sind. Jedenfalls bietet die Berechnung der α_i, β_i und γ_i keine rechnerischen Schwierigkeiten. Um auch hiefür ein Beispiel zu geben und die auftretenden Verhältnisse der Anschauung näher zu rücken, sei hier das Gleichungssystem für die α_i mitgeteilt, worin alle Zahlen mit 10^6 multipliziert sind.

$$\begin{aligned} 9110\,\alpha_1 + 7411\,\alpha_2 + 1919\,\alpha_3 &= 0 \\ 7411\,\alpha_1 + 6302\,\alpha_2 - 549\,\alpha_3 &= 0 \\ 1919\,\alpha_1 - 549\,\alpha_2 + 16724\,\alpha_3 &= 0. \end{aligned}$$

Da diese Gleichungen nur zur Bestimmung des Verhältnisses

$$\alpha_1 : \alpha_2 : \alpha_3$$

hinreichen, kann man $\alpha_3 = 1$ setzen, so daß aus der ersten und zweiten Gleichung folgt

$$\alpha_1 : \alpha_2 : \alpha_3 = -6{,}49527 : 7{,}72540 : 1{,}00000$$

oder

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= -6{,}49527\,\varrho \\ \alpha_2 &= 7{,}72540\,\varrho \\ \alpha_3 &= 1{,}00000\,\varrho, \end{aligned}$$

wo ϱ einen Proportionalitätsfaktor bezeichnet, der sich aus der Identität

$$\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 \equiv 1 \equiv (6{,}49527^2 + 7{,}72540^2 + 1)\,\varrho^2$$

berechnet. Man findet so

$$\alpha_1 = -0{,}64040 \qquad \alpha_2 = 0{,}76167 \qquad \alpha_3 = 0{,}09860.$$

Natürlich genügen diese Werte den Gleichungen nicht absolut genau. So werden die rechten Seiten derselben bzw. gleich den Größen

$$-0{,}09423 \qquad -0{,}09146 \qquad 1{,}90197.$$

Die Abweichung ist bei der dritten Gleichung am empfindlichsten, weil dieselbe bei der Berechnung nicht herangezogen wurde. Zwar sollte der Theorie zufolge auch die dritte Gleichung streng erfüllt sein, wenn es die beiden ersten sind. Trifft das hier nicht zu, so ist es deswegen, weil die Voraussetzungen der Theorie praktisch nie erfüllt werden können, da die theoretisch geforderten Irrationalzahlen nie genau, sondern immer nur angenähert durch Rationalzahlen dargestellt werden können.

77. Die beim Kupfervitriol erhaltenen Endresultate sind in der Tabelle XII zusammengestellt.

Tabelle XII.

	He-gelb (588 $\mu\mu$)			He-grün (502 $\mu\mu$)		
	α	β	γ	α	β	γ
n	1,5120	1,5381	1,5431	1,5193	1,5448	1,5494
	x	y	z	x	y	z
ξ	129° 49′	40° 23′	84° 20′	132° 55′	43° 34′	83° 53′
η	130° 50′	127° 27′	63° 14′	127° 33′	129° 54′	62° 13′
ζ	66° 14′	77° 03′	27° 27′	66° 02′	75° 22′	28° 35′

Die optischen Konstanten des Kupfervitriols wurden früher von Pape, Kohlrausch, Lavenir und G. Wulf ganz bzw. teilweise bestimmt.[1]) Ersterer ermittelte zunächst, wie oben § 30 mitgeteilt wurde, die Orientierung der Hauptschwingungsrichtungen und schnitt dann drei Prismen, welche die Bestimmung von je zwei Hauptbrechungsindizes für die D-Linie gestatteten. Eines dieser Prismen erlaubte sogar die Ein-

[1]) Vergl. Groth, Chem. Krist. II Seite 420 f.

stellung auf verschiedene Fraunhofersche Linien und lieferte Werte für α und γ. Kohlrausch und Lavenir bedienten sich der Totalreflexion, gaben aber keine Werte für die Orientierung an. Mit dieser befaßte sich dagegen G. Wulf.

Die vorliegenden Hauptbrechungsindizes sind in der Tabelle XIII übersichtlich zusammengestellt.

Tabelle XIII.

λ		α	$\Delta_{\alpha\beta}$	β	$\Delta_{\beta\gamma}$	γ	$\Delta_{\alpha\gamma}$	
589	D	*1,51541*	*2513*	*1,54054*	*657*	*1,54711*	*3170*	Mittel der vorangehenden Werte
		1,51587	*2238*	*1,53825*	*741*	*1,54566*	*2979*	
		1,51564	2376	1,53940	699	1,54639	3075	
589	D	1,51615				1,54604	2989	Pape
527	E	1,51983				1,54996	3013	
486	F	1,52307				1,55351	3044	
431	G	1,52872				1,55978	3106	
589	D	1,5140	228	1,5368	65	1,5433	293	Kohlrausch
589	D	1,51408	2276	1,53684	661	1,54345	2937	Lavenir

Die Angaben Papes sind wohl weniger zuverlässig wie die anderen, weil das Schneiden der Prismen, das mit freier Hand vorgenommen wurde, trotz größter Sorgfalt nicht allzugenau ausfallen konnte. Immerhin sind sie achtunggebietend und stimmen bezüglich der Doppelbrechung mit den anderen ordentlich überein.

78. Was nun die neugewonnenen Resultate anbelangt, so stehen sie mit den anderen in ziemlich befriedigender Übereinstimmung. Für einen Vergleich eignen sich allerdings zunächst nur die Werte von He-gelb, dessen Wellenlänge nahezu gleich derjenigen von D ist. Von den entsprechenden drei Werten stimmt γ fast genau mit den Angaben von Kohlrausch und Lavenir überein. Dagegen ist diesen gegenüber α um 20 Einheiten der vierten Dezimalstelle zu klein

und β um 13 Einheiten derselben Dezimale zu groß. Doch paßt β wieder vorzüglich zu dem einen von Pape gefundenen Wert.

Um ein Urteil über die Zuverlässigkeit der für He-grün (502) gefundenen Brechungsexponenten zu gewinnen, kann man zunächst auf Grund der Cauchyschen Dispersionsformel und der Papeschen Angaben die Werte von α und γ berechnen. Bei Benutzung der beiden zunächstliegenden Werte für die E- und F-Linien bekommt man

$$\alpha_{502} = 1{,}52171 \text{ und } \gamma_{502} = 1{,}55202.$$

Gegenüber den zugehörigen Papeschen Werten für die D-Linie, nämlich

$$\alpha_{589} = 1{,}51615 \text{ und } \gamma_{589} = 1{,}54604,$$

hat man somit eine Zunahme von 0,00556 bzw. 0,00598. Nun ist bekannt, daß man an einem ganz mittelmäßigen Prisma, das für die Brechungsindizes nur schlechte Werte liefern würde, die Dispersion immer noch ziemlich genau bestimmen kann. Werden demnach die berechneten Zahlen als wirkliches Maß der Dispersion angenommen, so hat man mit Hilfe der zuverlässigeren Grundwerte von Kohlrausch

$$\alpha_{502} = 1{,}5140 + 0{,}00556 = 1{,}51956$$
$$\gamma_{502} = 1{,}5433 + 0{,}00598 = 1{,}54928.$$

Hiermit stimmen die neuen Werte vorzüglich überein.

Daß übrigens α und γ von He-grün dem tatsächlichen Verhalt ziemlich nahe kommen, ist auch darum recht wahrscheinlich, weil die Doppelbrechung gleich 0,0301 ist und der von Kohlrausch gefundenen Doppelbrechung gut entspricht, zumal nach den Zahlen Papes mit wachsender Lichtbrechung auch die Doppelbrechung zuzunehmen scheint.

Das Verhalten von β dürfte dem oben genannten für He-gelb ähnlich sein, soweit wenigstens die Doppelbrechung gegenüber γ in Betracht kommt.

79. Bezüglich der Orientierung der Hauptschwingungsrichtungen liegen folgende Angaben vor. Nach Pape[1]) liegt die erste Mittellinie im vordern rechten oberen Oktanten und

[1]) Pogg. Ann. d. Phys. Erg. Band **6** (1874). Seite 45.

bildet für mittlere Farben — nach Papes Äußerung selber „mit größter Annäherung für Licht von der Brechbarkeit der Fraunhoferschen Linie E“ — mit den Normalen von m (110), μ ($\bar{1}\bar{1}0$) und ω ($\bar{1}11$) die Winkel $43^3/_4{}^0$, $98^1/_2{}^0$ und 73^0.

Die Lage der anderen optischen Symmetrieachsen gibt Pape nicht an. Dagegen hat er (loc. cit. Seite 48) eine Tabelle mitgeteilt, aus der die Orientierung der Flächen eines optischen Prismas hervorgeht, dessen brechender Winkel 45^0 beträgt und innen und außen von je einer optischen Symmetrieachse halbiert wird. Unter der Annahme, daß die brechende Kante z. B. parallel η sei und der innere Prismenwinkel von ζ halbiert werde, findet er folgende Werte, falls I und II die Normalen der beiden Prismenflächen bedeuten.

I: $110 = 57^0\,50',5$	II: $110 = 143^0\,29',0$
$\bar{1}11 = 52^0\,48',0$	$\bar{1}11 = 86^0\,32',1$
$\bar{1}10 = 77^0\,26',5$	$\bar{1}10 = 93^0\,9',8$.

Hierdurch sind die optischen Symmetrieachsen natürlich eindeutig bedingt. In stereographischer Projektion erhält man die drei Punkte, die in der Fig. 8[1]) durch ausgezogene Kreisbogen verbunden sind.

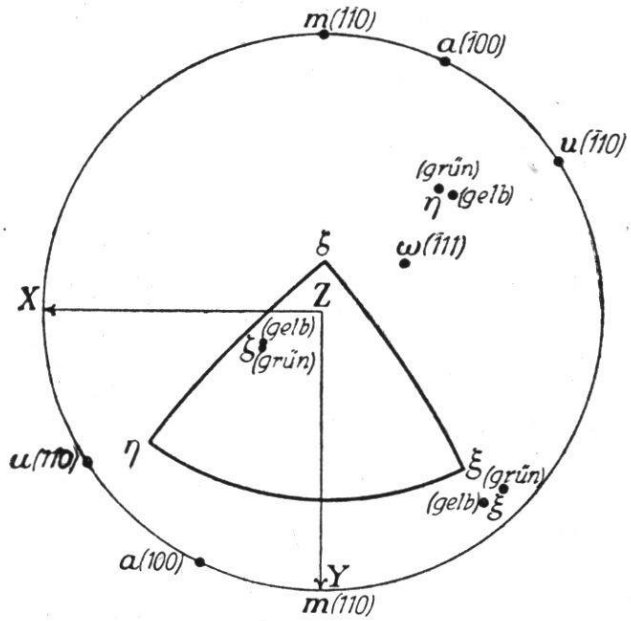

Fig. 8

Nach einer neueren Bestimmung von G. Wulf[2]) schließt die Normale der Achsenebene mit den Normalen zu m (110), μ ($\bar{1}\bar{1}0$) und ω ($\bar{1}11$) bzw. die Winkel $53^1/_2{}^0$, $12^1/_2{}^0$ und 113^0 ein. Ob es sich hierbei um eine wirklich neue Ermittlung dieser Werte handle oder ob nur eine Umrechnung der Werte von Pape vorliege, ist nicht ersichtlich. Das letztere ist wegen der vollkommenen Übereinstimmung der beiden Angaben nicht ausgeschlossen.

---

[1]) Die Figur ist nach dem „optischen Prisma“ orientiert. Durch ein Versehen wurden aber ($\bar{1}\bar{1}0$) und ($\bar{1}10$) auf dem Klische mit u statt μ bezeichnet. [2]) Groth, Chem. Kristallogr. II, 420.

Die optische Orientierung, die sich aus den in dieser Arbeit gefundenen Werten der Polarisationskonstanten ergibt, ist ebenfalls in der Fig. 8 eingetragen, und zwar sowohl für die gelbe wie die grüne Heliumlinie. Die beiden neuen ξ-Achsen nähern sich in befriedigender Weise der von Pape gefundenen Lage. Um so größer ist dafür die Unstimmigkeit bezüglich der beiden anderen Achsen. Mag die Unzuverlässigkeit der Papeschen Werte auch ihren Teil hierzu beitragen, so findet sie doch ihre volle Erklärung nur auf Grund der Bemerkungen des § 76 und der Diskussionen des vorangehenden Paragraphen, aus denen hervorgeht, daß die Differenzen $a_{22} - q_i^2$ und $a_{33} - q_i^2$ für $i = 1,2$ sehr unsicher werden.

Der tiefste Grund dieser Ungenauigkeit ist die in § 65 erwähnte Unzulänglichkeit des Prismas, was im folgenden klar zutage treten wird.

B. Colemanit $= B_6 O_{11} Ca_2 \cdot 5 H_2 O$.

$a : b : c = 0{,}7769 : 1 : 0{,}5416 \qquad \beta = 110^0\, 17'$

80. Der Kristall stammt von San Bernardino Co. in Kalifornien und zeigt, von einigen schmalen Kantenabstumpfungen abgesehen, folgende Formen: $\{110\}$, $\{001\}$, $\{\bar{1}01\}$, $\{\bar{1}21\}$ und untergeordnet $\{100\}$, $\{010\}$, $\{120\}$. Zum Zwecke der optischen Untersuchung wurde auf der hinteren Seite des Prismas eine Fläche angeschliffen, welche zur Orthodiagonale nur wenig geneigt und zur Vertikalachse fast parallel gelegen ist.

Die Durchmessung der Prismenzone, wobei die Kante $(1\bar{1}0) : (\bar{1}\bar{1}0)$ parallel zur Drehachse gestellt wurde, lieferte folgende Werte.

$(1\bar{1}0)$	$47^0\, 54^3/_4{}'$	heller Reflex mit schmalem Nebenschein.
$(1\bar{2}0)$	$67^0\, 23'$	äußerst schmale Fläche; breiter Reflex, der vorzüglich in der Zone liegt.
$(0\bar{1}0)$	$101^0\, 56'$	etwas verbreiteter, nicht ganz in der Zone gelegener Reflex.
$(\bar{1}\bar{2}0)$	$136^0\, 26'$	äußerst schwacher, unbestimmter, aber gut in der Zone gelegener Reflex.
$(\bar{1}\bar{1}0)$	$155^0\, 54^3/_8{}'$	scharfer Reflex, zwar nicht hell, aber gut einstellbar.

K . . . . . = künstliche Fläche und
(110) . . . . . liegen ziemlich stark außerhalb der Zone.
(100) . . . . . liegt genau in der Zone, Reflex schlecht, darunter ein zweiter.
(010) . . . . . schmale Spaltungsfläche, Reflex unscharf, aber gut in der Zone.

Diese Messungen zeigen, daß der Kristall nicht besonders vollkommen ausgebildet ist. Immerhin wird man den wirklichen Verhältnissen recht nahe kommen, falls man die genannte Kantenrichtung zur Vertikalachse und die innere Winkelhalbierende der beiden Flächen $(1\bar{1}0)$ und $(\bar{1}\bar{1}0)$ zur Orthodiagonale wählt. Die Klinodiagonale ist für das Folgende belanglos. Wichtigkeit hat nur die Annahme, daß die zur Orthodiagonale senkrechte Ebene eine Symmetrieebene sei.

81. Die wichtigste Aufgabe, die sich zunächst bietet, ist die Lagebestimmung der Kunstfläche. Zu dem Zweck wurden folgende Messungen vorgenommen.

$$K:(1\bar{1}0) = 151^0\,38\tfrac{11'}{16} \qquad (1\bar{1}0):(001) = 73^0\,48'$$
$$K:(\bar{1}\bar{1}0) = 43^0\,41\tfrac{5'}{8} \qquad (\bar{1}\bar{1}0):(001) = 106^0\,08\tfrac{1'}{2}$$
$$K:(001) = 108^0\,45\tfrac{1'}{4} \qquad (001):(\bar{1}\bar{2}1) = 57^0\,51\tfrac{1'}{2}$$
$$K:(\bar{1}\bar{2}1) = 80^0\,31\tfrac{3'}{8} \qquad (1\bar{1}0):(\bar{1}\bar{2}1) = 77^0\,25\tfrac{1'}{2}$$
$$(\bar{1}\bar{1}0):(\bar{1}\bar{2}1) = 51^0\,44\tfrac{7'}{16}$$

Ist X, Y, Z ein rechtwinkliges, rechtshändiges Achsensystem, dessen Y- und Z-Achse mit der oben definierten b- bzw. c-Achse zusammenfallen, so erhält man für die Kunstfläche K die Gleichung

$$l\,X + m\,Y + n\,Z = 0.$$

l und m lassen sich aus den Winkeln

$$(1\bar{1}0):K = 151^0\,38\tfrac{11}{16} \text{ und } (\bar{1}\bar{1}0):K = 43^0\,41\tfrac{5}{8}$$

bestimmen, und da die Identität

$$l^2 + m^2 + n^2 = 1$$

besteht, so erhält man gleichzeitig den absoluten Wert von n, dessen Vorzeichen aus dem gemessenen Winkel

$$(001):K = 108^0\,45\tfrac{1'}{4}$$

ermittelt werden kann. Weil die Messungen nicht fehlerfrei sind und

der Kristall überhaupt nicht ideal ausgebildet ist, stimmt der Wert von n, der aus dem zuletzt angegebenen Winkel berechnet wird, mit dem zuvor ermittelten nur auf einige Minuten genau überein.

Geht man von anderen Kombinationen aus, so bekommt man wiederum andere Werte. Dabei bemerkt man, daß n innerhalb weiterer Grenzen schwankt, als m und l, die bedeutend genauer sind. Das rührt davon her, daß der n zugeordnete Winkel fast 90°, die Variation von n also ein Maximum ist.

Aus vier verschiedenen Kombinationen ergaben sich die Mittelwerte

$$l = -0{,}990809 \qquad m = 0{,}133526 \qquad n = 0{,}021168,$$

welche aber, wie ohne weiteres verständlich ist, der Bedingung

$$l^2 + m^2 + n^2 = 1$$

nicht genau genügen. Da n jedenfalls am unzuverlässigsten ist, so wurde hierfür mit Hilfe der eben genannten Identität ein neuer Wert bestimmt. Die Gleichung der angeschliffenen Fläche wird dadurch

$$-0{,}990809\,X + 0{,}133526\,Y + 0{,}021641\,Z = 0.$$

82. Wird $(1\bar{1}0)$ als zx-Ebene gewählt, so ist es ein leichtes, die Beziehungen zwischen dem XYZ-System und dem xyz-System aufzustellen. Man erhält das folgende Schema.

	x	y	z
X	0,587219	0,808985	−0,026776
Y	0,808145	−0,587829	−0,036849
Z	−0,045550	0,000000	−0,998962

83. Infolge der Zugehörigkeit des Colemanit zum monoklinen System ergeben sich aus den kristallographischen Symmetrieeigenschaften zwei optische Bedingungsgleichungen, die nach Gleichung XV auf die Form

$$\frac{a_{11}A + a_{12}B + a_{13}C}{A} = \frac{a_{13}A + a_{23}B + a_{33}C}{C}$$

$$\frac{a_{12}A + a_{22}B + a_{23}C}{B} = \frac{a_{13}A + a_{23}B + a_{33}C}{C}$$

gebracht werden können. A, B, C sind die Richtungskosinus von Y in bezug auf x, y, z. Es empfiehlt sich, hieraus a_{12} und a_{22} als Funktionen der vier anderen Polarisationskonstanten zu berechnen. Man erhält so die Ausdrücke

$$a_{12} = 1{,}374795\, a_{11} - 1{,}374795\, a_{33} + 30{,}087797\, a_{13} - 21{,}931019\, a_{23}$$
$$a_{22} = 1{,}890061\, a_{11} - 0{,}890061\, a_{33} + 19{,}433534\, a_{13} - 14{,}261136\, a_{23}.$$

Die Koeffizienten dieser Gleichungen sind von der Wellenlänge unabhängig.

84. Zur Bestimmung von a_{11}, a_{13} und a_{33} dienen die Geschwindigkeiten und Schwingungsrichtungen jener Wellen, die sich parallel der y-Achse im Kristall fortpflanzen. Die Messung ergab

$$\varepsilon = \frac{\pi}{2} + 24^0.$$

Über die Polarisationskonstanten orientiert folgende Zusammenstellung.

	rot (668)	gelb (588)	grün (502)
a_{11}	0,394774	0,392920	0,390333
a_{13}	0,000800	0,000775	0,000778
a_{33}	0,396216	0,394317	0,391734

Die Schwingungsrichtungen jener Wellen, deren Normalen senkrecht zur künstlichen Fläche sind, wurden nicht bestimmt. Da aber diese Fläche der Z-Achse fast parallel ist und auch mit dem Orthopinakoid nur einen kleinen Winkel bildet, so darf man in erster Annäherung voraussetzen, daß jene Richtungen parallel und senkrecht zur Prismenkante seien, oder noch genauer, daß

$$\varepsilon' = \frac{\pi}{2}.$$

Unter dieser Voraussetzung findet man für alle drei Farben den Näherungswert

$$a_{23} = 0{,}0014.$$

Indessen läßt sich dieser Wert noch in anderer Art ermitteln.

Wie oben (§ 68) gezeigt wurde, ist es möglich, lineare Gleichungen von der Form

$$(a_{22} + a_{33}) \cos^2\psi_i + (a_{33} + a_{11}) \sin^2\psi_i - 2\, a_{12} \sin\psi_i \cos\psi_i = q_i'^2 + q_i''^2$$

aufzustellen. Ersetzt man hierin auf Grund der Bedingungsgleichungen a_{12} und a_{22} durch ihre Werte, so erhält man eine gewisse Anzahl Gleichungen, die als einzige Unbekannte a_{23} enthalten. Während nun die einzelnen Gleichungen den Beobachtungsfehlern unterworfen sind und darum für a_{23} etwas verschiedene Werte liefern, ist die Summe aller Gleichungen von den zufälligen Fehlern ziemlich frei und erlaubt deshalb, für a_{23} einen recht guten Wert zu finden.

Dieses Verfahren wurde bei allen Farben angewandt und ergab:

	rot (668)	gelb (588)	grün (502)
a_{23}	0,001260	0,001253	0,001261

Zur Verbesserung der Näherungswerte für a_{11}, a_{33}, a_{13} und a_{32} dient die Methode der kleinsten Quadrate. Es kommen so die endgültigen Werte der Tabelle XIV.

Tabelle XIV.

	rot	gelb	grün
a_{11}	0,394745	0,392912	0,390306
a_{22}	0,390945	0,388824	0,386097
a_{33}	0,396187	0,394309	0,391707
a_{23}	0,001267	0,001256	0,001268
a_{31}	0,000800	0,000775	0,000800
a_{12}	—0,005689	—0,006138	—0,006324

Die weiteren Rechnungen bieten keine prinzipiellen Schwierigkeiten. Nur zeigt es sich von neuem, daß man die Koeffizienten der Gleichung dritten Grades nicht beliebig kürzen darf.

85. Die ermittelten Hauptbrechungsindizes sind aus der folgenden Tabelle XV ersichtlich.

Tabelle XV.

	α	β	γ
rot	$1{,}5834_2$	$1{,}5882_7$	$1{,}6082_8$
gelb	$1{,}5864_2$	$1{,}5920_8$	$1{,}6133_5$
grün	$1{,}5913_8$	$1{,}5973_5$	$1{,}6194_0$

Für die Orientierung der Hauptschwingungsrichtungen im xyz- bzw. XYZ-System (vergl. die Festsetzungen von § 81) gelten die in den Tabellen XVI und XVII zusammengestellten Größen.

Tabelle XVI.

	rot (668)			gelb (588)			grün (502)		
	x	y	z	x	y	z	x	y	z
ξ	0,80818	—0,58778	—0,03692	0,80774	—0,58757	—0,03693	0,80866	—0,58746	—0,03099
η	0,12037	0,10346	0,98732	0,11426	0,09494	0,98890	0,10866	0,09742	0,98929
ζ	0,57651	0,80233	—0,15464	0,57782	0,80338	—0,14390	0,57810	0,80341	—0,14260

Tabelle XVII.

	rot (668)			gelb (588)			grün (502)		
	X	Y	Z	X	Y	Z	X	Y	Z
ξ	90°	0°	90°	90°	0	90°	90°	0°	90°
η	82° 40′	90°	172° 40′	83° 14′	90°	173° 14′	83° 18′	90°	173° 18′
ζ	7° 20′	90°	82° 40′	6° 46′	90°	83° 14′	6° 42′	90°	83° 18′

Die gefundenen Hauptbrechungsindizes stehen in recht befriedigender Übereinstimmung mit den Angaben Mülheims[1]), wie aus Tabelle XVIII ersichtlich ist.

[1]) Mülheims, Groth's Zeitschrift **14**, Seite 230.

Tabelle XVIII.

	λ	α	$\Delta_{\alpha\beta}$	β	$\Delta_{\beta\gamma}$	γ
B	687	1,58230	577	1,58807	2171	1,60978
He-rot	*668*	*1,58342*	*485*	*1,58827*	*2001*	*1,60828*
C	656	1,58345	577	1,58922	2178	1,61100
D	589	1,58626	576	1,59202	2196	1,61398
He-gelb	*588*	*1,58642*	*566*	*1,59208*	*2127*	*1,61335*
E	527	1,58952	579	1,59531	2231	1,61762
b_4	518	1,59017	584	1,59601	2235	1,61836
He-grün	*502*	*1,59138*	*597*	*1,59735*	*2205*	*1,61940*
F	486	1,59214	596	1,59810	2234	1,62044

Am ungenauesten scheint rot, am genauesten grün geraten zu sein. Der Grund mag darin liegen, daß es zuweilen recht schwierig ist, das Fadenkreuz auf die rote Linie einzustellen, weil sie im strahlenden Glanz der gelben Linie stark verblaßt. Überhaupt war es bei den verschiedenen Ablesungen eine auffallende Erscheinung, daß die grüne Linie außerordentlich scharf begrenzt war und Einstellungen erlaubte, die bei den verschiedenen Wiederholungen meistens identisch waren und selten um mehr als eine Viertelsminute variierten, während bei der gelben Linie Variationen von $^1/_4$- bis $^3/_4$-Minuten, bei der roten sogar von mehr wie einer Minute die Regel waren.

Bezüglich der Orientierung teilt v. Groth[1]) folgende Zahlen mit: Die Ebene der optischen Achsen ist senkrecht zu {010}; die erste Mittellinie bildet in {010} einen Winkel von 83°[2]) mit der c-Achse im stumpfen Winkel β.

Diese Angaben stimmen prachtvoll mit den neugewonnenen Resultaten überein, welche für rot, gelb und grün bzw. die Werte 82° 40′, 83° 14′ und 83° 18 lieferten[3]).

[1]) Chemische Kristallogr. II, 283. [2]) Nach Mülheims l. c. 82° 43′.

[3]) Aus diesen schönen Ergebnissen ist der Rückschluß gestattet, daß der geringere Erfolg beim Kupfervitriol tatsächlich auf die mangelhafte Beschaffenheit des Prismas zurückzuführen ist.

C. *Euklas* = $SiO_4Be[AlOH]$.

a : b : c = 0,3237 : 1 : 0,3332 $\beta = 100^0\,16'$ (Schabus)

86. Zur Verwendung gelangte ein ziemlich großes (12 mm langes) Bruchstück, das ringsum von drei Flächen begrenzt, an den beiden Enden aber abgebrochen ist. Die eine Fläche ist als Spaltfläche {010} deutlich erkennbar. Hierzu senkrecht steht eine andere Fläche, die ca. 5 mm breit, aber in ihrer Ausbildung durch eine vielfache Fiederung usw. teilweise gestört ist. Wegen des rechten Winkels, den sie mit {010} bildet, ist sie der Orthodiagonale parallel. Die dritte Fläche bildet mit der zweiten einen ziemlich spitzen Winkel ($\Gamma = 32^0\,27'\,20''$) und spiegelt wunderbar. Überhaupt ist der Kristall von herrlicher Klarheit und erzeugt dementsprechend Spektrallinien von strahlender Helligkeit. Leider läßt ihre Schärfe noch zu wünschen übrig.

Die zuletzt genannte Fläche gehört der Form {120} an, entsprechend dem im Handbuch v. Hintze angegebenen Werte 120 : 010 = $57^0\,30'$. Ob sie aber rechts oder links von der Symmetrieebene gelegen sei, bleibt unentschieden. Glücklicherweise ist jedoch diese Unbestimmtheit für die Aufstellung der dem monoklinen System eigentümlichen Bedingungsgleichungen völlig belanglos. Denn da die ebengenannte Fläche {120} zur xz-Ebene gewählt wurde, folgt ohne weiteres, daß die Richtungskosinus der Orthodiagonale gleich sind den Ausdrücken

$$A = \cos\Gamma \qquad B = -\sin\Gamma \qquad C = 0.$$

Nach Gleichung XV hat man also die beiden Bedingungsgleichungen ($\lambda = -\Gamma$)

$$(a_{11} - a_{22})\sin 2\Gamma + 2\,a_{12}\cos 2\Gamma = 0 \text{ und}$$
$$a_{13}\cos\Gamma - a_{23}\sin\Gamma = 0.$$

Beachtenswert ist noch, daß jene Welle, deren Normale senkrecht zur zweitgenannten Fläche {100} ist und parallel der z-Achse schwingt, direkt den Wert a_{33} gibt, während die andere Welle dieser Fortpflanzungsrichtung eine Hauptlichtgeschwindigkeit liefert. Eine Zusammenstellung (Tabelle XIX) der durch direkte Beobachtung (erste Kolonne) bzw. mit Hilfe von ε, q_1 und q_2 (zweite Kolonne) ermittelten Werte von a_{33}

dürfte interessieren und erlaubt zudem ein Urteil über die erzielte Genauigkeit.

Tabelle XIX.

	Beobachtung	Rechnung
rot	0,36269	0,362791
gelb	0,36130	0,361509
grün	0,35904	0,359292
indigo	0,35696	0,356857

87. Die Polarisationskonstanten wurden in verschiedener Weise bestimmt. Das erstemal wurde ungefähr so verfahren, wie im zweiten Teil bei der Anwendung der allgemeinen Methode auf monokline Kristalle angegeben wurde; später wurden zuerst die P_{ik} und Q_{ik} (aber ohne Interpolation der q_i''-Werte) bestimmt und die Polarisationskonstanten in der Weise berechnet, daß aus den Gleichungen

$$a_{22} + a_{33} = P_{11} \qquad a_{22}\, a_{33} - a_{23}^2 = Q_{11}$$
$$a_{33} + a_{11} = P_{22} \qquad a_{33}\, a_{11} - a_{31}^2 - Q_{22}$$

vermöge der Bedingungsgleichung

$$a_{23} = m\, a_{13} \qquad (m = \cot g\, \Gamma)$$

zunächst a_{23} eliminiert und dann durch Substitution der Werte von a_{22} bzw. a_{11} aus den Gleichungen links in den Gleichungen rechts das einfache System

$$a_{33}\,(P_{11} - a_{33}) - m^2\, a_{13}^2 = Q_{11}$$
$$a_{33}\,(P_{22} - a_{33}) - a_{13}^2 = Q_{22}$$

abgeleitet wurde, aus dem sich schließlich durch Elimination von a_{13} die Gleichung

$$(m^2 - 1)\, a_{33}^2 - (m^2\, P_{22} - P_{11})\, a_{33} + (m^2\, Q_{22} - Q_{11}) = 0$$

ergibt. Diese Gleichung ist unabhängig von ε, liefert aber zwei Werte für a_{33}, unter denen wegen des bekannten Näherungswertes der wahre leicht zu erkennen ist.

88. Die nach den verschiedenen Methoden erhaltenen Resultate stimmen recht gut untereinander überein. Die Mittelwerte sind in der Tabelle XX aufgeführt.

Tabelle XX.

	α	$\Delta_{\alpha\beta}$	β	$\Delta_{\beta\gamma}$	γ
rot (668)	$1{,}6474_2$	46_4	$1{,}6520_6$	156_6	$1{,}6676_6$
gelb (588)	$1{,}6507_9$	45_3	$1{,}6553_2$	161_2	$1{,}6714_4$
grün (502)	$1{,}6559_8$	46_0	$1{,}6605_8$	161_1	$1{,}6766_9$
indigo (447)	$1{,}6606_2$	46_6	$1{,}6652_8$	161_5	$1{,}6814_3$

Zur Kontrolle dienen die direkt gewonnenen Werte für die mittleren Hauptbrechungsindizes, nämlich

$$\beta_{668} = 1{,}6521_6$$
$$\beta_{588} = 1{,}6553_3$$
$$\beta_{502} = 1{,}6605_1$$
$$\beta_{447} = 1{,}6653_2.$$

Die einzigen über Euklas vorliegenden optischen Konstanten wurden von Descloizeaux[1]) ermittelt, der für mittlere Farben folgende Angaben macht.

$$\alpha = 1{,}6520 \qquad \beta = 1{,}6553 \qquad \gamma = 1{,}6710$$

Die Übereinstimmung dieser β- und γ-Werte mit den obigen für He-gelb ist fast überraschend; dagegen stimmt α etwas weniger gut.

Als Ebene der optischen Achsen wurde übereinstimmend mit den bekannten Angaben $\{010\}$ gefunden. Ebenso ergibt sich ζ als spitze Bissektrix. Sie bildet mit der z-Achse einen Winkel, für den sich die Werte der Tabelle XXI ergeben haben.

Tabelle XXI.

rot	gelb	grün	indigo
39° 39′	39° 49′	39° 14′	35° 31′

Nach Descloizeaux[2]) ist er gleich 40° 32′. Die Übereinstimmung ist also, vom letzten Wert abgesehen, verhältnismäßig gut und beweist neuerdings die Zuverlässigkeit der Methode, wenn

[1]) Descloizeaux, Man. I, 482.
[2]) Bull. Soc. Min. **5** 317.

die Lichtverhältnisse und die Beschaffenheit des Materials ein genaues Arbeiten gestatten.

Die erzielten Resultate des dritten Teiles dürften die praktische Verwertbarkeit der im zweiten Teil erläuterten Methode zur Genüge gezeigt haben. Wenn ein Punkt nicht ganz befriedigt, so ist es der, daß anscheinend die Größe der Doppelbrechung nicht immer mit großer Genauigkeit ermittelt werden kann. Berücksichtigte man aber den Wert von $(q'^2 - q''^2)^2$, welcher einerseits wegen der Beobachtungen bekannt ist und sich anderseits überraschend einfach durch P_{ik} und Q_{ik} rational darstellt, so wird es möglich, selbst diese Mängel vollständig zu beheben. Es wird mir deshalb ein besonderes Vergnügen sein, dies in einer weiteren Arbeit experimentell und theoretisch darzutun.[1])

Belfaux, den 29. September 1916.

---

[1]) Trotz eifrigen Bemühens war es bis zur Drucklegung noch nicht möglich, die erforderlichen Präparate zu beschaffen.