

Zeitschrift:	Mémoires de la Société Fribourgeoise des Sciences Naturelles. Mathématique et physique = Mitteilungen der Naturforschenden Gesellschaft in Freiburg. Mathematik und Physik
Herausgeber:	Société Fribourgeoise des Sciences Naturelles
Band:	4 (1921)
Artikel:	Über die Prismenmethode zur Bestimmung der Brechungsindizes optisch zweiaachsiger Kristalle ohne Absorptions- und Drehungsvermögen
Autor:	Weber, Leonhard
Kapitel:	I: Systematische Zusammenstellung, Ergänzung und Verallgemeinerung der bisherigen Untersuchungen
DOI:	https://doi.org/10.5169/seals-306876

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 09.02.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

I. TEIL

Systematische Zusammenstellung, Ergänzung und Verallgemeinerung der bisherigen Untersuchungen.

1. Dem allgemeinen Brauch entsprechend, wird den folgenden Betrachtungen ein rechtwinkliges, rechtshändiges Achsenystem x, y, z zugrunde gelegt, dessen x - und y -Achse in der Querschnittsebene (Hauptschnitt) des Prismas liegen und durch die Halbierungsebene des inneren bzw. äußeren Prismenwinkels bestimmt sind. Die z -Achse steht auf beiden senkrecht und fällt mit der brechenden Kante des Prismas zusammen. Über dem Hauptschnitt wird sie positiv gerechnet, während die positive Seite der x -Achse ins Innere des Prismenwinkels gerichtet ist.

Neben diesem $x y z$ -System ist noch ein zweites, ebenfalls rechtwinkliges, rechtshändiges Koordinatensystem ξ, η, ζ von Bedeutung, dessen Achsen durch den Ursprung O des ersten Systems gehen und den Schwingungsrichtungen jener Wellen parallel sind, die sich mit den Geschwindigkeiten a bzw. b und c ($a > b > c$) (Hauptlichtgeschwindigkeiten) im Prisma ausbreiten. ξ, η, ζ sind demnach die sog. Hauptschwingungsrichtungen oder optischen Symmetriearchsen. Für die im allgemeinen unbekannten Richtungskosinus, welche die positiven Richtungen der Achsen des einen Systems in bezug auf die positiven Richtungen der Achsen des anderen Systems festlegen, gelte das Schema I.

	x	y	z
ξ	α_1	α_2	α_3
η	β_1	β_2	β_3
ζ	γ_1	γ_2	γ_3

I

2. Die Ausbreitung ebener Wellen erfolgt in optisch zweiachsigen Kristallen nach einem ziemlich verwickelten Gesetz, dessen analytischer Ausdruck gewöhnlich auf die Form¹⁾

$$\frac{\nu_1^2}{q^2 - a^2} + \frac{\nu_2^2}{q^2 - b^2} + \frac{\nu_3^2}{q^2 - c^2} = 0 \quad \text{II}$$

gebracht wird. Darin bedeuten: ν_1, ν_2, ν_3 die Richtungskosinus der Wellennormalen in bezug auf ξ, η, ζ ; q die mit der Richtung im allgemeinen veränderliche Wellennormalengeschwindigkeit und a, b, c die bereits oben genannten Hauptlichtgeschwindigkeiten.

3. Die Messung jener Winkel, welche die Fortpflanzungsrichtung und Geschwindigkeit einer ebenen Welle eindeutig bestimmen, ist sehr umständlich, wenn die Welle schief zur Prismenkante einfällt. Mit einem gewöhnlichen einkreisigen Goniometer ist sie überhaupt nicht ausführbar; es braucht zum mindesten ein dreikreisiges Instrument. Aus diesem Grund hat man sich von jeher auf Wellen beschränkt, die parallel der brechenden Kante des Prismas einfallen und darum sowohl beim Gang durch das Prisma als auch nach dem Austritt aus demselben dieser Richtung parallel bleiben. Ausnahmsweise machte Viola²⁾ mit Hilfe des zweikreisigen Goldschmidtschen Theodolitgoniometers Beobachtungen bei „schiefer Inzidenz“, ist aber genötigt, jene Stellungen des Prismas und Fernrohrs aufzusuchen, für welche die mit geeignetem Mikrometer meßbare Vertikalablenkung ungeändert bleibt, wenn Fernrohr und Kollimator vertauscht werden, und muß zudem in der Umgebung dieser Stelle für

¹⁾ Für Wellen, die parallel einer optischen Symmetriearchse schwingen, versagt die Gleichung II, weil sich ein Term derselben auf die Unbestimmtheitsform 0:0 reduziert.

²⁾ Viola, Zeitschrift f. Krist. **32**, 66 und 545; do. **43**, 210 und 588. Viola, Zeitschr. f. Instrumentenk. **19** (1899), 276. Pockels, Lehrbuch der Kristalloptik. 148 ff. und Zeitschrift f. Krist. **43**, 587.

Den Fall „schiefer Inzidenz“ studierte übrigens teilweise schon A. Cornu in seiner Arbeit: Refraction à travers un prisme suivant une loi quelconque. Ann. Ecole normale **1**. 231 und **3**. 1. In Betracht kommt hauptsächlich **1**. 255 ff.

mehrere, etwa um je einen Grad verschiedene, am Vertikal-Kreis direkt ablesbare Werte von ω (= „Winkel, den die auf die Eintritts- und Austrittswellen senkrechte Ebene mit der Basis des Prismas einschließt“) die zugehörigen Brechungs-indizes bestimmen. Das Maximum oder Minimum derselben liefert einen Hauptbrechungsindex.

4. Die Gesamtheit aller zur z-Achse parallelen Wellen, welche gleichzeitig im Punkte O einfallen, umhüllt im Prisma nach der Zeiteinheit eine Kurve C, welche das Schnittgebilde der Wellennormalenfläche (Gl. II) mit der Querschnittsebene des Prismas ist. Bezeichnet etwa ψ den Winkel, welchen die Normale einer solchen Welle mit der positiven Richtung der x-Achse einschließt, so hat man für die Richtungskosinus dieser Wellennormalen im xyz-System die Werte

$$\nu_1 = \cos \psi \quad \nu_2 = \sin \psi \quad \nu_3 = 0,$$

falls ψ von +x über +y positiv gerechnet wird.

Zwischen ν_i und ψ bestehen wegen des Schemas I die Beziehungen

$$\nu_1 = \alpha_1 \cos \psi + \alpha_2 \sin \psi$$

$$\nu_2 = \beta_1 \cos \psi + \beta_2 \sin \psi$$

$$\nu_3 = \gamma_1 \cos \psi + \gamma_2 \sin \psi,$$

die in Gleichung II eingesetzt, nach einigen Umformungen, die Gleichung¹⁾ der Kurve C ergeben, nämlich:

$$q^4 - q^2 (L_{11} \cos^2 \psi + L_{22} \sin^2 \psi + 2 L_{12} \sin \psi \cos \psi) + \\ + (M_{11} \cos^2 \psi + M_{22} \sin^2 \psi + 2 M_{12} \sin \psi \cos \psi) = 0. \quad \text{III}$$

Darin ist

$$L_{ik} \equiv (b^2 + c^2) \alpha_i \alpha_k + (c^2 + a^2) \beta_i \beta_k + (a^2 + b^2) \gamma_i \gamma_k \quad \text{IV a}$$

$$M_{ik} \equiv b^2 c^2 \alpha_i \alpha_k + c^2 a^2 \beta_i \beta_k + a^2 b^2 \gamma_i \gamma_k.$$

Die Konstanten L_{ik} und M_{ik} lassen sich theoretisch mit Hilfe von sechs Wertpaaren (q_ν, ψ_ν), die sich auf Grund der Messungen am Spektrometer ohne Schwierigkeit ergeben, eindeutig als Wurzeln eines Systems von sechs linearen Gleichungen bestimmen. Wie die Rechnung praktisch auszuführen ist, wird sich später zeigen, hier soll nur ein einfaches Verfahren angegeben werden, um mittels des be-

¹⁾ Vergl. hierfür und für das Folgende die Arbeit von Th. v. Liebisch im Neuen Jahrbuch für Mineralogie und Geologie. 1886 I pag. 14 ff.

obachteten Einfalls- und Ablenkungswinkels (i_0 und Δ) q und ψ graphisch zu bestimmen. EOA (Fig. 1) sei ein Haupt-

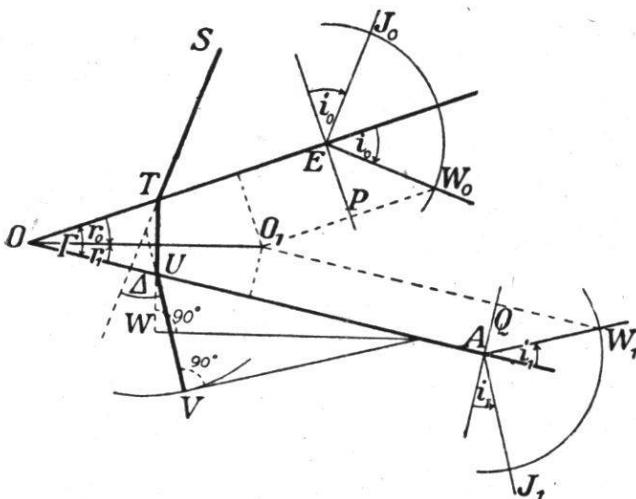


Fig. 1

schnitt des Prismas mit dem brechenden Winkel Γ , J_0E eine einfallende, AJ_1 eine austretende Wellennormale. EW_0 und AW_1 die zugehörigen Wellenspuren. Macht man $EJ_0 = EW_0 = AW_1 = AJ_1 = q_0$, so sind die Projektionen von EW_0 und AW auf die entsprechenden Einfallsloten EP und AQ bzw. gleich $q_0 \sin i_0$ und $q_0 \sin i_1$ und die gebrochene Wellenebene

ist der Richtung OO_1 parallel (also wegen ihrer zum Hauptschnitt senkrechten Lage vollkommen bestimmt), falls O_1 den Schnittpunkt der projizierenden Geraden W_0P und W_1Q bedeutet.

Der Beweis ergibt sich unmittelbar, da OO_1 den Winkel Γ derart in zwei Winkel¹⁾ r_0 und r_1 teilt, daß

$$r_0 + r_1 = \Gamma$$

$$\sin r_0 : \sin r_1 = \sin i_0 : \sin i_1.$$

Der fettgezeichnete Linienzug STUV ($TU \perp OO_1$) gibt die drei aufeinanderfolgenden Lagen einer bestimmten Wellennormale an.

Zur Bestimmung der Geschwindigkeit $q_1 (= UW)$ kann man sich der bekannten Huygensschen Konstruktion bedienen, wie sie in der Figur angedeutet ist ($UV = q_0$).

5. Die Hauptlichtgeschwindigkeiten a, b, c sowie die Richtungskosinus $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ ($i = 1, 2, 3$) berechnen sich aus den Gleichungen IVa und sechs weiteren, die wegen der Orthogonalität der Achsen zwischen den Richtungskosinus bestehen, nämlich:

¹⁾ Man achte auf die Pfeile, denn nur für solche gerichtete Winkelgrößen gelten die bekannten Relationen

$r_0 + r_1 = \Gamma$ und $i_0 + i_1 = \Gamma + \Delta$
allgemein.

$$\alpha_i^2 + \beta_i^2 + \gamma_i^2 = 1 \quad \alpha_i \alpha_k + \beta_i \beta_k + \gamma_i \gamma_k = 0. \quad IVb$$

Man kann nun mit Th. v. Liebisch in den Gleichungssystemen IVa und IVb die drei Gleichungen in $\alpha_1^2, \beta_1^2, \gamma_1^2$ für sich betrachten, ebenso jene in $\alpha_2^2, \beta_2^2, \gamma_2^2$ sowie endlich diejenigen in $\alpha_1 \alpha_2, \beta_1 \beta_2, \gamma_1 \gamma_2$ und findet durch einfache Rechnung folgende Ausdrücke:

$$\begin{aligned} \alpha_1^2 &= \frac{a^4 - L_{11} a^2 + M_{11}}{(a^2 - b^2)(a^2 - c^2)} & \alpha_2^2 &= \frac{a^4 - L_{22} a^2 + M_{22}}{(a^2 - b^2)(a^2 - c^2)} & \alpha_1 \alpha_2 &= \frac{-L_{12} a^2 + M_{12}}{(a^2 - b^2)(a^2 - c^2)} \\ \beta_1^2 &= \frac{b^4 - L_{11} b^2 + M_{11}}{(b^2 - c^2)(b^2 - a^2)} & \beta_2^2 &= \frac{b^4 - L_{22} b^2 + M_{22}}{(b^2 - c^2)(b^2 - a^2)} & \beta_1 \beta_2 &= \frac{-L_{12} b^2 + M_{12}}{(b^2 - c^2)(b^2 - a^2)} \\ \gamma_1^2 &= \frac{c^4 - L_{11} c^2 + M_{11}}{(c^2 - a^2)(c^2 - b^2)} & \gamma_2^2 &= \frac{c^4 - L_{22} c^2 + M_{22}}{(c^2 - a^2)(c^2 - b^2)} & \gamma_1 \gamma_2 &= \frac{-L_{12} c^2 + M_{12}}{(c^2 - a^2)(c^2 - b^2)}. \end{aligned} \quad V$$

Beachtet man, daß

$$\alpha_1^2 \alpha_2^2 = (\alpha_1 \alpha_2)^2,$$

so folgt aus den drei Gleichungen der ersten Zeile von V, wenn $a^2 = u$ gesetzt wird:

$$u^4 - (L_{11} + L_{22}) u^3 + (M_{11} + M_{22} + L_{11} L_{22} - L_{12}^2) u^2 - (L_{11} M_{22} + L_{22} M_{11} - 2 L_{12} M_{12}) u + (M_{11} M_{22} - M_{12}^2) = 0. \quad VI$$

Das gleiche Verfahren mit den Gleichungstripeln der zweiten und dritten Zeile von V liefert für b^2 und c^2 eine mit VI identische Gleichung, so daß sich also a^2, b^2, c^2 als Wurzeln dieser Gleichung vierten Grades ergeben, die aber im allgemeinen noch eine vierte, von diesen verschiedene Wurzel d^2 hat, deren Wert Th. v. Liebisch durch Koeffizientenzerlegung zu

$$d^2 = a^2 \alpha_3^2 + b^2 \beta_3^2 + c^2 \gamma_3^2$$

bestimmte. Es läßt sich unschwer zeigen, daß a^2 die größte und c^2 die kleinste Wurzel von VI ist, während die beiden mittleren (b^2 und d^2) in keiner festen, zum vornehmesten gegebenen Größenbeziehung zu einander stehen, indem b^2 ebensogut größer wie kleiner als d^2 sein kann. Die Lösung des Problems ist darum im allgemeinen zweideutig.

6. Da in den eben gefundenen Wurzeln der Gleichung VI von den neun Richtungskosinus des Schemas I nur α_3, β_3 und γ_3 auftreten, so müssen wegen der bekannten Beziehung

zwischen den Koeffizienten und Wurzeln einer algebraischen Gleichung auch die Koeffizienten der Gleichung VI neben a^2 , b^2 und c^2 nur noch von α_3 , β_3 und γ_3 , nicht aber von den sechs anderen Richtungskosinus abhängen. Der direkte Nachweis mit Hilfe der Werte für L_{ik} und M_{ik} auf Grund der Orthogonalitätsgleichungen bietet keine Schwierigkeit. Es genüge, ihn etwa für $M_{11} M_{22} - M_{12}^2$ durchzuführen. Durch Substitution der Gl. IVa, Ausführung der Operationen und einfache Kürzung kommt:

$$M_{11} M_{22} - M_{12}^2 \equiv \\ a^2 b^2 c^2 [a^2 (\beta_1 \gamma_2 - \beta_2 \gamma_1)^2 + b^2 (\gamma_1 \alpha_2 - \gamma_2 \alpha_1)^2 + c^2 (\alpha_1 \beta_2 - \alpha_2 \beta_1)^2].$$

Nun bestehen zwischen den neun Richtungskosinus bekanntlich die Beziehungen

$\beta_1 \gamma_2 - \beta_2 \gamma_1 \equiv \alpha_3$ $\gamma_1 \alpha_2 - \gamma_2 \alpha_1 \equiv \beta_3$ $\alpha_1 \beta_2 - \alpha_2 \beta_1 \equiv \gamma_3$,
die, oben eingesetzt, das gewünschte Resultat ergeben und zugleich den eben erwähnten Satz von Th. v. Liebisch bestätigen:

$$M_{11} M_{22} - M_{12}^2 \equiv a^2 b^2 c^2 (a^2 \alpha_3^2 + b^2 \beta_3^2 + c^2 \gamma_3^2).$$

Gleichung VI ist demnach durch die Orientierung der brechenden Kante des Prismas in bezug auf die optischen Symmetriearchsen des Kristalls bei gegebenen a^2 , b^2 und c^2 völlig bestimmt und deshalb von der weiteren Lage des Prismas ganz unabhängig. Darin zeigt sich ein wesentlicher Unterschied zwischen der Gleichung III und der Gleichung VI. Gleichung III ist der analytische Ausdruck für die Schnittkurve C der Wellennormalenfläche mit der durch α_3 , β_3 , γ_3 bestimmten Diametralebene und in ihrer Form durch das Bezugssystem bedingt. Für die verschiedenen Prismen mit gleichorientierter brechender Kante müssen sich ihre Koeffizienten ändern, trotzdem sie immer die gleiche Kurve darstellt, eben weil sich das Bezugssystem ändert. Dagegen bleibt Gl. VI für alle diese Prismen stets dieselbe. Sie wird deshalb nur durch solche Eigenschaften der Kurve C bestimmt, welche von ihrer speziellen Orientierung unabhängig sind. Diese Eigenschaften sind die Längen der extremen Radienvektoren.

7. Um dies zu zeigen, möge in Gl. III der doppelte Winkel eingeführt werden. Dadurch kommt nach einigen Umstellungen:

$$f(q, \psi) \equiv [(M_{11} - M_{22}) - (L_{11} - L_{22}) q^2] \cos 2\psi + 2(M_{12} - L_{12} q^2) \sin 2\psi + [2q^4 - (L_{11} + L_{22}) q^2 + (M_{11} + M_{22})] = 0 \quad \text{IIIa}$$

oder abkürzend:

$$f(q, \psi) \equiv P \cos 2\psi + 2Q \sin 2\psi + R = 0. \quad a)$$

Die Bedingung, daß q ein Extremum werde, ist bekanntlich das Verschwinden von

$$\frac{dq}{d\psi} = - \frac{\partial f}{\partial \psi} : \frac{\partial f}{\partial q},$$

also im allgemeinen das Verschwinden von $\frac{\partial f}{\partial \psi}$.

Man hat somit

$$-P \sin 2\psi + 2Q \cos 2\psi = 0. \quad b)$$

Wegen

$$\sin^2 2\psi + \cos^2 2\psi = 1 \quad c)$$

kann man ψ eliminieren, indem man etwa a) und b) nach $\sin 2\psi$ und $\cos 2\psi$ auflöst und die gefundenen Werte in c) einsetzt. Man erhält auf diese Weise

$$\frac{R^2 - P^2 - 4Q^2}{P^2 + 4Q^2} = 0.$$

Das Nullwerden des Nenners in diesem Ausdruck ist bei reellen Werten an die Bedingungen

$$P = 0 \text{ und } Q = 0$$

und wegen a) auch

$$R = 0$$

geknüpft, kann also, wenn überhaupt möglich, nur bei ganz spezieller Orientierung des Prismas eintreten. Im allgemeinen ist darum

$$R^2 - P^2 - 4Q^2 = 0$$

die gesuchte Maximums- resp. Minimumsbedingung und gibt nach Einsetzung der Werte aus IIIa, wenn noch

$$q^2 \equiv u$$

gesetzt wird,

$$R^2 - P^2 - 4Q^2 \equiv 4[u^4 - (L_{11} + L_{22}) u^3 + (M_{11} + M_{22} + L_{11} L_{22} - L_{12}^2) u^2 - (L_{11} M_{22} + L_{22} M_{11} - 2L_{12} M_{12}) u + (M_{11} M_{22} - M_{12}^2)] = 0$$

d. h. genau die Gleichung VI w. z. b. w.

8. Es ist für das folgende bedeutungsvoll, auch die Gleichung

$$P^2 + 4Q^2 = 0$$

näher zu untersuchen. Ersetzt man dieselbe durch das oben gefundene, ihr äquivalente Gleichungssystem

$$P = 0, \quad Q = 0, \quad R = 0,$$

so folgt durch Elimination von q^2 aus den beiden ersten Gleichungen

$$\frac{L_{11} - L_{22}}{M_{11} - M_{22}} = \frac{L_{12}}{M_{12}}$$

und hieraus nach Substitution der Werte aus IV a

$$a^4 b^2 (\beta_1 \gamma_2 - \beta_2 \gamma_1) (\beta_1 \gamma_1 + \beta_2 \gamma_2) - a^2 b^4 (\gamma_1 \alpha_2 - \gamma_2 \alpha_1) (\alpha_1 \gamma_1 + \alpha_2 \gamma_2) + b^4 c^2 (\gamma_1 \alpha_2 - \gamma_2 \alpha_1) (\gamma_1 \alpha_1 + \gamma_2 \alpha_2) - b^2 c^4 (\alpha_1 \beta_2 - \alpha_2 \beta_1) (\alpha_1 \beta_1 + \beta_2 \alpha_2) + c^4 a^2 (\alpha_1 \beta_2 - \alpha_2 \beta_1) (\alpha_1 \beta_1 + \alpha_2 \beta_2) - c^2 a^4 (\beta_1 \gamma_2 - \beta_2 \gamma_1) (\beta_1 \gamma_1 + \beta_2 \gamma_2) = 0,$$

wofür man wegen der bekannten Beziehungen

$$\beta_1 \gamma_1 + \beta_2 \gamma_2 \equiv -\beta_3 \gamma_3 \quad (\text{und zwei ähnlichen})$$

$$\beta_1 \gamma_2 - \beta_2 \gamma_1 \equiv \alpha_3 \quad (\text{und zwei ähnlichen})$$

die Gleichung

$$-\alpha_3 \beta_3 \gamma_3 [a^2 b^2 (a^2 - b^2) + b^2 c^2 (b^2 - c^2) + c^2 a^2 (c^2 - a^2)] \equiv \alpha_3 \beta_3 \gamma_3 (a^2 - b^2) (b^2 - c^2) (c^2 - a^2) = 0$$

erhält. Dieselbe kann jedoch nur bestehen, wenn

$$\alpha_3 \beta_3 \gamma_3 = 0$$

ist, d. h. wenn die Prismenkante mindestens auf einer optischen Symmetrieachse senkrecht steht.

Zur Untersuchung der dritten Gleichung

$$R = 0$$

empfiehlt es sich, das soeben gefundene Ergebnis zu verwerten und zur Vereinfachung der Formeln die in der xy-Ebene gelegene Symmetrieachse etwa mit der x-Achse zusammenfallen zu lassen. Natürlich kann jede der drei Achsen ξ, η, ζ in Betracht kommen. Es genüge jedoch, die Rechnung für

$$x \parallel \xi$$

durchzuführen. Dann spezialisiert sich das Schema I zu

-	x	y	z
ξ	1	0	0
η	0	$\cos \vartheta$	$\sin \vartheta$
ζ	0	$-\sin \vartheta$	$\cos \vartheta$

wo ϑ den Winkel $\overrightarrow{y\eta} = \overrightarrow{z\zeta}$ bedeutet, der von $+x$ aus gesehen im Gegenzeigersinn positiv gerechnet ist. Durch diese Koordinatentransformation wird

$$Q \equiv 0,$$

weil

$$L_{12} = 0 \text{ und } M_{12} = 0,$$

und an Stelle von

$$P = 0 \text{ und } R = 0$$

erhält man nach einfacher Rechnung die Gleichungen

$$\begin{aligned}[2q^2 - (a^2 + b^2)](q^2 - c^2) &= -(c^2 - b^2)(q^2 - a^2) \sin^2 \vartheta \\ (a^2 - b^2)(q^2 - c^2) &= (c^2 - b^2)(q^2 - a^2) \sin^2 \vartheta,\end{aligned}$$

deren gleichzeitiges Bestehen nur möglich ist, wenn entweder

$$q^2 = c^2 \text{ und } \sin^2 \vartheta = 0$$

oder aber

$$q^2 = b^2 \text{ und } \sin^2 \vartheta = 1$$

was in beiden Fällen besagt, daß die z -Achse nicht bloß auf einer optischen Symmetriearchse senkrecht steht sondern selber eine solche ist. Die Kurve C zerfällt deshalb in einen Kreis und ein Oval und hat im angenommenen Fall die Gleichung

$$\begin{aligned}(q^2 - c^2)[q^2 - (b^2 \cos^2 \psi + a^2 \sin^2 \psi)] &= 0 \\ \text{bzw. } (q^2 - b^2)[q^2 - (c^2 \cos^2 \psi + a^2 \sin^2 \psi)] &= 0.\end{aligned}$$

Dem Kreis eignet kein extremer Radiusvektor — eine geometrische Eigenschaft, die ihren analytischen Ausdruck darin findet, daß $dq : d\psi$ in der Unbestimmtheitsform $0 : 0$ auftritt, sobald die Kurve C in ein Oval und einen Kreis zerfällt und q gleich dem Radius des Kreises gesetzt wird. Denn da unter der Voraussetzung

$$P = 0, Q = 0, R = 0$$

auch die Gleichung

$$R^2 - P^2 - 4Q^2 = 0$$

identisch erfüllt ist, so gilt

$$\frac{dq}{d\psi} = \frac{R^2 - P^2 - 4Q^2}{P^2 + 4Q^2} = 0.$$

Abschließend kann man sagen, daß die Gleichung

$$P^2 + 4Q^2 = 0$$

dann und nur dann besteht, wenn die Prismenkante eine optische Symmetriearchse ist, und q die Geschwindigkeit jener Welle bedeutet, welche parallel zur Prismenkante schwingt. — Im Folgenden möge diese spezielle Orientierung, welche vorläufig kein weiteres Interesse bietet, ausgeschlossen sein.

9. In Gl. IIIa möge jetzt q ein bestimmter Wert beigeglegt werden: welches sind die zugehörigen Werte von ψ ? Um dieselben zu finden, kann man das Glied mit $\cos 2\psi$ auf die eine Seite, die beiden anderen Glieder auf die andere Seite bringen, sodann quadrieren und hernach $\cos^2 2\psi$ durch $1 - \sin^2 2\psi$ ersetzen. Man erhält so

$$\sin 2\psi = - \frac{2QR \pm P\sqrt{P^2 - R^2 + 4Q^2}}{P^2 + 4Q^2}.$$

In ähnlicher Weise bekommt man¹⁾

$$\cos 2\psi = - \frac{PR \mp 2Q\sqrt{P^2 - R^2 + 4Q^2}}{P^2 + 4Q^2}.$$

Setzt man diese Werte in IIIa ein, so ergibt sich, daß in $\sin 2\psi$ und $\cos 2\psi$ die Radikale mit entgegengesetztem Vorzeichen zu nehmen sind, so wie es in den beiden Formeln geschehen ist, wo die beiden obern und die beiden untern Zeichen jedesmal zusammengehören.

Um reelle Lösungen für ψ zu erhalten, muß 1. der Radikand positiv und 2. der Zähler in beiden Brüchen, absolut genommen, kleiner wie der Nenner sein. Was die erste Bedingung anbelangt, so beachte man, daß nach dem Schluß von § 7 die Beziehung besteht

$$P^2 - R^2 + 4Q^2 \equiv -4(q^2 - a^2)(q^2 - b_1^2)(q^2 - b_2^2)(q^2 - c^2),$$

¹⁾ Ist $P = Q = R = 0$, so werden $\sin 2\psi$ und $\cos 2\psi$ unbestimmt, in Übereinstimmung mit dem obigen Ergebnis.

worin b_1^2 und b_2^2 die beiden mittleren Wurzeln bedeuten, so zwar, daß

$$a^2 > b_1^2 > b_2^2 > c^2.$$

Demgemäß kann q^2 niemals zwischen b_1^2 und b_2^2 liegen, sondern muß ausschließlich dem ersten oder dem dritten Intervall angehören, da einzig bei dieser Annahme stets eine ungerade Anzahl jener vier Faktoren negativ, der ganze Ausdruck also positiv ist.

Sind demnach die Radikale und damit die Zähler von $\sin 2\psi$ und $\cos 2\psi$ immer reell, so bietet die zweite Bedingung keine Schwierigkeit mehr, wenn man beachtet, daß die Beziehung

$$\sin^2 2\psi + \cos^2 2\psi = 1$$

identisch erfüllt wird.

Weil die Kurve C wegen Gl. III zentrosymmetrisch ist, kann man sich auf das Intervall

$$0 \leqq \psi \leqq \pi$$

beschränken und erhält somit eindeutig bestimmte Werte von ψ und zwar für jeden q-Wert zwei verschiedene Werte von ψ ($0 \leqq \psi \leqq \pi$), ausgenommen wenn

$$P^2 - R^2 + 4 Q^2 = 0$$

d. h. wenn q^2 eine der vier Wurzeln der Gleichung VI ist, wodurch die beiden ψ -Werte gleich werden. Daraus folgt, daß die Kurve C im allgemeinen vier gleiche Radienvektoren hat, die zu je zweien auf einem Durchmesser liegen. Dagegen kommen die Radienvektoren mit den Längen a, b, c und d, welche an das Verschwinden des Radikanden $P^2 - R^2 + 4 Q^2$ gebunden sind, nur je zweimal vor und bestimmen zusammen vier ausgezeichnete Durchmesser der Kurve C. Drei dieser Durchmesser (nämlich a, b und c) müssen, wie eine einfache Überlegung an Hand einer Skizze der Wellennormalenfläche zeigt, die Schnittlinien der optischen Symmetrieebenen mit dem Hauptschnitt des Prismas sein, während sich die Bedeutung der vierten Richtung mit Hilfe des Indexellipsoides (Elastizitätsellipsoides) ergibt. Nach Fresnel sind nämlich für jede Fortpflanzungsrichtung die zugehörigen Schwingungsrichtungen und Wellennormalengeschwindigkeiten bestimmt

durch die Richtung und reziproke Länge der Halbachsen jener Ellipse, in welcher das Indexellipsoid von der zur Fortpflanzungsrichtung senkrechten Diametralebene geschnitten wird. Da sich nun die Gleichung dieses Ellipsoids, bezogen auf die Hauptschwingungsrichtungen als Achsen, in der Form schreibt

$$a^2 \nu_1^2 + b^2 \nu_2^2 + c^2 \nu_3^2 = \frac{1}{\rho^2},$$

so ergibt sich aus dem Schema I unmittelbar, daß

$$d^2 \equiv a^2 \alpha_3^2 + b^2 \beta_3^2 + c^2 \gamma_3^2$$

das Quadrat der reziproken Länge jenes Radiusvektors des Indexellipsoides ist, der auf dem Prismenhauptschnitt senkrecht steht, oder anders ausgedrückt, daß d^2 das Quadrat der Fortpflanzungsgeschwindigkeit jener Welle ist, die parallel zur brechenden Kante des Prismas schwingt. Jener vierte Durchmesser gibt darum die Richtung an, in der sich diese durch ihre Schwingungsrichtung ausgezeichnete Welle fortpflanzt.

10. An Hand einer Skizze der Wellennormalenfläche¹⁾ erkennt man leicht, daß a dem äußeren, c aber dem inneren Zweige der Kurve angehört, während b bald auf dem inneren, bald auf dem äußeren Zweige liegen kann, und zwar ist b Minimum des äußeren und d Maximum des inneren Zweiges, wenn der Prismenquerschnitt durch jenen Winkel der optischen Achsen geht, der von der ξ -Achse halbiert wird, dagegen ist b Maximum des inneren und d Minimum des äußeren Zweiges, wenn der Prismenquerschnitt durch jenen Winkel der optischen Achsen geht, der von der ζ -Achse halbiert wird. Im ersten Fall ist $b > d$, im zweiten $b < d$ und es gibt für den betreffenden Schnitt keinen Kurvenradius, dessen Länge dem Intervall (b, d) angehört (vergl. die Diskussion in § 9).

11. Ohne auf Einzelheiten einzugehen, sei bei dieser Gelegenheit doch darauf hingewiesen, daß die Entscheidung

¹⁾ Man vergl. für das folgende: Chr. Soret, Über die Anwendung der Totalreflexion zur Messung der Brechungsexponenten zweiachsiger Kristalle. Zeitsch. für Krist. und Mineral. **15**. 45. In Betracht kommt namentlich S. 47 f.

zwischen b und d getroffen werden könnte, wenn die Lage der optischen Achsen wenigstens insoweit bekannt wäre, daß man wüßte, durch welchen Winkel derselben der Prismenquerschnitt verläuft. Da aber die Lagebestimmung der optischen Achsen den Wert von b meistens voraussetzt oder selber liefert, so wird diese Methode in der Mehrzahl der Fälle praktisch wertlos. — Die Entscheidung zwischen b und d könnte natürlich auch dann getroffen werden, wenn, um andere, dem Mineralogen weniger naheliegende Beziehungen zu übergehen, etwa der scheinbare Winkel der optischen Achsen bekannt wäre oder wenn die Kurve C an einem zweiten, anders orientierten Prisma¹⁾ bestimmt würde, wodurch sich im allgemeinen eine von d verschiedene Wurzel d' ergäbe.

12. Damit a, b, c und d wirklich extreme Radienvektoren der Kurve C seien, müssen neben der Gleichung (vergl. § 7)

$$\frac{\partial f}{\partial \psi} = 0$$

noch die beiden Bedingungen

$$\frac{\partial f}{\partial q} \neq 0, \infty \text{ und } \frac{d^2 q}{d \psi^2} = - \frac{\partial^2 f}{\partial \psi^2} : \frac{\partial f}{\partial q} \neq 0$$

erfüllt sein. Die partielle Differentiation von $f(q, \psi)$ (Gl. IIIa) nach q ergibt den Ausdruck

$$\frac{\partial f}{\partial q} \equiv 2q \left\{ 4q^2 - [(L_{11} + L_{22}) + (L_{11} - L_{22}) \cos 2\psi + 2L_{12} \sin 2\psi] \right\},$$

der nach Ersetzung von $\cos 2\psi$ und $\sin 2\psi$ durch die § 9 gefundenen Werte und mit Rücksicht auf den Umstand, daß wegen

$$q^2 = a^2, b^2, c^2, d^2$$

auch (§ 7)

$$P^2 + 4Q^2 \equiv R^2$$

gesetzt werden kann, schließlich die Form annimmt:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial q} \equiv \frac{2}{R} & \left\{ 8q^7 - 6(L_{11} + L_{22})q^5 + 4(L_{11}L_{22} + M_{11} + M_{22} - L_{12}^2)q^3 \right. \\ & \left. - 2(L_{11}M_{22} + L_{22}M_{11} - 2L_{12}M_{12})q \right\}. \end{aligned}$$

¹⁾ Das analoge Problem im Fall der Totalreflexion an einer beliebig orientierten Kristallfläche wurde von Ch. Soret und L. Perrot behandelt. Vergl. Pockels Lehrbuch p. 130.

Der Klammerausdruck ist die erste Ableitung der Gleichung VI (falls darin u wieder durch q^2 ersetzt wird) und darum sicher von Null verschieden, wofern die Gleichung VI keine Doppelwurzel hat. Eine solche wäre aber einzig dadurch möglich, daß d mit einer Hauptlichtgeschwindigkeit zusammenfallen — also, um von einem anderen gleich zu behandelnden Fall vorläufig abzusehen, die Prismenkante eine optische Symmetriearchse würde, was hier ausgeschlossen ist.

Wegen der Annahme, daß die Prismenkante nicht optische Symmetriearchse sei, ist auch R von Null verschieden, und da zudem der Klammerausdruck selber für keinen der in Betracht kommenden Werte unendlich groß werden kann, so bleibt $\partial f : \partial q$ notwendigerweise endlich.

Damit endlich noch

$$d^2q : d\psi^2 \neq 0,$$

ist wegen des letzten Ergebnisses, wornach $\partial f : \partial q$ weder unendlich klein noch unendlich groß werden kann, notwendig und hinreichend, daß

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \psi^2} \equiv -4(P \cos 2\psi + 2Q \sin 2\psi) \neq 0$$

oder daß

$$P \cos 2\psi + 2Q \sin 2\psi \neq 0$$

oder, wenn die trigonometrischen Funktionen wiederum durch ihre Ausdrücke in P , Q und R ersetzt werden, daß

$$\frac{P^2 + 4Q^2}{R} \equiv R \neq 0,$$

eine Bedingung, die immer erfüllt ist, wenn

$$P^2 + 4Q^2 - R^2 = 0,$$

ohne daß gleichzeitig

$$P = 0, Q = 0, R = 0,$$

was hier ja vorausgesetzt ist.

13. Nun möge noch der soeben ausgeschlossene Fall erledigt werden, wo d gleich einer Hauptlichtgeschwindigkeit wird.

Neben dem bereits in § 8 erwähnten Fall, wo die Prismenkante optische Symmetriearchse ist, kann sich das Zusammenfallen von zwei Wurzeln der Gl. VI bei zweiachsigen Kristallen

auch dann noch ereignen, wenn, wie in anderem Zusammenhang bewiesen werden soll, eine der beiden optischen Achsen in die Querschnittsebene des Prismas zu liegen kommt. Eine einfache Überlegung zeigt, daß dann die Kurve C zwei Doppelpunkte hat, für welche die Ableitung von q nach ψ die unbestimmte Form

$$dq : d\psi = 0 : 0$$

annehmen muß. Merkwürdigerweise wird aber der Radiusvektor dieses Doppelpunktes ein Extremum in vollkommener Übereinstimmung mit den obigen Erwägungen, wornach b und c die maximalen und minimalen Radienvektoren des äußeren und inneren Zweiges der Kurve C sind. Nähern sich nämlich die beiden Zweige, so vermindert sich die Differenz von b und d, bis schließlich im Falle der Berührung b und d gleich werden, so daß an der Berührungsstelle (oder besser Durchdringungsstelle) b maximaler Radiusvektor des inneren und minimaler des äußeren Kurvenzweiges wird.

Um dieses der Anschauung entnommene Resultat auch analytisch herzuleiten, sollen zuerst die speziellen Werte der Richtungskosinus $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ ermittelt werden. Hierbei empfiehlt es sich, das $\xi \eta \zeta$ -System, dessen Achsen zunächst mit x, y und z zusammenfallen mögen, so um die $\eta = y$ -Achse zu drehen, daß etwa die zwischen $+\xi$ und $+\zeta$ gelegene optische Achse A_1 mit $+x$ zusammenfalle. Hernach wird man, um eine möglichst allgemeine Lage zu erhalten, das bereits gedrehte $\xi \eta \zeta$ -System noch so weit um die x-Achse drehen, bis $+\eta$ zwischen $+y$ und $+z$ zu liegen kommt und mit $+y$ einen Winkel φ bildet. Bezeichnet Ω den in der ursprünglichen Lage von $+z$ und A_1 eingeschlossenen Winkel, so nimmt das Schema I die nachstehende spezielle Form an.

	x	y	z
ξ	$\sin \Omega$	$\sin \varphi \cos \Omega$	$-\cos \varphi \cos \Omega$
η	0	$\cos \varphi$	$\sin \varphi$
ζ	$\cos \Omega$	$-\sin \varphi \sin \Omega$	$\cos \varphi \sin \Omega$

Mit Rücksicht auf die bekannten Beziehungen

$$\sin \Omega = \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2 - c^2}} \quad \cos \Omega = \sqrt{\frac{b^2 - c^2}{a^2 - c^2}}$$

wird

$$L_{11} = 2b^2$$

$$L_{22} = a^2 + c^2$$

$$L_{12} = -\sin \varphi \sqrt{(a^2 - b^2)(b^2 - c^2)}$$

$$M_{11} = b^4$$

$$M_{22} = a^2 c^2 + (a^2 - b^2)(b^2 - c^2) \sin^2 \varphi$$

$$M_{12} = -b^2 \sin \varphi \sqrt{(a^2 - b^2)(b^2 - c^2)}.$$

Die Substitution dieser Werte in Gleichung III¹⁾ gibt für $\psi = 0$ ohne weiteres

$$q^4 - 2b^2 q^2 + b^4 \equiv (q^2 - b^2)^2 = 0,$$

dagegen für jeden anderen Wert von ψ zwei Werte q'^2 und q''^2 derart, daß

$$q'^2 < b^2 < q''^2.$$

Der Beweis ist äußerst einfach. Ist nämlich

$$f(x^2) \equiv (x^2 - q'^2)(x^2 - q''^2) = 0$$

eine biquadratische Gleichung, so wird, wie bekannt, die Funktion $f(x^2)$ für jeden reellen x^2 -Wert, der zwischen den beiden reellen und positiven Wurzeln $x'^2 = q'^2$ und $x''^2 = q''^2$ liegt, negativ, und umgekehrt muß jeder positive x^2 -Wert, für den $f(x^2)$ negativ wird, zwischen den beiden reellen Wurzeln q'^2 und q''^2 liegen. Um also zu zeigen, daß die Doppelungleichung

$$q'^2 < b^2 < q''^2$$

für jeden ψ -Wert in der Umgebung von $\psi = 0, \pi$ erfüllt ist, genügt es, etwa in Gl. IIIa q^2 durch b^2 zu ersetzen und den vereinfachten Ausdruck auf sein Vorzeichen zu prüfen. Eine einfache Rechnung gibt

$$f(q^2 = b^2, \psi) \equiv -(a^2 - b^2)(b^2 - c^2) \cos^2 \varphi (1 - \cos^2 \psi).$$

Da die rechte Seite im allgemeinen negativ ist und bei festgegebenem φ ($\varphi \neq \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$) nur für $\psi = n\pi$ verschwindet, so

¹⁾ Die Substitution dieser nämlichen Werte in Gleichung IIIa usw. zeigt, daß für $\psi = 0$ tatsächlich $dq : d\psi = 0 : 0$ wird.

besagt sie also, daß in der Umgebung von $\psi=0, \pi$ der Radiusvektor des inneren Kurvenzweiges kleiner, der des äußeren größer ist wie b.

Erwähnenswert ist noch, daß unter diesen Voraussetzungen a^2, b^2, b^2 und c^2 die vier Wurzeln der Gleichung VI sind, so daß ihre Lösungen ganz allgemein und ausnahmslos die Quadrate der maximalen und minimalen Radienvektoren der Kurve C ergeben. Sind zwei Wurzeln einander gleich, so entsprechen sie entweder dem Radius eines Kreises, zu dem sich der eine Kurvenzweig vereinfacht (uneigentliches Extremum; die brechende Kante ist eine optische Symmetriechse) oder aber den Doppelpunkten, in welchen sich die beiden Kurvenzweige kreuzen (die brechende Kante steht auf einer optischen Achse [=Binormalen] senkrecht).

14. Es war ausdrückliche Voraussetzung der bisherigen Entwicklungen, daß die optische Orientierung des Prismas, d. h. die Lage des $\xi\eta\zeta$ -Systems in bezug auf das x y z-System unbekannt sei. Die zu lösende Doppelaufgabe bestand demnach einerseits in der Ermittlung der drei Hauptlichtgeschwindigkeiten und anderseits in der Lagebestimmung der optischen Symmetriechsen. Diese letztere, wenn überhaupt möglich, hat aber nur dann einen Sinn, wenn es gelingt, die Orientierung der Hauptschwingungsrichtungen auch kristallographisch festzulegen. Dazu ist vor allem die Kenntnis der kristallographischen Orientierung des Prismas erforderlich. Diese vorausgesetzt, wird sich nun ein wesentlicher Unterschied zwischen den drei Systemen der zweiachsigen Kristalle herausstellen.

I. Rhombische Kristalle.

15. Die kristallographischen Achsenebenen sind optische Symmetrieebenen. Bei bekannter kristallographischer Orientierung des Prismas ist es möglich, ihre Schnittgeraden mit dem Prismenhauptschnitt zu berechnen und damit die Richtungen festzulegen, längs derer eine Lichtgeschwindigkeit a bzw. b oder c ist. Da die Fortpflanzungsrichtung der d-Welle hiervon im allgemeinen verschieden ist — der Beweis soll später (§ 27) geliefert werden —, so ist es möglich, b und d

zu unterscheiden und damit die Hauptlichtgeschwindigkeiten mit Hilfe eines beliebigen Prismas eindeutig zu bestimmen. Wegen der unvermeidlichen Messungsfehler wird die Übereinstimmung zwischen Rechnung und Beobachtung nicht vollkommen sein. Man erhält darum drei Bedingungsgleichungen als Äquivalent der drei überzähligen Beobachtungsreihen.

16. M. Born¹⁾ kam vor vielen Jahren zu einem ähnlichen Resultat, indem er, die Kenntnis der Richtungskosinus des Schemas I voraussetzend, die Gleichung III nach b^2c^2 , c^2a^2 , a^2b^2 , a^2 , b^2 und c^2 ordnet und mit sechs Wertpaaren (q_i, ψ_i) :

$$\begin{aligned} b^2c^2 &= A_1 & c^2a^2 &= B_1 & a^2b^2 &= C_1 \\ a^2 &= A_2 & b^2 &= B_2 & c^2 &= C_2 \end{aligned}$$

berechnet. Wegen der überschüssigen Beobachtungen ergeben sich die Bedingungsgleichungen

$$A_2^2 = \frac{B_1 C_1}{A_1} \quad B_2^2 = \frac{C_1 A_1}{B_1} \quad C_2^2 = \frac{A_1 B_1}{C_1}.$$

Nicht unerwähnt bleibe, daß die Lage der optischen Symmetriearchsen nicht als völlig bekannt vorausgesetzt zu werden braucht, sondern daß es genügt, zu wissen, daß die betreffenden Richtungen überhaupt Symmetriearchsen sind. Welche derselben die ξ - bzw. η - und ζ -Achse sei, ergibt sich dann hinterher durch einfache Überlegungen.

17. Die einzige Ausnahme dieser Regel tritt ein, wenn der Prismenhauptschnitt durch eine und nur eine optische Symmetriearchse geht, so daß zwei jener Ebenenspuren zusammenfallen. Ist diese Symmetriearchse die ξ - oder ζ -Achse, so ist freilich die eindeutige Bestimmung der Hauptlichtgeschwindigkeiten (und, wie sich später § 23 Anm. zeigen wird, auch der optischen Orientierung) noch möglich, denn mit der Richtung dieser Symmetriearchse fallen die Radienvektoren b und c bzw. a und b zusammen, während der Radiusvektor d in anderer Richtung (vergl. § 27) liegt (wegen der Voraussetzung, daß der Prismenhauptschnitt nur eine

¹⁾ M. Born, N. Jahrb. für Miner. B.-Bd. 5 (1877), 40 ff.

optische Symmetriearchse enthalte). b ist folglich durch die bekannte Richtung des zugeordneten Radiusvektors der Kurve C ausgezeichnet und d gegenüber kenntlich gemacht. Wird dagegen die im Prismenhauptschnitt gelegene optische Symmetriearchse zur η -Achse, so fallen mit dieser bekannten Richtung die a und c zugeordneten Radienvektoren zusammen, während die zu b und d gehörigen Radienvektoren der Kurve C hiermit einen rechten Winkel bilden, also die gleiche Richtung haben und folglich nicht mehr unterschieden werden können.

18. Eine eindeutige Lösung kann indessen in anderer Weise erzielt werden. Denn wegen der bekannten kristallographischen Orientierung des Prismas sind nur die in Fig. 2a und Fig. 2b veranschaulichten Anordnungen möglich. Das Schema I geht dabei in das folgende über.

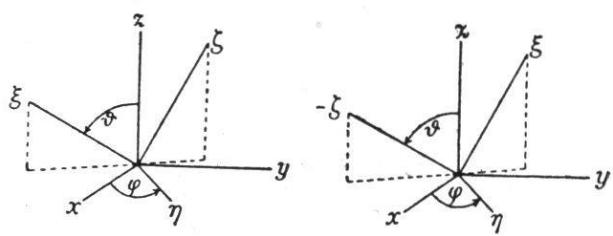


Fig. 2a

Fig. 2b

Fig. 2a	x	y	z
ξ	$\sin \varphi \sin \vartheta$	$-\cos \varphi \sin \vartheta$	$\cos \vartheta$
η	$\cos \varphi$	$\sin \varphi$	0
ζ	$-\sin \varphi \cos \vartheta$	$\cos \varphi \cos \vartheta$	$\sin \vartheta$

Fig. 2b	x	y	z
ξ	$-\sin \varphi \cos \vartheta$	$\cos \varphi \cos \vartheta$	$\sin \vartheta$
η	$\cos \varphi$	$\sin \varphi$	0
ζ	$-\sin \varphi \sin \vartheta$	$+\cos \varphi \sin \vartheta$	$-\cos \vartheta$

Auf Grund dieses Schemas, worin φ und ϑ bekannt sind, lässt sich, da bezüglich der Werte von a^2 und c^2 jeder Zweifel ausgeschlossen ist, nicht nur b^2 von d^2 unterscheiden, sondern auch ermitteln, ob der eine oder der andere der beiden Fälle vorliege. Es ist nämlich im Falle der Fig. 2a

$$d^2 = a^2 \cos^2 \vartheta + c^2 \sin^2 \vartheta$$

und im Falle der Fig. 2b

$$d^2 = a^2 \sin^2 \vartheta + c^2 \cos^2 \vartheta.$$

Einer dieser Werte von d^2 , die sich zum vornehmerein berechnen lassen, muß mit einer der mittleren Wurzeln von Gleichung VI übereinstimmen. Dadurch fällt die Zweideutigkeit bezüglich b^2 sowohl als auch der Orientierung dahin. Einzig für $\vartheta = 45^\circ$ oder 135° stellt sich eine Zweideutigkeit ein, indem es unmöglich wird zu entscheiden, ob es sich um den in Fig. 2a oder in Fig. 2b dargestellten Fall handelt, ohne daß aber dabei die Entscheidung zwischen b^2 und d^2 selber unmöglich würde.

19. Es ist übrigens interessant, daß wenn η in den Prismenquerschnitt fällt, die von M. Born angegebene Methode versagt, denn nach Fig. 2a¹⁾ und mit Rücksicht auf die zugehörige Form des Schemas I geht Gleichung III über in:

$$\begin{aligned} & \sin^2(\varphi - \psi_i) \sin^2 \vartheta \cdot b^2 c^2 + \cos^2(\varphi - \psi_i) \cdot c^2 a^2 \\ & + \sin^2(\varphi - \psi_i) \cos^2 \vartheta \cdot a^2 b^2 - q_i^2 [\cos^2(\varphi - \psi_i) \\ & + \sin^2(\varphi - \psi_i) \cos^2 \vartheta] a^2 - q_i^2 \sin^2(\varphi - \psi_i) \cdot b^2 \\ & - q_i^2 [\sin^2(\varphi - \psi_i) \sin^2 \vartheta + \cos^2(\varphi - \psi_i)] c^2 + q_i^4 = 0 \end{aligned}$$

Man beachtet nun leicht, daß das Gleichungssystem, welches sich aus sechs zusammengehörigen Wertpaaren q_i, ψ_i ($i = 1, 2 \dots 6$) ergibt, eine identisch verschwindende Determinante hat (weil nach Abspaltung von $\sin^2 \vartheta$ resp. $\cos^2 \vartheta$ die erste Kolonne gleich der dritten wird usw.), also nicht lösbar²⁾ ist.

II. Monokline Kristalle.

20. Dem Gesagten zufolge ist jede Zweideutigkeit behoben, falls die Orthodiagonale der η -Achse parallel ist, ohne im Prismenhauptschnitt zu liegen.³⁾

III. Trikline Kristalle.

21. Die Entscheidung zwischen b und d kann nicht getroffen werden.

¹⁾ Entsprechendes gilt für Fig. 2b.

²⁾ Würde eine andere Hauptschwingungsrichtung in die Querschnittsebene des Prismas fallen, so erhielte man die entsprechenden Formeln durch zyklische Vertauschung von a^2 , b^2 und c^2 . Daraus folgt, daß auch in diesen Fällen die Methode Borns versagen muß.

³⁾ Die vorhergehenden Überlegungen können wegen Unkenntnis des Winkels ϑ nicht auf das monokline System übertragen werden.

22. Es ist bekannt, daß die Bestimmung der Brechungsindizes eines Kristalls mit Hilfe der Totalreflexion an einer einzigen Fläche zu Ergebnissen führt, die den bisher gefundenen¹⁾ ähnlich sind, nur handelt es sich dabei um eine Kurve S, welche man als Grenzlinie der totalen Reflexion bezeichnen kann. Sie besteht im allgemeinen aus zwei getrennten Teilen, deren Maxima und Minima durch die Radienvektoren von der Länge a, b, c und d_1 bestimmt sind. Wiederum ist die Lösung zweideutig. Da aber d_1^2 das Quadrat der reziproken Länge jenes Radiusvektors des Fresnelschen Ellipsoides ist, der auf der Grenzebene senkrecht steht, so muß die d_1 -Welle parallel der Einfallsebene schwingen und kann mit Hilfe eines Nikolschen Prismas von jeder anderen Welle unterschieden — das Problem also eindeutig gelöst werden.

Es läge nun der Gedanke nahe, auch beim Prisma die ausgezeichnete Schwingungsrichtung der d-Welle heranzuziehen, um zwischen b und d zu entscheiden. Allein die Tatsache, daß der Schwingungszustand des ausgetretenen Lichtes von demjenigen im Kristall im allgemeinen verschieden ist, vor allem aber der Umstand, daß die Orientierung des Prismas die Beobachtung der d-Welle ohne besondere Hilfsmittel in den seltensten Fällen gestatten wird, machen die angedeutete Methode, so naturgemäß sie auch erscheinen mag, vollständig illusorisch.

23. Wäre nun in einem gegebenen Falle die eindeutige Bestimmung der Hauptlichtgeschwindigkeiten aus irgendeinem Grunde möglich, so gestatten die beiden ersten Gruppen (Kolonnen) der Gleichung V die eindeutige Ermittlung der absoluten Werte von $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ ($i = 1, 2$). Damit sind natürlich auch die absoluten Werte von $\alpha_3, \beta_3, \gamma_3$ eindeutig bestimmt. Die Vorzeichen von $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ kann man beliebig wählen, weil dadurch nur der positive Richtungssinn der Achsen

¹⁾ Auf die soeben erläuterte Ausnahmestellung der rhombischen und z. T. monoklinen Kristalle, die natürlich auch im Falle der Totalreflexion bestehen bleibt, scheint bislang niemand aufmerksam gemacht zu haben.

und die Rechts- oder Linkshändigkeit des Systems festgelegt wird. Wegen der dritten Gruppe der Gleichung V findet man hierdurch ganz bestimmte Vorzeichen für $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$, wogegen aus

$$\begin{aligned}\alpha_2 \alpha_3 + \beta_2 \beta_3 + \gamma_2 \gamma_3 &= 0 \\ \alpha_1 \alpha_3 + \beta_1 \beta_3 + \gamma_1 \gamma_3 &= 0\end{aligned}$$

nur die Verhältnisse $\alpha_3 : \beta_3 : \gamma_3$, d. h. die relativen Vorzeichen von $\alpha_3, \beta_3, \gamma_3$ erhalten werden, so daß sowohl $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \dots$ als auch $(\alpha_1, \alpha_2, -\alpha_3) \dots$ Lösungen der Gl. IVb und V sind. Die Rechnung ergibt daher für die Hauptschwingungsrichtungen zwei, den beobachteten Erscheinungen genügende Orientierungen, die zur brechenden Kante des Prismas symmetrisch liegen. Das beweist — und die Diskussion der Gl. IVb und V bestätigt es —, daß zur eindeutigen Bestimmung der Orientierung die Lage einer Hauptschwingungsrichtung bekannt sein muß, die aber nicht im Hauptschnitt des Prismas gelegen sein darf,¹⁾ weil sonst die Wahl zwischen den beiden symmetrischen Systemen nicht möglich ist, da die gegebene Richtung wegen ihrer symmetrischen Lage zur brechenden Kante beiden Systemen angehört. Ebenfalls unbestimmt wird die Orientierung, wenn eine Hauptschwingungsrichtung mit z einen Winkel von 45° bildet und eine andere im Prismenhauptschnitt liegt (vergl. den Schluß von § 18 und die vorstehende Anmerkung).

24. Zum gleichen Resultat führt das von Cornu²⁾ und Viola³⁾ für das Reflexionsproblem abgeleitete, aber auch im vorliegenden Fall gültige Gleichungssystem:

¹⁾ Wenn oben, § 17, gleichwohl gesagt wurde, die Orientierung lasse sich eindeutig bestimmen, trotzdem die bekannte Hauptschwingungsrichtung in die Querschnittsebene des Prismas fällt, so liegt der Grund darin, daß von den beiden möglichen Systemen, die zur z-Achse symmetrisch sind, nur das eine mit dem krystallographischen Achsenkreuz zusammenfallen kann, falls nicht zufällig die beiden, nicht im Hauptschnitt des Prismas gelegenen optischen Symmetriearchsen zur z-Achse selber symmetrisch liegen.

²⁾ Cornu, Bulletin de la soc. fr. de minéral. **25.** 17.

³⁾ Zusammenstellung seiner zahlreichen diesbez. Publikationen im Bull. min. **25.** 88. Vergl. auch ib. 147.

$$\cos^2 \alpha_3 = \cotg \overrightarrow{AB} \cdot \cotg \overrightarrow{CA}$$

$$\cos^2 \beta_3 = \cotg \overrightarrow{BC} \cdot \cotg \overrightarrow{AB} \quad \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} = 2\pi$$

$$\cos^2 \gamma_3 = \cotg \overrightarrow{CA} \cdot \cotg \overrightarrow{BC}$$

Die Winkel \overrightarrow{AB} , \overrightarrow{BC} und \overrightarrow{CA} sind aus Fig. 3 verständlich, in der OA, OB, OC die Richtungen angeben, längs derer die Radienvektoren der Kurve C gleich a, b und c werden. Dabei wird zunächst vorausgesetzt, daß die z-Achse in das Innere oder die Umgrenzung des Trieders $O\xi\eta\zeta$ falle — eine Annahme, die natürlich immer zulässig ist, wofern die drei Richtungen $O\xi$, $O\eta$ und $O\zeta$ ein rechts- oder links-händiges Achsensystem bilden können. Will man aber beim einmal angenommenen Rechtssystem bleiben, so hat man — falls die über dem Prismenquerschnitt gelegenen $\xi\eta\zeta$ -Richtungen kein Rechtssystem bilden — bloß ihre Verlängerungen über O hinaus zu betrachten. Da die Winkel zwischen $+z$ und den positiven Richtungen der $\xi\eta\zeta$ -Achsen im einen Fall zu denjenigen im anderen Fall supplementär sind, so verändern sich die Quadrate ihrer Kosinus nicht und das Cornu-Violasche Formelsystem bleibt gültig, wofern nur die positive oder negative z-Achse in das Innere oder die Umrandung des Trieders $O\xi\eta\zeta$ fällt, was immer realisierbar ist.

Aus der Beziehung zwischen A, B und C einerseits und ξ , η und ζ anderseits folgt, daß sie aufeinander senkrecht stehen. Die Pole von $\xi\dots$ müssen daher auf den zu A... senkrechten Durchmessern liegen. Da aber die Gleichungen des fraglichen Systems in $\cos \alpha_3\dots$ quadratisch sind, so erhält man — Cornu und Viola scheinen dies nicht beachtet zu haben — für $\alpha_3\dots$ je vier Werte, (nämlich $\pm \alpha_3\dots$ und $\pi \pm \alpha_3\dots$), welche je zwei durch den Ursprung gehende Gerade bestimmen. Die der positiven z-Achse zunächst liegenden Pole sind in der stereographischen Projektion der

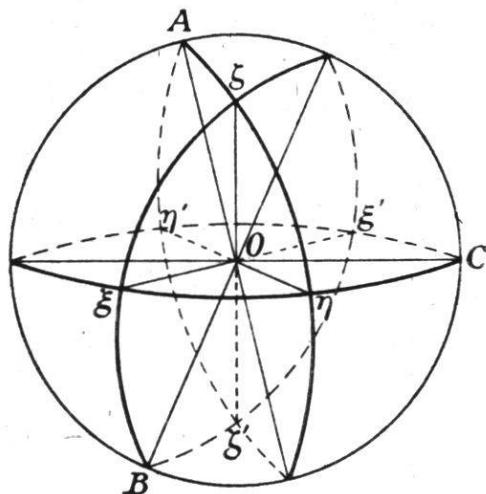


Fig. 3

Fig. 3 eingetragen und beweisen augenscheinlich das oben auf anderem Weg gefundene Resultat.¹⁾

25. Sind die Hauptlichtgeschwindigkeiten a, b und c gegeben, so ist es bei bekannter Lage der Hauptschwingungsrichtungen möglich, die Richtung OD zu bestimmen, längs der sich jene vierte Welle mit der Geschwindigkeit d fortpflanzt. Cornu²⁾ glaubte nun, hierauf eine Methode gründen zu können, welche erlaubt, b und d zu unterscheiden. Nach ihm brauchte man bloß den einen dieser Werte als den richtigen anzunehmen und hernach d zu berechnen. Fällt dieser berechnete Wert mit dem experimentell gefundenen überein, so war die Wahl gut — wenn nicht, so hat man einfach den anderen Wert als den richtigen zu nehmen.

Viola³⁾ (z. T. auch schon Cornu⁴⁾) prüfte diese Ansicht am Beispiel der Weinstinsäure, wofür Cornu⁵⁾ mit Hilfe der Totalreflexion folgende auf vier Dezimalen abgerundete Werte gefunden hatte:

$$\begin{array}{lll} 1/a = 1,4965 & AB = 63^\circ 25' & AD = 43^\circ 15' \\ 1/b = 1,5363^6) & BC = 50^\circ 15' & \\ 1/c = 1,6063 & CA = 66^\circ 20' - 180^\circ & DC = 70^\circ 25' \\ 1/d = 1,5526 & & \end{array}$$

Mit Hilfe von 1/a, 1/b, 1/c und den zugehörigen Azimuten ergibt die Rechnung:

$1/d = 1,5537$ $AD = 43^\circ 40'$ $BD = -19^\circ 45'$ $CD = -70^\circ 00'$.
Der Unterschied zwischen den beobachteten und berechneten Werten ist daher:

$$-0,0011 \quad -0^\circ 25' \quad -0^\circ 25' \quad -0^\circ 25'.$$

¹⁾ Bestimmt man, was im Fall der Totalreflexion an einer Kristallplatte (nicht aber bei der Lichtbrechung durch das Prisma) möglich ist, den Polarisationszustand des Lichtes, so kann die Entscheidung zwischen den beiden Orientierungen des $\xi\eta\zeta$ -Systems leicht getroffen werden. Auf die Weise verfuhr Viola und erhielt darum ohne weiteres eindeutige Resultate.

²⁾ Bull. min. **25.** 19 f.

³⁾ Bull. min. **25.** 150 ff.

⁴⁾ Bull. min. **25.** 26 ff.

⁵⁾ Bull. min. **25.** 25, 26.

⁶⁾ Hierfür setzt Cornu l. c. pag. 26 fälschlich 1,5637.

Geht man aber umgekehrt von $1/a$, $1/d$, $1/c$ und AD , DC , CA aus, so berechnen sich die Werte:

$1/b = 1,5353$ $AB = 62^\circ 52'$ $DB = 19^\circ 40'$ $CB = -50^\circ 48'$,
und die Differenz zwischen den gemessenen und berechneten Werten ist:

$$-0,0010 \quad 0^\circ 33' \quad 0^\circ 30' \quad 0^\circ 33'.$$

Die Unterschiede zwischen Beobachtung und Rechnung liegen demnach in diesem zweiten Fall ebenso wie im ersten innert den Grenzen der Beobachtungsfehler, so daß der Vorschlag Cornus praktisch nicht verwertbar¹⁾ erscheint. Ja, er ist nicht einmal theoretisch²⁾ richtig, da sich zeigen läßt, daß die eine Wertgruppe die notwendige Folge der anderen ist.

Um diesen Satz zu beweisen, kann man von den beiden Indexellipsoiden³⁾ $a^2 \xi^2 + b^2 \eta^2 + c^2 \zeta^2 = 1$

$$a^2 \xi'^2 + (a^2 \cos^2 \alpha + b^2 \cos^2 \beta + c^2 \cos^2 \gamma) \eta'^2 + c^2 \zeta'^2 = 1$$

ausgehen, deren Hauptachsen im allgemeinen verschieden gerichtet sind, jedoch so, daß die drei Achsenebenen

$$\xi = 0 \quad \xi' = 0 \quad z = 0$$

durch eine Gerade gehen (Richtung des Radiusvektors von der Länge a), welche zur x -Achse gewählt werden möge. Man erhält dadurch die aus dem nachstehenden Schema ersichtlichen Transformationsgleichungen. Dem Winkel α ist dabei kein Richtungssinn zuzuschreiben.

	x	y	z		x	y	z
ξ	0	$\sin \alpha$	$\cos \alpha$	ξ'	0	$\sin \alpha'$	$\cos \alpha'$
η	$\frac{\cos \gamma}{\sin \alpha}$	$-\cos \beta \cotg \alpha$	$\cos \beta$	η'	$\frac{\cos \gamma'}{\sin \alpha'}$	$-\cos \beta' \cotg \alpha'$	$\cos \beta'$
ζ	$\frac{\cos \beta}{\sin \alpha}$	$-\cos \gamma \cotg \alpha$	$\cos \gamma$	ζ'	$\frac{\cos \beta'}{\sin \alpha'}$	$-\cos \gamma' \cotg \alpha'$	$\cos \gamma'$

¹⁾ Ob Pockels, Lehrb. der Krist. pag. 132, diese Tatsache oder einen anderen Grund im Auge hatte, ist nicht recht ersichtlich.

²⁾ Die § 18 verwertete Methode ist in einem gewissen Sinn mit dem Vorschlage Cornus identisch, unterscheidet sich aber davon wesentlich darin, daß die beiden Wellennormalenflächen bzw. Ellipsoide zusammenfallende Hauptachsen haben.

³⁾ α, β, γ seien die Winkel, welche ξ, η, ζ mit z bilden. Entsprechendes gelte für α', β', γ' .

Nun sollen voraussetzungsgemäß auch die drei Ebenen

$$\zeta = 0 \quad \zeta' = 0 \quad z = 0$$

durch eine Gerade gehen (Richtung des Radiusvektors mit der Länge c). Das ergibt als erste Bedingung

$$\begin{vmatrix} \cos \beta & -\cos \gamma \cotg \alpha & \cos \gamma \\ \sin \alpha & & \\ \cos \beta' & -\cos \gamma' \cotg \alpha' & \cos \gamma' \\ \sin \alpha' & & \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} \cos \beta & \cos \gamma \cotg \alpha & \\ \sin \alpha & & \\ \cos \beta' & \cos \gamma' \cotg \alpha' & \\ \sin \alpha' & & \end{vmatrix} = \\ = \frac{\cos \beta' \cos \gamma \cos \alpha}{\sin \alpha' \sin \alpha} - \frac{\cos \beta \cos \gamma' \cos \alpha'}{\sin \alpha \sin \alpha'} = 0,$$

oder da

$$\sin \alpha \neq 0 \text{ und } \sin \alpha' \neq 0$$

auch

$$\cos \beta' \cos \gamma \cos \alpha = \cos \beta \cos \gamma' \cos \alpha'. \quad a)$$

Da ferner der Abschnitt des einen Ellipsoides auf der z-Achse gleich der mittleren Halbachse des anderen Ellipsoides sein soll, so erhält man als zweite Bedingungsgleichung

$$a^2 \cos^2 \alpha' + (a^2 \cos^2 \alpha + b^2 \cos^2 \beta + c^2 \cos^2 \gamma) \cos^2 \beta' + c^2 \cos^2 \gamma' = b^2. \quad b)$$

Nun sind die Richtungen zu berücksichtigen, deren zugeordnete Wellen parallel der Prismenkante schwingen. Um sie zu ermitteln, lege man durch die z-Achse zwei Ebenen, welche die beiden Ellipsoide derart in zwei Ellipsen schneiden, daß je eine ihrer Hauptachsen mit der z-Achse zusammenfalle. Diese Ebenen sind, wie die analytische Geometrie lehrt, dadurch ausgezeichnet, daß sie die Tangentialebenen im Punkte 0, 0, z je längs einer Geraden schneiden, die der xy-Ebene parallel ist. Zur Aufstellung der Gleichung der besagten Tangentialebene oder noch einfacher der zu ihr parallelen, durch den Ursprung gehenden Ebene empfiehlt es sich, die Ellipsoide mit Hilfe des Schemas I zuerst auf das x y z-System zu transformieren, worauf man durch einfache Rechnung (bei allgemeiner Schreibweise) den Ausdruck erhält

$$(a^2 \alpha_3 \alpha_1 + b^2 \beta_3 \beta_1 + c^2 \gamma_3 \gamma_1) x + (a^2 \alpha_2 \alpha_3 + b^2 \beta_2 \beta_3 + c^2 \gamma_2 \gamma_3) y + (a^2 \alpha_3^2 + b^2 \beta_3^2 + c^2 \gamma_3^2) z = 0.$$

Die Schnittgeraden dieser Ebenen mit der xy-Ebene haben Richtungskoeffizienten von der Form

$$m = -\frac{a^2 \alpha_3 \alpha_1 + b^2 \beta_3 \beta_1 + c^2 \gamma_3 \gamma_1}{a^2 \alpha_2 \alpha_3 + b^2 \beta_2 \beta_3 + c^2 \gamma_2 \gamma_3}.$$

Wegen der bekannten Eigenschaften des Indexellipsoides muß diese Gerade (m bzw. m') senkrecht sein zur Schnittgeraden der Ebene $z=0$ mit $\eta'=0$ (resp. $\eta=0$), in denen sich die Wellen mit der Geschwindigkeit $q=b'$ (resp. $q=b$) fortpflanzen. Die Richtungskoeffizienten dieser letzteren sind

$$\mu = -\frac{\cos \gamma}{\cos \alpha \cos \beta} \text{ und } \mu' = -\frac{\cos \gamma'}{\cos \alpha' \cos \beta'}$$

Man hat somit die Beziehungen

$$m = -\frac{1}{\mu} \text{ und } m' = -\frac{1}{\mu'}$$

die sich mit Benutzung der obigen speziellen Formen des Schemas I schreiben:

$$\frac{(b^2 - c^2) \cos \beta \cos \gamma}{a^2 \sin^2 \alpha - b^2 \cos^2 \beta - c^2 \cos^2 \gamma} = \frac{\cos \alpha' \cos \alpha \cos \beta'}{\cos \gamma'} \quad c)$$

und

$$\frac{(a^2 \cos^2 \alpha + b^2 \cos^2 \beta - c^2 \sin^2 \gamma) \cos \beta' \cos \gamma'}{a^2 \sin^2 \alpha' - (a^2 \cos^2 \alpha + b^2 \cos^2 \beta + c^2 \cos^2 \gamma) \cos^2 \beta' - c^2 \cos^2 \gamma'} = \frac{\cos \alpha' \cos \alpha \cos \beta}{\cos \gamma} \quad d)$$

Aus der quadrierten Gleichung *a)* und aus der Gleichung *b)* kann man mit Hilfe von

$$\cos^2 \alpha' + \cos^2 \beta' + \cos^2 \gamma' = 1$$

$\cos^2 \beta'$ und $\cos^2 \gamma'$ eliminieren und bekommt nach einfachen Transformationen die Gleichung

$$(a^2 \sin^2 \alpha - b^2 \cos^2 \beta - c^2 \cos^2 \gamma) \cos^2 \beta \cos^4 \alpha' + \\ [(a^2 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha - b^2 \sin^2 \beta \cos^2 \beta + c^2 (\cos^2 \beta - \cos^2 \alpha) \cos^2 \gamma] \cos^2 \alpha' \\ - (b^2 - c^2) \cos^2 \alpha \cos^2 \gamma = 0,$$

deren einzige in Betracht fallende Lösung

$$\cos^2 \alpha' = \frac{(b^2 - c^2) \cos^2 \gamma}{a^2 \sin^2 \alpha - b^2 \cos^2 \beta - c^2 \cos^2 \gamma}$$

ist, da die andere Lösung

$$\cos^2 \alpha' = -\frac{\cos^2 \alpha}{\cos^2 \beta}$$

keine reellen Werte für α' liefert.

Bringt man Gleichung *a)* auf die Form

$$1 = \frac{\cos \beta \cos \gamma' \cos \alpha}{\cos \beta' \cos \gamma \cos \alpha}$$

und multipliziert die beiden Seiten derselben mit den entsprechenden Seiten der Gleichung *c)*, so kommt unmittelbar

$$\cos^2 \alpha' = \frac{(b^2 - c^2) \cos^2 \gamma}{a^2 \sin^2 \alpha - b^2 \cos^2 \beta - c^2 \cos^2 \gamma}.$$

Weiterhin gibt Gleichung *d)*, wenn ihre rechte Seite wegen Gleichung *a)* mit

$$1 = \frac{\cos \beta' \cos \gamma \cos \alpha}{\cos \beta \cos \gamma' \cos \alpha'}$$

multipliziert wird, nach einigen Umstellungen

$$\begin{aligned} & \frac{a^2 \cos^2 \alpha + b^2 \cos^2 \beta - c^2 \sin^2 \gamma}{a^2 \sin^2 \alpha' - (a^2 \cos^2 \alpha + b^2 \cos^2 \beta + c^2 \cos^2 \gamma) \cos^2 \beta' - c^2 \cos^2 \gamma'} \\ &= \frac{\cos^2 \alpha}{\cos^2 \gamma'}, \end{aligned}$$

woraus man mit abermaliger Benutzung der Gleichung *a)* und Abspaltung eines von null verschiedenen Faktors wiederum

$$\cos^2 \alpha' = \frac{(b^2 - c^2) \cos^2 \gamma}{a^2 \sin^2 \alpha - b^2 \cos^2 \beta - c^2 \cos^2 \gamma}$$

erhält. Die Bedingungsgleichungen *b)*, *c)* und *d)* sind mithin äquivalent, denn sie unterscheiden sich nur durch einen Zahlenfaktor. Demnach sind auch die Eigenschaften der beiden Ellipsoide, welche zur Aufstellung der dritten und vierten Bedingungsgleichung führten, bloße Folgen der zuerst genannten, und damit ist die Unhaltbarkeit des Cornuschen Gedankens bewiesen.

Diese Ableitungen beweisen zunächst nur, daß der Gedanke Cornus nicht auf die Prismen übertragbar ist. Sie sind aber ohne weiteres im Falle Cornus verwendbar, sofern die Hauptlichtgeschwindigkeiten durch die Hauptbrechungsindizes, d. h. die Indexellipsoide, durch die zugehörigen Fresnelschen Ellipsoide ersetzt werden.

Übrigens ist der Inhalt des bewiesenen Satzes gleichwertig dem bekannten Satz von Brill.

26. Erweist sich dem Gesagten zufolge die Annahme Cornus nicht als zutreffend, so gestatten doch die Cornu-Violaschen Formeln im monoklinen System, wo die Entscheidung zwischen b und d nach dem Bisherigen noch nicht in jedem Fall getroffen werden konnte, eine restlose Lösung des Prismenproblems, falls die kristallographische Orientierung des Prismas gegeben ist und die brächende Kante desselben nicht senkrecht zur Orthodiagonale¹⁾ steht.

Der Beweis hierfür ist einfach. Im monoklinen System ist die Orthodiagonale optische Symmetriearchse, so daß bei bekannter kristallographischer Orientierung des Prismas eine der Größen

$$\alpha_3, \beta_3, \gamma_3$$

einen gegebenen Wert haben muß. Da aber nach den Formeln von Cornu-Viola diese Werte Funktionen der bekannten Azimute von A, B, C und D sind, so hat man nur zu prüfen, für welchen der beiden Werte b und d die Übereinstimmung befriedigt.²⁾

Daß bei dieser Überlegung nicht der gleiche Fehler unterlaufen ist, wie bei Cornu, ergibt sich schon daraus, daß die Wahl zwischen b und d nicht auf Grund geometrischer Eigenschaften der Kurve C, sondern auf Grund einer dieser Kurve fremden gegebenen Größe getroffen wurde, kann aber zum Überfluß noch strenge bewiesen werden. Dabei kann der Fall, wo die Orthodiagonale zur η -Achse wird, hier übergangen werden, weil er bereits früher (§ 20) erledigt wurde.

¹⁾ Fällt die im Prismenhauptschnitt liegende Orthodiagonale mit der ξ - oder ζ -Achse zusammen, so ergibt sich nach einer Überlegung, die derjenigen von § 17 ganz ähnlich ist, auf Grund der in § 23 gefundenen Resultate, daß nur die Orientierung zweideutig ist; fällt sie aber mit der η -Achse zusammen, so ist, wie bereits § 20 bemerkt wurde, neben der Lagebestimmung der Hauptschwingungsrichtungen auch die Ermittelung der Hauptlichtgeschwindigkeiten zweideutig.

²⁾ Dieses Verfahren führt auch im Falle der Totalreflexion zum Ziel, scheint aber bislang keine Beachtung gefunden zu haben, was allerdings um so begreiflicher ist, als die allgemeine Methode von Viola in der Anwendung einfach und sicher ist.

Es kommen darum nur noch die beiden Fälle in Betracht, wo eine der Größen α_3 und γ_3 einen zum voraus gegebenen Wert hat. Für beide kann der Beweis in übereinstimmender Weise geführt werden, so daß es genügt, ihn für den Fall durchzuführen, wo etwa α_3 den gegebenen Wert annimmt. Bezeichnet M die Richtung, längs der sich die b- oder d-Welle fortpflanzt, so gilt die Beziehung:

$$\cos^2 \alpha_3 = \cotg AM \cdot \cotg CA,$$

woraus

$$\cotg AM = \cos^2 \alpha_3 \cdot \tg CA.$$

Diese Gleichung gibt aber für AM einen einzigen, zwischen 0 und π gelegenen Wert, so daß wegen des einmal angenommenen Umlaufsinnes die Richtung OM eindeutig festliegt.

Stillschweigende Voraussetzung dieses Beweises ist die Annahme, daß die Fortpflanzungsrichtungen der b- und d-Welle nicht zusammenfallen.

Nach getroffener Entscheidung zwischen b und d ist, wenn die brechende Kante nicht senkrecht zur Orthodiagonale steht, natürlich auch die Berechnung der Lage der optischen Symmetriearchsen eindeutig, eben weil die Lage einer solchen bekannt ist.

27. An dieser Stelle möge der Beweis dafür erbracht werden, daß die Fortpflanzungsrichtungen der b- und d-Welle im

allgemeinen nicht zusammenfallen¹⁾. Zu diesem Zwecke diene die beistehende Fig. 4, welche in stereographischer Projektion auf den Prismenhauptschnitt die optischen Symmetrieebenen sowie die sogen. optischen Achsen A_1 und A_2 darstellt. Die Fortpflanzungsrichtung OD jener Welle, die parallel Oz schwingt, ist bekanntlich dadurch bestimmt, daß die Ebenen ODA₁ und ODA₂ in bezug auf den

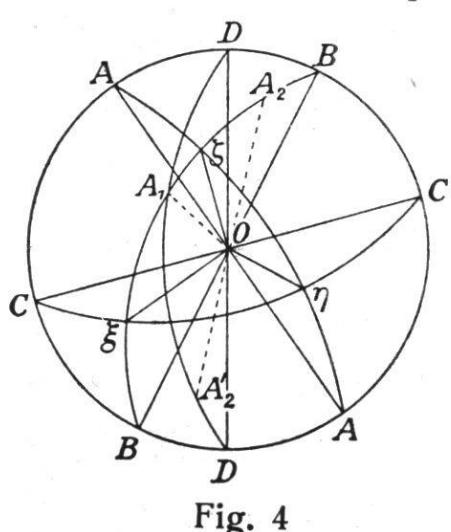


Fig. 4

Grundkreis gleichgeneigt sind. Nimmt man von A_2 das

¹⁾ Auf diesen Beweis wurde im vorangehenden schon mehrmals verwiesen, z. B. § 15.

Spiegelbild \bar{A}_2 bezüglich der Grundebene, oder — was wegen der symmetrischen Eigenschaften der Kugel ohne weiteres gestattet ist, den Gegenpunkt von \bar{A}_2 also A'_2 , so ist die Schnittgerade der Ebene $A_1O\bar{A}'_2$ mit der Grundebene die gesuchte Richtung. Ein Blick auf die Figur zeigt sofort, daß diese Richtung nur dann mit der b-Richtung zusammenfällt, wenn η oder eine optische Achse in der Querschnittsebene liegt. Da aber durch die bloße Annäherung von η oder einer optischen Achse an diese Grenzlage der Winkel BOD sich immer mehr und mehr verkleinert, so wird infolge der unvermeidlichen Beobachtungsfehler die Entscheidung zwischen b und d praktisch ebenfalls unmöglich, doch ist es für die Bestimmung der Hauptlichtgeschwindigkeiten dann belanglos, wenn gleichzeitig mit der Abnahme des Winkels BOD auch der Unterschied von b und d kleiner wird, d. h. wenn die optische Achse in die Prismenquerschnittsebene fällt.

28. Selbstverständlich wird durch den Umstand, daß es möglich ist, mit Hilfe eines einzigen Prismas bekannter kristallographischer Orientierung die optischen Konstanten rhombischer und monokliner Kristalle eindeutig zu bestimmen, der Satz von Brill in keiner Weise in Frage gezogen, denn es sind eben, wie nochmals bemerkt sei, nicht die geometrischen Eigenschaften der Kurve C, welche diese eindeutige Lösung gestatten, sondern kristallographische Beziehungen, durch welche wesentlich neue Elemente einbezogen werden.

29. So interessant nun diese Ergebnisse auch sind, so haben sie doch bis dahin wegen ihrer Umständlichkeit keine praktische Verwertung gefunden und sind vom rein theoretischen Standpunkt aus insofern unelegant, als sie mehr Beobachtungen erheischen, wie Unbekannte vorkommen, wobei sich dann allerdings als Gegenwert der überschüssigen Beobachtungen gleichviele Bedingungsgleichungen ergeben, auf Grund derer die Ausgleichungssrechnung gestatten würde, bessere, von den Beobachtungsfehlern unabhängige Endwerte zu berechnen. Es ist darum ganz begreiflich, daß die Praxis des Mineralogen ausschließlich solche Prismen berücksichtige, welche eine 1. vollkommen eindeutige und 2. möglichst ein-

fache Bestimmung (Minimum der Ablenkung bei symmetrischem Durchgang) der optischen Konstanten erlauben. Die einschlägigen theoretischen Fragen sind von Liebisch, Born, Viola usw. eingehend¹⁾ behandelt worden. Gleichwohl möge es gestattet sein, hier noch einige Punkte besonders zu beleuchten.

30. Für welche speziellen Prismenorientierungen ergeben die Wurzeln der Gleichung VI eine eindeutige Lösung des Problems?

Es sind drei Fälle denkbar.

a) Man weiß, welcher der beiden Werte b und d der größere ist. Praktische Bedeutung hat dieser Fall im triklinen (und z. T. monoklinen) System. Liegt nämlich ein künstlich hergestelltes Prisma vor, dessen x y z -Achsen mit den optischen Symmetrieachsen für eine bestimmte Lichtart zusammenfallen, so möchte man versucht sein, mit demselben auch die Brechungsindizes für Licht anderer Wellenlänge zu bestimmen. Das ist offenbar möglich. Denn wiewohl sich die Orientierung mit der Wellenlänge stetig ändert, so dürfte man doch immer, zumal wenn man sich wenig auseinanderliegender Spektrallinien bedient, in der Lage sein, zu entscheiden, durch welchen der Winkel der optischen Achsen der Prismenquerschnitt jedesmal verlaufe, und damit die Entscheidung zwischen b und d eindeutig zu treffen. Dagegen bleibt die Orientierung der Hauptschwingungsrichtungen zweideutig, weil die Ausgangslage der optischen Symmetrieachse zu speziell ist, um daraus gültige Schlüsse auf ihre neue Lage ziehen zu können, denn die Änderung kann ja ebensogut im einen wie im anderen Sinn erfolgen.

Ein künstliches, genau orientiertes Prisma aus einem triklinen Kristall herzustellen, ist übrigens keine leichte Sache und scheint bisher einzige von C. Pape ausgeführt worden zu sein, der folgenden Untersuchungsgang vorgeschlagen und im wesentlichen auch eingehalten hat: „Um die Richtung der optischen Achsen sowie die drei Hauptbrechungsexponenten

¹⁾ Über die reiche Literatur vergl. z. B. Pockels, Lehrb. 144.

zu bestimmen, muß bei Kristallen des 1 + 1-gliedrigen Systems im allgemeinen zunächst die Ebene der optischen Achsen ihrer Lage nach ungefähr bekannt sein und darauf mittels eines aus dem Kristalle geschliffenen Prismas, dessen brechende Kante senkrecht zu dieser Ebene steht, der mittlere Brechungsexponent angenähert ermittelt werden. Darauf ist eine Platte aus dem Kristall zu schleifen, deren parallele Flächen rechtwinklig zu der ersten Mittellinie stehen, und an derselben der Winkel der scheinbaren optischen Achsen zu messen, sowie die Lage beider zu der dem Beobachter zugekehrten, nach ihrer Lage am Kristall bekannten Fläche und noch zweien an der Platte vorhandenen natürlichen Kristallflächen. Aus diesen Beobachtungen und dem zuerst gefundenen mittleren Brechungsexponenten läßt sich dann die Richtung der wahren optischen Achsen ableiten. Nach diesen Resultaten sind darauf Prismen anzufertigen, deren brechende Kanten den drei Elastizitätsachsen parallel laufen, und an ihnen die drei Brechungsexponenten zu beobachten. Da jedes richtig geschliffene Prisma zwei Brechungsexponenten liefert, bei drei Prismen jeder also doppelt bestimmt ist, so besitzt man im Vergleiche beider das Mittel, zu prüfen, ob die ursprüngliche Bestimmung des mittleren Brechungsexponenten hinreichend zuverlässig ist oder nicht. Im letzteren Falle würde man mit dem Mittel aus seinen zuletzt erhaltenen Werten die wahren optischen Achsen von neuem berechnen und nach dieser Rechnung neue Prismen schleifen müssen.“¹⁾.

Es wäre entschieden einfacher, an einem triklinen Kristall zuerst die Ebene der optischen Achsen für eine bestimmte Lichtart möglichst genau zu bestimmen und hierauf ein Prisma so herzustellen, daß sein Hauptschnitt mit jener Ebene einen Winkel von ca. 20—30° oder 60—70° bilden würde und zu den beiden optischen Achsen ungefähr gleich geneigt wäre. In diesem Falle wäre die Richtung der b-Welle für jene Farbe genau bekannt, während diejenige der d-Welle hierzu fast senkrecht stände. Da sich die optischen Konstanten mit der Wellenlänge stetig ändern, wäre es möglich,

¹⁾ C. Pape, Pogg. Ann. Ergb. 6, 387.

die Hauptlichtgeschwindigkeiten sowie die Lage der zugehörigen Schwingungsrichtungen für alle Wellenlängen zu bestimmen, wofür man sich wenig auseinanderliegender Spektrallinien bedienen würde.

b) d^2 fällt mit einer der drei anderen Wurzeln der Gleichung VI zusammen. Sei diese Wurzel etwa a^2 . Man erhält dann die Beziehung

$$a^2 \equiv a^2 \alpha_3^2 + b^2 \beta_3^2 + c^2 \gamma_3^2,$$

welche mittels der bekannten Identität

$$\alpha_3^2 + \beta_3^2 + \gamma_3^2 = 1$$

auf die Form

$$(a^2 - b^2) \beta_3^2 + (a^2 - c^2) \gamma_3^2 = 0$$

gebracht werden kann. Weil voraussetzungsgemäß

$$a > b > c,$$

so ist diese Gleichung nur möglich, wenn

$$\beta_3 = 0 \text{ und } \gamma_3 = 0$$

d. h. wenn die Prismenkante gleichzeitig ξ -Achse ist. Wegen der damit bekannten Lage einer Hauptschwingungsrichtung wird dem Früheren zufolge auch die Ermittlung aller Hauptschwingungsrichtungen eindeutig, und da für die beiden anderen Fälle eine ähnliche Überlegung gilt, so ergibt sich der bekannte Satz: Die Bestimmung der Hauptlichtgeschwindigkeiten sowie der Lage der Hauptschwingungsrichtungen eines zweiachsigem Kristalls ist mit Hilfe eines einzigen Prismas in allen jenen Fällen möglich, wo die brechende Kante mit einer optischen Symmetriearchse zusammenfällt.

Die Identität

$$b^2 \equiv a^2 \alpha_3^2 + b^2 \beta_3^2 + c^2 \gamma_3^2$$

lässt neben $\alpha_3 = 0, \beta_3^2 = 1, \gamma_3 = 0$ noch andere reelle Lösungen zu. In der Tat ergibt sich mit Rücksicht auf die Bedingungsgleichung

$$\alpha_3^2 + \beta_3^2 + \gamma_3^2 = 1 \quad a)$$

ähnlich wie oben

$$(a^2 - b^2) \alpha_3^2 - (b^2 - c^2) \gamma_3^2 = 0. \quad b)$$

Faßt man nun $\alpha_3, \beta_3, \gamma_3$ als rechtwinklige Koordinaten auf, so stellen die Gleichungen *a)* und *b)* zwei Kreise dar, die beide

das Zentrum im Ursprung haben und sich auf der η -Achse schneiden. Die trigonometrische Tangente ihres Neigungswinkels zur ζ -Achse ist

$$\pm \sqrt{\frac{b^2 - c^2}{a^2 - b^2}} = \cot \varOmega.$$

Sie stehen also auf den optischen Achsen senkrecht. Mithin der weitere Satz: Die eindeutige Bestimmung der Hauptlichtgeschwindigkeiten eines zweiachsigem Kristalls ist in allen jenen Fällen möglich, wo die brechende Kante auf einer optischen Achse senkrecht steht.¹⁾ Bezuglich der Orientierung gilt das früher Gesagte. Praktische Bedeutung kommt aber dieser Lösung keine zu, weil die kristallographische Lage der optischen Achsen nicht ohne weiteres gegeben ist. Überdies könnte wegen ihrer Dispersion die Orientierung des Prismas nur für eine Wellenlänge genau erfüllt sein.

c) b oder d oder beide zugleich sind der direkten Beobachtung zugänglich. Das ist (praktisch genommen) so zu verstehen, daß sich diese Werte beim Minimum der Ablenkung mit symmetrischem Durchgang ergeben. Nach den bereits genannten Arbeiten v. Liebischs und Violas ist dazu notwendig und hinreichend, daß die x-Achse mit der η -Achse zusammenfalle (b und d) oder daß die Halbierungs-ebene des inneren Prismenwinkels eine die η -Achse enthaltende optische Symmetrieebene sei (b) oder endlich daß x zur ξ - oder ζ -Achse werde (d). Die anderen Fälle, wo die Halbierungsebene des äußeren Prismenwinkels den Winkel der beiden von y und den optischen Achsen gebildeten Ebenen halbiert — also die Beobachtung von d möglich wäre — sind praktisch wertlos.

In allen diesen Fällen liefert das Theorem von Brill, falls die z-Achse nicht selber optische Symmetriearchse ist oder auf einer optischen Achse senkrecht steht eine doppelte Lösung. Wird sie hier eindeutig, so liegt der tiefere Grund darin, daß z. T. kristallographische Elemente, z. T. die Schwingungs-

¹⁾ Dieser Satz wurde bereits in § 13 verwertet.

richtung — in jedem Fall also Größen, welche den geometrischen Eigenschaften der Kurve C fremd sind, herangezogen und berücksichtigt werden.

31. Prismen spezieller Orientierung. Es wurde bereits oben darauf hingewiesen, daß der Mineraloge zur Bestimmung der optischen Konstanten eines Minerals mit Vorliebe, ja mit Ausschließlichkeit solche Prismen benutzt, welche die direkte Ermittlung der Hauptlichtgeschwindigkeiten gestatten. Hierbei kommen einzig die eben genannten speziellen Orientierungen in Betracht, wo die Prismenkante oder die Halbierungslinien des inneren oder äußeren Prismenwinkels Symmetriearchsen sind. In allen diesen Fällen ist das Minimum der Ablenkung wenigstens für eine Welle mit symmetrischem Durchgang verbunden, Messung und Rechnung folglich überaus einfach. Die entsprechende Welle wird an ihrer Schwingungsrichtung erkannt. Dabei ist aber nicht zu vergessen, daß sich die Schwingungsrichtung beim Übergang vom Kristall zur Luft in manchen Fällen in wahrnehmbarer Weise ändern muß. Diese Änderung konnte an einem Prisma von rhombischem Schwefel, das von (111) und ($\bar{1}\bar{1}1$) gebildet war und Prof. Baumhauer¹⁾ seinerzeit zur optischen Untersuchung dieses Minerales diente, deutlich wahrgenommen werden. Indessen dürfte sie in keinem praktischen Fall so groß werden, daß man über die Schwingungsrichtung der Welle im Kristall im Zweifel sein könnte.

Es ist besonderer Erwähnung wert, daß in den soeben genannten drei Fällen, wo also eine Achse des xyz-Systems optische Symmetriearchse ist, nicht nur die direkte Bestimmung einer oder zwei Hauptlichtgeschwindigkeiten ermöglicht ist, sondern die Bestimmung aller wesentlich vereinfacht wird. Einige Hinweise auf dieses z. T. vielfach behandelte Problem sowie die Hervorhebung einiger noch weniger beachteter Punkte mögen genügen.

a) Die Prismenkante ist optische Symmetriearchse. Die Kurve C zerfällt in einen Kreis und ein Oval. Das ist die

¹⁾ Baumhauer, Zeitschr. f. Krist. **47**, 12.

einzige Orientierung, die bis anhin dazu gedient hat, mit Hilfe eines einzigen Prismas sämtliche Hauptlichtgeschwindigkeiten eines Kristalls zu bestimmen.¹⁾

b) Die Halbierungslinie des inneren Prismenwinkels sei eine optische Symmetriearchse und falle etwa mit ξ zusammen. Bezeichnet ϑ den, von $+x$ aus gesehen, im Gegenzeigersinn gemessenen Winkel $z \zeta$, so gilt das folgende Schema:

	x	y	z
ξ	1	0	0
η	0	$\cos \vartheta$	$\sin \vartheta$
ζ	0	$-\sin \vartheta$	$\cos \vartheta$

Die Gleichung III nimmt damit die einfache Form an

$$q^4 - q^2(L_{11} \cos^2 \psi + L_{22} \sin^2 \psi) + M_{11} \cos^2 \psi + M_{22} \sin^2 \psi = 0,$$

wo

$$\begin{aligned} L_{11} &= b^2 + c^2 & L_{22} &= a^2 + b^2 \sin^2 \vartheta + c^2 \cos^2 \vartheta \\ M_{11} &= b^2 c^2 & M_{22} &= a^2 (b^2 \sin^2 \vartheta + c^2 \cos^2 \vartheta). \end{aligned}$$

Beim Minimum der Ablenkung, das aus Symmetriegründen bei gleichem Einfalls- und Austrittswinkel (also $\psi = \pi/2$) erfolgt, liefert die voranstehende Gleichung, mit Rücksicht auf die getroffenen Festsetzungen, für jene Welle, die parallel der Symmetriearchse (also parallel der Querschnittsebene) schwingt, direkt den Wert von a , für die andere aber

$$q_s^2 = b^2 \sin^2 \vartheta + c^2 \cos^2 \vartheta.$$

Da hierdurch L_{22} und M_{22} bekannt²⁾ sind, so genügen zwei³⁾ weitere Messungen zur Bestimmung von L_{11} und M_{11} . b^2 und c^2 berechnen sich dann als Wurzeln der Gleichung

$$u^2 - L_{11} u + M_{11} = 0.$$

ϑ wird, vom rhombischen System abgesehen, mehrdeutig.

¹⁾ Lang, Wiener Sitz. **76**, 793. Born, N. Jahrb. f. Mineral. B.-B. **5**, 42.

²⁾ Eine mehrmalige Wiederholung der Messungen macht von den Einstellungsfehlern ziemlich unabhängig und liefert, falls das Prisma tadellos geschliffen und homogen ist, sehr gute Werte von L_{22} und M_{22} .

³⁾ Um sich von den Einstellungsfehlern möglichst unabhängig zu machen, sind natürlich mehr Messungen erforderlich.

Ähnliche Formeln erhält man für die beiden anderen möglichen Fälle.

c) Die Halbierungslinie des äußeren Prismenwinkels sei eine Symmetriearchse und falle

α) mit der ξ -Achse zusammen. Bei analoger Voraussetzung über den Winkel ϑ wie im vorangehenden Falle b) ergibt sich das Schema:

	x	y	z
ξ	0	1	0
η	$-\cos \vartheta$	0	$\sin \vartheta$
ζ	$\sin \vartheta$	0	$\cos \vartheta$

An Stelle der Gleichung III kommt

$$q^4 - q^2(L_{11} \cos^2 \psi + L_{22} \sin^2 \psi) + (M_{11} \cos^2 \psi + M_{22} \sin^2 \psi) = 0,$$

wo

$$\begin{aligned} L_{11} &= a^2 + b^2 \sin^2 \vartheta + c^2 \cos^2 \vartheta & L_{22} &= b^2 + c^2 \\ M_{11} &= a^2 (b^2 \sin^2 \vartheta + c^2 \cos^2 \vartheta) & M_{22} &= b^2 c^2. \end{aligned}$$

Aus Symmetriegründen ist ohne weiteres ersichtlich, daß beim Minimum der Ablenkung direkt b^2 und c^2 gefunden werden. Wie vorher genügen noch zwei weitere Messungen zur Bestimmung der Konstanten L_{11} und M_{11} , und a^2 findet sich als größte Wurzel der Gleichung

$$u^2 - L_{11} u + M_{11} = 0.$$

ϑ ist im monoklinen System (das trikline kommt praktisch nicht in Betracht) natürlich zweideutig. Die Zweideutigkeit besteht darin, daß den Formeln zufolge η ebensogut im Winkel xOz wie $\bar{x}Oz$ liegen kann. Berücksichtigt man aber beim Minimum der Ablenkung den Schwingungszustand der entsprechenden Welle, so dürfte die Zweideutigkeit oft behoben werden können. Im rhombischen System wird sie schon durch die kristallographische Orientierung des Prismas umgangen.

β) Fällt die ζ -Achse mit der y -Achse zusammen, so erhält man beim Minimum der Ablenkung direkt a und b , während man aus den Gleichungen

$$L_{11} = c^2 + a^2 \sin^2 \vartheta + b^2 \cos^2 \vartheta$$
$$M_{11} = c^2 (a^2 \sin^2 \vartheta + b^2 \cos^2 \vartheta)$$

ähnlich wie soeben c^2 als die kleinere Wurzel der quadratischen Gleichung

$$u^2 - L_{11} u + M_{11} = 0$$

findet, während die andere, größere wiederum gleich dem Quadrat der Geschwindigkeit jener Welle ist, die senkrecht zur Querschnittsebene des Prismas schwingt.

Bezüglich ϑ gilt das soeben Gesagte.

γ) Ganz anders, wenn η mit y zusammenfällt! Das Minimum der Ablenkung liefert a und c , während man aus zwei weiteren Messungen die Gleichungen erhält

$$L_{11} = b^2 + c^2 \sin^2 \vartheta + a^2 \cos^2 \vartheta$$
$$M_{11} = b^2 (c^2 \sin^2 \vartheta + a^2 \cos^2 \vartheta).$$

Die Wurzeln der quadratischen Gleichung

$$u^2 - L_{11} u + M_{11} = 0$$

sind b^2 und $d^2 = c^2 \sin^2 \vartheta + a^2 \cos^2 \vartheta$, von denen die eine ebenso gut größer oder kleiner wie die andere sein kann. Im monoklinen System ist die Lösung mithin unbestimmt, wogegen im rhombischen System die Überlegungen von § 18 Geltung haben.

In den beiden Fällen b) und c) wurde vorausgesetzt, daß eine der optischen Symmetriearchsen mit der Halbierungsline des inneren oder äußeren Prismenwinkels zusammenfalle, während die übrige Orientierung als unbekannt betrachtet wurde. Das Problem ist also gegenüber der Behandlung bei Pockels¹⁾ wesentlich verallgemeinert, indem daselbst der Fall b) nicht ganz erledigt und c) nur unter der ausdrücklichen Voraussetzung studiert wird, daß der Winkel ϑ bekannt²⁾ sei. Im rhombischen System mag diese Annahme keine wesentliche Einschränkung bedeuten, wohl aber im monoklinen System, wo wegen der geringeren Symmetrie die Verhältnisse viel komplizierter liegen.

¹⁾ Lehrb. d. Krist. pag. 146 und 147.

²⁾ Wäre ϑ bekannt, so würde sich im Fall c_y der Wert von b eindeutig bestimmen, weil $d^2 = a^2 \cos^2 \vartheta + c^2 \sin^2 \vartheta$ eine bekannte Funktion von a , c und ϑ ist und darum von b^2 unterschieden werden kann.

Bei eingehender Betrachtung der unter b) und c) entwickelten Formeln geht hervor, daß es sogar ohne Bedeutung ist, zu wissen, welche der drei optischen Symmetriearchsen den inneren resp. äußeren Prismenwinkel halbiere. Die beiden Methoden gewinnen dadurch noch mehr an allgemeinem Wert und können in allen jenen Fällen Verwendung finden, wo aus der bloßen kristallographischen Orientierung des Prismas hervorgeht, daß die Halbierungsline des inneren oder äußeren Prismenwinkels mit einer optischen Symmetriearchse zusammenfallen muß.

Daß sich im rhombischen System alle drei Fälle, wo eine Achse des xyz-Systems optische Symmetriearchse ist, zur Bestimmung der Brechungssindizes, mit Hilfe eines einzigen Prismas in gleicher Weise eignen, ist ein unmittelbares und praktisch wertvolles Ergebnis dieser Ausführungen.¹⁾

1) Durch Verallgemeinerung einer Bemerkung v. Groth's, Physikalische Kristallographie pag. 102 f., können diesen Fällen noch jene angegliedert werden, wo die eine Prismenfläche Symmetrieebene bzw. ihre Schnittlinie mit der Querschnittsebene oder endlich ihre Normale Symmetriearchse ist.