Zeitschrift: Mémoires de la Société Fribourgeoise des Sciences Naturelles. Mathématique et physique = Mitteilungen der Naturforschenden Gesellschaft in Freiburg. Mathematik und Physik

Herausgeber: Société Fribourgeoise des Sciences Naturelles

Band: 4 (1921)

Artikel: Über die Prismenmethode zur Bestimmung der Brechungsindizes optisch zweiachsiger Kristalle ohne Absorptions- und Drehungsvermögen

Autor: Weber, Leonhard

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-306876

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 08.02.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Prix du volume Fr. 5.–

V. IV. MATHÉMATIQUES ET PHYSIQUE B. IV.

MÉMOIRES
DE LA
SOCIÉTÉ FRIBOURGEOISE
DES
SCIENCES NATURELLES

MITTEILUNGEN
DER
NATURFORSCHENDEN GESELLSCHAFT
IN
FREIBURG (SCHWEIZ)

Über die Prismenmethode

zur Bestimmung der Brechungsindizes optisch zweiachsiger Kristalle

ohne Absorptions- und Drehungsvermögen

von

Dr. LEONHARD WEBER

FRIBOURG (SUISSE)
1921

Meinen verehrten

Eltern, Lehrern und Förderern

in Dankbarkeit gewidmet

Inhaltsübersicht und Vorbemerkung.

Die vorliegende Arbeit umfaßt drei Teile.

Im ersten Teil (S. 1—40) werden die Ergebnisse der bisherigen Forschung über das Prismenproblem systematisch zusammengestellt und mehrfach ergänzt.

Im zweiten Teil (S. 41—69) wird eine neue Methode abgeleitet, welche gestattet, die optischen Konstanten zweiachsiger Kristalle in allen Fällen (also auch im triklinen System) mit Hilfe eines einzigen Prismas beliebiger, selbst unbekannter Orientierung eindeutig zu bestimmen.

Im dritten Teil (S. 70—113) wird die neue Methode an je einem Prisma von Kupfervitriol (S. 82 ff.) (triklin), Colemanit (S. 103 ff.) und Euklas (S. 110 ff.) (monoklin) geprüft.

Um das umständliche Aufsuchen der zitierten Formeln zu erleichtern, wurde am Schluß der Arbeit (S. 114—116) ein übersichtliches Formelverzeichnis zusammengestellt.

Die einschlägige Literatur wurde ausgiebig verwertet, jedoch nur sparsam zitiert, weil sie bereits von F. Pockels in seinem „Lehrbuch der Kristalloptik“ sorgfältig gesammelt ist.

Die zahlreichen Messungen, welche für den dritten Teil nötig waren, wurden im mineralogischen Institut der Universität Freiburg i. d. Schweiz ausgeführt. Der Vorstand desselben, Herr Prof. Dr. H. Baumhauer, zeigte für den Gang der Arbeit fortwährend eine warme und aufmunternde Teilnahme und gab mir zu verschiedenen Abschnitten derselben, insbesondere zum ganzen dritten Teil, mannigfache Anregung.

Für dieses sein liebenswürdiges Entgegenkommen, namentlich aber für die vielseitige Förderung während meiner Studienjahre überhaupt wie auch besonders während der Zeit, wo ich sein Assistent zu sein die Ehre hatte, drängt es mich, ihm an dieser Stelle meinen aufrichtigsten und herzlichsten Dank auszusprechen.

I. TEIL

Systematische Zusammenstellung, Ergänzung und Verallgemeinerung der bisherigen Untersuchungen.

1. Dem allgemeinen Brauch entsprechend, wird den folgenden Betrachtungen ein rechtwinkliges, rechtshändiges Achsensystem x, y, z zugrunde gelegt, dessen x- und y-Achse in der Querschnittsebene (Hauptschnitt) des Prismas liegen und durch die Halbierungsebene des inneren bzw. äußeren Prismenwinkels bestimmt sind. Die z-Achse steht auf beiden senkrecht und fällt mit der brechenden Kante des Prismas zusammen. Über dem Hauptschnitt wird sie positiv gerechnet, während die positive Seite der x-Achse ins Innere des Prismenwinkels gerichtet ist.

Neben diesem x y z-System ist noch ein zweites, ebenfalls rechtwinkliges, rechtshändiges Koordinatensystem ξ, η, ζ von Bedeutung, dessen Achsen durch den Ursprung O des ersten Systems gehen und den Schwingungsrichtungen jener Wellen parallel sind, die sich mit den Geschwindigkeiten a bzw. b und c $(a > b > c)$ (Hauptlichtgeschwindigkeiten) im Prisma ausbreiten. ξ, η, ζ sind demnach die sog. Hauptschwingungsrichtungen oder optischen Symmetrieachsen. Für die im allgemeinen unbekannten Richtungskosinus, welche die positiven Richtungen der Achsen des einen Systems in bezug auf die positiven Richtungen der Achsen des anderen Systems festlegen, gelte das Schema I.

	x	y	z
ξ	α_1	α_2	α_3
η	β_1	β_2	β_3
ζ	γ_1	γ_2	γ_3

I

2. Die Ausbreitung ebener Wellen erfolgt in optisch zweiachsigen Kristallen nach einem ziemlich verwickelten Gesetz, dessen analytischer Ausdruck gewöhnlich auf die Form[1])

$$\frac{\nu_1^2}{q^2-a^2}+\frac{\nu_2^2}{q^2-b^2}+\frac{\nu_3^2}{q^2-c^2}=0 \qquad \text{II}$$

gebracht wird. Darin bedeuten: ν_1, ν_2, ν_3 die Richtungskosinus der Wellennormalen in bezug auf ξ, η, ζ; q die mit der Richtung im allgemeinen veränderliche Wellennormalengeschwindigkeit und a, b, c die bereits oben genannten Hauptlichtgeschwindigkeiten.

3. Die Messung jener Winkel, welche die Fortpflanzungsrichtung und Geschwindigkeit einer ebenen Welle eindeutig bestimmen, ist sehr umständlich, wenn die Welle schief zur Prismenkante einfällt. Mit einem gewöhnlichen einkreisigen Goniometer ist sie überhaupt nicht ausführbar; es braucht zum mindesten ein dreikreisiges Instrument. Aus diesem Grund hat man sich von jeher auf Wellen beschränkt, die parallel der brechenden Kante des Prismas einfallen und darum sowohl beim Gang durch das Prisma als auch nach dem Austritt aus demselben dieser Richtung parallel bleiben. Ausnahmsweise machte Viola[2]) mit Hilfe des zweikreisigen Goldschmidtschen Theodolitgoniometers Beobachtungen bei „schiefer Inzidenz", ist aber genötigt, jene Stellungen des Prismas und Fernrohrs aufzusuchen, für welche die mit geeignetem Mikrometer meßbare Vertikalablenkung ungeändert bleibt, wenn Fernrohr und Kollimator vertauscht werden, und muß zudem in der Umgebung dieser Stelle für

---

[1]) Für Wellen, die parallel einer optischen Symmetrieachse schwingen, versagt die Gleichung II, weil sich ein Term derselben auf die Unbestimmtheitsform 0 : 0 reduziert.

[2]) Viola, Zeitschrift f. Krist. **32**, 66 und 545; do. **43**, 210 und 588. Viola, Zeitschr. f. Instrumentenk. **19** (1899), 276. Pockels, Lehrbuch der Kristalloptik. 148 ff. und Zeitschrift f. Krist. **43**, 587.

Den Fall „schiefer Inzidenz" studierte übrigens teilweise schon A. Cornu in seiner Arbeit: Refraction à travers un prisme suivant une loi quelconque. Ann. Ecole normale **1.** 231 und **3.** 1. In Betracht kommt hauptsächlich **1.** 255 ff.

mehrere, etwa um je einen Grad verschiedene, am Vertikalkreis direkt ablesbare Werte von ω (= „Winkel, den die auf die Eintritts- und Austrittswellen senkrechte Ebene mit der Basis des Prismas einschließt") die zugehörigen Brechungsindizes bestimmen. Das Maximum oder Minimum derselben liefert einen Hauptbrechungsindex.

4. Die Gesamtheit aller zur z-Achse parallelen Wellen, welche gleichzeitig im Punkte O einfallen, umhüllt im Prisma nach der Zeiteinheit eine Kurve C, welche das Schnittgebilde der Wellennormalenfläche (Gl. II) mit der Querschnittsebene des Prismas ist. Bezeichnet etwa ψ den Winkel, welchen die Normale einer solchen Welle mit der positiven Richtung der x-Achse einschließt, so hat man für die Richtungskosinus dieser Wellennormalen im xyz-System die Werte

$$\psi_1 = \cos\psi \qquad \psi_2 = \sin\psi \qquad \psi_3 = 0,$$

falls ψ von $+x$ über $+y$ positiv gerechnet wird.

Zwischen ν_i und ψ bestehen wegen des Schemas I die Beziehungen

$$\begin{aligned} \nu_1 &= \alpha_1 \cos\psi + \alpha_2 \sin\psi \\ \nu_2 &= \beta_1 \cos\psi + \beta_2 \sin\psi \\ \nu_3 &= \gamma_1 \cos\psi + \gamma_2 \sin\psi, \end{aligned}$$

die in Gleichung II eingesetzt, nach einigen Umformungen, die Gleichung[1]) der Kurve C ergeben, nämlich:

$$\begin{aligned} q^4 - q^2 (L_{11} \cos^2\psi + L_{22} \sin^2\psi + 2\, L_{12} \sin\psi \cos\psi) + \\ + (M_{11} \cos^2\psi + M_{22} \sin^2\psi + 2\, M_{12} \sin\psi \cos\psi) = 0. \end{aligned} \qquad \text{III}$$

Darin ist

$$\begin{aligned} L_{ik} &\equiv (b^2 + c^2)\, \alpha_i \alpha_k + (c^2 + a^2)\, \beta_i \beta_k + (a^2 + b^2)\, \gamma_i \gamma_k \\ M_{ik} &\equiv b^2 c^2\, \alpha_i \alpha_k + c^2 a^2\, \beta_i \beta_k + a^2 b^2\, \gamma_i \gamma_k. \end{aligned} \qquad \text{IV a}$$

Die Konstanten L_{ik} und M_{ik} lassen sich theoretisch mit Hilfe von sechs Wertpaaren (q_ν, ψ_ν), die sich auf Grund der Messungen am Spektrometer ohne Schwierigkeit ergeben, eindeutig als Wurzeln eines Systems von sechs linearen Gleichungen bestimmen. Wie die Rechnung praktisch auszuführen ist, wird sich später zeigen, hier soll nur ein einfaches Verfahren angegeben werden, um mittels des be-

[1]) Vergl. hierfür und für das Folgende die Arbeit von Th. v. Liebisch im Neuen Jahrbuch für Mineralogie und Geologie. 1886 I pag. 14 ff.

obachteten Einfalls- und Ablenkungswinkels (i_0 und Δ) q und ψ graphisch zu bestimmen. EOA (Fig. 1) sei ein Hauptschnitt des Prismas mit dem brechenden Winkel Γ, J_0E eine einfallende, AJ_1 eine austretende Wellennormale. EW_0 und AW_1 die zugehörigen Wellenspuren. Macht man $EJ_0 = EW_0 = AW_1 = AJ_1 = q_0$, so sind die Projektionen von EW_0 und AW auf die entsprechenden Einfallslote EP und AQ bzw. gleich $q_0 \sin i_0$ und $q_0 \sin i_1$ und die gebrochene Wellenebene ist der Richtung OO_1 parallel (also wegen ihrer zum Hauptschnitt senkrechten Lage vollkommen bestimmt), falls O_1 den Schnittpunkt der projizierenden Geraden W_0P und W_1Q bedeutet.

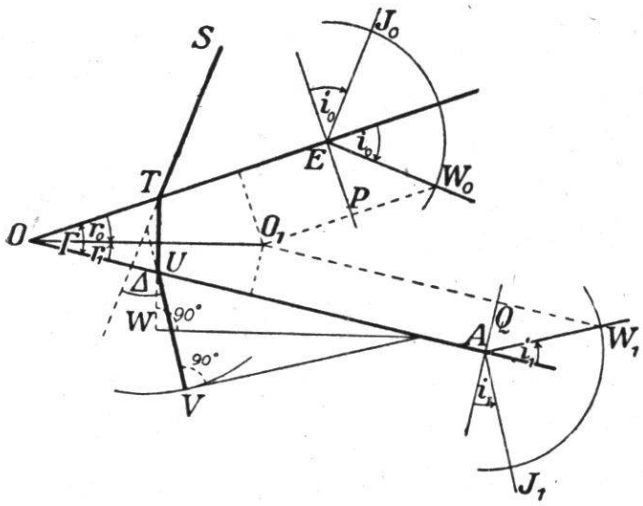

Fig. 1

Der Beweis ergibt sich unmittelbar, da OO_1 den Winkel Γ derart in zwei Winkel[1]) r_0 und r_1 teilt, daß

$$r_0 + r_1 = \Gamma$$
$$\sin r_0 : \sin r_1 = \sin i_0 : \sin i_1.$$

Der fettgezeichnete Linienzug STUV ($TU \perp OO_1$) gibt die drei aufeinanderfolgenden Lagen einer bestimmten Wellennormale an.

Zur Bestimmung der Geschwindigkeit q_1 (= UW) kann man sich der bekannten Huygensschen Konstruktion bedienen, wie sie in der Figur angedeutet ist ($UV = q_0$).

5. Die Hauptlichtgeschwindigkeiten a, b, c sowie die Richtungskosinus $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ ($i = 1, 2, 3$) berechnen sich aus den Gleichungen IVa und sechs weiteren, die wegen der Orthogonalität der Achsen zwischen den Richtungskosinus bestehen, nämlich:

---

[1]) Man achte auf die Pfeile, denn nur für solche gerichtete Winkelgrößen gelten die bekannten Relationen

$$r_0 + r_1 = \Gamma \text{ und } i_0 + i_1 = \Gamma + \Delta$$

allgemein.

$$\alpha_i^2 + \beta_i^2 + \gamma_i^2 = 1 \qquad \alpha_i \alpha_k + \beta_i \beta_k + \gamma_i \gamma_k = 0. \qquad \text{IVb}$$

Man kann nun mit Th. v. Liebisch in den Gleichungssystemen IVa und IVb die drei Gleichungen in $\alpha_1^2, \beta_1^2, \gamma_1^2$ für sich betrachten, ebenso jene in $\alpha_2^2, \beta_2^2, \gamma_2^2$ sowie endlich diejenigen in $\alpha_1 \alpha_2, \beta_1 \beta_2, \gamma_1 \gamma_2$ und findet durch einfache Rechnung folgende Ausdrücke:

$$\alpha_1^2 = \frac{a^4 - L_{11} a^2 + M_{11}}{(a^2 - b^2)(a^2 - c^2)} \qquad \alpha_2^2 = \frac{a^4 - L_{22} a^2 + M_{22}}{(a^2 - b^2)(a^2 - c^2)} \qquad \alpha_1 \alpha_2 = \frac{-L_{12} a^2 + M_{12}}{(a^2 - b^2)(a^2 - c^2)}$$

$$\beta_1^2 = \frac{b^4 - L_{11} b^2 + M_{11}}{(b^2 - c^2)(b^2 - a^2)} \qquad \beta_2^2 = \frac{b^4 - L_{22} b^2 + M_{22}}{(b^2 - c^2)(b^2 - a^2)} \qquad \beta_1 \beta_2 = \frac{-L_{12} b^2 + M_{12}}{(b^2 - c^2)(b^2 - a^2)} \qquad \text{V}$$

$$\gamma_1^2 = \frac{c^4 - L_{11} c^2 + M_{11}}{(c^2 - a^2)(c^2 - b^2)} \qquad \gamma_2^2 = \frac{c^4 - L_{22} c^2 + M_{22}}{(c^2 - a^2)(c^2 - b^2)} \qquad \gamma_1 \gamma_2 = \frac{-L_{12} c^2 + M_{12}}{(c^2 - a^2)(c^2 - b^2)}.$$

Beachtet man, daß

$$\alpha_1^2 \alpha_2^2 = (\alpha_1 \alpha_2)^2,$$

so folgt aus den drei Gleichungen der ersten Zeile von V, wenn $a^2 = u$ gesetzt wird:

$$u^4 - (L_{11} + L_{22}) u^3 + (M_{11} + M_{22} + L_{11} L_{22} - L_{12}^2) u^2 - \\ (L_{11} M_{22} + L_{22} M_{11} - 2 L_{12} M_{12}) u + (M_{11} M_{22} - M_{12}^2) = 0. \qquad \text{VI}$$

Das gleiche Verfahren mit den Gleichungstripeln der zweiten und dritten Zeile von V liefert für b^2 und c^2 eine mit VI identische Gleichung, so daß sich also a^2, b^2, c^2 als Wurzeln dieser Gleichung vierten Grades ergeben, die aber im allgemeinen noch eine vierte, von diesen verschiedene Wurzel d^2 hat, deren Wert Th. v. Liebisch durch Koeffizientenzerlegung zu

$$d^2 = a^2 \alpha_3^2 + b^2 \beta_3^2 + c^2 \gamma_3^2$$

bestimmte. Es läßt sich unschwer zeigen, daß a^2 die größte und c^2 die kleinste Wurzel von VI ist, während die beiden mittleren (b^2 und d^2) in keiner festen, zum vorneherein gegebenen Größenbeziehung zu einander stehen, indem b^2 ebensogut größer wie kleiner als d^2 sein kann. Die Lösung des Problems ist darum im allgemeinen zweideutig.

6. Da in den eben gefundenen Wurzeln der Gleichung VI von den neun Richtungskosinus des Schemas I nur α_3, β_3 und γ_3 auftreten, so müssen wegen der bekannten Beziehung

zwischen den Koeffizienten und Wurzeln einer algebraischen Gleichung auch die Koeffizienten der Gleichung VI neben a^2, b^2 und c^2 nur noch von α_3, β_3 und γ_3, nicht aber von den sechs anderen Richtungskosinus abhängen. Der direkte Nachweis mit Hilfe der Werte für L_{ik} und M_{ik} auf Grund der Orthogonalitätsgleichungen bietet keine Schwierigkeit. Es genüge, ihn etwa für $M_{11} M_{22} - M_{12}^2$ durchzuführen. Durch Substitution der Gl. IVa, Ausführung der Operationen und einfache Kürzung kommt:

$$M_{11} M_{22} - M_{12}^2 \equiv$$
$$a^2 b^2 c^2 [a^2 (\beta_1 \gamma_2 - \beta_2 \gamma_1)^2 + b^2 (\gamma_1 \alpha_2 - \gamma_2 \alpha_1)^2 + c^2 (\alpha_1 \beta_2 - \alpha_2 \beta_1)^2].$$

Nun bestehen zwischen den neun Richtungskosinus bekanntlich die Beziehungen

$$\beta_1 \gamma_2 - \beta_2 \gamma_1 \equiv \alpha_3 \qquad \gamma_1 \alpha_2 - \gamma_2 \alpha_1 \equiv \beta_3 \qquad \alpha_1 \beta_2 - \alpha_2 \beta_1 \equiv \gamma_3,$$

die, oben eingesetzt, das gewünschte Resultat ergeben und zugleich den eben erwähnten Satz von Th. v. Liebisch bestätigen:

$$M_{11} M_{22} - M_{12}^2 \equiv a^2 b^2 c^2 (a^2 \alpha_3^2 + b^2 \beta_3^2 + c^2 \gamma_3^2).$$

Gleichung VI ist demnach durch die Orientierung der brechenden Kante des Prismas in bezug auf die optischen Symmetrieachsen des Kristalls bei gegebenen a^2, b^2 und c^2 völlig bestimmt und deshalb von der weiteren Lage des Prismas ganz unabhängig. Darin zeigt sich ein wesentlicher Unterschied zwischen der Gleichung III und der Gleichung VI. Gleichung III ist der analytische Ausdruck für die Schnittkurve C der Wellennormalenfläche mit der durch $\alpha_3, \beta_3, \gamma_3$ bestimmten Diametralebene und in ihrer Form durch das Bezugssystem bedingt. Für die verschiedenen Prismen mit gleichorientierter brechender Kante müssen sich ihre Koeffizienten ändern, trotzdem sie immer die gleiche Kurve darstellt, eben weil sich das Bezugssystem ändert. Dagegen bleibt Gl. VI für alle diese Prismen stets dieselbe. Sie wird deshalb nur durch solche Eigenschaften der Kurve C bestimmt, welche von ihrer speziellen Orientierung unabhängig sind. Diese Eigenschaften sind die Längen der extremen Radienvektoren.

7. Um dies zu zeigen, möge in Gl. III der doppelte Winkel eingeführt werden. Dadurch kommt nach einigen Umstellungen:

$$f(q,\psi) \equiv [(M_{11} - M_{22}) - (L_{11} - L_{22})\, q^2] \cos 2\psi$$
$$+ 2\,(M_{12} - L_{12}\, q^2) \sin 2\psi + [2\, q^4 - (L_{11} + L_{22})\, q^2 + (M_{11} + M_{22})] = 0 \qquad \text{IIIa}$$

oder abkürzend:

$$f(q,\psi) \equiv P \cos 2\psi + 2\, Q \sin 2\psi + R = 0. \qquad a)$$

Die Bedingung, daß q ein Extremum werde, ist bekanntlich das Verschwinden von

$$\frac{dq}{d\psi} = -\frac{\partial f}{\partial \psi} : \frac{\partial f}{\partial q},$$

also im allgemeinen das Verschwinden von $\frac{\partial f}{\partial \psi}$.

Man hat somit

$$-P \sin 2\psi + 2\, Q \cos 2\psi = 0. \qquad b)$$

Wegen

$$\sin^2 2\psi + \cos^2 2\psi = 1 \qquad c)$$

kann man ψ eliminieren, indem man etwa *a)* und *b)* nach $\sin 2\psi$ und $\cos 2\psi$ auflöst und die gefundenen Werte in *c)* einsetzt. Man erhält auf diese Weise

$$\frac{R^2 - P^2 - 4\, Q^2}{P^2 + 4\, Q^2} = 0.$$

Das Nullwerden des Nenners in diesem Ausdruck ist bei reellen Werten an die Bedingungen

$$P = 0 \text{ und } Q = 0$$

und wegen *a)* auch

$$R = 0$$

geknüpft, kann also, wenn überhaupt möglich, nur bei ganz spezieller Orientierung des Prismas eintreten. Im allgemeinen ist darum

$$R^2 - P^2 - 4\, Q^2 = 0$$

die gesuchte Maximums- resp. Minimumsbedingung und gibt nach Einsetzung der Werte aus IIIa, wenn noch

$$q^2 \equiv u$$

gesetzt wird,

$$R^2 - P^2 - 4\, Q^2 \equiv 4\,[u^4 - (L_{11} + L_{22})\, u^3 + (M_{11} + M_{22} + L_{11}\, L_{22} - L_{12}^2)\, u^2$$
$$- (L_{11}\, M_{22} + L_{22}\, M_{11} - 2\, L_{12}\, M_{12})\, u + (M_{11}\, M_{22} - M_{12}^2)] = 0$$

d. h. genau die Gleichung VI w. z. b. w.

8. Es ist für das folgende bedeutungsvoll, auch die Gleichung

$$P^2 + 4\,Q^2 = 0$$

näher zu untersuchen. Ersetzt man dieselbe durch das oben gefundene, ihr äquivalente Gleichungssystem

$$P = 0, \qquad Q = 0, \qquad R = 0,$$

so folgt durch Elimination von q^2 aus den beiden ersten Gleichungen

$$\frac{L_{11} - L_{22}}{M_{11} - M_{22}} = \frac{L_{12}}{M_{12}}$$

und hieraus nach Substitution der Werte aus IV a

$$\begin{aligned} &a^4 b^2 (\beta_1 \gamma_2 - \beta_2 \gamma_1)(\beta_1 \gamma_1 + \beta_2 \gamma_2) - a^2 b^4 (\gamma_1 \alpha_2 - \gamma_2 \alpha_1)(\alpha_1 \gamma_1 + \alpha_2 \gamma_2) \\ &+ b^4 c^2 (\gamma_1 \alpha_2 - \gamma_2 \alpha_1)(\gamma_1 \alpha_1 + \gamma_2 \alpha_2) - b^2 c^4 (\alpha_1 \beta_2 - \alpha_2 \beta_1)(\alpha_1 \beta_1 + \beta_2 \alpha_2) \\ &+ c^4 a^2 (\alpha_1 \beta_2 - \alpha_2 \beta_1)(\alpha_1 \beta_1 + \alpha_2 \beta_2) - c^2 a^4 (\beta_1 \gamma_2 - \beta_2 \gamma_1)(\beta_1 \gamma_1 + \beta_2 \gamma_2) = 0, \end{aligned}$$

wofür man wegen der bekannten Beziehungen

$$\beta_1 \gamma_1 + \beta_2 \gamma_2 \equiv -\beta_3 \gamma_3 \qquad \text{(und zwei ähnlichen)}$$
$$\beta_1 \gamma_2 - \beta_2 \gamma_1 \equiv \alpha_3 \qquad \text{(und zwei ähnlichen)}$$

die Gleichung

$$\begin{gathered} -\alpha_3 \beta_3 \gamma_3 \left[a^2 b^2 (a^2 - b^2) + b^2 c^2 (b^2 - c^2) + c^2 a^2 (c^2 - a^2)\right] \equiv \\ \alpha_3 \beta_3 \gamma_3 (a^2 - b^2)(b^2 - c^2)(c^2 - a^2) = 0 \end{gathered}$$

erhält. Dieselbe kann jedoch nur bestehen, wenn

$$\alpha_3 \beta_3 \gamma_3 = 0$$

ist, d. h. wenn die Prismenkante mindestens auf einer optischen Symmetrieachse senkrecht steht.

Zur Untersuchung der dritten Gleichung

$$R = 0$$

empfiehlt es sich, das soeben gefundene Ergebnis zu verwerten und zur Vereinfachung der Formeln die in der xy-Ebene gelegene Symmetrieachse etwa mit der x-Achse zusammenfallen zu lassen. Natürlich kann jede der drei Achsen ξ, η, ζ in Betracht kommen. Es genüge jedoch, die Rechnung für

$$x \parallel \xi$$

durchzuführen. Dann spezialisiert sich das Schema I zu

·	x	y	z
ξ	1	0	0
η	0	$\cos\vartheta$	$\sin\vartheta$
ζ	0	$-\sin\vartheta$	$\cos\vartheta$

wo ϑ den Winkel $\overrightarrow{y\eta} = \overrightarrow{z\zeta}$ bedeutet, der von $+x$ aus gesehen im Gegenzeigersinn positiv gerechnet ist. Durch diese Koordinatentransformation wird

$$Q \equiv 0,$$

weil

$$L_{12} = 0 \text{ und } M_{12} = 0,$$

und an Stelle von

$$P = 0 \text{ und } R = 0$$

erhält man nach einfacher Rechnung die Gleichungen

$$[2\,q^2 - (a^2 + b^2)]\,(q^2 - c^2) = -(c^2 - b^2)\,(q^2 - a^2)\sin^2\vartheta$$

$$(a^2 - b^2)\,(q^2 - c^2) = (c^2 - b^2)\,(q^2 - a^2)\sin^2\vartheta,$$

deren gleichzeitiges Bestehen nur möglich ist, wenn entweder

$$q^2 = c^2 \text{ und } \sin^2\vartheta = 0$$

oder aber

$$q^2 = b^2 \text{ und } \sin^2\vartheta = 1$$

was in beiden Fällen besagt, daß die z-Achse nicht bloß auf einer optischen Symmetrieachse senkrecht steht sondern selber eine solche ist. Die Kurve C zerfällt deshalb in einen Kreis und ein Oval und hat im angenommenen Fall die Gleichung

$$(q^2 - c^2)\;[q^2 - (b^2\cos^2\psi + a^2\sin^2\psi)] = 0$$

$$\text{bzw. } (q^2 - b^2)\;[q^2 - (c^2\cos^2\psi + a^2\sin^2\psi)] = 0.$$

Dem Kreis eignet kein extremer Radiusvektor — eine geometrische Eigenschaft, die ihren analytischen Ausdruck darin findet, daß $dq : d\psi$ in der Unbestimmtheitsform $0:0$ auftritt, sobald die Kurve C in ein Oval und einen Kreis zerfällt und q gleich dem Radius des Kreises gesetzt wird. Denn da unter der Voraussetzung

$$P = 0,\; Q = 0,\; R = 0$$

auch die Gleichung

$$R^2 - P^2 - 4Q^2 = 0$$

identisch erfüllt ist, so gilt

$$\frac{dq}{d\psi} = \frac{R^2 - P^2 - 4Q^2}{P^2 + 4Q^2} = \frac{0}{0}.$$

Abschließend kann man sagen, daß die Gleichung

$$P^2 + 4Q^2 = 0$$

dann und nur dann besteht, wenn die Prismenkante eine optische Symmetrieachse ist, und q die Geschwindigkeit jener Welle bedeutet, welche parallel zur Prismenkante schwingt. — Im Folgenden möge diese spezielle Orientierung, welche vorläufig kein weiteres Interesse bietet, ausgeschlossen sein.

9. In Gl. IIIa möge jetzt q ein bestimmter Wert beigelegt werden: welches sind die zugehörigen Werte von ψ? Um dieselben zu finden, kann man das Glied mit $\cos 2\psi$ auf die eine Seite, die beiden anderen Glieder auf die andere Seite bringen, sodann quadrieren und hernach $\cos^2 2\psi$ durch $1 - \sin^2 2\psi$ ersetzen. Man erhält so

$$\sin 2\psi = -\frac{2QR \pm P\sqrt{P^2 - R^2 + 4Q^2}}{P^2 + 4Q^2}.$$

In ähnlicher Weise bekommt man[1])

$$\cos 2\psi = -\frac{PR \mp 2Q\sqrt{P^2 - R^2 + 4Q^2}}{P^2 + 4Q^2}.$$

Setzt man diese Werte in IIIa ein, so ergibt sich, daß in $\sin 2\psi$ und $\cos 2\psi$ die Radikale mit entgegengesetztem Vorzeichen zu nehmen sind, so wie es in den beiden Formeln geschehen ist, wo die beiden obern und die beiden untern Zeichen jedesmal zusammengehören.

Um reelle Lösungen für ψ zu erhalten, muß **1.** der Radikand positiv und **2.** der Zähler in beiden Brüchen, absolut genommen, kleiner wie der Nenner sein. Was die erste Bedingung anbelangt, so beachte man, daß nach dem Schluß von § 7 die Beziehung besteht

$$P^2 - R^2 + 4Q^2 \equiv -4(q^2 - a^2)(q^2 - b_1^2)(q^2 - b_2^2)(q^2 - c^2),$$

---

[1]) Ist $P = Q = R = 0$, so werden $\sin 2\psi$ und $\cos 2\psi$ unbestimmt, in Übereinstimmung mit dem obigen Ergebnis.

worin b_1^2 und b_2^2 die beiden mittleren Wurzeln bedeuten, so zwar, daß

$$a^2 > b_1^2 > b_2^2 > c^2.$$

Demgemäß kann q^2 niemals zwischen b_1^2 und b_2^2 liegen, sondern muß ausschließlich dem ersten oder dem dritten Intervall angehören, da einzig bei dieser Annahme stets eine ungerade Anzahl jener vier Faktoren negativ, der ganze Ausdruck also positiv ist.

Sind demnach die Radikale und damit die Zähler von $\sin 2\psi$ und $\cos 2\psi$ immer reell, so bietet die zweite Bedingung keine Schwierigkeit mehr, wenn man beachtet, daß die Beziehung

$$\sin^2 2\psi + \cos^2 2\psi = 1$$

identisch erfüllt wird.

Weil die Kurve C wegen Gl. III zentrosymmetrisch ist, kann man sich auf das Intervall

$$0 \leqq \psi \leqq \pi$$

beschränken und erhält somit eindeutig bestimmte Werte von ψ und zwar für jeden q-Wert zwei verschiedene Werte von ψ $(0 \leqq \psi \leqq \pi)$, ausgenommen wenn

$$P^2 - R^2 + 4\,Q^2 = 0$$

d. h. wenn q^2 eine der vier Wurzeln der Gleichung VI ist, wodurch die beiden ψ-Werte gleich werden. Daraus folgt, daß die Kurve C im allgemeinen vier gleiche Radienvektoren hat, die zu je zweien auf einem Durchmesser liegen. Dagegen kommen die Radienvektoren mit den Längen a, b, c und d, welche an das Verschwinden des Radikanden $P^2 - R^2 + 4\,Q^2$ gebunden sind, nur je zweimal vor und bestimmen zusammen vier ausgezeichnete Durchmesser der Kurve C. Drei dieser Durchmesser (nämlich a, b und c) müssen, wie eine einfache Überlegung an Hand einer Skizze der Wellennormalenfläche zeigt, die Schnittlinien der optischen Symmetrieebenen mit dem Hauptschnitt des Prismas sein, während sich die Bedeutung der vierten Richtung mit Hilfe des Indexellipsoides (Elastizitätsellipsoides) ergibt. Nach Fresnel sind nämlich für jede Fortpflanzungsrichtung die zugehörigen Schwingungsrichtungen und Wellennormalengeschwindigkeiten bestimmt

durch die Richtung und reziproke Länge der Halbachsen jener Ellipse, in welcher das Indexellipsoid von der zur Fortpflanzungsrichtung senkrechten Diametralebene geschnitten wird. Da sich nun die Gleichung dieses Ellipsoides, bezogen auf die Hauptschwingungsrichtungen als Achsen, in der Form schreibt

$$a^2 \nu_1^2 + b^2 \nu_2^2 + c^2 \nu_3^2 = \frac{1}{\varrho^2},$$

so ergibt sich aus dem Schema I unmittelbar, daß

$$d^2 \equiv a^2 \alpha_3^2 + b^2 \beta_3^2 + c^2 \gamma_3^2$$

das Quadrat der reziproken Länge jenes Radiusvektors des Indexellipsoides ist, der auf dem Prismenhauptschnitt senkrecht steht, oder anders ausgedrückt, daß d^2 das Quadrat der Fortpflanzungsgeschwindigkeit jener Welle ist, die parallel zur brechenden Kante des Prismas schwingt. Jener vierte Durchmesser gibt darum die Richtung an, in der sich diese durch ihre Schwingungsrichtung ausgezeichnete Welle fortpflanzt.

10. An Hand einer Skizze der Wellennormalenfläche[1]) erkennt man leicht, daß a dem äußeren, c aber dem inneren Zweige der Kurve angehört, während b bald auf dem inneren, bald auf dem äußeren Zweige liegen kann, und zwar ist b Minimum des äußeren und d Maximum des inneren Zweiges, wenn der Prismenquerschnitt durch jenen Winkel der optischen Achsen geht, der von der ξ-Achse halbiert wird, dagegen ist b Maximum des inneren und d Minimum des äußeren Zweiges, wenn der Prismenquerschnitt durch jenen Winkel der optischen Achsen geht, der von der ζ-Achse halbiert wird. Im ersten Fall ist $b > d$, im zweiten $b < d$ und es gibt für den betreffenden Schnitt keinen Kurvenradius, dessen Länge dem Intervall (b, d) angehört (vergl. die Diskussion in § 9).

11. Ohne auf Einzelheiten einzugehen, sei bei dieser Gelegenheit doch darauf hingewiesen, daß die Entscheidung

---

[1]) Man vergl. für das folgende: Chr. Soret, Über die Anwendung der Totalreflexion zur Messung der Brechungsexponenten zweiachsiger Kristalle. Zeitsch. für Krist. und Mineral. **15.** 45. In Betracht kommt namentlich S. 47 f.

zwischen b und d getroffen werden könnte, wenn die Lage der optischen Achsen wenigstens insoweit bekannt wäre, daß man wüßte, durch welchen Winkel derselben der Prismenquerschnitt verläuft. Da aber die Lagebestimmung der optischen Achsen den Wert von b meistens voraussetzt oder selber liefert, so wird diese Methode in der Mehrzahl der Fälle praktisch wertlos. — Die Entscheidung zwischen b und d könnte natürlich auch dann getroffen werden, wenn, um andere, dem Mineralogen weniger naheliegende Beziehungen zu übergehen, etwa der scheinbare Winkel der optischen Achsen bekannt wäre oder wenn die Kurve C an einem zweiten, anders orientierten Prisma[1]) bestimmt würde, wodurch sich im allgemeinen eine von d verschiedene Wurzel d' ergäbe.

12. Damit a, b, c und d wirklich extreme Radienvektoren der Kurve C seien, müssen neben der Gleichung (vergl. § 7)

$$\frac{\partial f}{\partial \psi} = 0$$

noch die beiden Bedingungen

$$\frac{\partial f}{\partial q} \neq 0, \infty \text{ und } \frac{d^2 q}{d\psi^2} = -\frac{\partial^2 f}{\partial \psi^2} : \frac{\partial f}{\partial q} \neq 0$$

erfüllt sein. Die partielle Differentiation von $f(q, \psi)$ (Gl. IIIa) nach q ergibt den Ausdruck

$$\frac{\partial f}{\partial q} \equiv 2q \left\{ 4q^2 - [(L_{11} + L_{22}) + (L_{11} - L_{22}) \cos 2\psi + 2 L_{12} \sin 2\psi] \right\},$$

der nach Ersetzung von $\cos 2\psi$ und $\sin 2\psi$ durch die § 9 gefundenen Werte und mit Rücksicht auf den Umstand, daß wegen

$$q^2 = a^2,\ b^2,\ c^2,\ d^2$$

auch (§ 7)

$$P^2 + 4 Q^2 \equiv R^2$$

gesetzt werden kann, schließlich die Form annimmt:

$$\frac{\partial f}{\partial q} \equiv \frac{2}{R} \left\{ 8 q^7 - 6 (L_{11} + L_{22}) q^5 + 4 (L_{11} L_{22} + M_{11} + M_{22} - L_{12}^2) q^3 \right.$$
$$\left. - 2 (L_{11} M_{22} + L_{22} M_{11} - 2 L_{12} M_{12}) q \right\}.$$

---

[1]) Das analoge Problem im Fall der Totalreflexion an einer beliebig orientierten Kristallfläche wurde von Ch. Soret und L. Perrot behandelt. Vergl. Pockels Lehrbuch p. 130.

Der Klammerausdruck ist die erste Ableitung der Gleichung VI (falls darin u wieder durch q^2 ersetzt wird) und darum sicher von Null verschieden, wofern die Gleichung VI keine Doppelwurzel hat. Eine solche wäre aber einzig dadurch möglich, daß d mit einer Hauptlichtgeschwindigkeit zusammenfallen — also, um von einem anderen gleich zu behandelnden Fall vorläufig abzusehen, die Prismenkante eine optische Symmetrieachse würde, was hier ausgeschlossen ist.

Wegen der Annahme, daß die Prismenkante nicht optische Symmetrieachse sei, ist auch R von Null verschieden, und da zudem der Klammerausdruck selber für keinen der in Betracht kommenden Werte unendlich groß werden kann, so bleibt $\partial f : \partial q$ notwendigerweise endlich.

Damit endlich noch

$$d^2q : d\psi^2 \neq 0,$$

ist wegen des letzten Ergebnisses, wornach $\partial f : \partial q$ weder unendlich klein noch unendlich groß werden kann, notwendig und hinreichend, daß

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \psi^2} \equiv -4\,(P \cos 2\psi + 2\,Q \sin 2\psi) \neq 0$$

oder daß

$$P \cos 2\psi + 2\,Q \sin 2\psi \neq 0$$

oder, wenn die trigonometrischen Funktionen wiederum durch ihre Ausdrücke in P, Q und R ersetzt werden, daß

$$\frac{P^2 + 4\,Q^2}{R} \equiv R \neq 0,$$

eine Bedingung, die immer erfüllt ist, wenn

$$P^2 + 4\,Q^2 - R^2 = 0,$$

ohne daß gleichzeitig

$$P = 0, \quad Q = 0, \quad R = 0,$$

was hier ja vorausgesetzt ist.

13. Nun möge noch der soeben ausgeschlossene Fall erledigt werden, wo d gleich einer Hauptlichtgeschwindigkeit wird.

Neben dem bereits in § 8 erwähnten Fall, wo die Prismenkante optische Symmetrieachse ist, kann sich das Zusammenfallen von zwei Wurzeln der Gl. VI bei zweiachsigen Kristallen

auch dann noch ereignen, wenn, wie in anderem Zusammenhang bewiesen werden soll, eine der beiden optischen Achsen in die Querschnittsebene des Prismas zu liegen kommt. Eine einfache Überlegung zeigt, daß dann die Kurve C zwei Doppelpunkte hat, für welche die Ableitung von q nach ψ die unbestimmte Form

$$dq : d\psi = 0 : 0$$

annehmen muß. Merkwürdigerweise wird aber der Radiusvektor dieses Doppelpunktes ein Extremum in vollkommener Übereinstimmung mit den obigen Erwägungen, wornach b und c die maximalen und minimalen Radienvektoren des äußeren und inneren Zweiges der Kurve C sind. Nähern sich nämlich die beiden Zweige, so vermindert sich die Differenz von b und d, bis schließlich im Falle der Berührung b und d gleich werden, so daß an der Berührungsstelle (oder besser Durchdringungsstelle) b maximaler Radiusvektor des inneren und minimaler des äußeren Kurvenzweiges wird.

Um dieses der Anschauung entnommene Resultat auch analytisch herzuleiten, sollen zuerst die speziellen Werte der Richtungskosinus $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ ermittelt werden. Hierbei empfiehlt es sich, das $\xi\eta\zeta$-System, dessen Achsen zunächst mit x, y und z zusammenfallen mögen, so um die $\eta = y$-Achse zu drehen, daß etwa die zwischen $+\xi$ und $+\zeta$ gelegene optische Achse A_1 mit $+x$ zusammenfalle. Hernach wird man, um eine möglichst allgemeine Lage zu erhalten, das bereits gedrehte $\xi\eta\zeta$-System noch so weit um die x-Achse drehen, bis $+\eta$ zwischen $+y$ und $+z$ zu liegen kommt und mit $+y$ einen Winkel φ bildet. Bezeichnet Ω den in der ursprünglichen Lage von $+z$ und A_1 eingeschlossenen Winkel, so nimmt das Schema I die nachstehende spezielle Form an.

	x	y	z
ξ	$\sin\Omega$	$\sin\varphi\cos\Omega$	$-\cos\varphi\cos\Omega$
η	0	$\cos\varphi$	$\sin\varphi$
ζ	$\cos\Omega$	$-\sin\varphi\sin\Omega$	$\cos\varphi\sin\Omega$

Mit Rücksicht auf die bekannten Beziehungen

$$\sin \Omega = \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2 - c^2}} \qquad \cos \Omega = \sqrt{\frac{b^2 - c^2}{a^2 - c^2}}$$

wird

$$\begin{aligned}
L_{11} &= 2\, b^2 \\
L_{22} &= a^2 + c^2 \\
L_{12} &= -\sin\varphi \sqrt{(a^2 - b^2)\,(b^2 - c^2)} \\
M_{11} &= b^4 \\
M_{22} &= a^2 c^2 + (a^2 - b^2)\,(b^2 - c^2) \sin^2\varphi \\
M_{12} &= -\, b^2 \sin\varphi \sqrt{(a^2 - b^2)\,(b^2 - c^2)}.
\end{aligned}$$

Die Substitution dieser Werte in Gleichung III[1]) gibt für $\psi = 0$ ohne weiteres

$$q^4 - 2\, b^2 q^2 + b^4 \equiv (q^2 - b^2)^2 = 0,$$

dagegen für jeden anderen Wert von ψ zwei Werte q'^2 und q''^2 derart, daß

$$q'^2 < b^2 < q''^2.$$

Der Beweis ist äußerst einfach. Ist nämlich

$$f(x^2) \equiv (x^2 - q'^2)\,(x^2 - q''^2) = 0$$

eine biquadratische Gleichung, so wird, wie bekannt, die Funktion $f(x^2)$ für jeden reellen x^2-Wert, der zwischen den beiden reellen und positiven Wurzeln $x'^2 = q'^2$ und $x''^2 = q''^2$ liegt, negativ, und umgekehrt muß jeder positive x^2-Wert, für den $f(x^2)$ negativ wird, zwischen den beiden reellen Wurzeln q'^2 und q''^2 liegen. Um also zu zeigen, daß die Doppelungleichung

$$q'^2 < b^2 < q''^2$$

für jeden ψ-Wert in der Umgebung von $\psi = 0, \pi$ erfüllt ist, genügt es, etwa in Gl. IIIa q^2 durch b^2 zu ersetzen und den vereinfachten Ausdruck auf sein Vorzeichen zu prüfen. Eine einfache Rechnung gibt

$$f(q^2 = b^2, \psi) \equiv -\,(a^2 - b^2)\,(b^2 - c^2) \cos^2\varphi\,(1 - \cos^2\psi).$$

Da die rechte Seite im allgemeinen negativ ist und bei festgegebenem φ $\left(\varphi \neq \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$ nur für $\psi = n\pi$ verschwindet, so

---

[1]) Die Substitution dieser nämlichen Werte in Gleichung IIIa usw. zeigt, daß für $\psi = 0$ tatsächlich $dq : d\psi = 0 : 0$ wird.

besagt sie also, daß in der Umgebung von $\psi = 0, \pi$ der Radiusvektor des innern Kurvenzweiges kleiner, der des äußern größer ist wie b.

Erwähnenswert ist noch, daß unter diesen Voraussetzungen a^2, b^2, b^2 und c^2 die vier Wurzeln der Gleichung VI sind, so daß ihre Lösungen ganz allgemein und ausnahmslos die Quadrate der maximalen und minimalen Radienvektoren der Kurve C ergeben. Sind zwei Wurzeln einander gleich, so entsprechen sie entweder dem Radius eines Kreises, zu dem sich der eine Kurvenzweig vereinfacht (uneigentliches Extremum; die brechende Kante ist eine optische Symmetrieachse) oder aber den Doppelpunkten, in welchen sich die beiden Kurvenzweige kreuzen (die brechende Kante steht auf einer optischen Achse [= Binormalen] senkrecht).

14. Es war ausdrückliche Voraussetzung der bisherigen Entwicklungen, daß die optische Orientierung des Prismas, d. h. die Lage des $\xi\eta\zeta$-Systems in bezug auf das x y z-System unbekannt sei. Die zu lösende Doppelaufgabe bestand demnach einerseits in der Ermittlung der drei Hauptlichtgeschwindigkeiten und anderseits in der Lagebestimmung der optischen Symmetrieachsen. Diese letztere, wenn überhaupt möglich, hat aber nur dann einen Sinn, wenn es gelingt, die Orientierung der Hauptschwingungsrichtungen auch kristallographisch festzulegen. Dazu ist vor allem die Kenntnis der kristallographischen Orientierung des Prismas erforderlich. Diese vorausgesetzt, wird sich nun ein wesentlicher Unterschied zwischen den drei Systemen der zweiachsigen Kristalle herausstellen.

I. Rhombische Kristalle.

15. Die kristallographischen Achsenebenen sind optische Symmetrieebenen. Bei bekannter kristallographischer Orientierung des Prismas ist es möglich, ihre Schnittgeraden mit dem Prismenhauptschnitt zu berechnen und damit die Richtungen festzulegen, längs derer eine Lichtgeschwindigkeit a bzw. b oder c ist. Da die Fortpflanzungsrichtung der d-Welle hiervon im allgemeinen verschieden ist — der Beweis soll später (§ 27) geliefert werden —, so ist es möglich, b und d

zu unterscheiden und damit die Hauptlichtgeschwindigkeiten mit Hilfe eines beliebigen Prismas eindeutig zu bestimmen. Wegen der unvermeidlichen Messungsfehler wird die Übereinstimmung zwischen Rechnung und Beobachtung nicht vollkommen sein. Man erhält darum drei Bedingungsgleichungen als Äquivalent der drei überzähligen Beobachtungsreihen.

16. M. Born[1]) kam vor vielen Jahren zu einem ähnlichen Resultat, indem er, die Kenntnis der Richtungskosinus des Schemas I voraussetzend, die Gleichung III nach b^2c^2, c^2a^2, a^2b^2, a^2, b^2 und c^2 ordnet und mit sechs Wertpaaren (q_i, ψ_i)

$$b^2c^2 = A_1 \qquad c^2a^2 = B_1 \qquad a^2b^2 = C_1$$
$$a^2 = A_2 \qquad b^2 = B_2 \qquad c^2 = C_2$$

berechnet. Wegen der überschüssigen Beobachtungen ergeben sich die Bedingungsgleichungen

$$A_2^2 = \frac{B_1 C_1}{A_1} \qquad B_2^2 = \frac{C_1 A_1}{B_1} \qquad C_2^2 = \frac{A_1 B_1}{C_1}.$$

Nicht unerwähnt bleibe, daß die Lage der optischen Symmetrieachsen nicht als völlig bekannt vorausgesetzt zu werden braucht, sondern daß es genügt, zu wissen, daß die betreffenden Richtungen überhaupt Symmetrieachsen sind. Welche derselben die ξ- bzw. η- und ζ-Achse sei, ergibt sich dann hinterher durch einfache Überlegungen.

17. Die einzige Ausnahme dieser Regel tritt ein, wenn der Prismenhauptschnitt durch eine und nur eine optische Symmetrieachse geht, so daß zwei jener Ebenenspuren zusammenfallen. Ist diese Symmetrieachse die ξ- oder ζ-Achse, so ist freilich die eindeutige Bestimmung der Hauptlichtgeschwindigkeiten (und, wie sich später § 23 Anm. zeigen wird, auch der optischen Orientierung) noch möglich, denn mit der Richtung dieser Symmetrieachse fallen die Radienvektoren b und c bzw. a und b zusammen, während der Radiusvektor d in anderer Richtung (vergl. § 27) liegt (wegen der Voraussetzung, daß der Prismenhauptschnitt nur eine

---

[1]) M. Born, N. Jahrb. für Miner. B.-Bd. **5** (1877), 40 ff.

optische Symmetrieachse enthalte). b ist folglich durch die bekannte Richtung des zugeordneten Radiusvektors der Kurve C ausgezeichnet und d gegenüber kenntlich gemacht. Wird dagegen die im Prismenhauptschnitt gelegene optische Symmetrieachse zur η-Achse, so fallen mit dieser bekannten Richtung die a und c zugeordneten Radienvektoren zusammen, während die zu b und d gehörigen Radienvektoren der Kurve C hiermit einen rechten Winkel bilden, also die gleiche Richtung haben und folglich nicht mehr unterschieden werden können.

18. Eine eindeutige Lösung kann indessen in anderer Weise erzielt werden. Denn wegen der bekannten kristallographischen Orientierung des Prismas sind nur die in Fig. 2a und Fig. 2b veranschaulichten Anordnungen möglich. Das Schema I geht dabei in das folgende über.

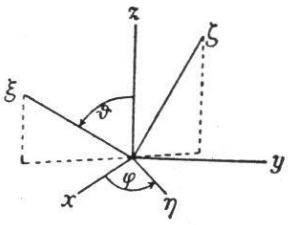

Fig. 2a

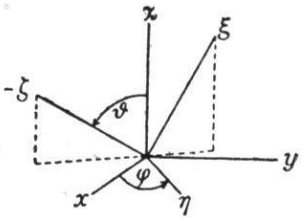

Fig. 2b

Fig. 2a	x	y	z
ξ	$\sin\varphi \sin\vartheta$	$-\cos\varphi \sin\vartheta$	$\cos\vartheta$
η	$\cos\varphi$	$\sin\varphi$	0
ζ	$-\sin\varphi \cos\vartheta$	$\cos\varphi \cos\vartheta$	$\sin\vartheta$
Fig. 2b	**x**	**y**	**z**
ξ	$-\sin\varphi \cos\vartheta$	$\cos\varphi \cos\vartheta$	$\sin\vartheta$
η	$\cos\varphi$	$\sin\varphi$	0
ζ	$-\sin\varphi \sin\vartheta$	$+\cos\varphi \sin\vartheta$	$-\cos\vartheta$

Auf Grund dieses Schemas, worin φ und ϑ bekannt sind, läßt sich, da bezüglich der Werte von a^2 und c^2 jeder Zweifel ausgeschlossen ist, nicht nur b^2 von d^2 unterscheiden, sondern auch ermitteln, ob der eine oder der andere der beiden Fälle vorliege. Es ist nämlich im Falle der Fig. 2a

$$d^2 = a^2 \cos^2\vartheta + c^2 \sin^2\vartheta$$

und im Falle der Fig. 2b

$$d^2 = a^2 \sin^2 \vartheta + c^2 \cos^2 \vartheta.$$

Einer dieser Werte von d^2, die sich zum vorneherein berechnen lassen, muß mit einer der mittleren Wurzeln von Gleichung VI übereinstimmen. Dadurch fällt die Zweideutigkeit bezüglich b^2 sowohl als auch der Orientierung dahin. Einzig für $\vartheta = 45^0$ oder 135^0 stellt sich eine Zweideutigkeit ein, indem es unmöglich wird zu entscheiden, ob es sich um den in Fig. 2a oder in Fig. 2b dargestellten Fall handelt, ohne daß aber dabei die Entscheidung zwischen b^2 und d^2 selber unmöglich würde.

19. Es ist übrigens interessant, daß wenn η in den Prismenquerschnitt fällt, die von M. Born angegebene Methode versagt, denn nach Fig. 2a[1]) und mit Rücksicht auf die zugehörige Form des Schemas I geht Gleichung III über in:

$$\begin{aligned} &\sin^2(\varphi - \psi_i) \sin^2 \vartheta \cdot b^2 c^2 + \cos^2(\varphi - \psi_i) \cdot c^2 a^2 \\ &\quad + \sin^2(\varphi - \psi_i) \cos^2 \vartheta \cdot a^2 b^2 - q_i^2 [\cos^2(\varphi - \psi_i) \\ &\quad + \sin^2(\varphi - \psi_i) \cos^2 \vartheta] a^2 - q_i^2 \sin^2(\varphi - \psi_i) \cdot b^2 \\ &\quad - q_i^2 [\sin^2(\varphi - \psi_i) \sin^2 \vartheta + \cos^2(\varphi - \psi_i)] c^2 + q_i^4 = 0 \end{aligned}$$

Man beachtet nun leicht, daß das Gleichungssystem, welches sich aus sechs zusammengehörigen Wertpaaren q_i, ψ_i $(i = 1,2..6)$ ergibt, eine identisch verschwindende Determinante hat (weil nach Abspaltung von $\sin^2 \vartheta$ resp. $\cos^2 \vartheta$ die erste Kolonne gleich der dritten wird usw.), also nicht lösbar[2]) ist.

II. Monokline Kristalle.

20. Dem Gesagten zufolge ist jede Zweideutigkeit behoben, falls die Orthodiagonale der η-Achse parallel ist, ohne im Prismenhauptschnitt zu liegen.[3])

III. Trikline Kristalle.

21. Die Entscheidung zwischen b und d kann nicht getroffen werden.

---

[1]) Entsprechendes gilt für Fig. 2b.

[2]) Würde eine andere Hauptschwingungsrichtung in die Querschnittsebene des Prismas fallen, so erhielte man die entsprechenden Formeln durch zyklische Vertauschung von a^2, b^2 und c^2. Daraus folgt, daß auch in diesen Fällen die Methode Borns versagen muß.

[3]) Die vorhergehenden Überlegungen können wegen Unkenntnis des Winkels ϑ nicht auf das monokline System übertragen werden.

22. Es ist bekannt, daß die Bestimmung der Brechungsindizes eines Kristalls mit Hilfe der Totalreflexion an einer einzigen Fläche zu Ergebnissen führt, die den bisher gefundenen[1]) ähnlich sind, nur handelt es sich dabei um eine Kurve S, welche man als Grenzlinie der totalen Reflexion bezeichnen kann. Sie besteht im allgemeinen aus zwei getrennten Teilen, deren Maxima und Minima durch die Radienvektoren von der Länge a, b, c und d_1 bestimmt sind. Wiederum ist die Lösung zweideutig. Da aber d_1^2 das Quadrat der reziproken Länge jenes Radiusvektors des Fresnelschen Ellipsoides ist, der auf der Grenzebene senkrecht steht, so muß die d_1-Welle parallel der Einfallsebene schwingen und kann mit Hilfe eines Nikolschen Prismas von jeder anderen Welle unterschieden — das Problem also eindeutig gelöst werden.

Es läge nun der Gedanke nahe, auch beim Prisma die ausgezeichnete Schwingungsrichtung der d-Welle heranzuziehen, um zwischen b und d zu entscheiden. Allein die Tatsache, daß der Schwingungszustand des ausgetretenen Lichtes von demjenigen im Kristall im allgemeinen verschieden ist, vor allem aber der Umstand, daß die Orientierung des Prismas die Beobachtung der d-Welle ohne besondere Hilfsmittel in den seltensten Fällen gestatten wird, machen die angedeutete Methode, so naturgemäß sie auch erscheinen mag, vollständig illusorisch.

23. Wäre nun in einem gegebenen Falle die eindeutige Bestimmung der Hauptlichtgeschwindigkeiten aus irgendeinem Grunde möglich, so gestatten die beiden ersten Gruppen (Kolonnen) der Gleichung V die eindeutige Ermittlung der absoluten Werte von $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ $(i = 1, 2)$. Damit sind natürlich auch die absoluten Werte von $\alpha_3, \beta_3, \gamma_3$ eindeutig bestimmt. Die Vorzeichen von $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ kann man beliebig wählen, weil dadurch nur der positive Richtungssinn der Achsen

[1] Auf die soeben erläuterte Ausnahmestellung der rhombischen und z. T. monoklinen Kristalle, die natürlich auch im Falle der Totalreflexion bestehen bleibt, scheint bislang niemand aufmerksam gemacht zu haben.

und die Rechts- oder Linkshändigkeit des Systems festgelegt wird. Wegen der dritten Gruppe der Gleichung V findet man hierdurch ganz bestimmte Vorzeichen für $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$, wogegen aus

$$\alpha_2 \alpha_3 + \beta_2 \beta_3 + \gamma_2 \gamma_3 = 0$$
$$\alpha_1 \alpha_3 + \beta_1 \beta_3 + \gamma_1 \gamma_3 = 0$$

nur die Verhältnisse $\alpha_3 : \beta_3 : \gamma_3$, d. h. die relativen Vorzeichen von $\alpha_3, \beta_3, \gamma_3$ erhalten werden, so daß sowohl $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \ldots$ als auch $(\alpha_1, \alpha_2, -\alpha_3) \ldots$ Lösungen der Gl. IVb und V sind. Die Rechnung ergibt daher für die Hauptschwingungsrichtungen zwei, den beobachteten Erscheinungen genügende Orientierungen, die zur brechenden Kante des Prismas symmetrisch liegen. Das beweist — und die Diskussion der Gl. IVb und V bestätigt es —, daß zur eindeutigen Bestimmung der Orientierung die Lage einer Hauptschwingungsrichtung bekannt sein muß, die aber nicht im Hauptschnitt des Prismas gelegen sein darf,[1]) weil sonst die Wahl zwischen den beiden symmetrischen Systemen nicht möglich ist, da die gegebene Richtung wegen ihrer symmetrischen Lage zur brechenden Kante beiden Systemen angehört. Ebenfalls unbestimmt wird die Orientierung, wenn eine Hauptschwingungsrichtung mit z einen Winkel von 45° bildet und eine andere im Prismenhauptschnitt liegt (vergl. den Schluß von § 18 und die vorstehende Anmerkung).

24. Zum gleichen Resultat führt das von Cornu[2]) und Viola[3]) für das Reflexionsproblem abgeleitete, aber auch im vorliegenden Fall gültige Gleichungssystem:

---

[1]) Wenn oben, § 17, gleichwohl gesagt wurde, die Orientierung lasse sich eindeutig bestimmen, trotzdem die bekannte Hauptschwingungsrichtung in die Querschnittsebene des Prismas fällt, so liegt der Grund darin, daß von den beiden möglichen Systemen, die zur z-Achse symmetrisch sind, nur das eine mit dem krystallographischen Achsenkreuz zusammenfallen kann, falls nicht zufällig die beiden, nicht im Hauptschnitt des Prismas gelegenen optischen Symmetrieachsen zur z-Achse selber symmetrisch liegen.

[2]) Cornu, Bulletin de la soc. fr. de minéral. **25.** 17.

[3]) Zusammenstellung seiner zahlreichen diesbez. Publikationen im Bull. min. **25**. 88. Vergl. auch ib. 147.

$$\cos^2 \alpha_3 = \operatorname{cotg} \overset{\curvearrowright}{AB} \cdot \operatorname{cotg} \overset{\curvearrowright}{CA}$$

$$\cos^2 \beta_3 = \operatorname{cotg} \overset{\curvearrowright}{BC} \cdot \operatorname{cotg} \overset{\curvearrowright}{AB} \qquad \overset{\curvearrowright}{AB} + \overset{\curvearrowright}{BC} + \overset{\curvearrowright}{CA} = 2\pi$$

$$\cos^2 \gamma_3 = \operatorname{cotg} \overset{\curvearrowright}{CA} \cdot \operatorname{cotg} \overset{\curvearrowright}{BC}$$

Die Winkel $\overset{\curvearrowright}{AB}$, $\overset{\curvearrowright}{BC}$ und $\overset{\curvearrowright}{CA}$ sind aus Fig. 3 verständlich, in der OA, OB, OC die Richtungen angeben, längs derer die Radienvektoren der Kurve C gleich a, b und c werden. Dabei wird zunächst vorausgesetzt, daß die z-Achse in das Innere oder die Umgrenzung des Trieders $O\xi\eta\zeta$ falle — eine Annahme, die natürlich immer zulässig ist, wofern die drei Richtungen $O\xi$, $O\eta$ und $O\zeta$ ein rechts- oder linkshändiges Achsensystem bilden können. Will man aber beim einmal angenommenen Rechtssystem bleiben, so hat man — falls die über dem Prismenquerschnitt gelegenen $\xi\eta\zeta$-Richtungen kein Rechtssystem bilden — bloß ihre Verlängerungen über O hinaus zu betrachten. Da die Winkel zwischen $+z$ und den positiven Richtungen der $\xi\eta\zeta$-Achsen im einen Fall zu denjenigen im anderen Fall supplementär sind, so verändern sich die Quadrate ihrer Kosinus nicht und das Cornu-Violasche Formelsystem bleibt gültig, wofern nur die positive oder negative z-Achse in das Innere oder die Umrandung des Trieders $O\xi\eta\zeta$ fällt, was immer realisierbar ist.

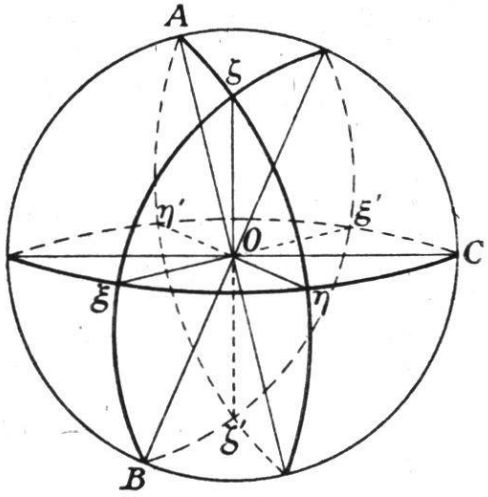

Fig. 3

Aus der Beziehung zwischen A, B und C einerseits und ξ, η und ζ anderseits folgt, daß sie aufeinander senkrecht stehen. Die Pole von ξ... müssen daher auf den zu A... senkrechten Durchmessern liegen. Da aber die Gleichungen des fraglichen Systems in $\cos \alpha_3$... quadratisch sind, so erhält man — Cornu und Viola scheinen dies nicht beachtet zu haben — für α_3... je vier Werte, (nämlich $\pm \alpha_3$... und $\pi \pm \alpha_3$...), welche je zwei durch den Ursprung gehende Gerade bestimmen. Die der positiven z-Achse zunächstliegenden Pole sind in der stereographischen Projektion der

Fig. 3 eingetragen und beweisen augenscheinlich das oben auf anderem Weg gefundene Resultat.[1])

25. Sind die Hauptlichtgeschwindigkeiten a, b und c gegeben, so ist es bei bekannter Lage der Hauptschwingungsrichtungen möglich, die Richtung OD zu bestimmen, längs der sich jene vierte Welle mit der Geschwindigkeit d fortpflanzt. Cornu[2]) glaubte nun, hierauf eine Methode gründen zu können, welche erlaubt, b und d zu unterscheiden. Nach ihm brauchte man bloß den einen dieser Werte als den richtigen anzunehmen und hernach d zu berechnen. Fällt dieser berechnete Wert mit dem experimentell gefundenen überein, so war die Wahl gut — wenn nicht, so hat man einfach den anderen Wert als den richtigen zu nehmen.

Viola[3]) (z. T. auch schon Cornu[4])) prüfte diese Ansicht am Beispiel der Weinsteinsäure, wofür Cornu[5]) mit Hilfe der Totalreflexion folgende auf vier Dezimalen abgerundete Werte gefunden hatte:

$1/a = 1{,}4965$	$AB = 63^0\,25'$	
$1/b = 1{,}5363$[6])	$BC = 50^0\,15'$	$AD = 43^0\,15'$
$1/c = 1{,}6063$	$CA = 66^0\,20' - 180^0$	$DC = 70^0\,25'$
$1/d = 1{,}5526$		

Mit Hilfe von 1/a, 1/b, 1/c und den zugehörigen Azimuten ergibt die Rechnung:

$1/d = 1{,}5537 \quad AD = 43^0\,40' \quad BD = -19^0\,45' \quad CD = -70^0\,00'.$

Der Unterschied zwischen den beobachteten und berechneten Werten ist daher:

$-0{,}0011 \qquad -0^0\,25' \qquad -0^0\,25' \qquad -0^0\,25'.$

---

[1]) Bestimmt man, was im Fall der Totalreflexion an einer Kristallplatte (nicht aber bei der Lichtbrechung durch das Prisma) möglich ist, den Polarisationszustand des Lichtes, so kann die Entscheidung zwischen den beiden Orientierungen des $\xi\,\eta\,\zeta$-Systems leicht getroffen werden. Auf die Weise verfuhr Viola und erhielt darum ohne weiteres eindeutige Resultate.

[2]) Bull. min. **25.** 19 f.

[3]) Bull. min. **25.** 150 ff.

[4]) Bull. min. **25.** 26 ff.

[5]) Bull. min. **25.** 25, 26.

[6]) Hierfür setzt Cornu l. c. pag. 26 fälschlich 1,5637.

Geht man aber umgekehrt von 1/a, 1/d, 1/c und AD, DC, CA aus, so berechnen sich die Werte:

$1/b = 1{,}5353 \quad AB = 62^0\,52' \quad DB = 19^0\,40' \quad CB = -50^0\,48'$,

und die Differenz zwischen den gemessenen und berechneten Werten ist:

$-0{,}0010 \qquad 0^0\,33' \qquad 0^0\,30' \qquad 0^0\,33'$.

Die Unterschiede zwischen Beobachtung und Rechnung liegen demnach in diesem zweiten Fall ebenso wie im ersten innert den Grenzen der Beobachtungsfehler, so daß der Vorschlag Cornus praktisch nicht verwertbar[1]) erscheint. Ja, er ist nicht einmal theoretisch[2]) richtig, da sich zeigen läßt, daß die eine Wertgruppe die notwendige Folge der anderen ist.

Um diesen Satz zu beweisen, kann man von den beiden Indexellipsoiden[3])

$$a^2\xi^2 + b^2\eta^2 + c^2\zeta^2 = 1$$

$$a^2\xi'^2 + (a^2\cos^2\alpha + b^2\cos^2\beta + c^2\cos^2\gamma)\eta'^2 + c^2\zeta'^2 = 1$$

ausgehen, deren Hauptachsen im allgemeinen verschieden gerichtet sind, jedoch so, daß die drei Achsenebenen

$$\xi = 0 \quad \xi' = 0 \quad z = 0$$

durch eine Gerade gehen (Richtung des Radiusvektors von der Länge a), welche zur x-Achse gewählt werden möge. Man erhält dadurch die aus dem nachstehenden Schema ersichtlichen Transformationsgleichungen. Dem Winkel α ist dabei kein Richtungssinn zuzuschreiben.

	x	y	z		x	y	z
ξ	0	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	ξ'	0	$\sin\alpha'$	$\cos\alpha'$
η	$-\frac{\cos\gamma}{\sin\alpha}$	$-\cos\beta\,\mathrm{cotg}\,\alpha$	$\cos\beta$	η'	$-\frac{\cos\gamma'}{\sin\alpha'}$	$-\cos\beta'\,\mathrm{cotg}\,\alpha'$	$\cos\beta'$
ζ	$\frac{\cos\beta}{\sin\alpha}$	$-\cos\gamma\,\mathrm{cotg}\,\alpha$	$\cos\gamma$	ζ'	$\frac{\cos\beta'}{\sin\alpha'}$	$-\cos\gamma'\,\mathrm{cotg}\,\alpha'$	$\cos\gamma'$

[1]) Ob Pockels, Lehrb. der Krist. pag. 132, diese Tatsache oder einen anderen Grund im Auge hatte, ist nicht recht ersichtlich.

[2]) Die § 18 verwertete Methode ist in einem gewissen Sinn mit dem Vorschlage Cornus identisch, unterscheidet sich aber davon wesentlich darin, daß die beiden Wellennormalenflächen bzw. Ellipsoide zusammenfallende Hauptachsen haben.

[3]) α, β, γ seien die Winkel, welche ξ, η, ζ mit z bilden. Entsprechendes gelte für α', β', γ'.

Nun sollen voraussetzungsgemäß auch die drei Ebenen

$$\zeta = 0 \qquad \zeta' = 0 \qquad z = 0$$

durch eine Gerade gehen (Richtung des Radiusvektors mit der Länge c). Das ergibt als erste Bedingung

$$\begin{vmatrix} \frac{\cos\beta}{\sin\alpha} & -\cos\gamma\,\mathrm{cotg}\,\alpha & \cos\gamma \\ \frac{\cos\beta'}{\sin\alpha'} & -\cos\gamma'\,\mathrm{cotg}\,\alpha' & \cos\gamma' \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \equiv - \begin{vmatrix} \frac{\cos\beta}{\sin\alpha} & \cos\gamma\,\mathrm{cotg}\,\alpha \\ \frac{\cos\beta'}{\sin\alpha'} & \cos\gamma'\,\mathrm{cotg}\,\alpha' \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{\cos\beta'\cos\gamma\cos\alpha}{\sin\alpha'\sin\alpha} - \frac{\cos\beta\cos\gamma'\cos\alpha'}{\sin\alpha\sin\alpha'} = 0,$$

oder da

$$\sin\alpha \neq 0 \text{ und } \sin\alpha' \neq 0$$

auch

$$\cos\beta'\cos\gamma\cos\alpha = \cos\beta\cos\gamma'\cos\alpha'. \qquad a)$$

Da ferner der Abschnitt des einen Ellipsoides auf der z-Achse gleich der mittleren Halbachse des anderen Ellipsoides sein soll, so erhält man als zweite Bedingungsgleichung

$$a^2\cos^2\alpha' + (a^2\cos^2\alpha + b^2\cos^2\beta + c^2\cos^2\gamma)\cos^2\beta' + c^2\cos^2\gamma' = b^2. \qquad b)$$

Nun sind die Richtungen zu berücksichtigen, deren zugeordnete Wellen parallel der Prismenkante schwingen. Um sie zu ermitteln, lege man durch die z-Achse zwei Ebenen, welche die beiden Ellipsoide derart in zwei Ellipsen schneiden, daß je eine ihrer Hauptachsen mit der z-Achse zusammenfalle. Diese Ebenen sind, wie die analytische Geometrie lehrt, dadurch ausgezeichnet, daß sie die Tangentialebenen im Punkte 0, 0, z je längs einer Geraden schneiden, die der xy-Ebene parallel ist. Zur Aufstellung der Gleichung der besagten Tangentialebene oder noch einfacher der zu ihr parallelen, durch den Ursprung gehenden Ebene empfiehlt es sich, die Ellipsoide mit Hilfe des Schemas I zuerst auf das x y z-System zu transformieren, worauf man durch einfache Rechnung (bei allgemeiner Schreibweise) den Ausdruck erhält

$$(a^2\alpha_3\alpha_1 + b^2\beta_3\beta_1 + c^2\gamma_3\gamma_1)\,x + (a^2\alpha_2\alpha_3 + b^2\beta_2\beta_3 + c^2\gamma_2\gamma_3)\,y + (a^2\alpha_3^2 + b^2\beta_3^2 + c^2\gamma_3^2)\,z = 0.$$

Die Schnittgeraden dieser Ebenen mit der xy-Ebene haben Richtungskoeffizienten von der Form

$$m = -\frac{a^2 \alpha_3 \alpha_1 + b^2 \beta_3 \beta_1 + c^2 \gamma_3 \gamma_1}{a^2 \alpha_2 \alpha_3 + b^2 \beta_2 \beta_3 + c^2 \gamma_2 \gamma_3}.$$

Wegen der bekannten Eigenschaften des Indexellipsoides muß diese Gerade (m bzw. m') senkrecht sein zur Schnittgeraden der Ebene $z = 0$ mit $\eta' = 0$ (resp. $\eta = 0$), in denen sich die Wellen mit der Geschwindigkeit $q = b'$ (resp. $q = b$) fortpflanzen. Die Richtungskoeffizienten dieser letzteren sind

$$\mu = -\frac{\cos\gamma}{\cos\alpha \cos\beta} \text{ und } \mu' = -\frac{\cos\gamma'}{\cos\alpha' \cos\beta'}$$

Man hat somit die Beziehungen

$$m = -\frac{1}{\mu'} \text{ und } m' = -\frac{1}{\mu},$$

die sich mit Benutzung der obigen speziellen Formen des Schemas I schreiben:

$$\frac{(b^2 - c^2) \cos\beta \cos\gamma}{a^2 \sin^2\alpha - b^2 \cos^2\beta - c^2 \cos^2\gamma} = \frac{\cos\alpha' \cos\alpha \cos\beta'}{\cos\gamma'} \qquad c)$$

und

$$\frac{(a^2 \cos^2\alpha + b^2 \cos^2\beta - c^2 \sin^2\gamma) \cos\beta' \cos\gamma'}{a^2 \sin^2\alpha' - (a^2 \cos^2\alpha + b^2 \cos^2\beta + c^2 \cos^2\gamma) \cos^2\beta' - c^2 \cos^2\gamma'}$$

$$= \frac{\cos\alpha' \cos\alpha \cos\beta}{\cos\gamma}. \qquad d)$$

Aus der quadrierten Gleichung *a)* und aus der Gleichung *b)* kann man mit Hilfe von

$$\cos^2\alpha' + \cos^2\beta' + \cos^2\gamma' = 1$$

$\cos^2\beta'$ und $\cos^2\gamma'$ eliminieren und bekommt nach einfachen Transformationen die Gleichung

$$(a^2 \sin^2\alpha - b^2 \cos^2\beta - c^2 \cos^2\gamma) \cos^2\beta \cos^4\alpha' +$$
$$[(a^2 \sin^2\alpha \cos^2\alpha - b^2 \sin^2\beta \cos^2\beta + c^2 (\cos^2\beta - \cos^2\alpha) \cos^2\gamma] \cos^2\alpha'$$
$$- (b^2 - c^2) \cos^2\alpha \cos^2\gamma = 0,$$

deren einzige in Betracht fallende Lösung

$$\cos^2\alpha' = \frac{(b^2 - c^2) \cos^2\gamma}{a^2 \sin^2\alpha - b^2 \cos^2\beta - c^2 \cos^2\gamma}$$

ist, da die andere Lösung

$$\cos^2 \alpha' = -\frac{\cos^2 \alpha}{\cos^2 \beta}$$

keine reellen Werte für α' liefert.

Bringt man Gleichung *a)* auf die Form

$$1 = \frac{\cos \beta \cos \gamma' \cos \alpha'}{\cos \beta' \cos \gamma \cos \alpha}$$

und multipliziert die beiden Seiten derselben mit den entsprechenden Seiten der Gleichung *c)*, so kommt unmittelbar

$$\cos^2 \alpha' = \frac{(b^2 - c^2) \cos^2 \gamma}{a^2 \sin^2 \alpha - b^2 \cos^2 \beta - c^2 \cos^2 \gamma}.$$

Weiterhin gibt Gleichung *d)*, wenn ihre rechte Seite wegen Gleichung *a)* mit

$$1 = \frac{\cos \beta' \cos \gamma \cos \alpha}{\cos \beta \cos \gamma' \cos \alpha'}$$

multipliziert wird, nach einigen Umstellungen

$$\frac{a^2 \cos^2 \alpha + b^2 \cos^2 \beta - c^2 \sin^2 \gamma}{a^2 \sin^2 \alpha' - (a^2 \cos^2 \alpha + b^2 \cos^2 \beta + c^2 \cos^2 \gamma) \cos^2 \beta' - c^2 \cos^2 \gamma'} = \frac{\cos^2 \alpha}{\cos^2 \gamma'},$$

woraus man mit abermaliger Benutzung der Gleichung *a)* und Abspaltung eines von null verschiedenen Faktors wiederum

$$\cos^2 \alpha' = \frac{(b^2 - c^2) \cos^2 \gamma}{a^2 \sin^2 \alpha - b^2 \cos^2 \beta - c^2 \cos^2 \gamma}$$

erhält. Die Bedingungsgleichungen *b)*, *c)* und *d)* sind mithin äquivalent, denn sie unterscheiden sich nur durch einen Zahlenfaktor. Demnach sind auch die Eigenschaften der beiden Ellipsoide, welche zur Aufstellung der dritten und vierten Bedingungsgleichung führten, bloße Folgen der zuerst genannten, und damit ist die Unhaltbarkeit des Cornuschen Gedankens bewiesen.

Diese Ableitungen beweisen zunächst nur, daß der Gedanke Cornus nicht auf die Prismen übertragbar ist. Sie sind aber ohne weiteres im Falle Cornus verwendbar, sofern die Hauptlichtgeschwindigkeiten durch die Hauptbrechungsindizes, d. h. die Indexellipsoide, durch die zugehörigen Fresnelschen Ellipsoide ersetzt werden.

Übrigens ist der Inhalt des bewiesenen Satzes gleichwertig dem bekannten Satz von Brill.

26. Erweist sich dem Gesagten zufolge die Annahme Cornus nicht als zutreffend, so gestatten doch die Cornu-Violaschen Formeln im monoklinen System, wo die Entscheidung zwischen b und d nach dem Bisherigen noch nicht in jedem Fall getroffen werden konnte, eine restlose Lösung des Prismenproblems, falls die kristallographische Orientierung des Prismas gegeben ist und die brechende Kante desselben nicht senkrecht zur Orthodiagonale[1]) steht.

Der Beweis hierfür ist einfach. Im monoklinen System ist die Orthodiagonale optische Symmetrieachse, so daß bei bekannter kristallographischer Orientierung des Prismas eine der Größen

$$\alpha_3, \beta_3, \gamma_3$$

einen gegebenen Wert haben muß. Da aber nach den Formeln von Cornu-Viola diese Werte Funktionen der bekannten Azimute von A, B, C und D sind, so hat man nur zu prüfen, für welchen der beiden Werte b und d die Übereinstimmung befriedigt.[2])

Daß bei dieser Überlegung nicht der gleiche Fehler unterlaufen ist, wie bei Cornu, ergibt sich schon daraus, daß die Wahl zwischen b und d nicht auf Grund geometrischer Eigenschaften der Kurve C, sondern auf Grund einer dieser Kurve fremden gegebenen Größe getroffen wurde, kann aber zum Überfluß noch strenge bewiesen werden. Dabei kann der Fall, wo die Orthodiagonale zur η-Achse wird, hier übergangen werden, weil er bereits früher (§ 20) erledigt wurde.

---

[1]) Fällt die im Prismenhauptschnitt liegende Orthodiagonale mit der ξ- oder ζ-Achse zusammen, so ergibt sich nach einer Überlegung, die derjenigen von § 17 ganz ähnlich ist, auf Grund der in § 23 gefundenen Resultate, daß nur die Orientierung zweideutig ist; fällt sie aber mit der η-Achse zusammen, so ist, wie bereits § 20 bemerkt wurde, neben der Lagebestimmung der Hauptschwingungsrichtungen auch die Ermittelung der Hauptlichtgeschwindigkeiten zweideutig.

[2]) Dieses Verfahren führt auch im Falle der Totalreflexion zum Ziel, scheint aber bislang keine Beachtung gefunden zu haben, was allerdings um so begreiflicher ist, als die allgemeine Methode von Viola in der Anwendung einfach und sicher ist.

Es kommen darum nur noch die beiden Fälle in Betracht, wo eine der Größen α_3 und γ_3 einen zum voraus gegebenen Wert hat. Für beide kann der Beweis in übereinstimmender Weise geführt werden, so daß es genügt, ihn für den Fall durchzuführen, wo etwa α_3 den gegebenen Wert annimmt. Bezeichnet M die Richtung, längs der sich die b- oder d-Welle fortpflanzt, so gilt die Beziehung:

$$\cos^2 \alpha_3 = \operatorname{cotg} AM \cdot \operatorname{cotg} CA,$$

woraus

$$\operatorname{cotg} AM = \cos^2 \alpha_3 \cdot \operatorname{tg} CA.$$

Diese Gleichung gibt aber für AM einen einzigen, zwischen 0 und π gelegenen Wert, so daß wegen des einmal angenommenen Umlaufsinnes die Richtung OM eindeutig festliegt.

Stillschweigende Voraussetzung dieses Beweises ist die Annahme, daß die Fortpflanzungsrichtungen der b- und d-Welle nicht zusammenfallen.

Nach getroffener Entscheidung zwischen b und d ist, wenn die brechende Kante nicht senkrecht zur Orthodiagonale steht, natürlich auch die Berechnung der Lage der optischen Symmetrieachsen eindeutig, eben weil die Lage einer solchen bekannt ist.

27. An dieser Stelle möge der Beweis dafür erbracht werden, daß die Fortpflanzungsrichtungen der b- und d-Welle im allgemeinen nicht zusammenfallen [1]). Zu diesem Zwecke diene die beistehende Fig. 4, welche in stereographischer Projektion auf den Prismenhauptschnitt die optischen Symmetrieebenen sowie die sogen. optischen Achsen A_1 und A_2 darstellt. Die Fortpflanzungsrichtung OD jener Welle, die parallel Oz schwingt, ist bekanntlich dadurch bestimmt, daß die Ebenen ODA_1 und ODA_2 in bezug auf den Grundkreis gleichgeneigt sind. Nimmt man von A_2 das

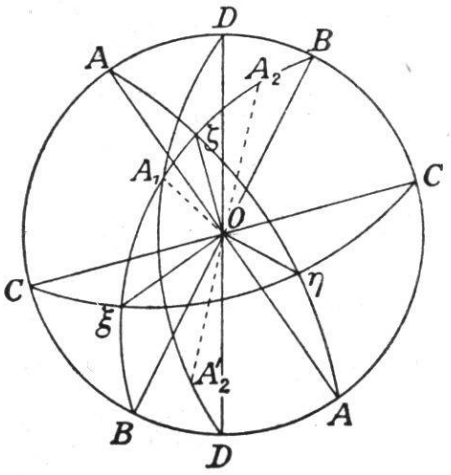

Fig. 4

[1]) Auf diesen Beweis wurde im vorangehenden schon mehrmals verwiesen, z. B. § 15.

Spiegelbild $\bar{A}_2$ bezüglich der Grundebene, oder — was wegen der symmetrischen Eigenschaften der Kugel ohne weiteres gestattet ist, den Gegenpunkt von $\bar{A}_2$ also A'_2, so ist die Schnittgerade der Ebene $A_1OA'_2$ mit der Grundebene die gesuchte Richtung. Ein Blick auf die Figur zeigt sofort, daß diese Richtung nur dann mit der b-Richtung zusammenfällt, wenn η oder eine optische Achse in der Querschnittsebene liegt. Da aber durch die bloße Annäherung von η oder einer optischen Achse an diese Grenzlage der Winkel BOD sich immer mehr und mehr verkleinert, so wird infolge der unvermeidlichen Beobachtungsfehler die Entscheidung zwischen b und d praktisch ebenfalls unmöglich, doch ist es für die Bestimmung der Hauptlichtgeschwindigkeiten dann belanglos, wenn gleichzeitig mit der Abnahme des Winkels BOD auch der Unterschied von b und d kleiner wird, d. h. wenn die optische Achse in die Prismenquerschnittsebene fällt.

28. Selbstverständlich wird durch den Umstand, daß es möglich ist, mit Hilfe eines einzigen Prismas bekannter kristallographischer Orientierung die optischen Konstanten rhombischer und monokliner Kristalle eindeutig zu bestimmen, der Satz von Brill in keiner Weise in Frage gezogen, denn es sind eben, wie nochmals bemerkt sei, nicht die geometrischen Eigenschaften der Kurve C, welche diese eindeutige Lösung gestatten, sondern kristallographische Beziehungen, durch welche wesentlich neue Elemente einbezogen werden.

29. So interessant nun diese Ergebnisse auch sind, so haben sie doch bis dahin wegen ihrer Umständlichkeit keine praktische Verwertung gefunden und sind vom rein theoretischen Standpunkt aus insofern unelegant, als sie mehr Beobachtungen erheischen, wie Unbekannte vorkommen, wobei sich dann allerdings als Gegenwert der überschüssigen Beobachtungen gleichviele Bedingungsgleichungen ergeben, auf Grund derer die Ausgleichungssrechnung gestatten würde, bessere, von den Beobachtungsfehlern unabhängigere Endwerte zu berechnen. Es ist darum ganz begreiflich, daß die Praxis des Mineralogen ausschließlich solche Prismen berücksichtige, welche eine **1.** vollkommen eindeutige und **2.** möglichst ein-

fache Bestimmung (Minimum der Ablenkung bei symmetrischem Durchgang) der optischen Konstanten erlauben. Die einschlägigen theoretischen Fragen sind von Liebisch, Born, Viola usw. eingehend[1]) behandelt worden. Gleichwohl möge es gestattet sein, hier noch einige Punkte besonders zu beleuchten.

30. Für welche speziellen Prismenorientierungen ergeben die Wurzeln der Gleichung VI eine eindeutige Lösung des Problems?

Es sind drei Fälle denkbar.

a) Man weiß, welcher der beiden Werte b und d der größere ist. Praktische Bedeutung hat dieser Fall im triklinen (und z. T. monoklinen) System. Liegt nämlich ein künstlich hergestelltes Prisma vor, dessen x y z-Achsen mit den optischen Symmetrieachsen für eine bestimmte Lichtart zusammenfallen, so möchte man versucht sein, mit demselben auch die Brechungsindizes für Licht anderer Wellenlänge zu bestimmen. Das ist offenbar möglich. Denn wiewohl sich die Orientierung mit der Wellenlänge stetig ändert, so dürfte man doch immer, zumal wenn man sich wenig auseinanderliegender Spektrallinien bedient, in der Lage sein, zu entscheiden, durch welchen der Winkel der optischen Achsen der Prismenquerschnitt jedesmal verlaufe, und damit die Entscheidnng zwischen b und d eindeutig zu treffen. Dagegen bleibt die Orientierung der Hauptschwingungsrichtungen zweideutig, weil die Ausgangslage der optischen Symmetrieachse zu speziell ist, um daraus gültige Schlüsse auf ihre neue Lage ziehen zu können, denn die Änderung kann ja ebensogut im einen wie im anderen Sinn erfolgen.

Ein künstliches, genau orientiertes Prisma aus einem triklinen Kristall herzustellen, ist übrigens keine leichte Sache und scheint bisher einzig von C. Pape ausgeführt worden zu sein, der folgenden Untersuchungsgang vorgeschlagen und im wesentlichen auch eingehalten hat: „Um die Richtung der optischen Achsen sowie die drei Hauptbrechungsexponenten

---

[1]) Über die reiche Literatur vergl. z. B. Pockels, Lehrb. 144.

zu bestimmen, muß bei Kristallen des 1 + 1-gliedrigen Systems im allgemeinen zunächst die Ebene der optischen Achsen ihrer Lage nach ungefähr bekannt sein und darauf mittels eines aus dem Kristalle geschliffenen Prismas, dessen brechende Kante senkrecht zu dieser Ebene steht, der mittlere Brechungsexponent angenähert ermittelt werden. Darauf ist eine Platte aus dem Kristall zu schleifen, deren parallele Flächen rechtwinklig zu der ersten Mittellinie stehen, und an derselben der Winkel der scheinbaren optischen Achsen zu messen, sowie die Lage beider zu der dem Beobachter zugekehrten, nach ihrer Lage am Kristall bekannten Fläche und noch zweien an der Platte vorhandenen natürlichen Kristallflächen. Aus diesen Beobachtungen und dem zuerst gefundenen mittleren Brechungsexponenten läßt sich dann die Richtung der wahren optischen Achsen ableiten. Nach diesen Resultaten sind darauf Prismen anzufertigen, deren brechende Kanten den drei Elastizitätsachsen parallel laufen, und an ihnen die drei Brechungsexponenten zu beobachten. Da jedes richtig geschliffene Prisma zwei Brechungsexponenten liefert, bei drei Prismen jeder also doppelt bestimmt ist, so besitzt man im Vergleiche beider das Mittel, zu prüfen, ob die ursprüngliche Bestimmung des mittleren Brechungsexponenten hinreichend zuverlässig ist oder nicht. Im letzteren Falle würde man mit dem Mittel aus seinen zuletzt erhaltenen Werten die wahren optischen Achsen von neuem berechnen und nach dieser Rechnung neue Prismen schleifen müssen."[1]

Es wäre entschieden einfacher, an einem triklinen Kristall zuerst die Ebene der optischen Achsen für eine bestimmte Lichtart möglichst genau zu bestimmen und hierauf ein Prisma so herzustellen, daß sein Hauptschnitt mit jener Ebene einen Winkel von ca. 20—30° oder 60—70° bilden würde und zu den beiden optischen Achsen ungefähr gleich geneigt wäre. In diesem Falle wäre die Richtung der b-Welle für jene Farbe genau bekannt, während diejenige der d-Welle hierzu fast senkrecht stände. Da sich die optischen Konstanten mit der Wellenlänge stetig ändern, wäre es möglich,

[1]) C. Pape, Pogg. Ann. Ergb. **6**, 387.

die Hauptlichtgeschwindigkeiten sowie die Lage der zugehörigen Schwingungsrichtungen für alle Wellenlängen zu bestimmen, wofern man sich wenig auseinanderliegender Spektrallinien bedienen würde.

b) d^2 fällt mit einer der drei anderen Wurzeln der Gleichung VI zusammen. Sei diese Wurzel etwa a^2. Man erhält dann die Beziehung

$$a^2 \equiv a^2 \alpha_3^2 + b^2 \beta_3^2 + c^2 \gamma_3^2,$$

welche mittels der bekannten Identität

$$\alpha_3^2 + \beta_3^2 + \gamma_3^2 = 1$$

auf die Form

$$(a^2 - b^2) \beta_3^2 + (a^2 - c^2) \gamma_3^2 = 0$$

gebracht werden kann. Weil voraussetzungsgemäß

$$a > b > c,$$

so ist diese Gleichung nur möglich, wenn

$$\beta_3 = 0 \text{ und } \gamma_3 = 0$$

d. h. wenn die Prismenkante gleichzeitig ξ-Achse ist. Wegen der damit bekannten Lage einer Hauptschwingungsrichtung wird dem Früheren zufolge auch die Ermittlung aller Hauptschwingungsrichtungen eindeutig, und da für die beiden anderen Fälle eine ähnliche Überlegung gilt, so ergibt sich der bekannte Satz: Die Bestimmung der Hauptlichtgeschwindigkeiten sowie der Lage der Hauptschwingungsrichtungen eines zweiachsigen Kristalls ist mit Hilfe eines einzigen Prismas in allen jenen Fällen möglich, wo die brechende Kante mit einer optischen Symmetrieachse zusammenfällt.

Die Identität

$$b^2 \equiv a^2 \alpha_3^2 + b^2 \beta_3^2 + c^2 \gamma_3^2$$

läßt neben $\alpha_3 = 0$, $\beta_3^2 = 1$, $\gamma_3 = 0$ noch andere reelle Lösungen zu. In der Tat ergibt sich mit Rücksicht auf die Bedingungsgleichung

$$\alpha_3^2 + \beta_3^2 + \gamma_3^2 = 1 \qquad a)$$

ähnlich wie oben

$$(a^2 - b^2) \alpha_3^2 - (b^2 - c^2) \gamma_3^2 = 0. \qquad b)$$

Faßt man nun $\alpha_3, \beta_3, \gamma_3$ als rechtwinklige Koordinaten auf, so stellen die Gleichungen *a)* und *b)* zwei Kreise dar, die beide

das Zentrum im Ursprung haben und sich auf der η-Achse schneiden. Die trigonometrische Tangente ihres Neigungswinkels zur ζ-Achse ist

$$\pm\sqrt{\frac{b^2-c^2}{a^2-b^2}}=\operatorname{cotg}\Omega.$$

Sie stehen also auf den optischen Achsen senkrecht. Mithin der weitere Satz: Die eindeutige Bestimmung der Hauptlichtgeschwindigkeiten eines zweiachsigen Kristalls ist in allen jenen Fällen möglich, wo die brechende Kante auf einer optischen Achse senkrecht steht.[1]) Bezüglich der Orientierung gilt das früher Gesagte. Praktische Bedeutung kommt aber dieser Lösung keine zu, weil die kristallographische Lage der optischen Achsen nicht ohne weiteres gegeben ist. Überdies könnte wegen ihrer Dispersion die Orientierung des Prismas nur für eine Wellenlänge genau erfüllt sein.

c) b oder d oder beide zugleich sind der direkten Beobachtung zugänglich. Das ist (praktisch genommen) so zu verstehen, daß sich diese Werte beim Minimum der Ablenkung mit symmetrischem Durchgang ergeben. Nach den bereits genannten Arbeiten v. Liebischs und Violas ist dazu notwendig und hinreichend, daß die x-Achse mit der η-Achse susammenfalle (b und d) oder daß die Halbierungsebene des inneren Prismenwinkels eine die η-Achse enthaltende optische Symmetrieebene sei (b) oder endlich daß x zur ξ- oder ζ-Achse werde (d). Die anderen Fälle, wo die Halbierungsebene des äußeren Prismenwinkels den Winkel der beiden von y und den optischen Achsen gebildeten Ebenen halbiert — also die Beobachtung von d möglich wäre — sind praktisch wertlos.

In allen diesen Fällen liefert das Theorem von Brill, falls die z-Achse nicht selber optische Symmetrieachse ist oder auf einer optischen Achse senkrecht steht eine doppelte Lösung. Wird sie hier eindeutig, so liegt der tiefere Grund darin, daß z. T. kristallographische Elemente, z. T. die Schwingungs-

---

[1]) Dieser Satz wurde bereits in § 13 verwertet.

richtung — in jedem Fall also Größen, welche den geometrischen Eigenschaften der Kurve C fremd sind, herangezogen und berücksichtigt werden.

31. Prismen spezieller Orientierung. Es wurde bereits oben darauf hingewiesen, daß der Mineraloge zur Bestimmung der optischen Konstanten eines Minerals mit Vorliebe, ja mit Ausschließlichkeit solche Prismen benutzt, welche die direkte Ermittlung der Hauptlichtgeschwindigkeiten gestatten. Hierbei kommen einzig die eben genannten speziellen Orientierungen in Betracht, wo die Prismenkante oder die Halbierungslinien des inneren oder äußeren Prismenwinkels Symmetrieachsen sind. In allen diesen Fällen ist das Minimum der Ablenkung wenigstens für eine Welle mit symmetrischem Durchgang verbunden, Messung und Rechnung folglich überaus einfach. Die entsprechende Welle wird an ihrer Schwingungsrichtung erkannt. Dabei ist aber nicht zu vergessen, daß sich die Schwingungsrichtung beim Übergang vom Kristall zur Luft in manchen Fällen in wahrnehmbarer Weise ändern muß. Diese Änderung konnte an einem Prisma von rhombischem Schwefel, das von (111) und ($\bar{1}\bar{1}1$) gebildet war und Prof. Baumhauer[1]) seinerzeit zur optischen Untersuchung dieses Minerales diente, deutlich wahrgenommen werden. Indessen dürfte sie in keinem praktischen Fall so groß werden, daß man über die Schwingungsrichtung der Welle im Kristall im Zweifel sein könnte.

Es ist besonderer Erwähnung wert, daß in den soeben genannten drei Fällen, wo also eine Achse des xyz-Systems optische Symmetrieachse ist, nicht nur die direkte Bestimmung einer oder zwei Hauptlichtgeschwindigkeiten ermöglicht ist, sondern die Bestimmung aller wesentlich vereinfacht wird. Einige Hinweise auf dieses z. T. vielfach behandelte Problem sowie die Hervorhebung einiger noch weniger beachteter Punkte mögen genügen.

a) Die Prismenkante ist optische Symmetrieachse. Die Kurve C zerfällt in einen Kreis und ein Oval. Das ist die

---

[1]) Baumhauer, Zeitschr. f. Krist. **47**, 12.

einzige Orientierung, die bis anhin dazu gedient hat, mit Hilfe eines einzigen Prismas sämtliche Hauptlichtgeschwindigkeiten eines Kristalls zu bestimmen.[1])

b) Die Halbierungslinie des inneren Prismenwinkels sei eine optische Symmetrieachse und falle etwa mit ξ zusammen. Bezeichnet ϑ den, von $+x$ aus gesehen, im Gegenzeigersinn gemessenen Winkel $z\zeta$, so gilt das folgende Schema:

	x	y	z
ξ	1	0	0
η	0	$\cos\vartheta$	$\sin\vartheta$
ζ	0	$-\sin\vartheta$	$\cos\vartheta$

Die Gleichung III nimmt damit die einfache Form an

$$q^4 - q^2 (L_{11} \cos^2\psi + L_{22} \sin^2\psi) + M_{11} \cos^2\psi + M_{22} \sin^2\psi = 0,$$

wo

$$L_{11} = b^2 + c^2 \qquad L_{22} = a^2 + b^2 \sin^2\vartheta + c^2 \cos^2\vartheta$$
$$M_{11} = b^2 c^2 \qquad M_{22} = a^2 (b^2 \sin^2\vartheta + c^2 \cos^2\vartheta).$$

Beim Minimum der Ablenkung, das aus Symmetriegründen bei gleichem Einfalls- und Austrittswinkel (also $\psi = \pi/2$) erfolgt, liefert die voranstehende Gleichung, mit Rücksicht auf die getroffenen Festsetzungen, für jene Welle, die parallel der Symmetrieachse (also parallel der Querschnittsebene) schwingt, direkt den Wert von a, für die andere aber

$$q_s^2 = b^2 \sin^2\vartheta + c^2 \cos^2\vartheta.$$

Da hierdurch L_{22} und M_{22} bekannt[2]) sind, so genügen zwei[3]) weitere Messungen zur Bestimmung von L_{11} und M_{11}. b^2 und c^2 berechnen sich dann als Wurzeln der Gleichung

$$u^2 - L_{11} u + M_{11} = 0.$$

ϑ wird, vom rhombischen System abgesehen, mehrdeutig.

---

[1]) Lang, Wiener Sitz. **76**, 793. Born, N. Jahrb. f. Mineral. B.-B. **5**, 42.

[2]) Eine mehrmalige Wiederholung der Messungen macht von den Einstellungsfehlern ziemlich unabhängig und liefert, falls das Prisma tadellos geschliffen und homogen ist, sehr gute Werte von L_{22} und M_{22}.

[3]) Um sich von den Einstellungsfehlern möglichst unabhängig zu machen, sind natürlich mehr Messungen erfordert.

Ähnliche Formeln erhält man für die beiden anderen möglichen Fälle.

c) Die Halbierungslinie des äußeren Prismenwinkels sei eine Symmetrieachse und falle

α) mit der ξ-Achse zusammen. Bei analoger Voraussetzung über den Winkel ϑ wie im vorangehenden Falle b) ergibt sich das Schema:

	x	y	z
ξ	0	1	0
η	$-\cos\vartheta$	0	$\sin\vartheta$
ζ	$\sin\vartheta$	0	$\cos\vartheta$

An Stelle der Gleichung III kommt

$$q^4 - q^2 (L_{11} \cos^2\psi + L_{22} \sin^2\psi) + (M_{11} \cos^2\psi + M_{22} \sin^2\psi) = 0,$$

wo

$$L_{11} = a^2 + b^2 \sin^2\vartheta + c^2 \cos^2\vartheta \qquad L_{22} = b^2 + c^2$$
$$M_{11} = a^2 (b^2 \sin^2\vartheta + c^2 \cos^2\vartheta) \qquad M_{22} = b^2 c^2.$$

Aus Symmetriegründen ist ohne weiteres ersichtlich, daß beim Minimum der Ablenkung direkt b^2 und c^2 gefunden werden. Wie vorher genügen noch zwei weitere Messungen zur Bestimmung der Konstanten L_{11} und M_{11}, und a^2 findet sich als größte Wurzel der Gleichung

$$u^2 - L_{11} u + M_{11} = 0.$$

ϑ ist im monoklinen System (das trikline kommt praktisch nicht in Betracht) natürlich zweideutig. Die Zweideutigkeit besteht darin, daß den Formeln zufolge η ebensogut im Winkel xOz wie $\bar{x}$Oz liegen kann. Berücksichtigt man aber beim Minimum der Ablenkung den Schwingungszustand der entsprechenden Welle, so dürfte die Zweideutigkeit oft behoben werden können. Im rhombischen System wird sie schon durch die kristallographische Orientierung des Prismas umgangen.

β) Fällt die ζ-Achse mit der y-Achse zusammen, so erhält man beim Minimum der Ablenkung direkt a und b, während man aus den Gleichungen

$$L_{11} = c^2 + a^2 \sin^2\vartheta + b^2 \cos^2\vartheta$$
$$M_{11} = c^2 (a^2 \sin^2\vartheta + b^2 \cos^2\vartheta)$$

ähnlich wie soeben c^2 als die kleinere Wurzel der quadratischen Gleichung

$$u^2 - L_{11}\, u + M_{11} = 0$$

findet, während die andere, größere wiederum gleich dem Quadrat der Geschwindigkeit jener Welle ist, die senkrecht zur Querschnittsebene des Prismas schwingt.

Bezüglich ϑ gilt das soeben Gesagte.

γ) Ganz anders, wenn η mit y zusammenfällt! Das Minimum der Ablenkung liefert a und c, während man aus zwei weiteren Messungen die Gleichungen erhält

$$L_{11} = b^2 + c^2 \sin^2\vartheta + a^2 \cos^2\vartheta$$
$$M_{11} = b^2 (c^2 \sin^2\vartheta + a^2 \cos^2\vartheta).$$

Die Wurzeln der quadratischen Gleichung

$$u^2 - L_{11} u + M_{11} = 0$$

sind b^2 und $d^2 = c^2 \sin^2\vartheta + a^2 \cos^2\vartheta$, von denen die eine ebensogut größer oder kleiner wie die andere sein kann. Im monoklinen System ist die Lösung mithin unbestimmt, wogegen im rhombischen System die Überlegungen von § 18 Geltung haben.

In den beiden Fällen b) und c) wurde vorausgesetzt, daß eine der optischen Symmetrieachsen mit der Halbierungslinie des inneren oder äußeren Prismenwinkels zusammenfalle, während die übrige Orientierung als unbekannt betrachtet wurde. Das Problem ist also gegenüber der Behandlung bei Pockels[1]) wesentlich verallgemeinert, indem daselbst der Fall b) nicht ganz erledigt und c) nur unter der ausdrücklichen Voraussetzung studiert wird, daß der Winkel ϑ bekannt[2]) sei. Im rhombischen System mag diese Annahme keine wesentliche Einschränkung bedeuten, wohl aber im monoklinen System, wo wegen der geringeren Symmetrie die Verhältnisse viel komplizierter liegen.

---

[1]) Lehrb. d. Krist. pag. 146 und 147.

[2]) Wäre ϑ bekannt, so würde sich im Fall c_γ der Wert von b eindeutig bestimmen, weil $d^2 = a^2 \cos^2\vartheta + c^2 \sin^2\vartheta$ eine bekannte Funktion von a, c und ϑ ist und darum von b^2 unterschieden werden kann.

Bei eingehender Betrachtung der unter b) und c) entwickelten Formeln geht hervor, daß es sogar ohne Bedeutung ist, zu wissen, welche der drei optischen Symmetrieachsen den inneren resp. äußeren Prismenwinkel halbiere. Die beiden Methoden gewinnen dadurch noch mehr an allgemeinem Wert und können in allen jenen Fällen Verwendung finden, wo aus der bloßen kristallographischen Orientierung des Prismas hervorgeht, daß die Halbierungslinie des inneren oder äußeren Prismenwinkels mit einer optischen Symmetrieachse zusammenfallen muß.

Daß sich im rhombischen System alle drei Fälle, wo eine Achse des xyz-Systems optische Symmetrieachse ist, zur Bestimmung der Brechungsindizes, mit Hilfe eines einzigen Prismas in gleicher Weise eignen, ist ein unmittelbares und praktisch wertvolles Ergebnis dieser Ausführungen.[1])

---

[1]) Durch Verallgemeinerung einer Bemerkung v. Groth's, Physikalische Kristallographie pag. 102 f., können diesen Fällen noch jene angegliedert werden, wo die eine Prismenfläche Symmetrieebene bzw. ihre Schnittlinie mit der Querschnittsebene oder endlich ihre Normale Symmetrieachse ist.

II. TEIL

Ableitung einer neuen Methode zur Bestimmung der optischen Konstanten zweiachsiger Kristalle mit Hilfe eines einzigen Prismas unbekannter Orientierung.

32. In mehreren Fällen des vorangehenden ersten Teiles (vergl. § 31 Abt. b, c_α und c_β) konnte durch Berücksichtigung des Polarisationszustandes des austretenden Lichtes die Lösung des Prismenproblems eindeutig gefunden werden. Die Art und Weise aber, in der dies geschah, hatte einen bloß qualitativen Charakter und faßte die Beziehung zwischen den beobachteten Schwingungsrichtungen und den gesuchten Hauptlichtgeschwindigkeiten nirgends in einer präzisen Formel zusammen. Eine solche Gleichung ist aber möglich auf Grund des gegen Ende von § 9 erwähnten Satzes, wornach für jede Fortpflanzungsrichtung die zugehörigen Schwingungsrichtungen und Wellennormalengeschwindigkeiten bestimmt sind durch die Richtung und reziproke Länge der Halbachsen jener Ellipse, in welcher das Indexellipsoid von der zur Fortpflanzungsrichtung senkrechten Diametralebene geschnitten wird. Wie man sich nun geeigneter Schwingungsrichtungen bedienen kann, um die Hauptlichtgeschwindigkeiten aller zweiachsiger, also selbst trikliner Kristalle eindeutig zu bestimmen — das theoretisch darzutun, ist Aufgabe dieses zweiten Teiles, während die experimentelle Prüfung der Methode dem dritten Teil zufallen wird.

33. Die erste Aufgabe, welche sich darbietet, ist der Nachweis, daß das Ausbreitungsgesetz ebener Wellen, so wie es in Gleichung II formuliert wurde, sich in der soeben genannten Weise aus dem Indexellipsoid ableitet. Bezogen auf die optischen Symmetrieachsen ξ, η, ζ lautet die Gleichung des letzteren

$$a^2 \xi^2 + b^2 \eta^2 + c^2 \zeta^2 = 1.$$

Bildet nun eine beliebige Ausbreitungsrichtung mit diesen Achsen die Winkel ν_1, ν_2 und ν_3, so erzeugt die dazu senkrechte Ebene

$$\xi \cos\nu_1 + \eta \cos\nu_2 + \zeta \cos\nu_3 = 0$$

mit der Fläche eine Schnittellipse, deren Gleichung sich leicht mittels einer Koordinatentransformation ergibt, bei der die Wellennormalenrichtung zur Z-Achse und die Schnittgerade der Wellenebene mit der Ebene $\zeta = 0$ zur X-Achse genommen wird. Hierdurch nimmt das Schema I folgende spezielle Form an.

	X	Y	Z
ξ	$\frac{\cos\nu_2}{\sin\nu_3}$	$\frac{\cos\nu_1 \cos\nu_3}{\sin\nu_3}$	$\cos\nu_1$
η	$-\frac{\cos\nu_1}{\sin\nu_3}$	$\frac{\cos\nu_2 \cos\nu_3}{\sin\nu_3}$	$\cos\nu_2$
ζ	0	$-\sin\nu_3$	$\cos\nu_3$

Die daraus fließenden Substitutionen

$$\xi = \frac{\cos\nu_2}{\sin\nu_3} X + \frac{\cos\nu_1 \cos\nu_3}{\sin\nu_3} Y$$

$$\eta = -\frac{\cos\nu_1}{\sin\nu_3} X + \frac{\cos\nu_2 \cos\nu_3}{\sin\nu_3} Y$$

$$\zeta = -\sin\nu_3 Y$$

führen die Gleichung des Indexellipsoides sofort in die Gleichung der gesuchten Kurve über, nämlich:

$$\frac{a^2 \cos^2\nu_2 + b^2 \cos^2\nu_1}{\sin^2\nu_3} X^2$$
$$+ \frac{(a^2 \cos^2\nu_1 + b^2 \cos^2\nu_2) \cos^2\nu_3 + c^2 \sin^4\nu_3}{\sin^2\nu_3} Y^2$$
$$+ 2(a^2 - b^2) \frac{\cos\nu_1 \cos\nu_2 \cos\nu_3}{\sin^2\nu_3} XY = 1.$$

Die reziproken Quadrate q_1^2 und q_2^2 ihrer Hauptachsen, welche dem Theorem zufolge den der Richtung ν_1, ν_2, ν_3 zugeordneten

Geschwindigkeiten entsprechen, ergeben sich als Wurzeln der biquadrischen Gleichung

$$q^4 - q^2 \frac{a^2(\cos^2\nu_3\cos^2\nu_1 + \cos^2\nu_2) + b^2(\cos^2\nu_2\cos^2\nu_3 + \cos^2\nu_1) + c^2\sin^4\nu_3}{\sin^2\nu_3}$$
$$+ \frac{a^2b^2(\cos^2\nu_1 + \cos^2\nu_2)^2\cos^2\nu_3 + b^2c^2\cos^2\nu_1\sin^4\nu_3 + c^2a^2\cos^2\nu_2\sin^4\nu_3}{\sin^4\nu_3} = 0.$$

Da

$$\cos^2\nu_3\cos^2\nu_1 + \cos^2\nu_2 \equiv \cos^2\nu_3\cos^2\nu_1 + (1 - \cos^2\nu_1 - \cos^2\nu_3) \equiv$$
$$(1 - \cos^2\nu_1)(1 - \cos^2\nu_3) \equiv (\cos^2\nu_2 + \cos^2\nu_3)\sin^2\nu_3,$$

und da ebenso

$$\cos^2\nu_2\cos^2\nu_3 + \cos^2\nu_1 \equiv (\cos^2\nu_1 + \cos^2\nu_3)\sin^2\nu_3,$$

so kommt für die Abhängigkeit der q-Werte von der Richtung ν_1, ν_2, ν_3 der Ausdruck

$$q^4 - q^2\left\{a^2(\cos^2\nu_2 + \cos^2\nu_3) + b^2(\cos^2\nu_3 + \cos^2\nu_1) + c^2(\cos^2\nu_1 + \cos^2\nu_2)\right\}$$
$$+ a^2b^2\cos^2\nu_3 + b^2c^2\cos^2\nu_1 + c^2a^2\cos^2\nu_2 = 0$$

oder in Übereinstimmung mit Gleichung II

$$\frac{\cos^2\nu_1}{q^2 - a^2} + \frac{\cos^2\nu_2}{q^2 - b^2} + \frac{\cos^2\nu_3}{q^2 - c^2} = 0$$

w. z. b. w.[1])

34. Der Einfachheit halber sind die folgenden Formeln sämtlich auf ein rechtwinkliges, rechtshändiges Achsensystem x, y, z bezogen, das, vom bisherigen Brauch abweichend, so mit dem Prisma fest verbunden ist, daß die z-Achse wie früher mit der Prismenkante zusammenfällt und nach oben positiv gerechnet wird, die x-Achse aber nicht mehr in der Halbierungsebene des inneren Prismenwinkels sondern in der einen Grenzebene des Prismas liegt. Die nach außen gerichtete Normale dieser Ebene ist die positive y-Achse, während die positive x-Achse nach der Basis des Prismas hinzeigt. Durch diese Festsetzung ist jene Grenzebene eindeutig gekennzeichnet. Bei der gewöhnlichen Aufstellungsart des Prismas auf dem einkreisigen Goniometer, wo das Licht, vom Beobachter aus gesehen, nach links abgelenkt wird, ist

---

[1]) Über eine andere Ableitung dieser Gleichung aus derjenigen des Indexellipsoides vergl. Pockels, Lehrbuch der Kristalloptik S. 33 f.

sie die Austrittsfläche, und $+y$ fällt mit dem Fortpflanzungssinn des Lichtes zusammen.

Neben diesem xyz-System kommt noch das bereits früher beschriebene $\xi\eta\zeta$-System in Betracht. Für die Richtungskosinus, welche die positiven Richtungen des einen Systems in bezug auf die positiven Richtungen des anderen Systems festlegen, gilt das Schema I der Form nach unverändert.

35. Um jetzt auf den Gegenstand selber einzugehen, sollen zunächst die Gleichungen des Indexellipsoides und der Wellennormalenfläche auf das neue Achsensystem bezogen werden. Das geschieht durch die aus dem Schema I folgenden linearen Beziehungen

$$\begin{aligned}\xi &= \alpha_1 x + \alpha_2 y + \alpha_3 z\\ \eta &= \beta_1 x + \beta_2 y + \beta_3 z\\ \zeta &= \gamma_1 x + \gamma_2 y + \gamma_3 z,\end{aligned}$$

deren Substitution in

$$a^2\xi^2 + b^2\eta^2 + c^2\zeta^2 = 1$$

die Gleichung ergibt

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{23}yz + 2a_{31}zx = 1. \qquad \text{VII}$$

Dabei ist zur Abkürzung

$$a_{ik} \equiv a^2\alpha_i\alpha_k + b^2\beta_i\beta_k + c^2\gamma_i\gamma_k \qquad (a_{ik} = a_{ki}) \qquad \text{VIII}$$

gesetzt. Diese sechs Koeffizienten der Gleichung VII wurden von W. Voigt[1]) Polarisationskonstanten genannt.

In ebenderselben Weise ergäbe sich die neue Gleichung der Wellennormalenfläche. Da aber für das Weitere nur ihr Schnitt mit der Ebene $z = 0$ in Betracht fällt, und für die vorliegenden Zwecke die Polarkoordinaten bequemer sind wie die rechtwinkligen, so empfiehlt es sich, die Transformationsformeln in der bereits oben in § 4 hergeleiteten Form zu schreiben.

$$\begin{aligned}\nu_1 &= \alpha_1\cos\psi + \alpha_2\sin\psi\\ \nu_2 &= \beta_1\cos\psi + \beta_2\sin\psi\\ \nu_3 &= \gamma_1\cos\psi + \gamma_2\sin\psi.\end{aligned}$$

Die Substitution dieser Ausdrücke in Gleichung II gibt mit Benutzung der eben definierten Polarisationskonstanten die Gleichung

[1]) W. Voigt, Gött. Nachr. 1896 pag. 17.

$$q^4 - q^2 [(a_{22} + a_{33}) \cos^2\psi + (a_{33} + a_{11}) \sin^2\psi - 2\, a_{12} \sin\psi \cos\psi] + [(a_{22}\, a_{33} - a_{23}^2) \cos^2\psi + (a_{33}\, a_{11} - a_{31}^2) \sin^2\psi - 2\,(a_{12}\, a_{33} - a_{23}\, a_{31}) \sin\psi \cos\psi] = 0. \qquad \text{IX}$$

Diese Gleichung stellt die nämliche Kurve dar wie Gleichung III. Die beiden Gleichungen unterscheiden sich nur durch das Bezugssystem. Um dies auch in der Schreibweise anzudeuten, soll für Gleichung IX abkürzend[1]) gesetzt werden

$$q^4 - q^2 (P_{11} \cos^2\psi + P_{22} \sin^2\psi - 2\, P_{12} \sin\psi \cos\psi) + (Q_{11} \cos^2\psi + Q_{22} \sin^2\psi - 2\, Q_{12} \sin\psi \cos\psi) = 0. \qquad \text{X}$$

Darin ist

$$\begin{aligned} P_{11} &\equiv a_{22} + a_{33} & Q_{11} &\equiv a_{22}\, a_{33} - a_{23}^2 \\ P_{22} &\equiv a_{33} + a_{11} & Q_{22} &\equiv a_{33}\, a_{11} - a_{31}^2 \\ P_{12} &\equiv a_{12} & Q_{12} &\equiv a_{12}\, a_{33} - a_{23}\, a_{31}\,. \end{aligned} \qquad \text{XI}\overset{(i)}{a} \quad i = 1, 2 \ldots 6$$

36. Die Konstanten P_{ik} und Q_{ik} können durch sechs Wertpaare (q, ψ) eindeutig bestimmt werden. Dagegen ergeben sich aus den Gleichungen $\text{XI}\overset{(i)}{a}$ im allgemeinen acht Lösungssysteme für die Polarisationskonstanten. In der Tat aus $\text{XI}\overset{(1)}{a}$ und $\text{XI}\overset{(2)}{a}$ kommen die Werte

$$a_{22} = P_{11} - a_{33}$$
$$a_{11} = P_{22} - a_{33},$$

welche in $\text{XI}\overset{(4)}{a}$ und $\text{XI}\overset{(5)}{a}$ eingesetzt

$$a_{23}^2 = a_{33}\,(P_{11} - a_{33}) - Q_{11}$$
$$a_{13}^2 = a_{33}\,(P_{22} - a_{33}) - Q_{22}$$

ergeben, während aus $\text{XI}\overset{(6)}{a}$ mit Berücksichtigung von $\text{XI}\overset{(3)}{a}$ folgt:

$$a_{23}\, a_{31} = a_{33}\, P_{12} - Q_{12}.$$

Werden beide Seiten dieser Gleichung quadriert und für a_{12}^2 und a_{23}^2 die soeben gefundenen Werte eingesetzt, so erhält man zur Bestimmung von a_{33} die Gleichung vierten Grades

$$a_{33}^4 - (P_{11} + P_{22})\, a_{33}^3 + (P_{11}\, P_{22} - P_{12}^2 + Q_{11} + Q_{22})\, a_{33}^2 - (P_{11}\, Q_{22} + P_{22}\, Q_{11} - 2\, P_{12}\, Q_{12})\, a_{33} + (Q_{11}\, Q_{22} - Q_{12}^2) = 0. \qquad \text{XII}$$

Diese Gleichung muß mit Gleichung VI identisch sein, wie aus der Beziehung zwischen L_{ik} und M_{ik} einerseits sowie

---

[1]) Die Benutzung der früheren Abkürzungen L_{ik} und M_{ik} empfiehlt sich nicht, weil sie zu (natürlich bloß formalen) Widersprüchen führt zwischen einigen Sätzen des ersten und zweiten Teiles.

P_{ik} und Q_{ik} anderseits sofort hervorgeht. Man kann darum ohne weiteres schließen, daß

$$a^2, b^2, c^2 \text{ und } a_{33} \equiv a^2 \alpha_3^2 + b^2 \beta_3^2 + c^2 \gamma_3^2$$

die Wurzeln der Gleichung XII sind (vergl. § 5).

37. Da nach den Gleichungen $\text{XIa}^{(i)}$ die P_{ik} und Q_{ik} bekannte Funktionen von a_{ik} sind, so kann man sie mit Hilfe der Gleichungen VIII als Funktionen von $a^2, b^2, c^2, \alpha_i, \beta_i$ und γ_i ausdrücken und so sechs Beziehungen zwischen diesen zwölf Größen und den sechs Polarisationskonstanten aufstellen. Die vier Werte von a_{33}, welche die Gleichung XII liefert, ergeben dann der Reihe nach für a_{11} und a_{22} je einen zugeordneten Wert, während sich für a_{23} und a_{31} je zwei Werte finden, die aber nur im Vorzeichen verschieden sind. a_{12} hat für alle vier Werte von a_{33} immer denselben festen Wert

$$P_{12} = a^2 \alpha_1 \alpha_2 + b^2 \beta_1 \beta_2 + c^2 \gamma_1 \gamma_2.$$

Die folgende Tabelle I liefert die Resultate in anschaulicher Übersicht. Die Werte je einer Kolonne gehören zusammen. Bei a_{23} und a_{31} entsprechen sich die oberen resp. die unteren Vorzeichen. Der Beweis hierfür ergibt sich aus der Identität

$$Q_{12} \equiv a_{12} a_{33} - a_{23} a_{31}.$$

Wie man sieht, werden für

$$a_{33} = a^2, c^2$$

a_{23} und a_{31} im allgemeinen[1]) imaginär. Diese beiden Wurzeln von XII scheiden darum aus und die Gleichung XII wird wie die Gleichung VI praktisch zweideutig. Ihre Wurzeln bestimmen mit den zugeordneten Lösungen der Gleichungen $\text{XIa}^{(i)}$ zwei Ellipsoide mit verschieden gerichteten Hauptachsen. Die größte und kleinste haben in beiden je dieselbe Länge, dagegen ist die mittlere Achse des einen gleich dem Abschnitt des anderen auf der z-Achse (entsprechend dem in § 25 gefundenen Ergebnis). Jedes dieser Ellipsoide kommt in zwei Orientierungen vor, die wegen der Zweideutigkeit der Vorzeichen von a_{23} und a_{31} die Eigenschaft haben, daß die eine Lage aus der anderen durch Drehung von 180° um die

---

[1]) Einzig für $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ resp. $\gamma_1 = \gamma_2 = 0$ bleiben diese Werte bzw. reell, werden dann aber mit der vierten Lösung identisch.

Tabelle I

a_{33}	a^2	b^2
a_{22}	$b^2+c^2-(a^2\alpha_1^2+b^2\beta_1^2+c^2\gamma_1^2)$	$c^2+a^2-(a^2\alpha_1^2+b^2\beta_1^2+c^2\gamma_1^2)$
a_{11}	$b^2+c^2-(a^2\alpha_2^2+b^2\beta_2^2+c^2\gamma_2^2)$	$c^2+a^2-(a^2\alpha_2^2+b^2\beta_2^2+c^2\gamma_2^2)$
a_{23}	$\pm\alpha_1\sqrt{(c^2-a^2)(a^2-b^2)}$	$\pm\beta_1\sqrt{(a^2-b^2)(b^2-c^2)}$
a_{13}	$\mp\alpha_2\sqrt{(c^2-a^2)(a^2-b^2)}$	$\mp\beta_2\sqrt{(a^2-b^2)(b^2-c^2)}$
a_{12}	$a^2\alpha_1\alpha_2+b^2\beta_1\beta_2+c^2\gamma_1\gamma_2$	$a^2\alpha_1\alpha_2+b^2\beta_1\beta_2+c^2\gamma_1\gamma_2$
a_{33}	c^2	$a^2\alpha_3^2+b^2\beta_3^2+c^2\gamma_3^2$
a_{22}	$a^2+b^2-(a^2\alpha_1^2+b^2\beta_1^2+c^2\gamma_1^2)$	$a^2\alpha_2^2+b^2\beta_2^2+c^2\gamma_2^2$
a_{11}	$a^2+b^2-(a^2\alpha_2^2+b^2\beta_2^2+c^2\gamma_2^2)$	$a^2\alpha_1^2+b^2\beta_1^2+c^2\gamma_1^2$
a_{23}	$\pm\gamma_1\sqrt{(b^2-c^2)(c^2-a^2)}$	$\pm(a^2\alpha_2\alpha_3+b^2\beta_2\beta_3+c^2\gamma_2\gamma_3)$
a_{13}	$\mp\gamma_2\sqrt{(b^2-c^2)(c^2-a^2)}$	$\pm(a^2\alpha_3\alpha_1+b^2\beta_3\beta_1+c^2\gamma_3\gamma_1)$
a_{12}	$a^2\alpha_1\alpha_2+b^2\beta_1\beta_2+c^2\gamma_1\gamma_2$	$a^2\alpha_1\alpha_2+b^2\beta_1\beta_2+c^2\gamma_1\gamma_2$

z-Achse abgeleitet werden kann (in genauer Übereinstimmung mit dem in § 23 Gesagten). Der Beweis ist einfach. Ersetzt man x und y durch ihre entgegengesetzten Werte, so geht die Gleichung des einen Ellipsoides in diejenige des anderen über.

Die Unbestimmtheit liegt dem Gesagten zufolge in der Zweideutigkeit der Gleichung XII ($a_{33}=b^2, a^2\alpha_3^2+b^2\beta_3^2+c^2\gamma_3^2$) sowie des Wertes von a_{13} (die Vorzeichen von a_{23} und a_{31} bestimmen sich gegenseitig). **Dieselbe kann nun in einfacher Weise umgangen werden, wenn die Schwingungsrichtungen jener zwei Wellen in**

Betracht gezogen werden, deren Ebenen parallel zur Austrittsfläche des Prismas (x z-Ebene) sind.

38. Es ist bekannt, daß die Schwingungsrichtung sich im allgemeinen ändert, wenn die Welle aus dem Kristall in die Luft übertritt. Der Grund liegt darin, daß die Schwingungsrichtung der beiden an der Austrittsebene in den Kristall hineinreflektierten Wellen im allgemeinen verschieden ist von der Schwingungsrichtung der im Kristall einfallenden Welle. Fällt aber die Welle im Kristall parallel zur Grenzebene auf, so wird sie beim Übergang in die Luft nicht nur nicht abgelenkt, sondern auch die beiden, durch Reflexion entstandenen Wellen sind parallel zur Grenzebene und schwingen parallel und senkrecht zur Schwingungsebene der im Kristall einfallenden Welle. Dann aber ist die Energie der reflektierten Welle, die senkrecht zur Schwingungsrichtung der einfallenden schwingt, null, und wegen der Erhaltung der Energie muß die ausgetretene Welle parallel zur einfallenden schwingen.

39. Es seien nun q_1 und q_2 $(q_1 < q_2)$ die Geschwindigkeiten der beiden Wellen, deren Ebenen parallel zur Austrittsfläche sind und ε_1 und ε_2 die Azimute der zugehörigen Schwingungsrichtungen, die im Gegenzeigersinn von $+z$ über $+x$ (von $+y$ aus gesehen) positiv gerechnet werden. Selbstverständlich unterscheiden sich ε_1 und ε_2 um $\pi/2$, und man kann

$$\varepsilon_1 = \varepsilon$$
$$\varepsilon_2 = \varepsilon + \pi/2$$

setzen. Nach dem Fresnelschen Satze wird das Indexellipsoid von der zx-Ebene in einer Ellipse geschnitten, deren Halbachsen die Länge $1 : q_1$ und $1 : q_2$ haben und mit der z-Achse die Winkel ε und $\varepsilon + \pi/2$ einschließen. Ihre auf diese Richtungen als Achsen bezogene Gleichung lautet daher

$$q_1^2 Z^2 + q_2^2 X^2 - 1 = 0.$$

Durch die Substitution

$$Z = z \cos \varepsilon + x \sin \varepsilon$$
$$X = - z \sin \varepsilon + x \cos \varepsilon$$

erhält man ihre auf das zx-Sxstem bezogene Gleichung

$$(q_1^2 \cos^2 \varepsilon + q_2^2 \sin^2 \varepsilon) z^2 + 2 (q_1^2 - q_2^2) \sin \varepsilon \cos \varepsilon \, zx$$
$$+ (q_1^2 \sin^2 \varepsilon + q_2^2 \cos^2 \varepsilon) x^2 - 1 = 0.$$

Anderseits bekommt man für diese nämliche Ellipse aus der Gleichung des Indexellipsoides

$$a_{33} z^2 + 2 a_{31} zx + a_{11} x^2 - 1 = 0.$$

Durch Vergleichung beider Ausdrücke erhält man daher

$$\begin{aligned} a_{11} &\equiv q_1^2 \sin^2 \varepsilon + q_2^2 \cos^2 \varepsilon \equiv R_{11} \\ a_{13} &\equiv (q_1^2 - q_2^2) \sin \varepsilon \cos \varepsilon \equiv R_{13} \\ a_{33} &\equiv q_1^2 \cos^2 \varepsilon + q_2^2 \sin^2 \varepsilon \equiv R_{33}. \end{aligned} \qquad \text{XI b}$$

Hieraus und aus den Gleichungen XIa$^{(i)}$ ergeben sich für die Polarisationskonstanten die Werte:

$$a_{11} = R_{11} \qquad a_{22} = P_{11} - R_{33} \qquad a_{33} = R_{33}$$
$$a_{23} = (P_{12} R_{33} - Q_{12}) : R_{13} \qquad a_{31} = R_{13} \qquad a_{12} = P_{12}.$$

Daneben bestehen noch die drei Bedingungsgleichungen

$$\begin{aligned} a_{11} &\equiv R_{11} = P_{22} - R_{33} \\ a_{23}^2 &\equiv (P_{11} - R_{33}) R_{33} - Q_{11} = (P_{12} R_{33} - Q_{12}^2)^2 : R_{13}^2 \\ a_{13}^2 &\equiv R_{11} R_{33} - Q_{22} = R_{12}^2. \end{aligned}$$

Da aber die oben ermittelten Werte diesen Gleichungen nicht streng genügen, indem die aus den Beobachtungen abgeleiteten Zahlen P_{ik}, Q_{ik} und R_{ik} nicht fehlerfrei sind, so dienen sie dazu, um an den Polarisationskonstanten Verbesserungen anzubringen, die sich nach den Regeln der Ausgleichungsrechnung finden lassen.

40. Die soeben entwickelte Methode hat sich bei der experimentellen Prüfung leider nicht bewährt. Die Rechnung hat nämlich in den untersuchten Fällen (Colemanit und Kupfervitriol) ergeben, daß mindestens die fünf ersten Dezimalstellen im Zähler von

$$a_{23} = (P_{12} R_{33} - Q_{12}) : R_{13}$$

verschwinden, so daß derselbe, bei der am Goniometer erreichbaren Genauigkeit gar nicht mehr bestimmbar ist. Selbst das Vorzeichen von a_{23} wird zweifelhaft, da es bei dieser Größenordnung von allerhand Zufälligkeiten abhängt, ob die Differenz

$$P_{12} R_{33} - Q_{12}$$

positiv oder negativ wird (zumal wenn P_{12} und Q_{12} gleiches Vorzeichen haben).

Diese experimentell gefundene Tatsache kann bezüglich ihrer allgemeinen Geltung rechnerisch geprüft werden. Um aber den Gang der hier vor allem wichtigen Ableitung nicht

zu unterbrechen, soll die betreffende Untersuchung als Anhang dieses zweiten Teiles gegeben werden.

41. Die eben genannten Schwierigkeiten können umgangen werden, wenn neben dem Polarisationszustand der zur Austrittsfläche parallelen Wellenebenen auch der Polarisationszustand jener Wellen in Rechnung gezogen wird, deren Normalen senkrecht zur anderen Grenzfläche sind. Bei der Messung wird es am einfachsten sein, das Prisma so um die z-Achse zu drehen, daß jene Grenzfläche des Prismas, die vorher Austrittsebene der Wellen war, nun zur Eintrittsebene wird und umgekehrt. Analytisch wird diese Drehung durch die Transformationsformeln

$$x = x' \cos \Gamma + y' \sin \Gamma$$
$$y = -x' \sin \Gamma + y' \cos \Gamma$$

zum Ausdruck gebracht. Natürlich ist im x'y'z'-System y' in das Kristallinnere hineingerichtet, sofern die positive x'-Achse von der Kante des Prismas nach der Basis verlaufen soll. Auf dieses System bezogen, schreibt sich die Gleichung des Indexellipsoides in der Form:

$$\begin{aligned}&(a_{11} \cos^2 \Gamma + a_{22} \sin^2 \Gamma - 2\, a_{12} \sin \Gamma \cos \Gamma)\, x'^2 + \\ &\quad (a_{11} \sin^2 \Gamma + a_{22} \cos^2 \Gamma + 2\, a_{12} \sin \Gamma \cos \Gamma)\, y'^2 + a_{33}\, z'^2 + \\ &\quad 2\,(a_{11} \sin \Gamma \cos \Gamma - a_{22} \sin \Gamma \cos \Gamma - a_{12} \sin^2 \Gamma + a_{12} \cos^2 \Gamma)\, x'y' + \\ &\quad 2\,(a_{23} \cos \Gamma + a_{31} \sin \Gamma)\, y'z' + 2\,(a_{31} \cos \Gamma - a_{23} \sin \Gamma)\, z'x' - 1 = 0.\end{aligned}$$

Von der z'x'-Ebene wird diese Fläche in der Kurve

$$\begin{aligned}&(a_{11} \cos^2 \Gamma + a_{22} \sin^2 \Gamma - 2\, a_{12} \sin \Gamma \cos \Gamma)\, x'^2 \\ &\qquad + a_{33}\, z'^2 + 2\,(a_{31} \cos \Gamma - a_{23} \sin \Gamma)\, z'x' = 1\end{aligned}$$

geschnitten. Anderseits liefert die Beobachtung zunächst die reziproken Werte ihrer Hauptachsen q'_1 und q'_2 $(q'_1 < q'_2)$ und wegen der Schwingungsrichtung auch die Orientierung derselben. Das Azimut der Schwingungsrichtung von q'_1 werde mit ε' bezeichnet und von $+z$ über $-x$ im Gegenzeigersinn (von außen gesehen) gemessen. Für die andere Welle kann es gleich $\varepsilon' + \pi/2$ gesetzt werden.

Bezogen auf diese Schwingungsrichtungen als Achsen hat die Schnittellipse der x'z'-Ebene mit dem Indexellipsoid die Gleichung

$$q'^2_1 Z'^2 + q'^2_2 X'^2 = 1,$$

und da

$$Z' = -x' \sin\varepsilon' + z' \cos\varepsilon'$$
$$X' = -x' \cos\varepsilon' - z' \sin\varepsilon',$$

so kommt dafür

$$(q'^2_1 \sin^2\varepsilon' + q'^2_2 \cos^2\varepsilon')\, x'^2 - 2\,(q'^2_1 - q'^2_2) \sin\varepsilon' \cos\varepsilon'\, x'z' +$$
$$(q'^2_1 \cos^2\varepsilon' + q'^2_2 \sin^2\varepsilon')\, z'^2 = 1.$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned} a_{11} \cos^2\Gamma - 2\, a_{12} \sin\Gamma \cos\Gamma + a_{22} \sin^2\Gamma &\equiv q'^2_1 \sin^2\varepsilon' + q'^2_2 \cos^2\varepsilon' \equiv R'_{11} \\ a_{31} \cos\Gamma - a_{23} \sin\Gamma &\equiv -(q'^2_1 - q'^2_2) \sin\varepsilon' \cos\varepsilon' \equiv R'_{13} \\ a_{33} &\equiv q'^2_1 \cos^2\varepsilon' + q'^2_2 \sin^2\varepsilon' \equiv R'_{33} \end{aligned} \qquad \text{XIc}$$

und hieraus

$$a_{23} = \frac{(q'^2_1 - q'^2_2) \sin\varepsilon \cos\varepsilon + a_{31} \cos\Gamma}{\sin\Gamma}.$$

Die Genauigkeit dieser letzten Formel sowie ihr Vorteil der früheren gegenüber ist bei späterer Gelegenheit noch eingehend zu untersuchen.

42. Durch die hiermit eindeutig gegebenen Polarisationskonstanten ist das Indexellipsoid vollständig bestimmt. Zur Ermittlung der Hauptlichtgeschwindigkeiten und der optischen Orientierung des Kristalls ist es dem Gesagten zufolge nur mehr nötig, Größe und Lage der Hauptachsen des Indexellipsoides zu finden. Das ist aber ein ganz gewöhnliches Problem der analytischen Geometrie. Bekanntlich sind die Koordinaten u, v, w des Endpunktes einer solchen Achse den Komponenten der zugehörigen Flächennormale, d. h. den partiellen Differentialquotienten von

$$a_{11}\, u^2 + a_{22}\, v^2 + a_{33}\, w^2 + 2a_{12}\, uv + 2a_{23}\, vw + 2a_{31}\, wu = 1$$

proportional. Man hat daher

$$\begin{aligned} a_{11} u + a_{12} v + a_{13} w &= \lambda u \\ a_{12} u + a_{22} v + a_{23} w &= \lambda v \\ a_{13} u + a_{23} v + a_{33} w &= \lambda w, \end{aligned} \qquad \text{XIII}$$

wo λ ein Proportionalitätsfaktor ist. Dieses System von Gleichungen hat aber dann und nur dann von (0, 0, 0) verschiedene Lösungen, falls

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} - \lambda & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} - \lambda \end{vmatrix} = 0. \qquad \text{XIV}$$

Diese Determinante stellt eine Gleichung dritten Grades in λ dar, deren Wurzeln im allgemeinen verschieden und nach dem bekannten Weierstraßschen Beweis reell sind. Man erhält darum drei Werte von λ und somit auch drei Systeme von Lösungen

$$u_i : v_i : w_i \quad (i = 1, 2, 3).$$

Multipliziert man die drei Gleichungen XIII der Reihe nach mit u, v, w und addiert, so erhält man, falls man λ und die Variablen mit dem Index behaftet,

$$\lambda_i (u_i^2 + v_i^2 + w_i^2) = 1.$$

Wegen der Voraussetzungen über u, v, w stellt

$$\lambda_i = \frac{1}{u_i^2 + v_i^2 + w_i^2}$$

das Quadrat der reziproken Länge einer Hauptachse des Indexellipsoides dar, weshalb die Beziehungen gelten

$$a = \sqrt{\lambda_1}, \; b = \sqrt{\lambda_2}, \; c = \sqrt{\lambda_3},$$

wofern

$$\lambda_1 > \lambda_2 > \lambda_3$$

gewählt wird.

Die Richtungskosinus ergeben sich jetzt unmittelbar. Man findet beispielshalber

$$\alpha_1 = u_1 \, a = \frac{u_1}{\sqrt{u_1^2 + v_1^2 + w_1^2}}$$

und ähnliche Ausdrücke für die anderen acht Richtungskosinus. Ihre Werte ändern sich also nicht, wenn beliebige Vielfache von u_i, v_i, w_i benützt werden, was insofern von Bedeutung ist, als die Gleichungen XIII nur die Verhältnisse

$$u_i : v_i : w_i$$

zu finden erlauben.

43. Nachdem es so gelungen ist, das Prismenproblem allgemein und unabhängig vom Kristallsystem eindeutig zu lösen, werden jetzt jene Fälle näher zu betrachten sein, bei denen die entwickelte Methode versagt oder doch zu versagen scheint. Dies trifft zu, wenn die Ein- oder Austrittsebene des Prismas oder beide zugleich je auf einer optischen Achse (= Binormale) senkrecht stehen — die zu diesen Flächen parallelen Wellenebenen also keine bestimmte Schwingungs-

richtung haben. Damit wird natürlich die angegebene Methode illusorisch und die Formeln XIb bzw. XIc können und dürfen streng genommen nicht mehr zur Bestimmung der a_{ik} herangezogen werden, da die Voraussetzungen (bestimmte Schwingungsrichtung), auf Grund derer sie abgeleitet wurden, nicht mehr erfüllt sind. Indessen ergibt eine kurze Überlegung analoge Ausdrücke. Es genüge, dies für den Fall zu zeigen, daß die xz-Ebene auf einer optischen Achse senkrecht stehe. Das Indexellipsoid wird von derselben in einem Kreis geschnitten, als dessen Gleichung sich

$$a_{11} x^2 + 2 a_{13} xz + a_{33} z^2 - 1 = 0$$

ergibt. Da der Radius desselben gleich 1/b (b ist die Normalengeschwindigkeit längs der optischen Achse), so folgt

$$a_{11} = a_{33} = b^2, \quad a_{13} = 0$$

Es ist nun interessant zu sehen, daß die Gleichungen XIb sich genau auf diese Werte reduzieren und somit auch in diesem Grenzfall gültig bleiben. In der Tat, da

$$q_1 = q_2 = b,$$

so kommt

$$a_{11} = a_{33} = b^2 (\sin^2 \varepsilon + \cos^2 \varepsilon) = b^2$$
$$a_{13} = (q_1^2 - q_2^2) \sin \varepsilon \cos \varepsilon = 0.$$

Die übrigen Formeln bleiben unverändert, nur zeigt sich, wie die Bestimmung von a_{23} nach der Gleichung

$$a_{23} = (P_{12} R_{33} - Q_{12}) : R_{13},$$

die, wie bereits bemerkt, auch im allgemeinen kein günstiges Resultat liefert, hier zum vorneherein versagt, weil Nenner und Zähler verschwinden und a_{23} sich auf die unbestimmte Form $a_{23} = 0:0$ reduziert — ein Grund mehr, die ursprüngliche Fassung der Methode fallen zu lassen. Die nämliche Schwierigkeit (Unbestimmtheit von a_{23}) hätte sich übrigens immer eingestellt, wenn $a_{13} = 0$, was offenbar, vom eben behandelten Fall abgesehen, nur noch eintritt, wenn die zur xz-Ebene parallelen Wellenebenen parallel und senkrecht zur Prismenkante schwingen d. h.

1) wenn die Querschnittsebene eine Symmetrieebene ist. Aus Symmetriegründen verschwindet dann aber neben a_{13}

auch a_{23}, was zur Folge hat, daß selbst ohne Rücksicht auf den Polarisationszustand der zu den Grenzflächen parallelen Wellen die Polarisationskonstanten lediglich auf Grund der Gleichungen $XIa^{(i)}$ eindeutig bestimmt werden können. Übrigens handelt es sich hier um den bereits erledigten Fall a) von § 31;

2) wenn die yz-Ebene eine Symmetrieebene ist (vergl. § 31 c) und Anm. ganz am Schluß desselben Paragraphen);

3) wenn die Strahlen, die zu den parallel austretenden Wellen gehören, in der Querschnittsebene bzw. in der yz-Ebene liegen.

Im folgenden soll nun die Methode für die verschiedenen Systeme spezialisiert werden.

I. Triklines System.

44. Im triklinen System besteht zwischen kristallographischer Richtung und optischer Orientierung kein direkt erkennbarer Zusammenhang. Zudem ist die Lage sämtlicher Hauptschwingungsrichtungen für die verschiedenen Farben verschieden. Zur Bestimmung der optischen Konstanten kommt daher die angegebene Methode in ihrer allgemeinen Fassung zur Anwendung.

II. Monoklines System.

45. Im monoklinen System fällt eine Hauptschwingungsrichtung mit der Orthodiagonale zusammen, während die beiden anderen in der Symmetrieebene liegen und mit der Vertikalachse die unbekannten Winkel ϑ und $\pi/2+\vartheta$ bilden, so daß im ganzen nur vier Größen zu bestimmen sind. Dementsprechend muß sich auch die Zahl der Beobachtungen vermindern.

Die Beobachtung der Geschwindigkeiten und Schwingungsrichtungen der zu den Grenzebenen des Prismas parallelen Wellenebenen liefert die sechs Gleichungen

$$a_{11}=R_{11} \qquad a_{11}\cos^2\Gamma+a_{22}\sin^2\Gamma-2\,a_{12}\sin\Gamma\cos\Gamma=R'_{11}$$
$$a_{13}=R_{13} \qquad a_{31}\cos\Gamma-a_{23}\sin\Gamma=R'_{13}$$
$$a_{33}=R_{33} \qquad a_{33}=R'_{33},$$

die aber zur Bestimmung der Polarisationskonstanten nicht

hinreichen, weil a_{22} und a_{12} nur in einer und derselben Gleichung auftreten, a_{33} dagegen doppelt bestimmt wird.

Sind A, B, C die bekannten Richtungskosinus der Orthodiagonale in bezug auf das xyz-System, so muß die Normale des Indexellipsoides in jenem Punkt, dessen Koordinaten x, y, z den Größen A, B, C proportional sind, dieselben Richtungskosinus haben. Bezeichnet daher m einen Proportionalitätsfaktor, so muß nach den Gleichungen XIII

$$a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = mA$$
$$a_{12}x + a_{22}y + a_{23}z = mB$$
$$a_{13}x + a_{23}y + a_{33}z = mC$$

sein. Hieraus folgt nach einigen Umstellungen und mit Rücksicht auf die Beziehung

$$\frac{x}{A} = \frac{y}{B} = \frac{z}{C}$$

das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} (a_{11} - \varrho)A + \quad a_{12}B + \quad a_{13}C &= 0 \\ a_{12}A + (a_{22} - \varrho)B + \quad a_{23}C &= 0 \\ a_{13}A + \quad a_{23}B + (a_{33} - \varrho)C &= 0, \end{aligned}$$

das durch Elimination des Proportionalitätsfaktors ϱ die Doppelgleichung

$$\frac{a_{11}A + a_{12}B + a_{13}C}{A} = \frac{a_{12}A + a_{22}B + a_{23}C}{B} = \frac{a_{13}A + a_{23}B + a_{33}C}{C} \qquad \text{XV}$$

ergibt. Im Verein mit XIb und XIc hat man somit zur Bestimmung der sechs Polarisationskonstanten acht Gleichungen, so daß dieselben überbestimmt sind und sich die Methode der kleinsten Quadrate zur Ermittlung genauerer Werte verwenden läßt.

46. Die Gleichungen XV bieten etwelche Schwierigkeiten, wenn eine oder zwei der Größen A, B, C verschwinden.

I. Die Orthodiagonale liege in einer Achsenebene des xyz-Systems und zwar

1) in der Querschnittsebene. Da

$$A = \cos\lambda, \quad B = \sin\lambda, \quad C = 0,$$

so bekommt man aus den beiden ersten Gliedern der Doppelgleichung XV

$$(a_{11} - a_{22})\sin 2\lambda - 2a_{12}\cos 2\lambda = 0.$$

Das dritte Glied muß den beiden ersten, welche endlich sind, gleich sein. Das ist nur dadurch möglich, daß der Zähler desselben verschwindet, d. h. daß

$$a_{13} \cos \lambda + a_{23} \sin \lambda = 0.$$

Statt der beiden Gleichungen XV ergeben sich somit zwei speziellere, welche für die Rechnung sehr bequem sind.

2) in der yz-Ebene. Die Richtungskosinus der Orthodiagonale haben die Werte

$$A = 0, \qquad B = \cos \mu, \qquad C = \sin \mu,$$

und eine analoge Überlegung wie soeben führt an Stelle der Gleichungen XV auf die ebenfalls bequemen Ausdrücke

$$(a_{22} - a_{33}) \sin 2\mu - 2\, a_{23} \cos 2\mu = 0$$

$$a_{12} \cos \mu + a_{13} \sin \mu = 0\,.$$

3) in der Austrittsebene. Setzt man

$$A = \sin \nu, \qquad B = 0, \qquad C = \cos \nu\,,$$

so kommt

$$a_{12} \sin \nu + a_{23} \cos \nu = 0$$

$$(a_{33} - a_{11}) \sin 2\nu - 2\, a_{13} \cos 2\nu = 0.$$

Die letztere Gleichung gibt nichts Neues, sondern stellt vielmehr eine Beziehung dar, welcher die R_{ik} identisch genügen. Denn nach den Gleichungen XIb ist

$$a_{33} - a_{11} = (q_1^2 - q_2^2) \cos 2\varepsilon$$

$$2\, a_{13} = (q_1^2 - q_2^2) \sin 2\varepsilon$$

also auch

$$(a_{33} - a_{11}) \sin 2\varepsilon - 2\, a_{13} \cos 2\varepsilon = 0.$$

Weiter erkennt man aus der Bedeutung von ε, daß eine der beiden Beziehungen

$$\varepsilon = \nu \text{ bzw. } \varepsilon \pm \pi/2 = \nu$$

erfüllt sein muß. Dadurch kommt in jedem Fall

$$(a_{33} - a_{11}) \sin 2\nu - 2\, a_{13} \cos 2\nu \equiv (R_{33} - R_{11}) \sin 2\nu - 2\, R_{13} \cos 2\nu = 0.$$

Zur Berechnung der Polarisationskonstanten kommt demnach neben den Gleichungen XIb, XIc nur die Gleichung

$$a_{12} \sin \nu + a_{23} \cos \nu = 0$$

in Betracht. Wegen der Bedingung

$$R_{33} = R'_{33}$$

bleibt aber für die Ausgleichungsrechnung immer noch Raum.

Würde die Orthodiagonale in die andere Begrenzungsebene

des Prismas fallen, so müßte sich aus der Doppelgleichung XV eine Beziehung ergeben, der die R'_{ik} identisch genügen.

II. Die Orthodiagonale falle mit einer Achse des xyz-Systems zusammen, und zwar

1) mit der z-Achse. Die Querschnittsebene ist eine Symmetrieebene, und die Lösung ergibt sich, wie bereits bemerkt, in einfachster Weise nach § 31a).

2) mit der y-Achse. Da die Richtungskosinus der Orthodiagonale

$$A = 0, \quad B = 1, \quad C = 0$$

werden, das erste und letzte Glied der Gleichungen XV aber endlich bleiben müssen, so kommt

$$a_{12} = 0 \text{ und } a_{23} = 0,$$

wie sich übrigens direkt aus den Symmetrieeigenschaften des Indexellipsoides folgern ließe.

3) mit der x-Achse. Es wird einerseits

$$A = 1, \quad B = 0, \quad C = 0$$

und anderseits

$$a_{12} = 0 \text{ und } a_{13} = 0,$$

und für die Anwendung der Ausgleichungsrechnung bleibt, wie auch im vorangehenden Fall, die einzige Bedingung

$$R_{33} = R'_{33}.$$

Es ist beachtenswert, daß in allen Fällen des monoklinen Systems die Bestimmung der P_{ik} an und für sich überflüssig ist.

III. Rhombisches System.

47. Infolge der Symmetrie dieses Systems fallen die Hauptschwingungsrichtungen für alle Farben mit den kristallographischen Achsen zusammen. Seien, von der soeben gebrauchten Bezeichnung etwas abweichend, A_1, A_2, A_3; B_1, B_2, B_3; C_1, C_2, C_3 die Richtungskosinus der Brachy- resp. Makrodiagonale und der Vertikalachse in bezug auf x, y, z. Nach der Doppelgleichung XV gelten die Beziehungen:

$$\frac{a_{11}A_1 + a_{12}A_2 + a_{13}A_3}{A_1} = \frac{a_{12}A_1 + a_{22}A_2 + a_{23}A_3}{A_2} = \frac{a_{13}A_1 + a_{23}A_2 + a_{33}A_3}{A_3}$$

$$\frac{a_{11}B_1 + a_{12}B_2 + a_{13}B_3}{B_1} = \frac{a_{12}B_1 + a_{22}B_2 + a_{23}B_3}{B_2} = \frac{a_{13}B_1 + a_{23}B_2 + a_{33}B_3}{B_3} \qquad \text{XVI}$$

$$\frac{a_{11}C_1 + a_{12}C_2 + a_{13}C_3}{C_1} = \frac{a_{12}C_1 + a_{22}C_2 + a_{23}C_3}{C_2} = \frac{a_{13}C_1 + a_{23}C_2 + a_{33}C_3}{C_3}$$

Diese neun Beziehungen sind nicht voneinander unabhängig. Es gilt vielmehr der Satz: Von den neun Beziehungen der Gleichungen XVI sind nur drei voneinander unabhängig, die aber im allgemeinen auf 78 verschiedene Arten kombiniert werden können. Man kann also in 78-facher Weise aus den neun Gleichungen XVI so drei wählen, daß die übrigen sechs hierdurch bedingt sind.

Zur Erleichterung des Beweises und im Interesse späterer Anwendungen seien vier Vorbemerkungen gestattet. α) Eine einfache Kontrollrechnung zeigt, daß aus zwei Gleichungen je einer Zeile zwei beliebige Polarisationskonstanten als Funktionen der vier anderen gefunden werden können. — β) Man beweist ferner, daß von den drei Gleichungen, deren Glieder nur zwei Kolonnen angehören, jede durch die beiden anderen bedingt ist. In der Tat, schafft man z. B. in den zwei Gleichungen der zwei ersten Zeilen und Kolonnen die Nenner weg und addiert, so kommt

$$(A_1 A_2 + B_1 B_2)\, a_{11} + (A_2^2 + B_2^2 - A_1^2 - B_1^2)\, a_{12} + (A_2 A_3 + B_2 B_3)\, a_{13} \\ - (A_1 A_2 + B_1 B_2)\, a_{22} - (A_1 A_3 + B_1 B_3)\, a_{23} = 0.$$

Mit Rücksicht auf die Orthogonalitätsbedingungen folgt hierfür

$$C_1 C_2 (a_{11} - a_{22}) + (C_2^2 - C_1^2)\, a_{12} + C_2 C_3\, a_{13} - C_1 C_3\, a_{23} = 0.$$

Das ist aber genau die den beiden Ausgangsgleichungen entsprechende dritte Gleichung, falls man darin die Nenner wegschafft. — γ) Weiterhin kann man zeigen, daß zwei in der genannten Weise aufgestellte Gleichungen nicht unabhängig sind von den zwei Gleichungen, die sich durch andere Kombination der Kolonnen ergeben. Man betrachte zu diesem Zweck die vier Gleichungen:

$$\frac{a_{11} A_1 + a_{12} A_2 + a_{13} A_3}{A_1} - \frac{a_{12} A_1 + a_{22} A_2 + a_{23} A_3}{A_2} = 0$$

$$\frac{a_{11} B_1 + a_{12} B_2 + a_{13} B_3}{B_1} - \frac{a_{12} B_1 + a_{22} B_2 + a_{23} B_3}{B_2} = 0$$

$$\frac{a_{12} A_1 + a_{22} A_2 + a_{23} A_3}{A_2} - \frac{a_{13} A_1 + a_{23} A_2 + a_{33} A_3}{A_3} = 0$$

$$\frac{a_{12} B_1 + a_{22} B_2 + a_{23} B_3}{B_2} - \frac{a_{13} B_1 + a_{23} B_2 + a_{33} B_3}{B_3} = 0.$$

Subtrahiert man von der ersten Gleichung die zweite, so kommt der Ausdruck

$$\left(\frac{A_2}{A_1}-\frac{A_1}{A_2}-\frac{B_2}{B_1}+\frac{B_1}{B_2}\right)a_{12}-\left(\frac{A_3}{A_2}-\frac{B_3}{B_2}\right)a_{23}+\left(\frac{A_3}{A_1}-\frac{B_3}{B_1}\right)a_{31}=0,$$

der mit

$$k=-\frac{A_1 B_1}{A_3 B_3}$$

multipliziert und zur dritten Gleichung addiert nach einigen Umänderungen die Beziehung ergibt:

$$\left[\frac{A_1}{A_2}+\frac{(A_1 B_2-A_2 B_1)(A_1 B_1+A_2 B_2)}{A_2 B_2\cdot A_3 B_3}\right]a_{12}+a_{22}+$$

$$\left[\frac{A_3^2-A_2^2}{A_2 A_3}+\frac{A_1 B_1 (A_3 B_2-A_2 B_3)}{A_2 B_2\cdot A_3 B_3}\right]a_{23}-a_{33}-\frac{B_1}{B_3}a_{31}=0.$$

Beachtet man, daß

$$A_1 B_1+A_2 B_2+A_3 B_3=0$$

und formt man den Koeffizienten von a_{23} in folgende Weise um:

$$\frac{A_3^2 B_2 B_3-A_2^2 B_2 B_3+A_1 B_1 A_3 B_2-A_1 B_1 A_2 B_3}{A_2 B_2 A_3 B_3}=$$

$$\frac{A_3 B_2 (A_3 B_3+A_1 B_1)-A_2 B_3 (A_2 B_2+A_1 B_1)}{A_2 B_2 A_3 B_3}=\frac{A_2 A_3 (B_3^2-B_2^2)}{A_2 A_3\cdot B_2 B_3},$$

so erhält man, falls man die Koeffizienten von a_{22} und a_{33} in selbstverständlicher Weise erweitert,

$$\frac{a_{12} B_1+a_{22} B_2+a_{23} B_3}{B_2}-\frac{a_{13} B_1+a_{23} B_2+a_{33} B_3}{B_3}=0$$

d. h. genau die vierte Gleichung. — δ) Hieraus ergibt sich endlich, daß je eine Gleichung aus jeder Zeile zusammen ein unabhängiges System bilden, wofern dieselben so gewählt werden, daß ihre Glieder nicht sämtlich in den zwei nämlichen Kolonnen figurieren.

Der Beweis des Satzes ist nun leicht zu führen. Da im ganzen neun Gleichungen vorhanden sind, so kann man dieselben in

$$\binom{9}{3}=\frac{9.8.7}{1.2.3}=84$$

verschiedene Gruppen von je drei Gleichungen zusammen-

fassen. Hiervon fallen drei Gruppen weg, weil die Glieder ihrer Gleichungen nur je einer Zeile angehören. Ebenso fallen jene drei Gruppen weg, deren Gleichungen aus sechs Gliedern aufgebaut sind, die nur in je zwei Kolonnen auftreten. Es verbleiben somit 78 verschiedene Kombinationen von drei unabhängigen Gleichungen des Systems XVI.

48. Zur Bestimmung der Polarisationskonstanten genügt die Ermittlung der Geschwindigkeiten und Schwingungsrichtungen der zur xz-Ebene parallelen Wellenebenen, da diese letzteren drei Polarisationskonstanten liefern (a_{11}, a_{13}, a_{33}) und die drei anderen sich aus den Gleichungen XVI ergeben. Am einfachsten ist die Rechnung, wenn man die Gleichungen zweier Zeilen nimmt, deren Glieder in der ersten und dritten Kolonne stehen. Man erhält so a_{12} und a_{23} und kann sie in eine jener beiden Gleichungen eintragen, welche ein Glied der zweiten Kolonne der noch verbleibenden Zeile enthalten. Dadurch ergibt sich a_{22}.

Es hat keinen Zweck, die entsprechenden Gleichungen für a_{12}, a_{22} und a_{23} explizit aufzustellen, da man schließlich alle 78 Systeme betrachten müßte. Sie geben zwar alle das gleiche Resultat, aber nicht alle brauchen für die Rechnung gleich günstig zu sein.

Das gleiche Problem (Bestimmung der Hauptlichtgeschwindigkeiten eines rhombischen Kristalls mit Hilfe eines einzigen Prismas von beliebiger Orientierung) wurde schon früher (§ 15 ff.) behandelt. Die Lösung erwies sich möglich, aber nur auf Grund sehr umständlicher Überlegungen. Auch die von Born[1]) angegebene Methode, deren Voraussetzungen zudem spezieller sind wie die hier gemachten, erfordert die Bestimmung der Kurve C und demzufolge die Ermittlung von mindestens sechs Wertpaaren (q, ψ). Um wieviel einfacher ist demgegenüber die soeben entwickelte Methode, die auf Grund der Ermittlung zweier Lichtgeschwindigkeiten derselben Fortpflanzungsrichtung und der zugehörigen Schwingungsrichtungen — im ganzen also drei unabhängige Be-

---

[1]) N. Jahrbuch f. Mineral. B.-Bd. **5**, 40.

obachtungen — die Berechnung der Hauptlichtgeschwindigkeiten a, b, c gestattet und überdies ergibt, in welcher Weise sich die optischen Symmetrieachsen auf die kristallographischen Achsen verteilen.[1])

49. Ist die Orientierung des Prismas spezieller Art, so vereinfachen sich die Gleichungen XVI, was eventuell eine Vermehrung der Beobachtungen nach sich ziehen kann.

I. Eine kristallographische Achse liege in einer Achsenebene des xyz-Systems, wogegen die beiden anderen eine willkürliche Lage haben. Von den neun Richtungskosinus A_i, B_i, C_i wird einer null. Es verbleiben aber immer noch genug unabhängige Gleichungssysteme, um die allgemeine Methode anwenden zu können. Übrigens kann es von Vorteil sein, ähnliche Überlegungen wie etwa im Falle I, 1. des monoklinen Systems (§ 46) anzustellen und damit einfachere Beziehungen abzuleiten. Wäre z. B. $A_1 = 0$, so käme

$$a_{12} A_2 + a_{13} A_3 = 0.$$

Die anderen Gleichungen vereinfachen sich nicht.

II. Eine kristallographische Achse falle mit einer Achse des xyz-Systems zusammen und zwar

1) Die Brachydiagonale mit der x-Achse. Die neun Richtungskosinus nehmen die speziellen Werte

$$\begin{array}{lll} A_1 = 1 & A_2 = 0 & A_3 = 0 \\ B_1 = 0 & B_2 = \cos\mu & B_3 = \sin\mu \\ C_1 = 0 & C_2 = -\sin\mu & C_3 = \cos\mu \end{array}$$

an und statt der Gleichungen XVI kommt

$$a_{12} = 0 \qquad a_{13} = 0$$

$$(a_{22} - a_{33}) \sin 2\mu - 2 a_{23} \cos 2\mu = 0.$$

Zur Berechnung der a_{ik} ist es notwendig, die R'_{ik} heranzuziehen, wodurch Überbestimmung und damit die Möglichkeit der Anwendung der Ausgleichungsrechnung vorhanden ist.

2) Die Brachydiagonale mit der y-Achse. Da

---

[1]) Hier sei erwähnt, daß auf Grund der nämlichen Beobachtungsdaten — jedoch mit Hilfe einer wesentlich anderen Formel Th. v. Liebisch die Bestimmung der optischen Konstanten rhombischer Kristalle theoretisch durchgeführt hat. (Zeitschr. f. Krist. und Min. **7**. 433—437).

$$A_1 = 0 \qquad A_2 = 1 \qquad A_3 = 0$$
$$B_1 = \sin\mu \qquad B_2 = 0 \qquad B_3 = \cos\mu$$
$$C_1 = \cos\mu \qquad C_2 = 0 \qquad C_3 = -\sin\mu,$$

erhält man analog wie vorher

$$a_{12} = 0 \qquad a_{23} = 0$$
$$(a_{11} - a_{33})\sin 2\mu + 2a_{13}\cos 2\mu = 0.$$

Die letztere Gleichung ist, wie in § 46, I, 3 gezeigt wurde, eine Identität und scheidet darum aus, so daß abermals die R'_{ik} heranzuziehen sind.

3) Die Brachydiagonale mit der z-Achse. — Die Lösung ergibt sich, wie schon mehrmals bemerkt, am einfachsten nach der gewöhnlichen Methode.

Würde statt der Brachydiagonale die Makrodiagonale oder die Vertikalachse mit einer Achse des xyz-Systems zusammenfallen, so würden die voranstehenden Formeln im wesentlichen unverändert bleiben.

III. Das xyz-System fällt mit dem kristallographischen Achsenkreuz zusammen. Man kommt damit auf den allergewöhnlichsten Fall, der keiner weiteren Erörterung bedarf.

50. Es bleibt noch der interessante Fall zu erledigen, wo die optische Orientierung beliebig, aber gegeben[1]) ist. Man hat ohne weiteres

$$R_{11} = a^2\alpha_1^2 + b^2\beta_1^2 + c^2\gamma_1^2$$
$$R_{13} = a^2\alpha_1\alpha_3 + b^2\beta_1\beta_3 + c^2\gamma_1\gamma_3$$
$$R_{33} = a^2\alpha_3^2 + b^2\beta_3^2 + c^2\gamma_3^2.$$

Die Determinante dieses Systemes ist

$$\begin{vmatrix} \alpha_1^2 & \beta_1^2 & \gamma_1^2 \\ \alpha_1\alpha_3 & \beta_1\beta_3 & \gamma_1\gamma_3 \\ \alpha_3^2 & \beta_3^2 & \gamma_3^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha_1^2+\beta_1^2+\gamma_1^2 & \beta_1^2 & \gamma_1^2 \\ \alpha_1\alpha_3+\beta_1\beta_3+\gamma_1\gamma_3 & \beta_1\beta_3 & \gamma_1\gamma_3 \\ \alpha_3^2+\beta_3^2+\gamma_3^2 & \beta_3^2 & \gamma_3^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & \beta_1^2 & \gamma_1^2 \\ 0 & \beta_1\beta_3 & \gamma_1\gamma_3 \\ 1 & \beta_3^2 & \gamma_3^2 \end{vmatrix} =$$
$$= \beta_1\beta_3\gamma_3^2 - \beta_3^2\gamma_1\gamma_3 + \beta_1^2\gamma_1\gamma_3 - \beta_1\beta_3\gamma_1^2 = \beta_3\gamma_3(\beta_1\gamma_3 - \beta_3\gamma_1) +$$
$$+ \beta_1\gamma_1(\beta_1\gamma_3 - \beta_3\gamma_1) = (\beta_1\gamma_3 - \beta_3\gamma_1)(\beta_3\gamma_3 + \beta_1\gamma_1) = \alpha_2\beta_2\gamma_2$$

---

[1]) Th. v. Liebisch, N. Jahrb. f. Mineral. 1886. I Seite 23.
M. Born, N. J. f. Min. B. Bd. 5 (1887) Seite 40.
Dem § 48 gegenüber wird hier vorausgesetzt, daß es bekannt sei, mit welchen kristallographischen Achsen die einzelnen optischen Symmetrieachsen zusammenfallen. Dadurch wird aber nur eine rechnerische, nicht aber eine sachliche Vereinfachung erreicht.

und darum sicher von null verschieden, wenn die y-Achse auf keiner optischen Symmetrieachse senkrecht steht. Grund für das Verschwinden der Determinante ist der, daß in allen diesen Fällen wenigstens eine optische Symmetrieachse in die zx-Ebene zu liegen kommt, so daß der Winkel ε zum vorneherein gegeben ist. Es verbleiben demnach nur noch zwei unabhängige Beobachtungsreihen, die natürlich zur Bestimmung der drei Unbekannten nicht hinreichen.

51. In Kürze sei noch auf die Verwendungsmöglichkeit der Methode im Falle optisch einachsiger Kristalle aufmerksam gemacht.

Setzt man $a = b = o$ und $c = e$ (wobei allerdings die Annahme $a > b > c$ ganz dahinfällt, indem o ebensogut größer wie kleiner als e sein kann), so kommt

$$a_{ii} \equiv (\alpha_i^2 + \beta_i^2)\, o^2 + \gamma_i^2\, e^2$$
$$a_{ik} \equiv (\alpha_i \alpha_k + \beta_i \beta_k)\, o^2 + \gamma_i \gamma_k\, e^2.$$

Wegen der Identitäten

$$\alpha_i^2 + \beta_i^2 + \gamma_i^2 = 1$$

und wegen

$$\alpha_i \alpha_k + \beta_i \beta_k + \gamma_i \gamma_k = 0$$

kann die Gleichung VII des Indexellipsoides auf die Form

$$[o^2 + (e^2 - o^2)\gamma_1^2]\, x^2 + [o^2 + (e^2 - o^2)\gamma_2^2]\, y^2 + [o^2 + (e^2 - o^2)\gamma_3^2]\, z^2$$
$$+ 2(e^2 - o^2)\gamma_1\gamma_2\, xy + 2(e^2 - o^2)\gamma_2\gamma_3\, yz + 2(e^2 - o^2)\gamma_3\gamma_1\, zx = 1$$

gebracht werden, aus der die Ausnahmestellung der optischen Achse allen anderen Richtungen gegenüber deutlich wird. Zugleich ergeben sich für die Polarisationskonstanten die Werte:

$$a_{11} = o^2 + (e^2 - o^2)\gamma_1^2$$
$$a_{22} = o^2 + (e^2 - o^2)\gamma_2^2$$
$$a_{33} = o^2 + (e^2 - o^2)\gamma_3^2$$
$$a_{12} = (e^2 - o^2)\gamma_1\gamma_2$$
$$a_{23} = (e^2 - o^2)\gamma_2\gamma_3$$
$$a_{31} = (e^2 - o^2)\gamma_3\gamma_1.$$

Es sind nun zwei wesentlich verschiedene Probleme zu unterscheiden.

1) Die kristallographische Orientierung des Prismas, welches zur Bestimmung der optischen Konstanten dienen soll, ist unbekannt und un-

bestimmbar. Zur Ermittlung von e und o (und der Lage der optischen Achse) genügen die Gleichungen XIb und XIc. In der Tat, da die vier den Grenzflächen parallelen Wellenebenen (q_1, q_2 und q'_1, q'_2) zweimal den Wert o ergeben, so kommt mit Rücksicht auf die eben gefundenen Werte der Polarisationskonstanten:

$$(e^2 - o^2)\gamma_1^2 = R_{11} - o^2 \qquad a)$$

$$(e^2 - o^2)\gamma_3\gamma_1 = R_{13} \qquad b)$$

$$(e^2 - o^2)\gamma_3\gamma_1 \cos\Gamma - (e^2 - o^2)\gamma_2\gamma_3 \sin\Gamma = R'_{13}. \qquad c)$$

Aus *b)* und *c)* bekommt man

$$\frac{\gamma_2}{\gamma_1} = \frac{R_{13}\cos\Gamma - R'_{13}}{R_{13}\sin\Gamma}$$

und aus *a)* und *b)*

$$\frac{\gamma_3}{\gamma_1} = \frac{R_{13}}{R_{11} - o^2}$$

und damit wegen der Identität

$$1 + \frac{\gamma_2^2}{\gamma_1^2} + \frac{\gamma_3^2}{\gamma_1^2} = \frac{1}{\gamma_1^2}$$

die beiden Lösungen

$$\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3 \text{ und } -\gamma_1, -\gamma_2, -\gamma_3,$$

welche mit Hilfe etwa der Gleichung *b)* den eindeutigen Wert

$$e^2 - o^2$$

liefern. Da o^2 bereits bekannt ist, folgt daraus unmittelbar e^2.

Die übrigen drei Gleichungen von XIb und XIc dienen zur Anwendung der Ausgleichungsrechnung.

2) Die kristallographische Orientierung des Prismas ist bekannt. Zur Bestimmung von o und e genügt die Beobachtung von q_1 und q_2. $\varepsilon_1 = \varepsilon$ und $\varepsilon_2 = \varepsilon + \pi/2$ lassen sich aus γ_1, γ_2 und γ_3 berechnen. Man kennt darum die Schwingungsrichtung von o zum vorneherein und kann somit leicht entscheiden, welcher der beiden Werte q_1 und q_2 der ordentlichen Wellengeschwindigkeit entspreche. Da ferner

$$a_{11} + a_{33} = 2o^2 + (e^2 - o^2)(\gamma_1^2 + \gamma_3^2) = q_1^2 + q_2^2,$$

so ist

$$e^2 - o^2 = \frac{q_1^2 + q_2^2 - 2o^2}{\gamma_1^2 + \gamma_3^2}.$$

Das Problem ist also erledigt.

Übrigens hat schon Th. v. Liebisch[1]) gezeigt, daß die Hauptlichtgeschwindigkeiten eines einachsigen Kristalls mit Hilfe eines Prismas beliebiger Orientierung gefunden werden können.

52. Anhangsweise sei noch die in § 40 erwähnte Tatsache rechnerisch untersucht. Zu dem Zweck sollen zwei Sätze bewiesen werden.

1. Satz: Die absoluten Werte von a_{ik} (a_{12}, a_{23}, a_{31}) liegen zwischen null und $(a^2-c^2):2$. Daß a_{ik} verschwinden kann, ist leicht ersichtlich, genügt es doch, daß z. B. das xyz-System mit dem $\xi\eta\zeta$-System zusammenfalle. Es erübrigt somit noch der Beweis, daß $(a^2-c^2):2$ die obere Grenze von a_{ik} ist.

Mit Rücksicht auf die zweite Gleichung des Systems XIb läßt sich das Bildungsgesetz der a_{ik} $(i \neq k)$ leicht erkennen. Darnach wird, falls der besseren Formulierung wegen

$$a_{ik} \equiv a_j \quad (i \neq j \neq k = 1, 2, 3)$$

gesetzt wird, — wodurch die Beziehung zu einer bestimmten Achse des xyz-Systems besonders hervortritt — a_j bestimmt durch die Differenz der Geschwindigkeitsquadrate und die Azimute des Schwingungszustandes jener Wellen, die sich parallel der x-, y- oder z-Achse fortpflanzen ($j = 1$, 2 oder 3). Bei gegebener Lage der j-Achse kann das Azimut der dazu senkrechten i- und k-Achse, auf welche die Schwingungsrichtungen bezogen werden, sich noch beliebig ändern.

$$a_j \equiv a_{ik} \equiv (q_j'^2 - q_j''^2) \cdot \sin \varepsilon_{ik} \cdot \cos \varepsilon_{ik}$$

setzt sich darum aus den völlig unabhängigen Faktoren $q_j'^2 - q_j''^2$ und $\sin\varepsilon \cos\varepsilon$ zusammen. Der maximale Wert eines solchen Produktes ist aber gleich dem Produkt der maximalen Werte seiner Faktoren, d. h.

$$\text{Max } a_{ik} = \text{Max } (q_j'^2 - q_j''^2) \cdot \text{Max } \sin \varepsilon_{ik} \cos \varepsilon_{ik}.$$

Der erste Faktor hat den selbstverständlichen Wert $a^2 - c^2$, während der zweite Faktor sein Maximum für $\varepsilon = (4n+1) \cdot \pi/4$ erreicht. Es kommt somit

$$\text{Max } a_{ik} = \frac{a^2 - c^2}{2}.$$

Der hiernach bewiesene Satz erlaubt bereits eine Anwendung auf das in Rede stehende Problem. Es ist nämlich der Zähler von a_{23} gegeben durch

$$a_{23} \cdot a_{31} \equiv P_{12} R_{33} - Q_{12}.$$

Bedenkt man, daß für den maximalen Wert von a_{23} der Wert von a_{31} verschwindet, was mit Rücksicht auf die Werte $\alpha_1 = \gamma_1 = \beta_2 = \beta_3 = 0$ sofort begreiflich ist, so folgt, daß der maximale Wert von $P_{12} R_{33} - Q_{12}$ sicher kleiner ist als das Produkt der maximalen Werte von a_{23} und a_{31}, d. h.

$$\left| P_{12} R_{33} - Q_{12} \right| < \frac{(a^2 - c^2)^2}{4}.$$

---

[1]) In der mehrfach erwähnten Arbeit im N. Jahrb. f. Miner. 1886 **1.** 14.

Es läßt sich aber noch eine schärfere Grenze finden, da ein weiterer Satz besteht.

2. Satz: Der absolute Wert von $a_{13} \cdot a_{32}$ liegt zwischen null und $(a^2 - c^2)^2 : 8$.

Mit Berücksichtigung der Bedeutung von a_{13} und a_{23} sowie der sechs unabhängigen Gleichungen zwischen den neun Richtungskosinus des Schemas I wird $|a_{13} \cdot a_{23}|$ Maximum, wenn dies der Fall ist für

$$\begin{aligned} & a^4 \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3^2 + b^4 \beta_1 \beta_2 \beta_3^2 + c^4 \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3^2 + a^2 b^2 (\alpha_2 \alpha_3 \beta_1 \beta_3 + \alpha_3 \alpha_1 \beta_2 \beta_3) + \\ & + b^2 c^2 (\beta_2 \beta_3 \gamma_3 \gamma_1 + \gamma_2 \gamma_3 \beta_3 \beta_1) + c^2 a^2 (\gamma_2 \gamma_3 \alpha_3 \alpha_1 + \alpha_2 \alpha_3 \gamma_3 \gamma_1) + \\ & + k_1 (\alpha_1 \alpha_2 + \beta_1 \beta_2 + \gamma_1 \gamma_2) + k_2 (\alpha_2 \alpha_3 + \beta_2 \beta_3 + \gamma_2 \gamma_3) + k_3 (\alpha_3 \alpha_1 + \beta_3 \beta_1 + \gamma_3 \gamma_1) \\ & + k_4 (\alpha_1^2 + \beta_1^2 + \gamma_1^2 - 1) + k_5 (\alpha_2^2 + \beta_2^2 + \gamma_2^2 - 1) + k_6 (\alpha_3^2 + \beta_3^2 + \gamma_3^2 - 1). \end{aligned}$$

Hieraus bildet man durch partielle Differentiation nach den neun Richtungskosinus folgende Gleichungen:

$$\begin{aligned} A_1 &\equiv a^4 \alpha_2 \alpha_3^2 + a^2 b^2 \alpha_3 \beta_2 \beta_3 + c^2 a^2 \gamma_2 \gamma_3 \alpha_3 + k_1 \alpha_2 + k_3 \alpha_3 + 2 k_4 \alpha_1 = 0 \\ A_2 &\equiv a^4 \alpha_1 \alpha_3^2 + a^2 b^2 \alpha_3 \beta_1 \beta_3 + c^2 a^2 \gamma_3 \gamma_1 \alpha_3 + k_1 \alpha_1 + k_2 \alpha_3 + 2 k_5 \alpha_2 = 0 \\ A_3 &\equiv 2 a^4 \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 + a^2 b^2 (\alpha_2 \beta_1 \beta_3 + \alpha_1 \beta_2 \beta_3) + c^2 a^2 (\gamma_2 \gamma_3 \alpha_1 + \alpha_2 \gamma_3 \gamma_1) + k_2 \alpha_2 + \\ &\qquad + k_3 \alpha_1 + 2 k_6 \alpha_3 = 0 \\ B_1 &\equiv b^4 \beta_2 \beta_3^2 + a^2 b^2 \alpha_2 \alpha_3 \beta_3 + b^2 c^2 \gamma_2 \gamma_3 \beta_3 + k_1 \beta_2 + k_3 \beta_3 + 2 k_4 \beta_1 = 0 \\ B_2 &\equiv b^4 \beta_1 \beta_3^2 + a^2 b^2 \alpha_3 \alpha_1 \beta_3 + b^2 c^2 \beta_3 \gamma_3 \gamma_1 + k_1 \beta_1 + k_2 \beta_3 + 2 k_5 \beta_2 = 0 \\ B_3 &\equiv 2 b^4 \beta_1 \beta_2 \beta_3 + a^2 b^2 (\alpha_2 \alpha_3 \beta_1 + \alpha_3 \alpha_1 \beta_2) + b^2 c^2 (\beta_2 \gamma_3 \gamma_1 + \gamma_2 \gamma_3 \beta_1) + k_2 \beta_2 + \\ &\qquad + k_3 \beta_1 + 2 k_6 \beta_3 = 0 \\ C_1 &\equiv c^4 \gamma_2 \gamma_3^2 + b^2 c^2 \beta_2 \beta_3 \gamma_3 + c^2 a^2 \alpha_2 \alpha_3 \gamma_3 + k_1 \gamma_2 + k_3 \gamma_3 + 2 k_4 \gamma_1 = 0 \\ C_2 &\equiv c^4 \gamma_1 \gamma_3^2 + b^2 c^2 \gamma_3 \beta_3 \beta_1 + c^2 a^2 \gamma_3 \alpha_3 \alpha_1 + k_1 \gamma_1 + k_2 \gamma_3 + 2 k_5 \gamma_2 = 0 \\ C_3 &\equiv 2 c^4 \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3 + b^2 c^2 (\beta_2 \beta_3 \gamma_1 + \gamma_2 \beta_3 \beta_1) + c^2 a^2 (\gamma_2 \alpha_3 \alpha_1 + \alpha_2 \alpha_3 \gamma_1) + k_2 \gamma_2 + \\ &\qquad + k_3 \gamma_1 + 2 k_6 \gamma_3 = 0 \end{aligned}$$

Mit Hilfe der Orthogonalitätsgleichungen beweist man leicht, daß nachstehende Identitäten gelten.

$$\begin{aligned} \alpha_1 A_1 + \beta_1 B_1 + \gamma_1 C_1 &\equiv a_{13} a_{23} + 2 k_4 = 0 \\ \alpha_2 A_1 + \beta_2 B_1 + \gamma_2 C_1 &\equiv a_{23}^2 + k_1 = 0 \\ \alpha_3 A_1 + \beta_3 B_1 + \gamma_3 C_1 &\equiv a_{33} a_{23} + k_3 = 0 \\ \alpha_1 A_2 + \beta_1 B_2 + \gamma_1 C_2 &\equiv a_{13}^2 + k_1 = 0 \\ \alpha_2 A_2 + \beta_2 B_2 + \gamma_2 C_2 &\equiv a_{13} a_{23} + 2 k_5 = 0 \\ \alpha_3 A_2 + \beta_3 B_2 + \gamma_3 C_2 &\equiv a_{33} a_{13} + k_2 = 0 \\ \alpha_1 A_3 + \beta_1 B_3 + \gamma_1 C_3 &\equiv a_{12} a_{13} + a_{11} a_{23} + k_3 = 0 \\ \alpha_2 A_3 + \beta_2 B_3 + \gamma_2 C_3 &\equiv a_{22} a_{13} + a_{12} a_{23} + k_2 = 0 \\ \alpha_3 A_3 + \beta_3 B_3 + \gamma_3 C_3 &\equiv 2 a_{13} a_{23} + 2 k_6 = 0 \end{aligned}$$

Diese neun Gleichungen gestatten, die k_i als Funktionen von a, b, c, α_i, β_i und γ_i zu berechnen und liefern überdies drei von k_i unabhängige Beziehungen, die mit den sechs Orthogonalitätsgleichungen jene Werte von $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ $(i = 1, 2, 3)$ zu finden erlauben, für welche

$$|a_{13} a_{23}| = \text{Max.}$$

Die neun soeben genannten Gleichungen sind folgende:

$$a_{23}^2 = a_{31}^2 \qquad (= -k_1)$$
$$a_{33}\, a_{31} = a_{22}\, a_{31} + a_{12}\, a_{23} \qquad (= -k_2)$$
$$a_{23}\, a_{33} = a_{11}\, a_{23} + a_{12}\, a_{31} \qquad (= -k_3)$$
$$\alpha_i^2 + \beta_i^2 + \gamma_i^2 = 1$$
$$\alpha_i\, \alpha_k + \beta_i\, \beta_k + \gamma_i\, \gamma_k = 0.$$

Die erste Gleichung zerfällt in die zwei linearen Gleichungen

$$a_{23} = a_{31} \quad | \quad a_{23} = -a_{31},$$

mit deren Berücksichtigung aus den übrigen folgt:

$$\begin{array}{l|l} a_{13}(a_{33} - a_{22}) = a_{12}\, a_{13} & a_{13}(a_{33} - a_{22}) = -a_{12}\, a_{13} \\ a_{13}(a_{33} - a_{11}) = a_{12}\, a_{13} & a_{13}(a_{33} - a_{11}) = -a_{12}\, a_{13}. \end{array}$$

Da

$$a_{23} = a_{31} = 0$$

jedenfalls nicht die extremsten Maxima und Minima von $a_{32}\, a_{31}$ ergeben, so kann man an Stelle der obigen drei ersten Gleichungen folgende zwei Systeme setzen.

$$\begin{array}{lr|lr} \text{A.} & a_{23} = a_{31} & \text{B.} & a_{23} = -a_{31} \\ & a_{33} - a_{22} = a_{12} & & a_{33} - a_{22} = -a_{12} \\ & a_{33} - a_{11} = a_{12} & & a_{33} - a_{11} = -a_{12} \end{array}$$

Zur Auflösung der Gleichungen dürfte es sich empfehlen, die geometrische und physikalische Bedeutung der Polarisationskonstanten heranzuziehen.

Im Falle A wird man ohne weiteres bemerken, daß $a_{11} = a_{22}$, a_{33} und $a_{23} = a_{31}$ jene Konstanten sind, welche in den Gleichungen der Schnittellipsen des Indexellipsoides mit den beiden Achsenebenen

$$y = 0 \text{ und } x = 0$$

auftreten, denn wegen Gleichung VII schreiben sich diese Ellipsengleichungen ohne weiteres in der Form

$$a_{11}\, x^2 + 2\, a_{13}\, x z + a_{33}\, z^2 = 1$$
$$a_{22}\, y^2 + 2\, a_{23}\, y z + a_{33}\, z^2 = 1.$$

Diese beiden Ellipsen sind den Beziehungen A zufolge gleich und können zur Deckung gebracht werden, falls die xz-Ebene soweit um die z-Achse gedreht wird, bis $+x$ mit $+y$ zusammenfällt. — Sie sind also symmetrisch nach der Ebene

$$x - y = 0,$$

die mithin eine optische Symmetrieebene sein muß. In dieser Ebene liegen zwei optische Symmetrieachsen; senkrecht dazu ist die dritte. Es sind folgende drei durch die Figuren 5a, 5b und 5c erläuterten Fälle denkbar, für welche das Schema I die umstehende spezielle Form annimmt. Setzt man diese Ausdrücke,

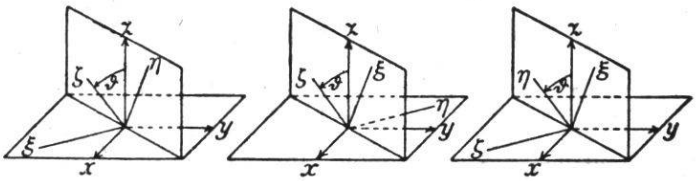

Fig. 5a Fig. 5b Fig. 5c

Fall A.	In der xy-Ebene liegt die									Zu Fig. 5a, 5b, 5c.
	ξ-Achse			η-Achse			ζ-Achse			
	x	y	z	x	y	z	x	y	z	
ξ	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\vartheta$	$\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\vartheta$	$\sin\vartheta$	$\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\vartheta$	$\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\vartheta$	$\sin\vartheta$	
η	$\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\vartheta$	$\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\vartheta$	$\sin\vartheta$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$-\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\vartheta$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\vartheta$	$\cos\vartheta$	
ζ	$-\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\vartheta$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\vartheta$	$\cos\vartheta$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\vartheta$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\vartheta$	$\cos\vartheta$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	

Fall B.	In der xy-Ebene liegt die									Zu Fig. 6a, 6b, 6c.
	ξ-Achse			η-Achse			ζ-Achse			
	x	y	z	x	y	z	x	y	z	
ξ	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$-\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\vartheta$	$\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\vartheta$	$\sin\vartheta$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\vartheta$	$\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\vartheta$	$\sin\vartheta$	
η	$-\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\vartheta$	$\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\vartheta$	$\sin\vartheta$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\vartheta$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\vartheta$	$\cos\vartheta$	
ζ	$\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\vartheta$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\vartheta$	$\cos\vartheta$	$\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\vartheta$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\vartheta$	$\cos\vartheta$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	

welche den sechs Orthogonalitätsbedingungen sowie der ersten und der Differenz der beiden andern der Gleichungen A identisch genügen, in die dritte Gleichung, nämlich

$$a_{33} - a_{11} = a_{12},$$

ein, so erhält man

$$\vartheta = \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}$$

und findet für $|a_{23}\, a_{31}|$ bzw.

$$\frac{(b^2 - c^2)^2}{8}, \quad \frac{(a^2 - c^2)^2}{8}, \quad \frac{(a^2 - b^2)^2}{8}.$$

Im Falle B bestimmen

$$a_{11} = a_{22},\ a_{33},\ a_{23} = -a_{31}$$

wiederum die beiden Schnittellipsen des Indexellipsoides mit den Ebenen

$$y = 0 \text{ und } x = 0.$$

Ihre Gleichungen sind wie soeben

$$a_{11}\, x^2 + 2\, a_{13}\, x z + a_{33}\, z^2 = 1$$
$$a_{22}\, y^2 + 2\, a_{23}\, y z + a_{33}\, z^2 = 1.$$

Die hierdurch dargestellten Ellipsen sind wegen der Gleichungen B ersichtlich gleich und gelangen zur Deckung, wenn die xz-Ebene soweit um die z-Achse gedreht wird, bis + x mit — y zusammenfällt. Sie sind also symmetrisch bezüglich

$$x + y = 0.$$

Möglich sind demnach nur folgende drei durch die Figuren 6a, 6b und 6c dargestellten Orientierungen, für welche das Schema I die auf der vorangehenden Seite zusammengestellten Formen annimmt.

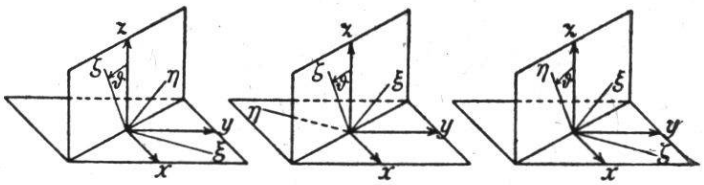

Fig. 6a Fig. 6b Fig. 6c

Verfährt man wie bei A, so berechnet sich abermals

$$\vartheta = \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}$$

und für $|a_{23}\, a_{31}|$ kommt genau wie vorher

$$\frac{(b^2 - c^2)^2}{8}, \quad \frac{(a^2 - c^2)^2}{8}, \quad \frac{(a^2 - b^2)^2}{8}.$$

Einige numerische Beispiele mögen diese Formeln erläutern.

Tabelle II

	a	c	$\frac{(a^2 - c^2)^2}{8}$
Rhomb. Schwefel	0,51270	0,44632	0,000507
Aragonit	0,65354	0,59316	0,000708
Gips	0,65771	0,65376	0,000003
α — Äthylpyruvat-Hydrazon	0,67264	0,53186	0,003594

Diese Zahlen erklären die Erfahrungen, die sich bei der numerischen Prüfung der auseinandergesetzten Methode unliebsam geltend gemacht haben.

III. TEIL

Experimentelle Prüfung der im zweiten Teil entwickelten Methode.

53. Die im zweiten Teil erläuterte Methode zur Bestimmung der Brechungsindizes optisch zweiachsiger Kristalle wurde an je einem Prisma von

Kupfervitriol,
Colemanit und
Euklas

geprüft. Die dabei gewonnenen Erfahrungen sollen im folgenden samt den erzielten Resultaten mitgeteilt werden.

54. Die Beobachtungen wurden mit Hilfe eines Fueßschen Goniometers Modell II ausgeführt. Als Lichtquelle diente eine mit Helium gefüllte Geißlerröhre, doch konnte auch im günstigsten Falle (Euklas) nur auf vier Linien eingestellt werden: rot (668 $\mu\mu$), gelb (588), grün (502) und indigo (447). Als Spalt wurde der Webskysche gewählt, weil er die Schärfe mit großer Helligkeit verbindet. Wegen der geringen Zahl von Linien konnte keine störende Übereinanderlagerung der Farben eines und desselben Spektrums entstehen.

55. Bei den verschiedenen Ablesungen wurde im allgemeinen folgender Gang eingehalten. Nachdem das Prisma zentriert, justiert und in jene Lage gebracht war, welche für die Beobachtung des gebrochenen Lichtes geeignet erschien, wurden der Teilkreis sowie die Achse des Kristallträgers festgeklemmt und die Fernrohrachse in die Verlängerung der Kollimatorachse gerückt, um das Azimut des unabgelenkten Spaltbildes zu ermitteln. Der größeren Genauigkeit wegen wurden Einstellung und Ablesung dreimal vorgenommen, nachdem das Prisma zuvor aus dem Zentrum des Gesichtsfeldes entfernt worden war. Hierauf wurde die Prismenkante wieder mit dem Fadenkreuz zur Deckung gebracht, sodann das Fernrohr herumgedreht, bis das an der Eintrittsebene reflektierte Spaltbild sich mit dem Fadenkreuz deckte.

Diese Einstellung wurde zweimal vorgenommen. Nachher wurde das Fadenkreuz der Reihe nach auf die einzelnen Farben der beiden Spektra (zuerst des weniger abgelenkten und dann des stärker abgelenkten) von rot bis indigo und dann zurück von indigo bis rot eingestellt. Wenn sich die zwei durch Doppelbrechung erzeugten Spektra überlagerten, wurden sie durch einen vor das Auge gehaltenen Nikol unterschieden. Nach diesen Ablesungen wurde wieder eine zweimalige Einstellung des reflektierten Lichtes gemacht, hernach in der beschriebenen Weise neuerdings auf die beiden Spektra eingestellt und das Fernrohr zum Schlusse, nachdem das Azimut des reflektierten Spaltbildes vorher noch zweimal abgelesen war, dreimal auf das unabgelenkte Spaltbild (bei weggerücktem Prisma) gerichtet.

56. Folgende Tabelle III, die dem Beobachtungsheft aufs Geratewohl entnommen ist, zeigt, welche Genauigkeit erzielt

Tabelle III.

Reflekt.	Direkt.	He	Abgelenkt. Spaltbild			
200° 38½′	299° 30′	rot (668 μμ)	323° 02⅛′	01⅞′	02′	01½′
38¼	29¾	gelb (588 μμ)	08⅞	09	38⅞	09
38½	29⅞	grün (502 μμ)	19⅜	19⅝	19⅝	19⅜
38½	30	indigo (447 μμ)	30⅜	30⅜	30½	30⅝
38¾	29⅞	rot (668 μμ)	20¾	20⅝	20¼	20⅛
38½	30	gelb (588 μμ)	27⅝	27⅝	27⅝	27⅝
		grün (502 μμ)	38⅛	38¼	38⅜	38¼
		indigo (447 μμ)	48⅝	49	49¼	49⅛

werden kann. Bemerkt sei noch, daß bei der Ablesung die Achtelsminuten geschätzt wurden. Die Teilung erlaubt bekanntlich die direkte Ablesung von halben Minuten. Viertelsminuten können leicht geschätzt werden. Um aber genau eine solche zu haben, müssen zwei aufeinanderfolgende Teilstriche des Nonius so zwischen zwei aufeinanderfolgenden Strichen des Teilkreises liegen, daß das Intervall zwischen den beiden Strichen links gleich dem Intervall zwischen den beiden Strichen rechts ist. Besteht ein merklicher Unterschied, so wird mit Benutzung von Achtelsminuten eine größere Genauigkeit erzielt.

57. Aus den Azimuten des reflektierten, nicht abgelenkten und abgelenkten Spaltbildes berechnen sich in einfacher Weise die beiden Winkel i_0 und i_1. Zur Berechnung von ψ und q dienen die bekannten Formeln (die Bedeutung der Buchstaben ist dieselbe wie früher; vergl. auch Fig. 1)

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\Gamma}{2}-r_1\right)=\operatorname{tg}\left(r_0-\frac{\Gamma}{2}\right)=\operatorname{tg}\frac{\Gamma}{2}\cdot\operatorname{tg}\left(i_0-\frac{\Gamma+\Delta}{2}\right)\operatorname{cotg}\frac{\Gamma+\Delta}{2}$$

$$q=\frac{\sin r_0}{\sin i_0}=\frac{\sin r_1}{\sin i_1}$$

$$\psi=\frac{\pi}{2}-r_0.$$

Die Rechnungen wurden tabellarisch angeordnet. Es genüge ein beliebig gewähltes Beispiel (Colemanit) mitzuteilen (vergl. Tab. IV). Dabei soll ausdrücklich bemerkt werden, daß bei den entsprechenden Messungen, abweichend von den Festsetzungen des § 34, die Eintrittsfläche zur xz-Ebene gewählt wurde. Sofern man sich nämlich die Formel

$$\operatorname{tg}\left(r_0-\frac{\Gamma}{2}\right)=\operatorname{tg}\frac{\Gamma}{2}\operatorname{tg}\left(i_0-\frac{\Gamma+\Delta}{2}\right)\operatorname{cotg}\frac{\Gamma+\Delta}{2}$$

bedient, erzielt man bei dieser Stellung den großen Vorteil, daß die Berechnung von i_1 dahinfällt und für die einzelnen Farben der beiden Spektra einer Beobachtungsreihe q_i (bei Colemanit also 6 Werte) stets denselben Nenner hat, was beim logarithmischen Rechnen eine nicht zu unterschätzende Vereinfachung ist. Um aber bei den einmal abgeleiteten Formeln

bleiben zu können, wurde, wenn die Eintrittsfläche als xz-Ebene diente, der ganze Kristall um eine zur brechenden Kante senkrechte Achse gedreht gedacht, so daß die positive Richtung der z-Achse von oben nach unten lief.

Tabelle IV. Rechnungs-Schema.

	rot	gelb	grün	rot	gelb	grün
	6′07″	9′51″	−5′38″	6′28″	9′19″	
A	223° 39′ 23″	223° 45′ 30″	223° 55′ 21″	223° 49′ 43″	223° 56′ 11″	224° 05′ 30″
D	203° 59′ 50″	203° 59′ 50″	203° 59′ 50″	203° 59′ 50″	203° 59′ 50″	203° 59′ 50″
Δ	19° 39′ 33″	19° 45′ 40″	19° 55′ 31″	19° 49′ 53″	19° 56′ 21″	20° 05′ 40″
Γ	28° 21′ 29″	28° 21′ 29″	28° 21′ 29″	28° 21′ 29″	28° 21′ 29″	28° 21′ 29″
$\Gamma+\Delta$	48° 01′ 02″	48° 07′ 09″	48° 17′ 00″	48° 11′ 22″	48° 17′ 50″	48° 27′ 09″
$\frac{\Gamma+\Delta}{2}$	*24° 00′ 31″*	*24° 03′ 35″*	*24° 08′ 30″*	*24° 05′ 41″*	*24° 08′ 55″*	*24° 13′ 35″*
i_0	45° 31′ 17″	45° 31′ 17″	45° 31′ 17″	45° 31′ 17″	45° 31′ 17″	45° 31′ 17″
$i_0-\frac{\Gamma+\Delta}{2}$	*21° 30′ 46″*	*21° 27′ 42″*	*21° 22′ 47″*	*21° 25′ 36″*	*21° 22′ 22″*	*21° 17′ 42″*
	3′04″	4′55″	−2′49″	3′14″	4′40″	
$\log \operatorname{tg} \frac{\Gamma}{2}$	9,4025183	9,4025183	9,4025183	9,4025183	9,4025183	9,4025183
$\log \operatorname{tg}\left(i_0-\frac{\Gamma+\Delta}{2}\right)$	9,5953975 2840	9,5942851 2598	9,5924263 2916	9,5935423 2229	9,5924263 1365	9,5905617 2614
	8,9981998	8,9970632	8,9952362	8,9962835	8,9950811	8,9933414
$-\log \operatorname{tg} \frac{\Gamma+\Delta}{2}$	9,6485831 1756	9,6496023 1980	9,6512974 1693	9,6502809 2317	9,6512974 3103	9,6529881 1969
$\log \operatorname{tg}\left(r_0-\frac{\Gamma}{2}\right)$	9,3494411 3290 1121	9,3472629 69494 3135	9,3437695 3578 4117	9,3457709 552 157	9,3434734 3578 1156	9,3401564 397391 4173
$r_0-\frac{\Gamma}{2}$	12° 36′ 11″	12° 32′ 31″	12° 26′ 41″	12° 30′ 01″	12° 26′ 11″	12° 20′ 41″
$\frac{\Gamma}{2}$	14° 10′ 45″	14° 10′ 45″	14° 10′ 45″	14° 10′ 45″	14° 10′ 45″	14° 10′ 45″
r_0	*26° 46′ 56″*	*26° 43′ 16″*	*26° 37′ 26″*	*26° 40′ 46″*	*26° 36′ 56″*	*26° 31′ 26″*

(Fortsetzung der Tabelle IV.)

	rot	gelb	grün	rot	gelb	grün
	9,9507138	9,9509685	9,9513492	9,9511590	9,9513492	9,9517282
log cos 26⁰ ..	+ 42	— 170	— 275	— 487	+ 42	— 273
	9,9507180	9,9509515	9,9513217	9,9511103	9,9513534	9,9517009
log cos² 26 ..	9,9014360	9,9019030	9,9026434	9,9022206	9,9027068	9,9034018
	11	8995	392	05	44	3993
	49	35	42	01	24	25
$\sin^2 \psi$	*0,796959*	*0,797817*	*0,799178*	*0,798400*	*0,799294*	*0,800575*
	9,6538084	9,6528059	9,6512966	9,6520521	9,6512966	9,6497807
log sin 26⁰ ..	— 167	+ 669	1092	1928	— 168	1097
	9,6537917	9,6528728	9,6514058	9,6522449	9,6512798	9,6498904
log sin² 26⁰ ..	9,3075834	9,3057456	9,3028116	9,3044898	9,3025596	9,2997808
	16	382	76	690	474	687
	18	74	40	208	122	121
$\cos^2 \psi$	*0,203041*	*0,202183*	*0,200822*	*0,201600*	*0,200706*	*0,199425*
log 2	0,3010300	0,3010300	0,3010300	0,3010300	0,3010300	0,3010300
log sin ψ	9,9507180	9,9509515	9,9513217	9,9511103	9,9513534	9,9517009
log cos ψ	9,6537917	9,6528728	9,6514058	9,6522449	9,6512798	9,6498904
	9,9055397	9,9048543	9,9037575	9,9043852	9,9036632	9,9026213
	68	07	2	01	596	174
	29	36	3	51	36	39
$2 \sin \psi \cos \psi$	*0,804525*	*0,803257*	*0,801231*	*0,802389*	*0,801057*	*0,799137*
log sin r	9,6537917	9,6528728	9,6514058	9,6522449	9,6512798	9,6498904
log sin i	9,8534013	9,8534013	9,8534013	9,8534013	9,8534013	9,8534013
log q	9,8003904	9,7994715	9,7980045	9,7988436	9,7978785	9,7964891
log q²	9,6007808	9,5989430	9,5960090	9,5976872	9,5957570	9,5929782
	769	327	30	42	497	57
	39	103	60	30	73	25
q²	*0,398824*	*0,397140*	*0,394465*	*0,395993*	*0,394237*	*0,391722*

58. Bei der Berechnung von $\sin^2 \psi$, $2 \sin \psi \cos \psi$ und $\cos^2 \psi$ ist zu beachten, daß derjenige Wert von $2 \sin \psi \cos \psi$, welcher mit Hilfe der Logarithmen von $\sin \psi$ und $\cos \psi$ gefunden wird, für ein gewisses Intervall des Argumentes ψ im allgemeinen verschieden ist von dem-

jenigen Wert, der sich dadurch ergibt, daß das Produkt der Zahlenwerte von $\sin^2\psi$ und $\cos^2\psi$ radiziert wird. Zur Erläuterung mögen die beiden in der Tabelle V zusammengestellten Beispiele dienen. In den beiden ersten Kolonnen sind die Logarithmen der in Betracht kommenden trigonometrischen Funktionen und ihrer Quadrate hingeschrieben; die drei folgenden Kolonnen enthalten die auf Grund dieser Logarithmen gefundenen Werte von $\sin^2\psi$, $\cos^2\psi$ und $2\sin\psi\cos\psi$, während in der letzten Kolonne die aus den hingeschriebenen sechsstelligen Werten von $\sin^2\psi$ und $\cos^2\psi$ berechnete Größe von $2\sin\psi\cos\psi$ vermerkt ist.

Tabelle V.

ψ	$\log\sin\psi$ $\log\sin^2\psi$	$\log\cos\psi$ $\log\cos^2\psi$	$\sin^2\psi$	$\cos^2\psi$	$2\sin\psi\cos\psi$	$2\sqrt{\sin^2\psi\cos^2\psi}$
1^0	8,2418553 6,4837106	9,9999338 9,9998676	0,000305	0,999695	0,034899	0,034923
4^0	8,8435845 7,6871690	9,9989408 9,9978816	0,004866	0,995134	0,139173	0,139173

Die Ungleichheit der Zahlen der beiden letzten Kolonnen für $\psi = 1^0$ ist ebenso augenfällig wie ihre Übereinstimmung für $\psi = 4^0$.

Der Grund für dieses eigenartige Verhalten liegt darin, daß bei der logarithmischen Berechnung von $2\sin\psi\cos\psi$ im Falle von $\psi = 1^0$ für $\sin^2\psi$ der Wert

$$\sin^2 1^0 = \frac{0{,}304586}{1000}$$

in Betracht gezogen wird, während im zweiten Fall $\sin^2 1^0 = 0{,}000305$ zur Geltung kommt. Demnach ergibt bei der logarithmischen Rechnung $\sin^2\psi\cos^2\psi$ einen Bruch mit dem Nenner 1000, dessen Zähler ungefähr um 4 Einheiten der vierten Dezimale kleiner ist wie im Fall, wo

$$\sin^2 1^0 = 0{,}000305$$

gesetzt wird. Inwieweit dieser Unterschied das Endresultat beeinflußt, kann aus der Formel

$$d\,(2\sqrt{a\,x}) = \sqrt{\frac{a}{x}} \cdot dx$$

abgeschätzt werden. Wird darin

$$x = 0{,}304586$$

$$a = \frac{0{,}999695}{1000} \text{ und}$$

$$dx = 0{,}0004$$

gesetzt, so ergibt sich für die Variation des fraglichen Ausdruckes

$$d\,(2\sqrt{a\,x}) = 0{,}000023,$$

was mit der Differenz der beiden in der Tabelle aufgeführten Werte bestens übereinstimmt. Der richtigere Wert von $2\sin\psi\cos\psi$ ist selbst-

verständlich der aus den Tafeln gefundene und nicht der nach der anderen Methode berechnete.

Für $\psi = 4^0$ wird die Übereinstimmung der beiden Werte aus dem Grunde so vollkommen, weil $\sin^2 4^0 = 0{,}00486597$ von dem bei der Rechnung verwendeten ($= 0{,}004866$) nur um ca. $0{,}000003 \cdot 10^{-2}$ verschieden ist. Verfährt man wie soeben, so ergibt sich der Fehler im ganzen zu ca. 0,0000005. Natürlich spielt hier das günstige Zusammenwirken der Umstände wesentlich mit, da im ungünstigsten Fall der Fehler ungefähr sieben Einheiten der sechsten Dezimale ausmachen müßte.

59. Am umständlichsten war die Beobachtung jener Wellen, deren Ebenen im Kristall den Grenzflächen parallel sind. Solange es sich nur darum handelt, die Ablenkung usw. (also q und ψ) festzustellen, ist es natürlich bei weitem das Einfachste, wenn man die Grenzebene, zu der die Wellenebene parallel sein soll, senkrecht zur Kollimatorachse stellt. Das bietet keine Schwierigkeit. Bestimmt man nämlich bei festgeschraubtem Teilkreis und Kristallträger die Azimute des reflektierten und des nicht abgelenkten Spaltbildes, so gibt die Halbierende des Nebenwinkels der Fernrohrstellungen für das reflektierte und direkt durchgehende Licht die Flächennormale an, die man durch Drehung des mit dem Kristallträger verbundenen Teilkreises um den berechneten Winkel leicht in die Verlängerung der Kollimatorachse bringen kann.[1]) Indessen ist diese Anordnung nicht geeignet, um den Schwingungszustand der zur Austrittsfläche parallelen Wellenebenen zu untersuchen.

Zum Zwecke dieser Bestimmung wurde ursprünglich die Austrittsebene senkrecht zur Fernrohrachse gestellt (mit Hilfe von Manipulationen, die den soeben erwähnten vollständig entsprechen) und dann das Fernrohr samt dem mit dem Kristallträger festverschraubten Teilkreis soweit gedreht, bis das abgelenkte Spaltbild in der Mitte des Gesichtsfeldes erschien. Die erforderlichen Operationen sind aber sehr umständlich und zeitraubend, da es nur durch vielfaches Probieren und Ablesen gelingt, das genannte Spaltbild derart mit dem Fadenkreuz zur Deckung zu bringen, daß Teilkreis und Fernrohr in der bestimmten gegenseitigen Lage sind. Man kann

---

[1]) Vergl. v. Groth, Physikalische Krystallographie 4. Aufl. Seite 694.

aber in etwas anderer Weise verfahren, um die gewünschte Einstellung mit jeder beliebigen Genauigkeit zu erzielen. Hierzu dreht man das Fernrohr zuerst so, daß seine neue Lage zur alten symmetrisch ist bezüglich der verlängerten Kollimatorachse (Drehung $= 2\Delta$). Hierauf dreht man das Prisma, welches mit der Eintrittsfläche senkrecht zur Kollimatorachse steht, samt dem Teilkreis, um $180^0 \pm \Delta$ (je nach dem Drehsinn), während das Fernrohr festgeklemmt bleibt. Durch diese beiden Drehungen sind Kollimator und Fernrohr sozusagen vertauscht worden, wogegen infolge der Umkehrbarkeit der Lichtwege die Richtung der Lichtausbreitung in bezug auf das Prisma (vom Fortpflanzungssinn abgesehen) unverändert geblieben ist. War also das Fernrohr anfänglich auf irgendein Spaltbild eingestellt, so wird es auch in der zweiten Lage richtig eingestellt sein.

An Hand der Fig. 7 kann man sich hiervon leicht vergewissern. Sei AOB die Anfangsstellung des Prismas, OC und OF die Richtungen der Kollimator- bzw. Fernrohrachse. Bringt man letztere mit der Richtung OF′ zur Deckung (FOF′ $= 2\Delta$) und dreht dann das Prisma bei festgeklemmtem Fernrohr in der Pfeilrichtung um $180^0 - \Delta$, so wird OC mit OF′, AOB mit A′OB′ und OF mit OC zusammenfallen, d. h. es ist als ob in der Tat Fernrohr und Kollimator ihre Rollen vertauscht hätten.[1])

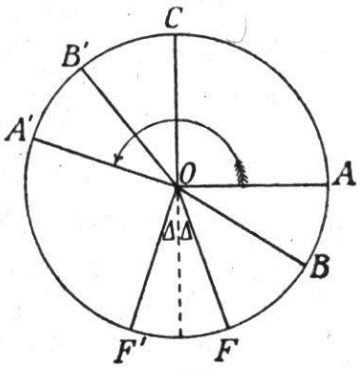

Fig. 7

60. Zur Bestimmung der Schwingungsrichtungen dieser zur Austrittsfläche parallelen Wellenebenen wurde auf den Kollimator (zwischen Lichtquelle und Spaltöffnung) und das Fernrohr (zwischen Auge und Okular) je ein Nikol aufgeklemmt, dessen Drehung an einem größeren Teilkreis mit Hilfe eines Nonius auf Zehntelsgrade genau abgelesen werden konnte. Der Nikol vor dem Kollimator diente dazu, das einfallende Licht so zu polarisieren, daß das eine der beiden Spektren

---

[1]) Daß diese Einstellungen wesentlich erleichtert würden, falls auch der Kollimator beweglich wäre, ist unmittelbar verständlich.

(zur Vermeidung störender Lichteindrücke oder Überlagerung der beiden Spektra) verschwand.

61. Die wichtigste Arbeit vor Gebrauch des Analysators war die Orientierung seines Teilkreises in bezug auf die Drehachse des Instrumentes (z-Achse). Dazu dienten zwei natürliche Kristallprismen von Apatit und Euklas. Bei dem Apatitprisma war die brechende Kante parallel der optischen Achse, die Schwingungsrichtungen des austretenden Lichtes also horizontal und vertikal. Die Austrittsebene des Euklasprismas war eine Fläche aus der Zone der Orthohemidomen, während die brechende Kante im Klinopinakoid lag. Da der Kristall überdies so aufgestellt war, daß die Normalen der austretenden Wellenebenen auf der Austrittsfläche senkrecht standen, waren ihre Schwingungsrichtungen ebenso wie beim Apatitprisma horizontal und vertikal.

Die Einstellung auf maximale Dunkelheit gab keine günstigen Resultate; es erschien vielmehr angezeigt, den Nikol einmal rechtsherum und nachher linksherum so weit zu drehen, bis die Sichtbarkeit des Spaltbildes praktisch verschwand.[1]) Die Beobachtungsdaten mögen hier folgen. Es verschwindet die

	schnellere		langsamere	
	Welle bei			
Apatit I	137,90°	138,60°	228,05°	228,50°
	138,50	138,60	228,40	228,60
	138,60	138,00	228,00	228,20
Apatit II	138,65	138,90	228,30	228,65
	138,15	138,80	228,55	228,35
	138,40	138,75	228,25	228,15
Euklas I	228,45	228,75	137,95	138,65
	228,60	228,55	138,25	138,50
	228,20	228,65	138,15	138,15
Euklas II	228,00	228,60	138,70	138,10
	228,35	228,55	138,00	138,35
	228,35	228,45	137,95	138,65

[1]) Es war die Vorsorge getroffen, daß möglichst wenig Nebenlicht in das Fernrohr eindrang. Die Spaltbilder erschienen darum auf einem dunklen Hintergrund, so daß das Verschwinden mit verhältnismäßig großer Genauigkeit festgestellt werden konnte.

Die zweiten Beobachtungsreihen wurden einige Tage später als die anderen gemacht, nachdem inzwischen die Schwingungsazimute der drei Kristalle, an denen die Methode erprobt werden sollte, bestimmt waren.

Die Mittel obiger Versuche sind:

Apatit I	138,33° ± 0,219	228,15° ± 0,126
	138,40 ± 0,200	228,43 ± 0,120
Apatit II	138,40 ± 0,144	228,37 ± 0,093
	138,82 ± 0,044	228,38 ± 0,145
Euklas I	138,12 ± 0,088	228,42 ± 0,117
	138,43 ± 0,148	228,65 ± 0,058
Euklas II	138,22 ± 0,242	228,23 ± 0,117
	138,37 ± 0,159	228,53 ± 0,045

Diese Zahlen zeigen zunächst, daß der Analysator während der Versuche seine Stellung nicht änderte. Ferner zeigen sie die fast unerwartet genaue Bestimmungsfähigkeit dieser Schwingungsazimute. Die den einzelnen Mittelwerten beigefügten Fehler sind nämlich die sogen. mittleren quadratischen Fehler des Mittelwertes. Zu ihrer Berechnung bestimmt man zuerst den Mittelwert, sucht hierauf den Fehler jeder Beobachtung, dividiert die Summe ihrer Quadrate durch $n(n-1)$, falls n die Anzahl der Beobachtungen bedeutet, und zieht die Wurzel. Symbolisch schreibt man

$$M = \sqrt{\frac{[\varepsilon\varepsilon]}{n(n-1)}}.$$

Ähnlich wie die Beobachtungsgrößen zu Teilmitteln vereinigt wurden, können sie auch zu einem Gesamtmittel zusammengefaßt werden. Man findet

138,3854° ± 0,0635 228,3958° ± 0,0442.

Die geringe Abweichung von der theoretisch geforderten Differenz der beiden letzten Zahlen ist beachtenswert!

Bedenkt man, daß jede Beobachtung der einen Reihe füglich auch als Beobachtung der anderen Reihe gedeutet werden kann, falls man 90° addiert oder subtrahiert, so kommt endgültig

$$\left.\begin{matrix}138{,}3906^\circ\\228{,}3906^\circ\end{matrix}\right\} \pm 0{,}0383,$$

so daß die Ungenauigkeit kleiner wie $2^1/_3$ Bogenminuten wird.

Diesem Ergebnis zufolge verschwindet beim Apatitprisma die schnellere Welle bei der Nikolstellung 138,39°, die langsamere bei 228,39°. Die Doppelbrechung des Apatit ist negativ, d. h. $\omega > \varepsilon$, die schnellere Welle ist daher die außerordentliche, ihre Schwingungsrichtung im vorliegenden Fall also parallel der brechenden Kante, d. h. vertikal. Vertikal schwingendes Licht wird demnach vom Analysator nicht durchgelassen, wenn er auf 138,39° eingestellt ist. **Der Nullpunkt für die Zählung der Schwingungsazimute ist darum 228,39°.**

62. Es erübrigt noch ein Wort über Γ, d. h. den brechenden Winkel des Prismas, der in dreifacher Hinsicht bedeutungsvoll ist. Zunächst kommt er bei der Ermittlung der R_{ik} und R'_{ik} in Betracht, weil die der Eintrittsebene parallelen Wellenebenen an der Austrittsfläche total reflektiert werden, sobald

$$\sin \Gamma > q$$

(wo q wie früher die Wellennormalengeschwindigkeit bezeichnet). In der folgenden Tabelle VI sind unter Γ_m die den darüber geschriebenen Werten von q entsprechenden oberen Grenzen von Γ eingetragen, unter der Voraussetzung, daß es sich um isotrope Prismen handle — eine Annahme, die keine Beschränkung bedeutet, da es ja nur darauf ankommt, einen Einblick in die Größenordnung der auftretenden Winkel usw. zu geben.

Tabelle VI

q	0,40	0,45	0,50	0,55	0,60	0,65	0,70	0,75
Γ_m	23° 34′ 41″	26° 44′ 37″	30° 00′ 00″	33° 22′ 01″	36° 52′ 12″	40° 32′ 30″	44° 25′ 37″	48° 35′ 25″

Wie sich später zeigen wird, spielt zweitens der Prismenwinkel eine nicht zu unterschätzende Rolle bei der Bestimmung von P_{11} und P_{12}, von denen insbesondere die letztere Größe genauer wird, wenn es möglich ist, die Beobachtungen bei solchen Einfallswinkeln vorzunehmen, daß einem nicht zu kleinen Koeffizienten von P_{12} ein ungefähr gleich großer mit dem umgekehrten Vorzeichen entspricht. Nach Gleichung X ist dieser Koeffizient gegeben durch $2\,q^2 \sin\psi \cos\psi$. Die genannte Forderung ist also im wesentlichen erfüllt, wenn es gelingt, für ψ solche Werte zu wählen, daß $2 \sin\psi \cos\psi$ möglichst groß wird, sowohl nach der negativen wie nach der positiven Seite.

Hat der Prismenwinkel den vorhin genannten Wert Γ_m, so variiert, wenn vom Bewegungssinn des Lichtes abgesehen wird, ψ zwischen $\pi/2 - \Gamma_m$ und $\pi/2$, falls man stetig von streifender zu senkrechter Inzidenz übergeht. Wird aber der Prismenwinkel Γ verkleinert, so erfolgt der streifende Austritt erst für $\psi = \Gamma_m - \Gamma + \pi/2$. Es gilt daher die Doppelungleichung

$$\frac{\pi}{2} - \Gamma_m \leqq \psi \leqq \Gamma_m - \Gamma + \frac{\pi}{2}.$$

Solange $\Gamma_m - \Gamma < 45^0$ ist, wächst der maximale Wert von $2 \sin \psi \cos \psi$, absolut genommen, mit dieser Differenz und ist gleich $-\sin 2 (\Gamma_m - \Gamma)$. Die extremen Werte dieser Funktion sind in Tabelle VII eingetragen unter der Voraussetzung, daß der Prismenwinkel Γ der Reihe nach 5^0, 10^0, 15^0 und 20^0 kleiner ist wie sein größter Wert Γ_m.

Tabelle VII.

$\Gamma_m - \Gamma$	5^0	10^0	15^0	20^0
Extr. $2 \sin \psi \cos \psi$	$-0{,}173648$	$-0{,}342020$	$-0{,}500000$	$-0{,}642788$

Einen gleich großen positiven Wert von $2 \sin \psi \cos \psi$ zu finden, wird im allgemeinen keine Schwierigkeit machen.

Es ist jedoch zu beachten, daß für Werte von ψ, welche kleiner sind als der dem Minimum der Ablenkung zugeordnete, die Breite des Spektrums sich schnell verringert und bald so klein wird, daß ein unscheinbarer Einstellungs- oder Ablesungsfehler den Wert von q wesentlich zu beeinflussen vermag. Anderseits nimmt mit wachsendem ψ die Breite der Signalbilder rasch zu, so daß wegen der Verzerrung und Verschwommenheit derselben eine genaue Einstellung abermals erschwert wird. Diese beiden Umstände haben zur Folge, daß man sich den Grenzen

$$\frac{\pi}{2} - \Gamma_m < \psi < \Gamma_m - \Gamma + \frac{\pi}{2}$$

nie allzusehr nähern kann.

In dritter Linie beeinflußt Γ die Genauigkeit von a_{23}, wofür sich der Ausdruck

$$a_{23} = \frac{(q_1'^2 - q_2'^2) \sin \varepsilon \cos \varepsilon + a_{13} \cos \Gamma}{\sin \Gamma}$$

ergab. Angenommen, der mittlere Fehler η von $(q_1'^2 - q_2'^2) \sin \varepsilon \cos \varepsilon$ und a_{13} sei ungefähr derselbe (hierüber später mehr), so gibt die Ausgleichungsrechnung für den mittleren quadratischen Fehler von a_{23} den Ausdruck

$$\pm \frac{\eta \sqrt{1 + \cos^2 \Gamma}}{\sin \Gamma}.$$

Nun ist

$$\frac{d}{d\Gamma}\left(\frac{\sqrt{1+\cos^2\Gamma}}{\sin\Gamma}\right) = -\frac{2\cos\Gamma}{\sin^2\Gamma\sqrt{1+\cos^2\Gamma}}$$

notwendig negativ, d. h. der mittlere Fehler von a_{23} nimmt mit wachsendem Prismenwinkel ab. Der Anschaulichkeit wegen sind die Werte von

$$\frac{\sqrt{1+\cos^2\Gamma}}{\sin\Gamma}$$

in Tabelle VIII für einige Prismenwinkel aufgeführt.

Tabelle VIII.

Γ	45	40	35	30	25	20	15
$\sqrt{1+\cos^2\Gamma} : \sin\Gamma$	1,73205	1,95973	2,25371	2,64575	3,19340	4,01214	5,37182

Man erkennt aus den drei Tabellen VI, VII und VIII ohne weiteres, daß namentlich für den zweiten Fall ein kleinerer Prismenwinkel vorteilhafter ist wie ein größerer, während für den dritten Fall gerade das Gegenteil zutrifft. Es hält deshalb äußerst schwer, eine allgemein gültige Regel aufzustellen, um so mehr, als, wie bekannt, auch die Genauigkeit der q-Werte durch den Prismenwinkel beeinflußt wird. So viel scheint aber nach den gemachten Erfahrungen festzustehen, daß neben anderen Messungen auch solche vorzunehmen sind, für welche $\cos^2\psi$ nicht allzu klein wird und die Koeffizienten von P_{12} entgegengesetztes Vorzeichen haben.

Nun sollen die Untersuchungsergebnisse der drei Kristalle einzeln besprochen werden.

A. Kupfervitriol $= SO_4Cu \cdot 5H_2O$.

$$a : b : c = 0{,}5721 : 1 : 0{,}5554$$

$$\alpha = 82^0 5' \quad \beta = 107^0 8' \quad \gamma = 102^0 41' \quad \text{(Barker[1])}$$

63. Für die Messungen diente ein Kristall, der unter vielen selbstgezogenen als der geeignetste erschien. Die Flächen der vertikalen Prismenzone waren daran meistens glänzend, aber stark gerillt, Über ihre nähere Lage und Beschaffenheit orientiert die nachstehende Übersicht.

m	(110)	$220^0\,59^3/_4{}'$	Reflex gut
λ	$(\bar{1}20)$	$321^0\,25'$	Schimmer

[1]) Vergl. Groth, Chem. Kristallographie II. 419.

μ	$(\bar{1}10)$	$343^0\,42^1/_2{}'$	doppelt
a	$(\bar{1}00)$	$16^0\ \ 9^1/_2{}'$	gut, infolge der Politur (siehe unten) etwas aus der Zone gerückt.
m	$(\bar{1}\bar{1}0)$	$41^0\,10'$	sehr breit
b	$(0\bar{1}0)$	$94^0\,29'$	Schimmer
λ	$(1\bar{2}0)$	$141^0\,56'$	Schimmer
μ	$(1\bar{1}0)$	$164^0\,17'$	breit
a	(100)	$195^0\,35'$	sehr breit.

Die Richtigkeit der Aufstellung folgt aus der Gegenüberstellung der gemessenen und der aus den Parametern berechneten[1]) Winkeln.

	gemessen	berechnet
$(100):(0\bar{1}0)$	$101^0\,06'$	$100^0\,54'$
$(100):(110)$	$25^0\,24^3/_4{}'$	$26^0\,07'$
$(110):(1\bar{1}0)$	$56^0\,42^3/_4{}'$	$57^0\,16'$
$(110):(\bar{1}10)$	$122^0\,42^3/_4{}'$	$122^0\,44'$
$(100):(1\bar{2}0)$	$53^0\,39'$	$53^0\,50'$.

Das obere Ende des Kristalls ist ganz unentwickelt; am unteren konnten die Flächen q und ω durch folgende Messungen sichergestellt werden.

m	(110)	$185^0\,59^3/_4{}'$	$72^0\,13^3/_4{}'$	$72^0\,2'$ (berechnet)
ω	$(1\bar{1}\bar{1})$	$258^0\,13^1/_2{}'$		
m	(110)	$191^0\,25^1/_2{}'$	$118^0\,19^1/_2{}'$	
q	$(0\bar{1}\bar{1})$	$309^0\,45'$		

Aus der letzten Messung berechnet sich

$$(110):(011) = 61^0\,40^1/_2{}'$$

während Barker $61^0\,47'$ gemessen hat.

64. Als optisches Prisma dienten die Flächen (110) und $(\bar{1}00)$, von denen die letztere von der Firma Dr. Steeg & Reuter poliert und dadurch, wie bereits in der Winkeltabelle bemerkt, in ihrer Lage etwas verändert wurde. Die Beschaffenheit des Kristalls gestattet leider nicht, ihre genauere Lage zu bestimmen. Für die Berechnung der Hauptlichtgeschwindigkeiten ist dieser Mangel absolut belanglos, ergibt aber für die Orientierung der Hauptschwingungsrichtungen eine gewisse

[1]) Vergl. Groth. Chem. Krist. l. c.

Unsicherheit. Beim vorliegenden Prismenwinkel, der sich aus zwölf Messungen zu $24^0 52^1/_4{}'$ fand, kann sie in besonderen Fällen einen Betrag erreichen, der etwas mehr wie doppelt so groß ist als die immerhin kleine Abweichung der Fläche aus ihrer Soll-Lage.

65. Von den weiter oben genannten vier Linien des Heliumspektrums konnten nur zwei erkannt werden, die gelbe (588) und grüne (502). Die Einstellung auf die erstere bot im allgemeinen keine Schwierigkeit. Ebenso war die grüne meistens recht scharf und deutlich wahrnehmbar. Doch ist zu bemerken, daß im Gegensatz zu jenen Wellenebenen, welche ungebrochen aus der natürlichen Prismenfläche austreten, die aus der künstlichen Grenzfläche ungebrochen austretenden Wellenebenen außerordentlich schwache und verschwommene Spaltbilder erzeugten.[1]) Infolgedessen konnten die q'_i und ε' und damit die R'_{ik} also auch a_{23} nicht mit großer Zuverlässigkeit bestimmt werden. Allein mit Rücksicht auf die bei der Bearbeitung des Zahlenmaterials verwendete Zeit,[2]) wie auch im Hinblick auf die Zeitlage, welche die Beschaffung eines neuen Prismas verunmöglichte, erschien es statthaft, sich mit der erreichten Genauigkeit zu begnügen, um so mehr als die erzielten Resultate an der praktischen Verwertbarkeit der angegebenen Methode keinen Zweifel zulassen.

66. Beim Kupfervitriol wurden für He- gelb (588) zu 17 verschiedenen Einfallswinkeln die zusammengehörigen Wertpaare (im ganzen 34) von q und ψ bestimmt. Für He- grün war die Bestimmung nur bei 14 Einfallswinkeln möglich und lieferte somit 28 Wertpaare von q und ψ. In der Tabelle IX

---

[1]) Schuld hieran waren zwei Umstände: einerseits mußte, um ein einheitliches Signalbild zu erhalten, (110) größtenteils mit Tusche zugedeckt werden, und anderseits war auf der Kunstfläche $(\bar{1}00)$ die Politur einer Randstelle etwas angegriffen und darum weniger durchsichtig. Nun traf es sich, daß die Wellen, welche durch (110) eintraten, beim genannten Austritt durch $(\bar{1}00)$ (und nur in diesem Fall) die beschädigte Stelle passieren mußten.

[2]) Wie aus dem II. Teil, § 40, ersichtlich ist, wurden die Schwingungsazimute der zu $(\bar{1}00)$ parallelen Wellen erst nachträglich bestimmt.

Tabelle IX.

	$\frac{\pi}{2} - \psi'$	$\frac{\pi}{2} - \psi''$	q'^2	q''^2 (interpoliert)	$q_1''^2$
1	24° 59,725		0,435134	0,420811	
		24° 33,066			0,420753
2	24° 52,250		0,435062	0,420785	
		24° 52,250			0,420785
3	21° 48,609		0,434236	0,420412	
		21° 26,462			0,420349
4	19° 48,776		0,433603	0,420071	
		19° 29,234			0,420015
5	2° 13,776		0,429271	0,419925	
		2° 29,458			0,419924
6	0° 33,797		0,428928	0,419958	
		0° 50,106			0,419955
7	0° 00,000		0,429096	0,420216	
		0° 00,000			0,420216
8	— 1° 04,675		0,428562	0,419983	
		— 0° 47,846			0,419973
9	— 2° 40,036		0,428217	0,420026	
		— 2° 22,842			0,420030
10	— 4° 11,917		0,427880	0,420045	
		— 3° 54,287			0,420012
11	— 5° 39,277		0,427586	0,420149	
		— 5° 21,662			0,420176
12	— 7° 01,715		0,427284	0,420070	
		— 6° 43,557			0,420051
13	— 8° 20,676		0,426954	0,420152	
		— 8° 02,655			0,420133
14	—12° 51,088		0,425833	0,420004	
		—12° 45,700			0,420001
15	—13° 54,578		0,425635	0,420082	
		—13° 48,959			0,420034
16	—14° 05,393		0,425479	0,419990	
		—13° 59,762			0,419942
17	—14° 42,169		0,425364	0,420002	
		—14° 36,458			0,419994

sind die Werte für He- gelb angegeben. Alle q^2-Werte sind auf 6 Dezimalen berechnet. Sie dürften aber kaum auf mehr als eine oder zwei Einheiten der vierten Dezimale genau sein. Beweis hierfür sind z. B. die unregelmäßig zu- und abnehmenden Werte der fünften Kolonne. Auch sei erwähnt, daß die q^2-Werte der siebenten Querreihe merklich aus der Ordnung herausfallen, obwohl sie die Mittel von fünf Beobachtungsreihen sind, die zu verschiedenen, mehrere Monate auseinanderliegenden Zeiten angestellt wurden. Die vierte Dezimale der q^2-Werte ist also kaum mehr zuverlässig. Wenn gleichwohl noch weitere Stellen berechnet und mitgeteilt wurden, so geschah es, um einerseits die Ungenauigkeit der vierten Dezimale durch die Abrundungsfehler nicht zu vergrößern (z. B. in der fünften Kolonne), andererseits um auf Grund dieser „zufälligen Fehler" mit Hilfe der Ausgleichungsrechnung möglichst gute Werte von a_{ik} zu berechnen.

67. Die erste große Schwierigkeit, die sich bot, war die Berechnung der P_{ik} und Q_{ik}, die sich, wie früher bemerkt, als Wurzeln eines Systems von sechs linearen Gleichungen ergeben. Theoretisch und praktisch kann zwar ein solches System im allgemeinen mit jeder wünschbaren Genauigkeit gelöst werden. Im vorliegenden Fall bietet sich sogar eine nicht unbedeutende Vereinfachung, indem P_{22} und Q_{22} gleich der Summe bzw. gleich dem Produkt der Geschwindigkeiten jener beiden Wellen sind, die ungebrochen durch die zx-Ebene aus dem Kristall heraustreten, denn hierbei reduziert sich die Gleichung X wegen der Bedingung

$$\psi = \frac{\pi}{2}$$

auf die einfache Form

$$q^4 - P_{22}\, q^2 + Q_{22} = 0,$$

womit die obige Behauptung bewiesen ist. Sind aber P_{22} und Q_{22} bekannt, so bleiben nur mehr vier Gleichungen mit vier Unbekannten zu lösen, was die Aufgabe selbstverständlich wesentlich vereinfachte, wenn nur nicht durch die Substitution von P_{22} und Q_{22} die Absolutglieder so verkleinert würden, daß die Fehlerhaftigkeit der

Beobachtungswerte allzu schwer ins Gewicht fiele. Auch ist es möglich, — und die Rechnung hat dies mehrfach bewiesen — daß sich die gesuchten Unbekannten in Form von Brüchen ergeben, deren Zähler und Nenner vier, fünf und vielleicht noch mehr Nullen vor der ersten geltenden Dezimalstelle aufweisen. Welchen Verlaß man aber auf die materielle (nicht formelle) Richtigkeit eines solchen Resultates noch haben kann, ist leicht zu erraten.

Über die allgemeine Gültigkeit dieser in verschiedenen Einzelfällen gefundenen Resultate kann man sich durch folgende Überlegung vergewissern. Denkt man sich nämlich die Substitution der Werte von P_{22} und Q_{22} in Gleichung X ausgeführt, so verbleiben vier Gleichungen von der Form

$$Q_{11} \cos^2 \psi_i - 2 Q_{12} \sin \psi_i \cos \psi_i - P_{11} q_i^2 \cos^2 \psi_i + 2 P_{12} q_i^2 \sin \psi_i \cos \psi_i = A_i$$

Ihre Determinante wird, vom Vorzeichen abgesehen,

$$\Delta(q, \psi) \equiv 4 \cos \psi_1 \cos \psi_2 \cos \psi_3 \cos \psi_4 \begin{vmatrix} \cos \psi_1 & \sin \psi_1 & q_1^2 \cos \psi_1 & q_1^2 \sin \psi_1 \\ \cos \psi_2 & \sin \psi_2 & q_2^2 \cos \psi_2 & q_2^2 \sin \psi_2 \\ \cos \psi_3 & \sin \psi_3 & q_3^2 \cos \psi_3 & q_3^2 \sin \psi_3 \\ \cos \psi_4 & \sin \psi_4 & q_4^2 \cos \psi_4 & q_4^2 \sin \psi_4 \end{vmatrix}.$$

Es ist natürlich überaus schwierig, die obere Grenze dieses Ausdruckes zu finden, zumal die darin auftretenden q_i^2-Größen ebenfalls von ψ_i abhängen, und ψ_i nicht unbeschränkt variabel ist. Man kann aber durch folgende Überlegung zu einem angenäherten Resultat gelangen: Das Problem, um welches es sich hier handelt, ist im Grunde genommen die Bestimmung der Kurve C. Aber genau so, wie man durch zwei sehr nahe bei einander gelegene Punkte (d. h. Kreise mit sehr kleinem Radius, Beobachtungsfehler!) gerade Linien von beträchtlicher Divergenz legen kann, ebenso muß die eindeutige experimentelle Bestimmung der Kurve unmöglich sein, sobald die hierzu nötigen Punkte zu nahe beieinander gelegen sind. Da die Substitution P_{22} und Q_{22} geometrisch die Bestimmung der Kurvenabschnitte auf der y-Achse bedeutet, und da die Kurve durch vier weitere „Punkte" (Beobachtungsfehler!) bestimmt ist, so wird es wohl das Vorteilhafteste sein, wenn diese Punkte so gewählt werden, daß sie auf dem inneren und äußeren Kurvenzweig zu beiden Seiten der y-Achse und in nicht zu kleinem Abstand davon zu liegen kommen. Für diesen Fall muß dann aus Analogiegründen, im allgemeinen wenigstens, die Determinate $\Delta(q, \psi)$ einen ebenfalls möglichst günstigen Wert annehmen. Wie nun aus der Tabelle IX ersichtlich ist, bleiben die q^2-Werte des inneren Kurventeiles fast konstant, so daß man ohne großen Fehler etwa

$$q_1^2 = q_2^2 = q^2 = 0{,}420000$$

setzen kann. Sind ferner q_3 und q_4 zwei Radienvektoren des äußeren Kurvenzweiges, so erhält man für die Determ. $\Delta(q, \psi) = 4(q^2 - q_3^2) \times (q^2 - q_4^2) \sin(\psi_1 - \psi_2) \cdot \sin(\psi_3 - \psi_4) \cdot \cos\psi_1 \cos\psi_2 \cos\psi_3 \cos\psi_4$. Ihr absoluter Wert wird, wie leicht einzusehen ist, für den inneren Kurvenzweig am größten, wenn, um beim Beobachtungsmaterial zu verbleiben,

$$\psi_1 = \pi/2 - 24^0\,59,725'$$
$$\psi_2 = \pi/2 + 14^0\,42,169'$$

gesetzt wird. Im weiteren zeigt sich, daß, um einen möglichst großen Wert zu erhalten, die nämlichen Azimute auch für den äußeren Kurvenzweig zu nehmen sind. Man findet so

$$\Delta(q, \psi) = 0{,}00000144.$$

Jede andere Kombination von zwei äußeren und zwei inneren Kurvenpunkten muß einen kleineren, also ungünstigeren Wert für $\Delta(q, \psi)$ ergeben. Wollte man z. B. nach Substitution von P_{22} und Q_{22} nur innere Kurvenpunkte in Betracht ziehen, so würde $\Delta(q, \psi)$, weil alle $q_1''^2$ fast gleich sind, dem Grenzwert null sehr nahe kommen. Denselben Wert erhielte man, falls man von den vier fraglichen Punkten drei auf dem inneren Teile wählen würde. Weiter auf diese und andere Kombinationen einzugehen, ist zwecklos, da der obige Wert, wenn nicht das überhaupt erreichbare Maximum, so doch die Größenordnung desselben angibt.

68. Zur Umgehung dieser Schwierigkeit erwies sich das folgende Verfahren geeignet. Nennt man q' und q'' die beiden Wellengeschwindigkeiten, die einer gegebenen Richtung ψ entsprechen, so gelten wegen der bekannten Eigenschaft der Gleichungen zweiten Grades die Beziehungen

$$P_{11} \cos^2\psi + P_{22} \sin^2\psi - 2\,P_{12} \sin\psi \cos\psi = q'^2 + q''^2$$
$$Q_{11} \cos^2\psi + Q_{22} \sin^2\psi - 2\,Q_{12} \sin\psi \cos\psi = q'^2\,q''^2.$$

Da P_{22} und Q_{22} bekannt sind, so genügen zwei ψ-Werte im Verein mit den vier zugehörigen q-Werten, um P_{11} und P_{12} bzw. Q_{11} und Q_{12} wenigstens angenähert zu bestimmen. Diese Berechnung wird genauer, wenn, worauf früher § 62 schon verwiesen wurde, die beiden ψ-Werte so gewählt werden, daß $\sin\psi_1 \cos\psi_1$ und $\sin\psi_2 \cos\psi_2$ nicht zu klein sind und entgegengesetztes Vorzeichen haben, da sich dann bei der Elimination von P_{12} (resp. Q_{12}) die Absolutglieder, deren Vorzeichen in allen praktisch vorkommenden Fällen gleich sind, addieren, ebenso wie der Nenner, der $\cos^2\psi_1 + \cos^2\psi_2$ wird. Angenommen, es wäre

$\cos\psi_1 = -\cos\psi_2 = 0{,}16$ d. h. $\psi_1 = \text{ca}\,81^0$ und $\psi_2 = \text{ca}\,99^0$, so würde

$$\cos^2\psi_1 + \cos^2\psi_2 > 0{,}05,$$

und da im Falle des Kupfervitriols P_{11} von der Größenordnung 0,8 ist, so würde der Zähler von der Größenordnung 0,04 sein, und P_{11} könnte auf ungefähr drei Dezimalen genau[1]) ermittelt werden.

Leider stellen sich der praktischen Verwertung dieses Gedankens experimentelle Schwierigkeiten entgegen, da es nicht möglich ist, die einem beliebigen ψ-Wert entsprechenden zwei q-Werte am Goniometer zu bestimmen. Prüft man aber im Falle des Kupfervitriols die $q_1''^2$-Werte näher, so findet man, daß sie sich nur unbedeutend mit ψ ändern. Eine einfache Interpolation muß es darum ermöglichen, die verlangten q''^2-Werte zu berechnen. Das ist nun in diesem Fall geschehen und die gefundenen Werte sind in der vierten Kolonne der Tabelle IX eingetragen.

Sollten sich in einem anderen Falle beide q-Werte stark mit ψ ändern, so hätte man ψ derart um $d\psi$ zu ändern, daß die Welle sich ungefähr in der verlangten Richtung fortpflanzt, worauf man dann die Interpolation noch anzuwenden hätte. Unter Umständen würde auch eine Interpolation zum Ziele führen, die mehr wie zwei q-Werte berücksichtigt.

69. Die in der angegebenen Art und Weise berechneten P_{ik}- und Q_{ik}-Werte hängen von allen Zufälligkeiten der Beobachtungsfehler ab und sind darum nur von mäßiger Genauigkeit[2]). Mit Hilfe der Ausgleichungsrechnung wird es aber möglich sein, bedeutend genauere Resultate zu erhalten. Zu ihrer vorteilhaften Anwendung ist aber erfordert, daß ziemlich viele und möglichst genaue Beobachtungen angestellt werden, die sich über ein umfangreiches Intervall der ψ-Werte erstrecken sollten und an den beiden Grenzen gegen die Totalreflexion hin vielleicht etwas zu häufen wären. Auch sind den Rechnungen die linearen Gleichungen

---

[1]) Man könnte übrigens die Rechnung für mehrere ψ_1- und ψ_2-Werte durchführen und als Näherungswerte für P_{11} und P_{12} (resp. Q_{11} und Q_{12}) die Durchschnittswerte der verschiedenen Ergebnisse einführen.

[2]) Die Fehler von P_{11} und P_{12} (resp. Q_{11} und Q_{12}) können, wie die obigen Auseinandersetzungen zeigen, zehn- und mehrmal größer sein wie diejenigen von P_{22} resp. Q_{22}.

$$\cos^2\psi_i P_{11} + \sin^2\psi_i P_{22} - 2\sin\psi_i \cos\psi_i P_{12} = q_i'^2 + q_i''^2$$
$$\cos^2\psi_i Q_{11} + \sin^2\psi_i Q_{22} - 2\sin\psi_i \cos\psi_i Q_{12} = q_i'^2 q_i''^2$$

zugrunde zu legen, und $q_i'^2 + q_i''^2$ bzw. $q_i'^2 q_i''^2$ als Beobachtungsgrößen anzusehen. Nennt man p_{ik} und q_{ik} die Verbesserungen, welche an den Näherungswerten anzubringen sind, um die wahrscheinlichsten Werte von P_{ik} und Q_{ik} zu erhalten, so ergeben sich die Fehlergleichungen (v ist nachfolgend überall als ν zu lesen)

$$\cos^2\psi_v p_{11} + \sin^2\psi_v p_{22} - 2\sin\psi_v \cos\psi_v p_{12} = \varepsilon_v$$
$$\cos^2\psi_v q_{11} + \sin^2\psi_v q_{22} - 2\sin\psi_v \cos\psi_v q_{12} = \eta_v,$$

wo ε_v und η_v die Fehler sind. Man kann diesen Gleichungen eine für die Rechnung bequemere Form geben, wenn man

$$p_{11} = \mathfrak{p}_{11} \qquad p_{22} = \mathfrak{p}_{11} + \mathfrak{p}_{22} \qquad p_{12} = \mathfrak{p}_{12}$$
$$q_{11} = \mathfrak{q}_{11} \qquad q_{22} = \mathfrak{q}_{11} + \mathfrak{q}_{22} \qquad q_{12} = \mathfrak{q}_{12}$$

setzt, nämlich

$$\mathfrak{p}_{11} + \sin^2\psi_v \mathfrak{p}_{22} - 2\sin\psi_v \cos\psi_v \mathfrak{p}_{12} = \varepsilon_v$$
$$\mathfrak{q}_{11} + \sin^2\psi_v \mathfrak{q}_{22} - 2\sin\psi_v \cos\psi_v \mathfrak{q}_{12} = \eta_v.$$

Ist n die Anzahl der Beobachtungen, so berechnen sich die $\mathfrak{p}_{ik}$ aus den drei folgenden Gleichungen.

$$n\,\mathfrak{p}_{11} + \sum_{v=1}^{n} \sin^2\psi_v \mathfrak{p}_{22} + 2\sum_{v=1}^{n} \sin\psi_v \cos\psi_v (-\mathfrak{p}_{12}) = \sum_{v=1}^{n} \varepsilon_v$$

$$\sum_{v=1}^{n} \sin^2\psi_v \mathfrak{p}_{11} + \sum_{v=1}^{n} \sin^4\psi_v \mathfrak{p}_{22} + 2\sum_{v=1}^{n} \sin^3\psi_v \cos\psi_v (-\mathfrak{p}_{12}) = \sum_{v=1}^{n} \varepsilon_v \sin^2\psi_v$$

$$2\sum_{v=1}^{n} \sin\psi_v \cos\psi_v \mathfrak{p}_{11} + 2\sum_{v=1}^{n} \sin^3\psi_v \cos\psi_v \mathfrak{p}_{22} + 4\sum_{v=1}^{n} \sin^2\psi_v \cos^2\psi_v (-\mathfrak{p}_{12}) = 2\sum_{v=1}^{n} \varepsilon_v \sin\psi_v \cos\psi_v$$

Die Gleichungen für die $\mathfrak{q}_{ik}$ sind diesen ganz analog.

70. Auf die Frage, ob die Determinante dieses Systems nicht auch unendlich klein werde, kann man unter gewissen vereinfachenden Voraussetzungen eine allgemeine Antwort geben. Angenommen, man hätte n Beobachtungen gemacht, von deren zugehörigen ψ-Werten je zwei benachbarte sich um die konstante Größe φ unterscheiden, — eine Annahme, die nur angenähert verwirklicht sein kann, aber den tatsächlich in Betracht kommenden Verhältnissen angepaßt ist — so kommt

$$\psi_v = \psi - (v - 1)\,\varphi,$$

wo ψ etwa den größten der ψ_v-Werte bezeichnen mag. Nun beachte man, daß die auftretenden Koeffizienten folgenderweise transformiert werden können.

$$\sum_1^n \sin^2 \psi_v = \sum_1^n \frac{1-\cos 2\psi_v}{2} = \frac{n}{2} - \frac{1}{2}\sum_1^n \cos 2\psi_v$$

$$2\sum_1^n \sin\psi_v \cos\psi_v = \sum_1^n \sin 2\psi_v$$

$$\sum_1^n \sin^4 \psi_v = \sum_1^n \frac{1-2\cos 2\psi_v + \cos^2 2\psi_v}{4} = \sum_1^n \frac{3-4\cos 2\psi_v + \cos 4\psi_v}{8}$$

$$= \frac{3n}{8} - \frac{1}{2}\sum_1^n \cos 2\psi_v + \frac{1}{8}\sum_1^n \cos 4\psi_v$$

$$2\sum_1^n \sin^3 \psi_v \cos\psi_v = \sum_1^n \sin 2\psi_v \frac{1-\cos 2\psi_v}{2} = \frac{1}{2}\sum_1^n \sin 2\psi_v - \frac{1}{4}\sum_1^n \sin 4\psi_v$$

$$4\sum_1^n \sin^2 \psi_v \cos^2 \psi_v = \sum_1^n \sin^2 2\psi_v = \sum_1^n \frac{1-\cos 4\psi_v}{2} = \frac{n}{2} - \frac{1}{2}\sum_1^n \cos 4\psi_v \,.$$

Unter den gemachten Voraussetzungen sind diese Summen bekanntlich ausführbar, und wenn man, um $\Sigma \cos 2\psi_v$ und $\Sigma \cos 4\psi_v$ bzw. $\Sigma \sin 2\psi_v$ und $\Sigma \sin 4\psi_v$ gleichzeitig behandeln zu können, allgemeiner schreibt

$$\Sigma \cos 2m\psi_v \text{ und } \Sigma \sin 2m\psi_v \,,$$

so kommt

$$\Sigma \cos 2m\psi_v = \cos 2m\psi + \cos 2m(\psi-\varphi) + \ldots\ldots \cos 2m[\psi-(n-1)\varphi]$$
$$\Sigma \sin 2m\psi_v = \sin 2m\psi + \sin 2m(\psi-\varphi) + \ldots\ldots \sin 2m[\psi-(n-1)\varphi].$$

Nach Multiplikation der zweiten Summe mit

$$i \equiv \sqrt{-1}$$

folgen auf Grund der bekannten Eulerschen Formeln die nachstehenden Gleichheiten.

$$\Sigma \cos 2m\psi_v + i\,\Sigma \sin 2m\psi_v =$$

$$e^{2mi\cdot\psi} + e^{2mi\cdot(\psi-\varphi)} + \ldots\ldots + e^{2mi\cdot[\psi-(n-1)\varphi]}$$

$$= e^{2mi\cdot\psi}\left[1 + e^{-2mi\cdot\varphi} + e^{-2mi\cdot 2\varphi} + \ldots\ldots e^{-2mi\cdot(n-1)\varphi}\right]$$

$$= e^{2mi\cdot\psi}\cdot\frac{1-e^{-2mni\cdot\varphi}}{1-e^{-2mi\cdot\varphi}} = e^{2mi\cdot\psi}\cdot\frac{1-e^{-2mni\cdot\varphi}}{1-e^{-2mi\cdot\varphi}}\cdot\frac{1-e^{2mi\cdot\varphi}}{i-e^{2mi\cdot\varphi}}$$

$$= \frac{e^{2mi\cdot\psi} + e^{2mi\cdot[\psi-(n-1)\varphi]} - e^{2mi\cdot[\psi-n\varphi]} - e^{2mi\cdot[\psi+\varphi]}}{2-2\cos 2m\varphi}.$$

Drückt man in dieser letzten Formel die Exponentialfunktionen wiederum durch trigonometrische Funktionen aus, so erhält man, da

der reelle (bzw. imaginäre) Teil links gleich dem reellen (bzw. imaginären) Teil rechts sein muß, folgende zwei Ausdrücke.

$$\Sigma \cos 2m\psi_v = \frac{\cos m\,[2\psi-(n-1)\varphi]\cos m\,(n-1)\varphi - \cos m\,[2\psi-(n-1)\varphi]\cos m\,(n+1)\varphi}{1-\cos 2m\varphi}$$

$$= \cos m\,[2\psi-(n-1)\varphi]\,\frac{\sin m\,n\,\varphi}{\sin m\,\varphi} \equiv c_m$$

$$\Sigma \sin 2m\psi_v = \frac{\sin m\,[2\psi-(n-1)\varphi]\cos m\,(n-1)\varphi - \sin m\,[2\psi-(n-1)\varphi]\cos m\,(n+1)\varphi}{1-\cos 2m\varphi}$$

$$= \sin m\,[2\psi-(n-1)\varphi]\,\frac{\sin m\,n\,\varphi}{\sin m\,\varphi} \equiv s_m.$$

Nun kann man die Determinante des Gleichungssystems folgenderweise entwickeln.

$$\Delta \equiv \begin{vmatrix} n & \frac{n}{2}-\frac{c_1}{2} & s_1 \\ \frac{n}{2}-\frac{c_1}{2} & \frac{3n}{8}-\frac{c_1}{2}+\frac{c_2}{8} & \frac{s_1}{2}-\frac{s_2}{4} \\ s_1 & \frac{s_1}{2}-\frac{s_2}{4} & \frac{n}{2}-\frac{c_2}{2} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} n & \frac{n}{2}-\frac{c_1}{2} & s \\ \frac{n}{2}+\frac{c_1}{2} & \frac{n}{8}-\frac{c_2}{8} & \frac{s_1}{2}+\frac{s_2}{4} \\ s_1 & \frac{s_1}{2}-\frac{s_2}{4} & \frac{n}{2}-\frac{c_2}{2} \end{vmatrix} =$$

$$= -\frac{1}{16} \begin{vmatrix} n & 2(n-c_1) & 2s_1 \\ n+c_1 & n-c_2 & 2s_1+s_2 \\ s_1 & 2s_1-s_2 & n-c_2 \end{vmatrix}.$$

Die zweite Determinante findet man aus der ersten, indem man die erste Querreihe von der zweiten subtrahiert. Multipliziert man in dieser zweiten Determinante die zweite und dritte Vertikalreihe mit dem Faktor 2, die zweite Horizontalreihe aber mit 4, so kommt die dritte Determinante. Durch Ausführung der Operationen und Substitution der entsprechenden Werte folgt die weitere Formel

$$\Delta = \frac{1}{16}\left[n^3 - n\,(s_2^2+c_2^2) - 2n\,(s_1^2+c_1^2) + 2c_2\,(c_1^2-s_1^2) + 4c_1\,s_1\,s_2\right]$$

$$= \frac{1}{16}\left[n^3 - n\,\frac{\sin^2 2n\varphi}{\sin^2 2\varphi} - 2n\,\frac{\sin^2 n\varphi}{\sin^2\varphi} + 2\,\frac{\sin 2n\varphi}{\sin 2\varphi}\cdot\frac{\sin^2 n\varphi}{\sin^2\varphi}\right].$$

Die Variation dieses Ausdruckes für variierende n und φ ist aus der nachfolgenden Tabelle X ersichtlich.[1])

---

[1]) Bei der Auflösung des fraglichen Gleichungssystemes kommt die Determinantenrechnung allerdings kaum in Betracht, da es aus verschiedenen Gründen vorteilhafter ist, sich der üblichen Methode zu bedienen. Die Resultate ergeben sich hiernach in Form von Brüchen, deren Nenner kleiner ist wie der Wert der Determinante und je nach der Größe von n usw. zwischen 0,005 und 2,9 schwanken kann.

Tabelle X.

n	φ	Δ
5	8	0,017920
10	4	0,17154
20	2	1,4309
40	1	11,565

71. Sind damit jene Werte von P_{ik} und Q_{ik} bekannt, welche sich aus den Beobachtungen als die wahrscheinlichsten finden lassen, so wird es sich darum handeln, die a_{ik} zu bestimmen. In welcher Art und Weise dies zu geschehen hat, wurde bereits früher gesagt. Es genüge hier, die gefundenen Zahlen, soweit wie nötig, anzugeben.

Für die Schwingungsrichtungen der parallel zu den Grenzflächen austretenden Wellen wurden folgende Azimute gefunden:

Wellenebenen parallel xz: $\varepsilon = 12^0{,}77$

Wellenebenen parallel der anderen Grenzfläche: $\varepsilon' = -8^0$ ca.

Es wurde früher schon (§ 65) darauf hingewiesen, daß die letztere Bestimmung sehr schwierig war, indem in dieser Stellung das Spaltbild überaus schwach und unbestimmt erschien. Dementsprechend werden auch die Endresultate nicht allzu sicher sein können.

72. Ein Punkt verdient hier aber spezielle Erwähnung. Wie bekannt ist die Schwingungsrichtung der parallel zu den Grenzflächen austretenden Wellenebenen für verschiedene Farben im allgemeinen verschieden. Allerdings ist diese Dispersion für gewöhnlich gering und wurde hier vernachlässigt. Der Fehler ist wegen des kleinen Spektralbereiches kaum bedeutungsvoll. Unter günstigen Umständen, wo man über große, tadellose Prismen verfügt, welche helle Signalbilder entwerfen, dürfte es bei sorgfältigster Messung möglich sein, diese Dispersion der Schwingungsrichtungen experimentell zu konstatieren, insbesondere wenn man sich statt des gewöhnlichen Nikolschen Prismas einer genaueren Vorrichtung

zur Bestimmung der Schwingungsrichtungen bedienen würde. Werden dann aber die verschiedenen zusammengedrängten Linien des Spektrums diese Bestimmung nicht erschweren oder gar verunmöglichen? Wahrscheinlich wohl. Es dürfte darum geraten sein, das Licht schon außerhalb des Kollimators durch ein Prisma zu zerlegen und nur absolut homogenes Licht auf das Kristallprisma durch den Kollimator auffallen zu lassen.

73. Da gerade von der Dispersion der Schwingungsrichtungen die Rede ist, so mag hier der geeignete Ort sein, um den Einfluß zu studieren, den ein Fehler in der Bestimmung von ε auf die Berechnung von a_{ik} ausüben muß. Es ist

$$a_{11} = q_1^2 \sin^2 \varepsilon + q_2^2 \cos^2 \varepsilon$$
$$a_{13} = (q_1^2 - q_2^2) \sin \varepsilon \cos \varepsilon$$
$$a_{33} = q_1^2 \cos^2 \varepsilon + q_2^2 \sin^2 \varepsilon$$

Werden q_1 und q_2 als richtig vorausgesetzt, so wird

$$d\,a_{11} = (q_1^2 - q_2^2) \sin 2\varepsilon \, d\varepsilon$$
$$d\,a_{13} = (q_1^2 - q_2^2) \cos 2\varepsilon \, d\varepsilon$$
$$d\,a_{33} = -(q_1^2 - q_2^2) \sin 2\varepsilon \, d\varepsilon.$$

a_{11} und a_{33} ändern sich also um die gleiche Größe, aber im entgegengesetzten Sinn. — Wie man sieht, ändern sich a_{33} und a_{11} um den größten Betrag, wenn $\varepsilon = \pi/4$ oder $3\pi/4$, um den kleinsten aber, wenn $\varepsilon = 0$ oder $\pi/2$. Bei a_{13} sind die Verhältnisse gerade umgekehrt. In der folgenden Tabelle XI sind die Änderungen für einige Werte von ε zusammengestellt unter der Voraussetzung, daß

$$d\varepsilon = 30' = 0{,}008727 \text{ und}$$
$$q_1^2 - q_2^2 = 0{,}1000.$$

Im vorliegenden Fall, wo $q_1^2 - q_2^2 = 0{,}009$ ist und $\varepsilon = 12\,{}^1/_2$ (angenähert), wird nach der Tabelle durch Interpolation

$$d\,a_{ii} = \pm \frac{9}{100} \times 0{,}000 \frac{2985 + 4363}{2} = \pm \frac{9}{100}\, 0{,}0003674 = \pm 0{,}000033 \text{ und}$$

$$d\,a_{ik} = \pm \frac{9}{100} \times 0{,}000 \frac{8200 + 7558}{2} = \frac{9}{100} \times 0{,}0007879 = 0{,}000071.$$

Ohne Interpolation bekommt man die genaueren Werte

$$d\,a_{ii} = \pm 0{,}000034_{35}$$
$$d\,a_{ik} = \pm 0{,}000071_{55}.$$

Man erkennt hieraus, daß es bei sorgfältiger Beobachtung möglich sein muß, a_{11}, a_{13} und a_{33} mit großer Genauigkeit zu ermitteln, falls die Beschaffenheit und Größe des Prismas eine präzise Arbeit gestatten.

Bei dieser Untersuchung wurde die Richtigkeit von q_1^2 und q_2^2 ($d\,q_1^2 = d\,q_2^2 = 0$) ausdrücklich vorausgesetzt. Es braucht allerdings eine vielmal wiederholte Einstellung und Messung, um hierfür ganz befriedigende Mittelwerte zu erhalten.

Tabelle XI.

$q_1^2 - q_2^2 = 0{,}1$; $d\varepsilon = 0{,}008727$	ε	0^0	5^0	10^0	15^0	20^0	25^0	30^0	35^0	40^0	45^0
		90^0	85^0	80^0	75^0	70^0	65^0	60^0	55^0	50^0	
	$d\,a_{11}$, $d\,a_{33}$	$0_3 0000$	$0_3 1515$	$0_3 2985$	$0_3 4364$	$0_3 5610$	$0_3 6685$	$0_3 7558$	$0_3 8200$	$0_3 8594$	$0_3 8727$
	$d\,a_{13}$	$0_3 8727$	$0_3 8594$	$0_3 8200$	$0_3 7558$	$0_3 6685$	$0_3 5610$	$0_3 4364$	$0_3 2985$	$0_3 1515$	$0_3 0000$

74. Für die drei Polarisationskonstanten a_{11}, a_{13} und a_{33}, sowie die drei Größen R'_{11}, R'_{13} und R'_{33} ergaben sich folgende Werte.

He-gelb (588)		He-grün (502)	
$a_{11} =$	0,428512	$a_{11} =$	0,425213
$a_{13} =$	$-0{,}001919$	$a_{13} =$	$-0{,}001904$
$a_{33} =$	0,420527	$a_{33} =$	0,417291
$R'_{11} =$	0,434804	$R'_{11} =$	0,430981
$R'_{13} =$	$-0{,}001972$	$R'_{13} =$	$-0{,}001960$
$R'_{33} =$	0,421048	$R'_{33} =$	0,417312.

Der Bedeutung nach sollte

$$a_{33} = R'_{33}$$

sein. Die Übereinstimmung der gefundenen Zahlen ist ziemlich befriedigend (namentlich für He-grün) und läßt erkennen, welche Genauigkeit etwa erzielt werden könnte. Als zuverlässigere Zahl empfiehlt es sich, den Mittelwert beider einzuführen.

Weiterhin berechnet sich nach der Formel (Gl. XI c)

$$a_{23} \sin\Gamma - a_{31} \cos\Gamma \equiv - R'_{13}$$

der Wert von a_{23}, so daß sich folgende Näherungswerte ergeben.

He-gelb (588)		He-grün (502)	
$a_{11} =$	0,428512	$a_{11} =$	0,425213
$a_{33} =$	0,420788	$a_{33} =$	0,417302
$a_{13} =$	$-0{,}001919$	$a_{13} =$	$-0{,}001904$
$a_{23} =$	0,000549	$a_{23} =$	0,000553.

Anderseits erhält man auf Grund der Ausgleichsrechnung nach dem oben erläuterten Verfahren bzw.

$P_{11} =$	0,852014	0,843610
$P_{22} =$	0,848938	0,842502
$P_{12} =$	$-$0,007371	$-$0,007250.

und findet hieraus, wenn man vom oben ermittelten Näherungswert

$a_{33} =$	0,420788	0,417302

ausgeht,

$a_{11} =$	0,428150	0,425200
$a_{22} =$	0,431226	0,426308
$a_{33} =$	0,420788	0,417302
$a_{23} =$	0,000549	0,000553
$a_{31} =$	$-$0,001919	$-$0,001904
$a_{12} =$	$-$0,007371	$-$0,007250.

Zu diesen Werten wurden Verbesserungen berechnet auf Grund der Ausdrücke

$$\cos^2\psi_i\,(a_{22} + a_{33}) + \sin^2\psi_i\,(a_{33} + a_{11}) - 2\sin\psi_i\cos\psi_i\,a_{12} = q_i'^2 + q_i''^2$$

und

$$\cos^2\psi_i\,(a_{22}\,a_{33} - a_{23}^2) + \sin^2\psi_i\,(a_{33}\,a_{11} - a_{13}^2) - 2\sin\psi_i\cos\psi_i\,(a_{12}\,a_{33} - a_{23}\,a_{31}) = q_i'^2\,q_i''^2.$$

Für a_{23} und a_{31} findet man keine plausiblen Verbesserungen, weil die zugehörigen Koeffizienten äußerst klein sind. Sie wurden darum ohne weiteres als richtig angenommen. Unter dieser Voraussetzung bekommt man als endgültige Werte der Polarisationskonstanten

He-gelb (588)		He-grün (502)	
$a_{11} =$	0,428291	$a_{11} =$	0,425205
$a_{22} =$	0,431099	$a_{22} =$	0,426320
$a_{33} =$	0,420677	$a_{33} =$	0,417299
$a_{23} =$	0,000549	$a_{23} =$	0,000553
$a_{31} =$	$-$0,001919	$a_{31} =$	$-$0,001904
$a_{12} =$	$-$0,007411	$a_{12} =$	$-$0,007254.

Man hätte bei der Anwendung der Ausgleichungsrechnung noch in anderer Weise verfahren können. Es wurden auch mehrere Methoden versucht; sie befriedigen aber ebenso wenig, wie die soeben mitgeteilte. Der tiefere Grund ist der,

daß bei der Linearmachung der quadratischen Gleichungen Glieder vernachlässigt werden müssen, deren Summe mit dem Fehler ε vergleichbar wird.

Weitere Versuche und Rechnungen werden hierüber völlige Klarheit bringen.

75. Nach Auffindung der a_{ik} bestimmen sich die Hauptlichtgeschwindigkeiten als Wurzeln einer Gleichung dritten Grades (Gleichung XIV), welche die merkwürdige Eigenschaft hat, daß der Koeffizient von x^2 sechs, derjenige von x zwölf und das Absolutglied 18 Dezimalstellen haben. Und einzig diese Gleichung hat notwendigerweise drei reelle Wurzeln, während die Abkürzung sämtlicher Koeffizienten auf die nämliche Stellenzahl zu komplexen Wurzeln führen kann. Es ist interessant, diesen Sachverhalt wenigstens in einem Fall numerisch zu verfolgen. Für Kupfervitriol He- gelb ist

$$x^3 - 1{,}280067\,x^2 + 0{,}546102'521956\,x - 0{,}077647'237781'243428 = 0$$

die fragliche Gleichung. Ihre Wurzeln sind

$$a^2 = 0{,}437401 \qquad b^2 = 0{,}422722 \qquad c^2 = 0{,}419944.$$

Daraus findet sich

$$\alpha = 1{,}512029 \qquad \beta = 1{,}538058 \qquad \gamma = 1{,}543136.$$

Hätte man die Koeffizienten der obenstehenden Gleichung auf sechs Dezimalen gekürzt, die Gleichung also in der Form

$$x^3 - 1{,}280067\,x^2 + 0{,}546103\,x - 0{,}077647 = 0$$

geschrieben, so hätten sich als Lösungen folgende Zahlen ergeben.

$$a^2 = 0{,}434984 \qquad b^2 = 0{,}428534 \qquad c^2 = 0{,}416549$$
$$\alpha = 1{,}51622 \qquad \beta = 1{,}52759 \qquad \gamma = 1{,}54941.$$

Kürzt man endlich die Koeffizienten obiger Gleichung dritten Grades noch mehr, d. h. schreibt man die Gleichung in der Form

$$x^3 - 1{,}2801\,x^2 + 0{,}5461\,x - 0{,}0776 = 0,$$

so erhält man als Wurzeln

$$x_1 = 0{,}391381'293255$$
$$x_2 = 0{,}444359'353373 + 0{,}028581'257576\,i$$
$$x_3 = 0{,}444359'353373 - 0{,}028581'257576\,i.$$

Selbstverständlich setzt das Rechnen mit solchen Zahlen

geeignete Hilfsmittel voraus. Im vorliegenden Fall diente eine Multiplikationsmaschine, System „Millionär" aus der Fabrik von Dämen-Schmid & Cie., Zürich, die den gewöhnlichen Additions-Rechenmaschinen weit überlegen ist.

76. Über die Berechnung der Richtungskosinus der optischen Symmetrieachsen ist nicht viel zu sagen. Beachtenswert ist, daß $a_{ii} - \lambda$ von der Größenordnung der a_{ik} wird. Die beiden ersten Dezimalstellen werden also null. Die Folge davon ist, daß die prozentuelle Sicherheit der Koeffizienten bedeutend abgenommen hat. Inwieweit dadurch für die Orientierung weniger genaue Werte herauskommen wie für die Lichtgeschwindigkeiten, ist sehr schwierig zu sagen, da die Ausdrücke kompliziert, unübersichtlich und der analytischen Behandlung nicht leicht zugänglich sind. Jedenfalls bietet die Berechnung der α_i, β_i und γ_i keine rechnerischen Schwierigkeiten. Um auch hiefür ein Beispiel zu geben und die auftretenden Verhältnisse der Anschauung näher zu rücken, sei hier das Gleichungssystem für die α_i mitgeteilt, worin alle Zahlen mit 10^6 multipliziert sind.

$$\begin{aligned} 9110\,\alpha_1 + 7411\,\alpha_2 + 1919\,\alpha_3 &= 0 \\ 7411\,\alpha_1 + 6302\,\alpha_2 - 549\,\alpha_3 &= 0 \\ 1919\,\alpha_1 - 549\,\alpha_2 + 16724\,\alpha_3 &= 0. \end{aligned}$$

Da diese Gleichungen nur zur Bestimmung des Verhältnisses

$$\alpha_1 : \alpha_2 : \alpha_3$$

hinreichen, kann man $\alpha_3 = 1$ setzen, so daß aus der ersten und zweiten Gleichung folgt

$$\alpha_1 : \alpha_2 : \alpha_3 = -6{,}49527 : 7{,}72540 : 1{,}00000$$

oder

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= -6{,}49527\,\varrho \\ \alpha_2 &= 7{,}72540\,\varrho \\ \alpha_3 &= 1{,}00000\,\varrho, \end{aligned}$$

wo ϱ einen Proportionalitätsfaktor bezeichnet, der sich aus der Identität

$$\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 \equiv 1 \equiv (6{,}49527^2 + 7{,}72540^2 + 1)\,\varrho^2$$

berechnet. Man findet so

$$\alpha_1 = -0{,}64040 \qquad \alpha_2 = 0{,}76167 \qquad \alpha_3 = 0{,}09860.$$

Natürlich genügen diese Werte den Gleichungen nicht absolut genau. So werden die rechten Seiten derselben bzw. gleich den Größen

$$-0{,}09423 \qquad -0{,}09146 \qquad 1{,}90197.$$

Die Abweichung ist bei der dritten Gleichung am empfindlichsten, weil dieselbe bei der Berechnung nicht herangezogen wurde. Zwar sollte der Theorie zufolge auch die dritte Gleichung streng erfüllt sein, wenn es die beiden ersten sind. Trifft das hier nicht zu, so ist es deswegen, weil die Voraussetzungen der Theorie praktisch nie erfüllt werden können, da die theoretisch geforderten Irrationalzahlen nie genau, sondern immer nur angenähert durch Rationalzahlen dargestellt werden können.

77. Die beim Kupfervitriol erhaltenen Endresultate sind in der Tabelle XII zusammengestellt.

Tabelle XII.

	He-gelb (588 $\mu\mu$)			He-grün (502 $\mu\mu$)		
	α	β	γ	α	β	γ
n	1,5120	1,5381	1,5431	1,5193	1,5448	1,5494
	x	y	z	x	y	z
ξ	129° 49′	40° 23′	84° 20′	132° 55′	43° 34′	83° 53′
η	130° 50′	127° 27′	63° 14′	127° 33′	129° 54′	62° 13′
ζ	66° 14′	77° 03′	27° 27′	66° 02′	75° 22′	28° 35′

Die optischen Konstanten des Kupfervitriols wurden früher von Pape, Kohlrausch, Lavenir und G. Wulf ganz bzw. teilweise bestimmt.[1]) Ersterer ermittelte zunächst, wie oben § 30 mitgeteilt wurde, die Orientierung der Hauptschwingungsrichtungen und schnitt dann drei Prismen, welche die Bestimmung von je zwei Hauptbrechungsindizes für die D-Linie gestatteten. Eines dieser Prismen erlaubte sogar die Ein-

[1]) Vergl. Groth, Chem. Krist. II Seite 420 f.

stellung auf verschiedene Fraunhofersche Linien und lieferte Werte für α und γ. Kohlrausch und Lavenir bedienten sich der Totalreflexion, gaben aber keine Werte für die Orientierung an. Mit dieser befaßte sich dagegen G. Wulf.

Die vorliegenden Hauptbrechungsindizes sind in der Tabelle XIII übersichtlich zusammengestellt.

Tabelle XIII.

λ		α	$\Delta_{\alpha\beta}$	β	$\Delta_{\beta\gamma}$	γ	$\Delta_{\alpha\gamma}$	
589	D	*1,51541*	*2513*	*1,54054*	*657*	*1,54711*	*3170*	Mittel der vorangehenden Werte
		1,51587	*2238*	*1,53825*	*741*	*1,54566*	*2979*	
		1,51564	2376	1,53940	699	1,54639	3075	
589	D	1,51615				1,54604	2989	Pape
527	E	1,51983				1,54996	3013	
486	F	1,52307				1,55351	3044	
431	G	1,52872				1,55978	3106	
589	D	1,5140	228	1,5368	65	1,5433	293	Kohlrausch
589	D	1,51408	2276	1,53684	661	1,54345	2937	Lavenir

Die Angaben Papes sind wohl weniger zuverlässig wie die anderen, weil das Schneiden der Prismen, das mit freier Hand vorgenommen wurde, trotz größter Sorgfalt nicht allzugenau ausfallen konnte. Immerhin sind sie achtunggebietend und stimmen bezüglich der Doppelbrechung mit den anderen ordentlich überein.

78. Was nun die neugewonnenen Resultate anbelangt, so stehen sie mit den anderen in ziemlich befriedigender Übereinstimmung. Für einen Vergleich eignen sich allerdings zunächst nur die Werte von He-gelb, dessen Wellenlänge nahezu gleich derjenigen von D ist. Von den entsprechenden drei Werten stimmt γ fast genau mit den Angaben von Kohlrausch und Lavenir überein. Dagegen ist diesen gegenüber α um 20 Einheiten der vierten Dezimalstelle zu klein

und β um 13 Einheiten derselben Dezimale zu groß. Doch paßt β wieder vorzüglich zu dem einen von Pape gefundenen Wert.

Um ein Urteil über die Zuverlässigkeit der für He-grün (502) gefundenen Brechungsexponenten zu gewinnen, kann man zunächst auf Grund der Cauchyschen Dispersionsformel und der Papeschen Angaben die Werte von α und γ berechnen. Bei Benutzung der beiden zunächstliegenden Werte für die E- und F-Linien bekommt man

$$\alpha_{502} = 1{,}52171 \text{ und } \gamma_{502} = 1{,}55202.$$

Gegenüber den zugehörigen Papeschen Werten für die D-Linie, nämlich

$$\alpha_{589} = 1{,}51615 \text{ und } \gamma_{589} = 1{,}54604,$$

hat man somit eine Zunahme von 0,00556 bzw. 0,00598. Nun ist bekannt, daß man an einem ganz mittelmäßigen Prisma, das für die Brechungsindizes nur schlechte Werte liefern würde, die Dispersion immer noch ziemlich genau bestimmen kann. Werden demnach die berechneten Zahlen als wirkliches Maß der Dispersion angenommen, so hat man mit Hilfe der zuverlässigeren Grundwerte von Kohlrausch

$$\alpha_{502} = 1{,}5140 + 0{,}00556 = 1{,}51956$$
$$\gamma_{502} = 1{,}5433 + 0{,}00598 = 1{,}54928.$$

Hiermit stimmen die neuen Werte vorzüglich überein.

Daß übrigens α und γ von He-grün dem tatsächlichen Verhalt ziemlich nahe kommen, ist auch darum recht wahrscheinlich, weil die Doppelbrechung gleich 0,0301 ist und der von Kohlrausch gefundenen Doppelbrechung gut entspricht, zumal nach den Zahlen Papes mit wachsender Lichtbrechung auch die Doppelbrechung zuzunehmen scheint.

Das Verhalten von β dürfte dem oben genannten für He-gelb ähnlich sein, soweit wenigstens die Doppelbrechung gegenüber γ in Betracht kommt.

79. Bezüglich der Orientierung der Hauptschwingungsrichtungen liegen folgende Angaben vor. Nach Pape[1]) liegt die erste Mittellinie im vordern rechten oberen Oktanten und

[1]) Pogg. Ann. d. Phys. Erg. Band **6** (1874). Seite 45.

bildet für mittlere Farben — nach Papes Äußerung selber „mit größter Annäherung für Licht von der Brechbarkeit der Fraunhoferschen Linie E“ — mit den Normalen von m (110), μ ($\bar{1}\bar{1}0$) und ω ($\bar{1}11$) die Winkel $43^3/_4{}^0$, $98^1/_2{}^0$ und 73^0.

Die Lage der anderen optischen Symmetrieachsen gibt Pape nicht an. Dagegen hat er (loc. cit. Seite 48) eine Tabelle mitgeteilt, aus der die Orientierung der Flächen eines optischen Prismas hervorgeht, dessen brechender Winkel 45^0 beträgt und innen und außen von je einer optischen Symmetrieachse halbiert wird. Unter der Annahme, daß die brechende Kante z. B. parallel η sei und der innere Prismenwinkel von ζ halbiert werde, findet er folgende Werte, falls I und II die Normalen der beiden Prismenflächen bedeuten.

I: $110 = 57^0\,50',5$	II: $110 = 143^0\,29',0$
$\bar{1}11 = 52^0\,48',0$	$\bar{1}11 = 86^0\,32',1$
$\bar{1}10 = 77^0\,26',5$	$\bar{1}10 = 93^0\,9',8$.

Hierdurch sind die optischen Symmetrieachsen natürlich eindeutig bedingt. In stereographischer Projektion erhält man die drei Punkte, die in der Fig. 8[1]) durch ausgezogene Kreisbogen verbunden sind.

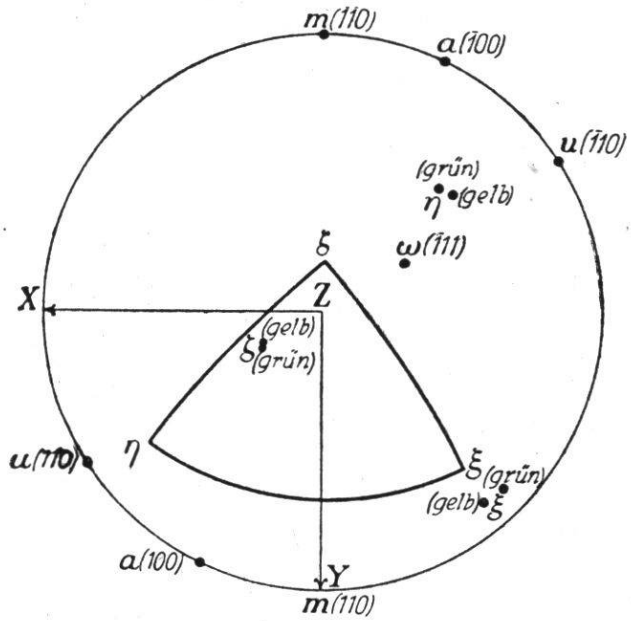

Fig. 8

Nach einer neueren Bestimmung von G. Wulf[2]) schließt die Normale der Achsenebene mit den Normalen zu m (110), μ ($\bar{1}\bar{1}0$) und ω ($\bar{1}11$) bzw. die Winkel $53^1/_2{}^0$, $12^1/_2{}^0$ und 113^0 ein. Ob es sich hierbei um eine wirklich neue Ermittlung dieser Werte handle oder ob nur eine Umrechnung der Werte von Pape vorliege, ist nicht ersichtlich. Das letztere ist wegen der vollkommenen Übereinstimmung der beiden Angaben nicht ausgeschlossen.

---

[1]) Die Figur ist nach dem „optischen Prisma“ orientiert. Durch ein Versehen wurden aber ($\bar{1}\bar{1}0$) und ($\bar{1}10$) auf dem Klische mit u statt μ bezeichnet. [2]) Groth, Chem. Kristallogr. II, 420.

Die optische Orientierung, die sich aus den in dieser Arbeit gefundenen Werten der Polarisationskonstanten ergibt, ist ebenfalls in der Fig. 8 eingetragen, und zwar sowohl für die gelbe wie die grüne Heliumlinie. Die beiden neuen ξ-Achsen nähern sich in befriedigender Weise der von Pape gefundenen Lage. Um so größer ist dafür die Unstimmigkeit bezüglich der beiden anderen Achsen. Mag die Unzuverlässigkeit der Papeschen Werte auch ihren Teil hierzu beitragen, so findet sie doch ihre volle Erklärung nur auf Grund der Bemerkungen des § 76 und der Diskussionen des vorangehenden Paragraphen, aus denen hervorgeht, daß die Differenzen $a_{22} - q_i^2$ und $a_{33} - q_i^2$ für $i = 1,2$ sehr unsicher werden.

Der tiefste Grund dieser Ungenauigkeit ist die in § 65 erwähnte Unzulänglichkeit des Prismas, was im folgenden klar zutage treten wird.

B. Colemanit $= B_6 O_{11} Ca_2 \cdot 5 H_2 O$.

$a : b : c = 0{,}7769 : 1 : 0{,}5416 \qquad \beta = 110^0\, 17'$

80. Der Kristall stammt von San Bernardino Co. in Kalifornien und zeigt, von einigen schmalen Kantenabstumpfungen abgesehen, folgende Formen: $\{110\}$, $\{001\}$, $\{\bar{1}01\}$, $\{\bar{1}21\}$ und untergeordnet $\{100\}$, $\{010\}$, $\{120\}$. Zum Zwecke der optischen Untersuchung wurde auf der hinteren Seite des Prismas eine Fläche angeschliffen, welche zur Orthodiagonale nur wenig geneigt und zur Vertikalachse fast parallel gelegen ist.

Die Durchmessung der Prismenzone, wobei die Kante $(1\bar{1}0) : (\bar{1}\bar{1}0)$ parallel zur Drehachse gestellt wurde, lieferte folgende Werte.

$(1\bar{1}0)$	$47^0\, 54^3/_4{}'$	heller Reflex mit schmalem Nebenschein.
$(1\bar{2}0)$	$67^0\, 23'$	äußerst schmale Fläche; breiter Reflex, der vorzüglich in der Zone liegt.
$(0\bar{1}0)$	$101^0\, 56'$	etwas verbreiteter, nicht ganz in der Zone gelegener Reflex.
$(\bar{1}\bar{2}0)$	$136^0\, 26'$	äußerst schwacher, unbestimmter, aber gut in der Zone gelegener Reflex.
$(\bar{1}\bar{1}0)$	$155^0\, 54^3/_8{}'$	scharfer Reflex, zwar nicht hell, aber gut einstellbar.

K . . . . . = künstliche Fläche und
(110) . . . . . liegen ziemlich stark außerhalb der Zone.
(100) . . . . . liegt genau in der Zone, Reflex schlecht, darunter ein zweiter.
(010) . . . . . schmale Spaltungsfläche, Reflex unscharf, aber gut in der Zone.

Diese Messungen zeigen, daß der Kristall nicht besonders vollkommen ausgebildet ist. Immerhin wird man den wirklichen Verhältnissen recht nahe kommen, falls man die genannte Kantenrichtung zur Vertikalachse und die innere Winkelhalbierende der beiden Flächen $(1\bar{1}0)$ und $(\bar{1}\bar{1}0)$ zur Orthodiagonale wählt. Die Klinodiagonale ist für das Folgende belanglos. Wichtigkeit hat nur die Annahme, daß die zur Orthodiagonale senkrechte Ebene eine Symmetrieebene sei.

81. Die wichtigste Aufgabe, die sich zunächst bietet, ist die Lagebestimmung der Kunstfläche. Zu dem Zweck wurden folgende Messungen vorgenommen.

$$K:(1\bar{1}0) = 151^0\,38\tfrac{11'}{16} \qquad (1\bar{1}0):(001) = 73^0\,48'$$
$$K:(\bar{1}\bar{1}0) = 43^0\,41\tfrac{5'}{8} \qquad (\bar{1}\bar{1}0):(001) = 106^0\,08\tfrac{1'}{2}$$
$$K:(001) = 108^0\,45\tfrac{1'}{4} \qquad (001):(\bar{1}\bar{2}1) = 57^0\,51\tfrac{1'}{2}$$
$$K:(\bar{1}\bar{2}1) = 80^0\,31\tfrac{3'}{8} \qquad (1\bar{1}0):(\bar{1}\bar{2}1) = 77^0\,25\tfrac{1'}{2}$$
$$(\bar{1}\bar{1}0):(\bar{1}\bar{2}1) = 51^0\,44\tfrac{7'}{16}$$

Ist X, Y, Z ein rechtwinkliges, rechtshändiges Achsensystem, dessen Y- und Z-Achse mit der oben definierten b- bzw. c-Achse zusammenfallen, so erhält man für die Kunstfläche K die Gleichung

$$l\,X + m\,Y + n\,Z = 0.$$

l und m lassen sich aus den Winkeln

$$(1\bar{1}0):K = 151^0\,38\tfrac{11}{16} \text{ und } (\bar{1}\bar{1}0):K = 43^0\,41\tfrac{5}{8}$$

bestimmen, und da die Identität

$$l^2 + m^2 + n^2 = 1$$

besteht, so erhält man gleichzeitig den absoluten Wert von n, dessen Vorzeichen aus dem gemessenen Winkel

$$(001):K = 108^0\,45\tfrac{1'}{4}$$

ermittelt werden kann. Weil die Messungen nicht fehlerfrei sind und

der Kristall überhaupt nicht ideal ausgebildet ist, stimmt der Wert von n, der aus dem zuletzt angegebenen Winkel berechnet wird, mit dem zuvor ermittelten nur auf einige Minuten genau überein.

Geht man von anderen Kombinationen aus, so bekommt man wiederum andere Werte. Dabei bemerkt man, daß n innerhalb weiterer Grenzen schwankt, als m und l, die bedeutend genauer sind. Das rührt davon her, daß der n zugeordnete Winkel fast 90°, die Variation von n also ein Maximum ist.

Aus vier verschiedenen Kombinationen ergaben sich die Mittelwerte

$$l = -0{,}990809 \qquad m = 0{,}133526 \qquad n = 0{,}021168,$$

welche aber, wie ohne weiteres verständlich ist, der Bedingung

$$l^2 + m^2 + n^2 = 1$$

nicht genau genügen. Da n jedenfalls am unzuverlässigsten ist, so wurde hierfür mit Hilfe der eben genannten Identität ein neuer Wert bestimmt. Die Gleichung der angeschliffenen Fläche wird dadurch

$$-0{,}990809\,X + 0{,}133526\,Y + 0{,}021641\,Z = 0.$$

82. Wird $(1\bar{1}0)$ als zx-Ebene gewählt, so ist es ein leichtes, die Beziehungen zwischen dem XYZ-System und dem xyz-System aufzustellen. Man erhält das folgende Schema.

	x	y	z
X	0,587219	0,808985	−0,026776
Y	0,808145	−0,587829	−0,036849
Z	−0,045550	0,000000	−0,998962

83. Infolge der Zugehörigkeit des Colemanit zum monoklinen System ergeben sich aus den kristallographischen Symmetrieeigenschaften zwei optische Bedingungsgleichungen, die nach Gleichung XV auf die Form

$$\frac{a_{11}A + a_{12}B + a_{13}C}{A} = \frac{a_{13}A + a_{23}B + a_{33}C}{C}$$

$$\frac{a_{12}A + a_{22}B + a_{23}C}{B} = \frac{a_{13}A + a_{23}B + a_{33}C}{C}$$

gebracht werden können. A, B, C sind die Richtungskosinus von Y in bezug auf x, y, z. Es empfiehlt sich, hieraus a_{12} und a_{22} als Funktionen der vier anderen Polarisationskonstanten zu berechnen. Man erhält so die Ausdrücke

$$a_{12} = 1{,}374795\, a_{11} - 1{,}374795\, a_{33} + 30{,}087797\, a_{13} - 21{,}931019\, a_{23}$$
$$a_{22} = 1{,}890061\, a_{11} - 0{,}890061\, a_{33} + 19{,}433534\, a_{13} - 14{,}261136\, a_{23}.$$

Die Koeffizienten dieser Gleichungen sind von der Wellenlänge unabhängig.

84. Zur Bestimmung von a_{11}, a_{13} und a_{33} dienen die Geschwindigkeiten und Schwingungsrichtungen jener Wellen, die sich parallel der y-Achse im Kristall fortpflanzen. Die Messung ergab

$$\varepsilon = \frac{\pi}{2} + 24^0.$$

Über die Polarisationskonstanten orientiert folgende Zusammenstellung.

	rot (668)	gelb (588)	grün (502)
a_{11}	0,394774	0,392920	0,390333
a_{13}	0,000800	0,000775	0,000778
a_{33}	0,396216	0,394317	0,391734

Die Schwingungsrichtungen jener Wellen, deren Normalen senkrecht zur künstlichen Fläche sind, wurden nicht bestimmt. Da aber diese Fläche der Z-Achse fast parallel ist und auch mit dem Orthopinakoid nur einen kleinen Winkel bildet, so darf man in erster Annäherung voraussetzen, daß jene Richtungen parallel und senkrecht zur Prismenkante seien, oder noch genauer, daß

$$\varepsilon' = \frac{\pi}{2}.$$

Unter dieser Voraussetzung findet man für alle drei Farben den Näherungswert

$$a_{23} = 0{,}0014.$$

Indessen läßt sich dieser Wert noch in anderer Art ermitteln.

Wie oben (§ 68) gezeigt wurde, ist es möglich, lineare Gleichungen von der Form

$$(a_{22} + a_{33}) \cos^2\psi_i + (a_{33} + a_{11}) \sin^2\psi_i - 2\, a_{12} \sin\psi_i \cos\psi_i = q_i'^2 + q_i''^2$$

aufzustellen. Ersetzt man hierin auf Grund der Bedingungsgleichungen a_{12} und a_{22} durch ihre Werte, so erhält man eine gewisse Anzahl Gleichungen, die als einzige Unbekannte a_{23} enthalten. Während nun die einzelnen Gleichungen den Beobachtungsfehlern unterworfen sind und darum für a_{23} etwas verschiedene Werte liefern, ist die Summe aller Gleichungen von den zufälligen Fehlern ziemlich frei und erlaubt deshalb, für a_{23} einen recht guten Wert zu finden.

Dieses Verfahren wurde bei allen Farben angewandt und ergab:

	rot (668)	gelb (588)	grün (502)
a_{23}	0,001260	0,001253	0,001261

Zur Verbesserung der Näherungswerte für a_{11}, a_{33}, a_{13} und a_{32} dient die Methode der kleinsten Quadrate. Es kommen so die endgültigen Werte der Tabelle XIV.

Tabelle XIV.

	rot	gelb	grün
a_{11}	0,394745	0,392912	0,390306
a_{22}	0,390945	0,388824	0,386097
a_{33}	0,396187	0,394309	0,391707
a_{23}	0,001267	0,001256	0,001268
a_{31}	0,000800	0,000775	0,000800
a_{12}	—0,005689	—0,006138	—0,006324

Die weiteren Rechnungen bieten keine prinzipiellen Schwierigkeiten. Nur zeigt es sich von neuem, daß man die Koeffizienten der Gleichung dritten Grades nicht beliebig kürzen darf.

85. Die ermittelten Hauptbrechungsindizes sind aus der folgenden Tabelle XV ersichtlich.

Tabelle XV.

	α	β	γ
rot	$1{,}5834_2$	$1{,}5882_7$	$1{,}6082_8$
gelb	$1{,}5864_2$	$1{,}5920_8$	$1{,}6133_5$
grün	$1{,}5913_8$	$1{,}5973_5$	$1{,}6194_0$

Für die Orientierung der Hauptschwingungsrichtungen im xyz- bzw. XYZ-System (vergl. die Festsetzungen von § 81) gelten die in den Tabellen XVI und XVII zusammengestellten Größen.

Tabelle XVI.

	rot (668)			gelb (588)			grün (502)		
	x	y	z	x	y	z	x	y	z
ξ	0,80818	—0,58778	—0,03692	0,80774	—0,58757	—0,03693	0,80866	—0,58746	—0,03099
η	0,12037	0,10346	0,98732	0,11426	0,09494	0,98890	0,10866	0,09742	0,98929
ζ	0,57651	0,80233	—0,15464	0,57782	0,80338	—0,14390	0,57810	0,80341	—0,14260

Tabelle XVII.

	rot (668)			gelb (588)			grün (502)		
	X	Y	Z	X	Y	Z	X	Y	Z
ξ	90°	0°	90°	90°	0	90°	90°	0°	90°
η	82° 40′	90°	172° 40′	83° 14′	90°	173° 14′	83° 18′	90°	173° 18′
ζ	7° 20′	90°	82° 40′	6° 46′	90°	83° 14′	6° 42′	90°	83° 18′

Die gefundenen Hauptbrechungsindizes stehen in recht befriedigender Übereinstimmung mit den Angaben Mülheims[1]), wie aus Tabelle XVIII ersichtlich ist.

[1]) Mülheims, Groth's Zeitschrift **14**, Seite 230.

Tabelle XVIII.

	λ	α	$\Delta_{\alpha\beta}$	β	$\Delta_{\beta\gamma}$	γ
B	687	1,58230	577	1,58807	2171	1,60978
He-rot	*668*	*1,58342*	*485*	*1,58827*	*2001*	*1,60828*
C	656	1,58345	577	1,58922	2178	1,61100
D	589	1,58626	576	1,59202	2196	1,61398
He-gelb	*588*	*1,58642*	*566*	*1,59208*	*2127*	*1,61335*
E	527	1,58952	579	1,59531	2231	1,61762
b_4	518	1,59017	584	1,59601	2235	1,61836
He-grün	*502*	*1,59138*	*597*	*1,59735*	*2205*	*1,61940*
F	486	1,59214	596	1,59810	2234	1,62044

Am ungenauesten scheint rot, am genauesten grün geraten zu sein. Der Grund mag darin liegen, daß es zuweilen recht schwierig ist, das Fadenkreuz auf die rote Linie einzustellen, weil sie im strahlenden Glanz der gelben Linie stark verblaßt. Überhaupt war es bei den verschiedenen Ablesungen eine auffallende Erscheinung, daß die grüne Linie außerordentlich scharf begrenzt war und Einstellungen erlaubte, die bei den verschiedenen Wiederholungen meistens identisch waren und selten um mehr als eine Viertelsminute variierten, während bei der gelben Linie Variationen von $^1/_4$- bis $^3/_4$-Minuten, bei der roten sogar von mehr wie einer Minute die Regel waren.

Bezüglich der Orientierung teilt v. Groth[1]) folgende Zahlen mit: Die Ebene der optischen Achsen ist senkrecht zu {010}; die erste Mittellinie bildet in {010} einen Winkel von 83°[2]) mit der c-Achse im stumpfen Winkel β.

Diese Angaben stimmen prachtvoll mit den neugewonnenen Resultaten überein, welche für rot, gelb und grün bzw. die Werte 82° 40′, 83° 14′ und 83° 18 lieferten[3]).

[1]) Chemische Kristallogr. II, 283. [2]) Nach Mülheims l. c. 82° 43′.

[3]) Aus diesen schönen Ergebnissen ist der Rückschluß gestattet, daß der geringere Erfolg beim Kupfervitriol tatsächlich auf die mangelhafte Beschaffenheit des Prismas zurückzuführen ist.

C. *Euklas* = $SiO_4Be[AlOH]$.

a : b : c = 0,3237 : 1 : 0,3332 $\beta = 100^0\,16'$ (Schabus)

86. Zur Verwendung gelangte ein ziemlich großes (12 mm langes) Bruchstück, das ringsum von drei Flächen begrenzt, an den beiden Enden aber abgebrochen ist. Die eine Fläche ist als Spaltfläche {010} deutlich erkennbar. Hierzu senkrecht steht eine andere Fläche, die ca. 5 mm breit, aber in ihrer Ausbildung durch eine vielfache Fiederung usw. teilweise gestört ist. Wegen des rechten Winkels, den sie mit {010} bildet, ist sie der Orthodiagonale parallel. Die dritte Fläche bildet mit der zweiten einen ziemlich spitzen Winkel ($\Gamma = 32^0\,27'\,20''$) und spiegelt wunderbar. Überhaupt ist der Kristall von herrlicher Klarheit und erzeugt dementsprechend Spektrallinien von strahlender Helligkeit. Leider läßt ihre Schärfe noch zu wünschen übrig.

Die zuletzt genannte Fläche gehört der Form {120} an, entsprechend dem im Handbuch v. Hintze angegebenen Werte 120 : 010 = $57^0\,30'$. Ob sie aber rechts oder links von der Symmetrieebene gelegen sei, bleibt unentschieden. Glücklicherweise ist jedoch diese Unbestimmtheit für die Aufstellung der dem monoklinen System eigentümlichen Bedingungsgleichungen völlig belanglos. Denn da die ebengenannte Fläche {120} zur xz-Ebene gewählt wurde, folgt ohne weiteres, daß die Richtungskosinus der Orthodiagonale gleich sind den Ausdrücken

$$A = \cos\Gamma \qquad B = -\sin\Gamma \qquad C = 0.$$

Nach Gleichung XV hat man also die beiden Bedingungsgleichungen ($\lambda = -\Gamma$)

$$(a_{11} - a_{22})\sin 2\Gamma + 2\,a_{12}\cos 2\Gamma = 0 \text{ und}$$
$$a_{13}\cos\Gamma - a_{23}\sin\Gamma = 0.$$

Beachtenswert ist noch, daß jene Welle, deren Normale senkrecht zur zweitgenannten Fläche {100} ist und parallel der z-Achse schwingt, direkt den Wert a_{33} gibt, während die andere Welle dieser Fortpflanzungsrichtung eine Hauptlichtgeschwindigkeit liefert. Eine Zusammenstellung (Tabelle XIX) der durch direkte Beobachtung (erste Kolonne) bzw. mit Hilfe von ε, q_1 und q_2 (zweite Kolonne) ermittelten Werte von a_{33}

dürfte interessieren und erlaubt zudem ein Urteil über die erzielte Genauigkeit.

Tabelle XIX.

	Beobachtung	Rechnung
rot	0,36269	0,362791
gelb	0,36130	0,361509
grün	0,35904	0,359292
indigo	0,35696	0,356857

87. Die Polarisationskonstanten wurden in verschiedener Weise bestimmt. Das erstemal wurde ungefähr so verfahren, wie im zweiten Teil bei der Anwendung der allgemeinen Methode auf monokline Kristalle angegeben wurde; später wurden zuerst die P_{ik} und Q_{ik} (aber ohne Interpolation der q_i''-Werte) bestimmt und die Polarisationskonstanten in der Weise berechnet, daß aus den Gleichungen

$$a_{22} + a_{33} = P_{11} \qquad a_{22}\, a_{33} - a_{23}^2 = Q_{11}$$
$$a_{33} + a_{11} = P_{22} \qquad a_{33}\, a_{11} - a_{31}^2 - Q_{22}$$

vermöge der Bedingungsgleichung

$$a_{23} = m\, a_{13} \qquad (m = \cot g\, \Gamma)$$

zunächst a_{23} eliminiert und dann durch Substitution der Werte von a_{22} bzw. a_{11} aus den Gleichungen links in den Gleichungen rechts das einfache System

$$a_{33}\,(P_{11} - a_{33}) - m^2\, a_{13}^2 = Q_{11}$$
$$a_{33}\,(P_{22} - a_{33}) - a_{13}^2 = Q_{22}$$

abgeleitet wurde, aus dem sich schließlich durch Elimination von a_{13} die Gleichung

$$(m^2 - 1)\, a_{33}^2 - (m^2\, P_{22} - P_{11})\, a_{33} + (m^2\, Q_{22} - Q_{11}) = 0$$

ergibt. Diese Gleichung ist unabhängig von ε, liefert aber zwei Werte für a_{33}, unter denen wegen des bekannten Näherungswertes der wahre leicht zu erkennen ist.

88. Die nach den verschiedenen Methoden erhaltenen Resultate stimmen recht gut untereinander überein. Die Mittelwerte sind in der Tabelle XX aufgeführt.

Tabelle XX.

	α	$\Delta_{\alpha\beta}$	β	$\Delta_{\beta\gamma}$	γ
rot (668)	$1{,}6474_2$	46_4	$1{,}6520_6$	156_6	$1{,}6676_6$
gelb (588)	$1{,}6507_9$	45_3	$1{,}6553_2$	161_2	$1{,}6714_4$
grün (502)	$1{,}6559_8$	46_0	$1{,}6605_8$	161_1	$1{,}6766_9$
indigo (447)	$1{,}6606_2$	46_6	$1{,}6652_8$	161_5	$1{,}6814_3$

Zur Kontrolle dienen die direkt gewonnenen Werte für die mittleren Hauptbrechungsindizes, nämlich

$$\beta_{668} = 1{,}6521_6$$
$$\beta_{588} = 1{,}6553_3$$
$$\beta_{502} = 1{,}6605_1$$
$$\beta_{447} = 1{,}6653_2.$$

Die einzigen über Euklas vorliegenden optischen Konstanten wurden von Descloizeaux[1]) ermittelt, der für mittlere Farben folgende Angaben macht.

$$\alpha = 1{,}6520 \qquad \beta = 1{,}6553 \qquad \gamma = 1{,}6710$$

Die Übereinstimmung dieser β- und γ-Werte mit den obigen für He-gelb ist fast überraschend; dagegen stimmt α etwas weniger gut.

Als Ebene der optischen Achsen wurde übereinstimmend mit den bekannten Angaben $\{010\}$ gefunden. Ebenso ergibt sich ζ als spitze Bissektrix. Sie bildet mit der z-Achse einen Winkel, für den sich die Werte der Tabelle XXI ergeben haben.

Tabelle XXI.

rot	gelb	grün	indigo
39° 39′	39° 49′	39° 14′	35° 31′

Nach Descloizeaux[2]) ist er gleich 40° 32′. Die Übereinstimmung ist also, vom letzten Wert abgesehen, verhältnismäßig gut und beweist neuerdings die Zuverlässigkeit der Methode, wenn

[1]) Descloizeaux, Man. I, 482.
[2]) Bull. Soc. Min. **5** 317.

die Lichtverhältnisse und die Beschaffenheit des Materials ein genaues Arbeiten gestatten.

Die erzielten Resultate des dritten Teiles dürften die praktische Verwertbarkeit der im zweiten Teil erläuterten Methode zur Genüge gezeigt haben. Wenn ein Punkt nicht ganz befriedigt, so ist es der, daß anscheinend die Größe der Doppelbrechung nicht immer mit großer Genauigkeit ermittelt werden kann. Berücksichtigte man aber den Wert von $(q'^2 - q''^2)^2$, welcher einerseits wegen der Beobachtungen bekannt ist und sich anderseits überraschend einfach durch P_{ik} und Q_{ik} rational darstellt, so wird es möglich, selbst diese Mängel vollständig zu beheben. Es wird mir deshalb ein besonderes Vergnügen sein, dies in einer weiteren Arbeit experimentell und theoretisch darzutun.[1])

Belfaux, den 29. September 1916.

---

[1]) Trotz eifrigen Bemühens war es bis zur Drucklegung noch nicht möglich, die erforderlichen Präparate zu beschaffen.

Formelverzeichnis.

I (1)[1]

	x	y	z
ξ	α_1	α_2	α_3
η	β_1	β_2	β_3
ζ	γ_1	γ_2	γ_3

II (2)
$$\frac{\nu_1^2}{q^2-a^2}+\frac{\nu_2^2}{q^2-b^2}+\frac{\nu_3^2}{q^2-c^2}=0$$

III (3) (c-Kurve)
$$q^4-q^2(L_{11}\cos^2\psi+L_{22}\sin^2\psi+2\,L_{12}\sin\psi\cos\psi)+$$
$$+(M_{11}\cos^2\psi+M_{22}\sin^2\psi+2\,M_{12}\sin\psi\cos\psi)=0$$

IIIa (7)
$$f(q,\psi)\equiv[(M_{11}-M_{22})-(L_{11}-L_{22})\,q^2]\,\cos 2\psi+$$
$$2\,(M_{12}-L_{12}\,q^2)\sin 2\psi+[2\,q^4-(L_{11}+L_{22})\,q^2+(M_{11}+M_{22})]=0$$

IVa (3)
$$L_{ik}\equiv(b^2+c^2)\,\alpha_i\,\alpha_k+(c^2+a^2)\,\beta_i\,\beta_k+(a^2+b^2)\,\gamma_i\,\gamma_k$$
$$M_{ik}\equiv b^2\,c^2\,\alpha_i\,\alpha_k+c^2\,a^2\,\beta_i\,\beta_k+a^2\,b^2\,\gamma_i\,\gamma_k$$

IVb (5)
$$\alpha_i^2+\beta_i^2+\gamma_i^2=1 \qquad \alpha_i\,\alpha_k+\beta_i\,\beta_k+\gamma_i\,\gamma_k=0$$

V (5)
$$\alpha_1^2=\frac{a^4-L_{11}\,a^2+M_{11}}{(a^2-b^2)\,(a^2-c^2)} \qquad \alpha_2^2=\frac{a^4-L_{22}\,a^2+M_{22}}{(a^2-b^2)\,(a^2-c^2)} \qquad \alpha_1\,\alpha_2=\frac{-L_{12}\,a^2+M_{12}}{(a^2-b^2)\,(a^2-c^2)}$$
$$\beta_1^2=\frac{b^4-L_{11}\,b^2+M_{11}}{(b^2-c^2)\,(b^2-a^2)} \qquad \beta_2^2=\frac{b^4-L_{22}\,b^2+M_{22}}{(b^2-c^2)\,(b^2-a^2)} \qquad \beta_1\,\beta_2=\frac{-L_{12}\,b^2+M_{12}}{(b^2-c^2)\,(b^2-a^2)}$$
$$\gamma_1^2=\frac{c^4-L_{11}\,c^2+M_{11}}{(c^2-a^2)\,(c^2-b^2)} \qquad \gamma_2^2=\frac{c^4-L_{22}\,c^2+M_{22}}{(c^2-a^2)\,(c^2-b^2)} \qquad \gamma_1\,\gamma_2=\frac{-L_{12}\,c^2+M_{12}}{(c^2-a^2)\,(c^2-b^2)}$$

---

[1]) Die angeklammerten Zahlen geben die Seiten an.

VI (5)
$$u^4 - (L_{11} + L_{22})\, u^3 + (M_{11} + M_{22} + L_{11} L_{22} - L_{12}^2)\, u^2 - (L_{11} M_{22} + L_{22} M_{11} - 2\, L_{12} M_{12})\, u + (M_{11} M_{22} - M_{12}^2) = 0$$

VII (44)
$$a_{11}\, x^2 + a_{22}\, y^2 + a_{33}\, z^2 + 2a_{12}\, xy + 2a_{23} yz + 2a_{31}\, zx = 1$$

VIII (44)
$$a_{ik} \equiv a^2\, \alpha_i\, \alpha_k + b^2\, \beta_i\, \beta_k + c^2\, \gamma_i\, \gamma_k \qquad (a_{ik} = a_{ki})$$

IX (45)
$$q^4 - q^2\, [(a_{22} + a_{33}) \cos^2\psi + (a_{33} + a_{11}) \sin^2\psi - 2\, a_{12} \sin\psi \cos\psi] + [(a_{22}\, a_{33} - a_{23}^2) \cos^2\psi + (a_{33}\, a_{11} - a_{31}^2) \sin^2\psi - 2\, (a_{12}\, a_{33} - a_{23}\, a_{31}) \sin\psi \cos\psi] = 0$$

X (45)
$$q^4 - q^2\, (P_{11} \cos^2\psi + P_{22} \sin^2\psi - 2\, P_{12} \sin\psi \cos\psi) + (Q_{11} \cos^2\psi + Q_{22} \sin^2\psi - 2\, Q_{12} \sin\psi \cos\psi) = 0$$

XIa$^{(i)}$ (45) $= 1, 2 \ldots 6$
$$P_{11} \equiv a_{22} + a_{33} \qquad Q_{11} \equiv a_{22}\, a_{33} - a_{23}^2$$
$$P_{22} \equiv a_{33} + a_{11} \qquad Q_{22} \equiv a_{33}\, a_{11} - a_{31}^2$$
$$P_{12} \equiv a_{12} \qquad Q_{12} \equiv a_{12}\, a_{33} - a_{23}\, a_{31}$$

XI b (49)
$$a_{11} \equiv q_1^2 \sin^2\varepsilon + q_2^2 \cos^2\varepsilon \equiv R_{11}$$
$$a_{13} \equiv (q_1^2 - q_2^2) \sin\varepsilon \cos\varepsilon \equiv R_{13}$$
$$a_{33} \equiv q_1^2 \cos^2\varepsilon + q_2^2 \sin^2\varepsilon \equiv R_{33}$$

XIc (51)
$$a_{11} \cos^2\Gamma - 2\, a_{12} \sin\Gamma \cos\Gamma + a_{22} \sin^2\Gamma \equiv q'^2_1 \sin^2\varepsilon' + q'^2_2 \cos^2\varepsilon' \equiv R'_{11}$$
$$a_{31} \cos\Gamma - a_{23} \sin\Gamma \equiv -(q'^2_1 - q'^2_2) \sin\varepsilon' \cos\varepsilon' \equiv R'_{13}$$
$$a_{33} \equiv q'^2_1 \cos^2\varepsilon' + q'^2_2 \sin^2\varepsilon' \equiv R'_{33}$$

XII (45)
$$a_{33}^4 - (P_{11} + P_{22})\, a_{33}^3 + (P_{11}\, P_{22} - P_{12}^2 + Q_{11} + Q_{22})\, a_{33}^2 - (P_{11}\, Q_{22} + P_{22}\, Q_{11} - 2\, P_{12}\, Q_{12})\, a_{33} + (Q_{11}\, Q_{22} - Q_{12}^2) = 0$$

XIII (51)
$$a_{11} u + a_{12} v + a_{13} w = \lambda u$$
$$a_{12} u + a_{22} v + a_{23} w = \lambda v$$
$$a_{13} u + a_{23} v + a_{33} w = \lambda w$$

XIV (51)
$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22}-\lambda & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33}-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

XV (55)
$$\frac{a_{11}A + a_{12}B + a_{13}C}{A} = \frac{a_{12}A + a_{22}B + a_{23}C}{B} = \frac{a_{13}A + a_{23}B + a_{33}C}{C}$$

XVI (57)
$$\frac{a_{11}A_1 + a_{12}A_2 + a_{13}A_3}{A_1} = \frac{a_{12}A_1 + a_{22}A_2 + a_{23}A_3}{A_2} = \frac{a_{13}A_1 + a_{23}A_2 + a_{33}A_3}{A_3}$$
$$\frac{a_{11}B_1 + a_{12}B_2 + a_{13}B_3}{B_1} = \frac{a_{12}B_1 + a_{22}B_2 + a_{23}B_3}{B_2} = \frac{a_{13}B_1 + a_{23}B_2 + a_{33}B_3}{B_3}$$
$$\frac{a_{11}C_1 + a_{12}C_2 + a_{13}C_3}{C_1} = \frac{a_{12}C_1 + a_{22}C_2 + a_{23}C_3}{C_2} = \frac{a_{13}C_1 + a_{23}C_2 + a_{33}C_3}{C_3}$$