**Zeitschrift:** Mémoires de la Société Fribourgeoise des Sciences Naturelles. Mathématique et physique = Mitteilungen der Naturforschenden Gesellschaft in Freiburg. Mathematik und Physik

**Herausgeber:** Société Fribourgeoise des Sciences Naturelles

**Band:** 2 (1912)

**Artikel:** Application des coordonnées sphériques homogènes à la cristallographie géométrique

**Autor:** Bays, Sévérin

**Kapitel:** XI

**DOI:** https://doi.org/10.5169/seals-306718

# CHAPITRE XI

**73.** Appliquons enfin au Raumgitter lui-même développé dans l'espace, son principe de symétrie du § 65, qui vient de nous donner déjà très simplement les propriétés de ses plans et de ses arêtes.

La présence dans le Raumgitter des 3 points quelconques A, B, C, et du point O, entraîne, puisque chacun d'eux doit être entouré d'autres points du Gitter de la même manière qu'eux-mêmes entourent chacun des 3 autres, celle de 24 autres points du Raumgitter, répartis de nouveau sur le pourtour du tétraèdre des 4 premiers, à des distances égales aux arêtes du tétraèdre, comme le montre la fig. 13. En répétant de là indéfiniment l'application du même principe, il se trouve donc que dans le Raumgitter lui-même, une infinité de ses points sont distribués parallélipipédiquement dans l'espace, autour du point O, et sont les sommets que fournissent les juxtapositions successives dans toutes les directions du parallélipipède construit sur les 3 arêtes OA, OB, OC ; ils forment ainsi un nouveau Raumgitter de parallélipipède *élémentaire* (OABCD), totalement impliqué dans le Raumgitter primitif. De même que

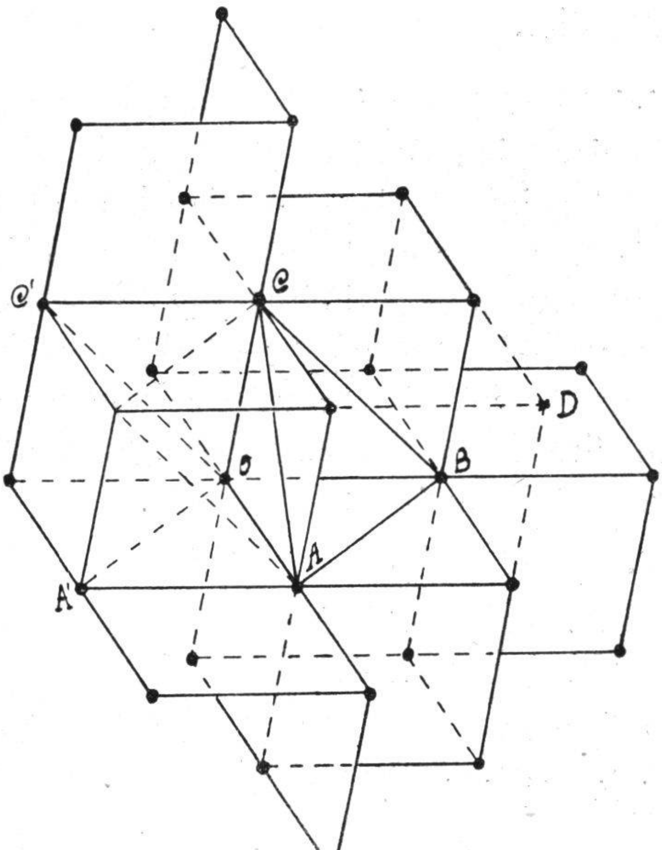


Fig. 13.

le réseau primitif d'un plan implique l'infinité de ses autres réseaux parallélogrammiques, le Raumgitter dont il a été question juqu'ici, construit sur les 3 paramètres minima $\mu_i \mathfrak{r}_i$, renferme donc également une infinité d'autres Raumgitters à maille parallélipipède plus grande, que déterminent avec le point O *chaque triple* A, B, C de points *quelconques* du premier. Nous l'appelons le Raumgitter *primitif* uniquement encore pour le distinguer de ceux qu'il renferme, qui sont d'ailleurs d'une nature identique, et nous désignerons par les lettres des sommets de son parallélipipède élémentaire l'un quelconque de ceux-ci.

Remarquons que nous ne venons de faire en outre autre chose que d'établir d'une manière générale que 4 points quelconques O, A, B, C, de l'espace, dont il n'y en a pas 3 coplanaires, exigent à eux seuls, dès que la condition est posée que chacun d'eux soit entouré dans l'espace de la même manière que chacun de ses voisins, la construction parallélipipèdique du Raumgitter telle que nous l'avons établie. Le principe que nous avons appelé la symétrie du Raumgitter, au sens large du mot, est donc bien en quelque sorte sa condition nécessaire et suffisante, ou en d'autres termes, sa propriété fondamentale qui l'exprime tout entier.

**74.** Le volume du parallélipipède élémentaire du nouveau Raumgitter quelconque (OABCD) s'obtient immédiatement, étant données les coordonnées $x'_i$, $x''_i$, $x'''_i$ des 3 points A, B, C de l'ancien Gitter qui le déterminent avec le point O. Ces coordonnées sont en effet les composantes par rapport aux axes-unités primitifs $\mu_i \mathfrak{r}_i$ des vecteurs de ses arêtes OA, OB, OC ; et si nous appelons tout naturellement ces vecteurs, en tant que axes-unités d'un nouveau Raumgitter, $\mu'_1\mathfrak{r}'_1$, $\mu'_2\mathfrak{r}'_2$, $\mu'_3\mathfrak{r}'_3$, ils sont en direction et en valeur absolue les 3 vecteurs que représentent les seconds membres :

$$\begin{aligned}
\mu'_1\mathfrak{r}'_1 &= \mu_1 x'_1 \mathfrak{r}_1 + \mu_2 x'_2 \mathfrak{r}_2 + \mu_3 x'_3 \mathfrak{r}_3 \\
\mu'_2\mathfrak{r}'_2 &= \mu_1 x''_1 \mathfrak{r}_1 + \mu_2 x''_2 \mathfrak{r}_2 + \mu_3 x''_3 \mathfrak{r}_3 \\
\mu'_3\mathfrak{r}'_3 &= \mu_1 x'''_1 \mathfrak{r}_1 + \mu_2 x'''_2 \mathfrak{r}_2 + \mu_3 x'''_3 \mathfrak{r}_3
\end{aligned}$$

Leur produit scalaire de la forme :

$$\mu'_1\mu'_2\mu'_3 \;\; \mathfrak{r}'_1 \mathrm{V} \mathfrak{r}'_2 \mathfrak{r}'_3$$

que nous calculons sans peine, en multipliant scalairement par l'un deux le produit vectoriel des 2 autres et qui s'écrit très bien :

$$\mu_1 \ \mu_2 \ \mu_3 \begin{vmatrix} x_1' & x_2' & x_3' \\ x_1'' & x_2'' & x_3'' \\ x_1''' & x_2''' & x_3''' \end{vmatrix} \mathfrak{r}_1 \mathrm{V} \mathfrak{r}_2 \mathfrak{r}_3 \tag{39}$$

est le volume du parallélipipède cherché.

Si les 3 points A, B, C sont tels que le parallélipipède qu'ils construisent, ne contient que 8 points du Raumgitter primitif, situés en chacun de ses sommets, les juxtapositions successives de ce parallélipipède fournissent exactement les sommets mêmes du Raumgitter primitif. C'est alors un parallélipipède élémentaire du Gitter primitif lui-même, et nous disons dans ce cas que les 3 segments OA, OB, OC, qui ne peuvent être dans ces conditions que des paramètres, forment un *triple conjugué* du Raumgitter primitif.

Tous les parallélipipèdes *élémentaires* d'un Raumgitter sont *égaux*. Cela découle directement de la condition qu'ils n'absorbent que 8 points du Raumgitter, dont un en chacun de leurs sommets, par un raisonnement identique à celui qui a été fait au § 69 pour les parallélogrammes élémentaires d'un réseau. Puisque le produit scalaire :

$$\mu_1\mu_2\mu_3 \ \mathfrak{r}_1 \mathrm{V} \mathfrak{r}_2 \mathfrak{r}_3 = \mu_1\mu_2\mu_3 \ \mathrm{D} \qquad (\S\ 9)$$

est le volume de son parallélipipède élémentaire primordial, construit sur ses 3 axes-unités, il doit être également le volume de chaque autre de ses parallélipipèdes élémentaires ; et la condition algébrique à laquelle doivent satisfaire les coordonnées $x_i'$, $x_i''$, $x_i'''$, pour que les 3 sommets A, B, C, déterminent un triple conjugué du Raumgitter donné, est donc le déterminant équation :

$$\begin{vmatrix} x_1' & x_2' & x_3' \\ x_1'' & x_2'' & x_3'' \\ x_1''' & x_2''' & x_3''' \end{vmatrix} = 1 \tag{40}$$

Si l'on jette un coup d'œil sur le Raumgitter de la fig. 13, au paragraphe précédent, on voit sans peine que chaque triple non coplanaire : (OA, OB, OC), (OA, OC, OA′) (OA, OC, OC′), etc. que fournissent les 6 arêtes : OA, OB, OC, AB, BC, CA, du tétraèdre *fondamental*, détermine également déjà son parallélipipède élémentaire. Les coordonnées : (100, 010, 001), (100, 001, $1\bar{1}0$), (100, 001, $0\bar{1}1$) des points (A, B, C), (A, C, A′), (A, C, C′), etc., satisfont en effet la condition posée, et les triples de paramètres correspondants sont donc des triples *conjugués* du Raumgitter en question.

**75.** Il nous est de nouveau très simple de déterminer tous les parallélipipèdes élémentaires d'un Raumgitter, et encore ici les résultats trouvés se trouvent en réalité déjà contenus sous une autre forme dans les conclusions du § 68.

Les faces d'un parallélipipède élémentaire ne sauraient être d'abord que des parallélogrammes élémentaires, n'absorbant que 4 points du Raumgitter, un en chacun de leurs sommets. Soit donc le couple conjugué des 2 paramètres OT et OT′ et déterminant le parallélogramme élémentaire et ainsi le réseau primitif du plan (OTT′); un 3me paramètre OT″ ne pourra former avec eux un *triple conjugué* que s'il se termine en un point de l'un ou l'autre des 2 réseaux *limitrophes*. S'il les dépasse en effet. ce ne peut être qu'en passant par un sommet du Gitter, et dans ce cas, ce n'est même plus un paramètre ; ou en perçant le réseau sur l'un des côtés ou à l'intérieur de son parallélogramme élémentaire ; mais alors les arêtes parallèles par les sommets T, T′ et T‴, (T‴ est le 4me sommet du parallélogramme OTT′) le percent également en un point symétrique des parallélogrammes élementaires adjacents, et de quelque manière que ce soit, le parallélipipède construit porte nécessairement sur ses faces ou en son intérieur un ou deux sommets du Raumgitter de trop pour être élémentaire.

A chaque parallélogramme élémentaire d'un Raumgitter, correspond donc une double infinité de parallélipipèdes élémentaires ; à chaque couple conjugué de paramètres OT et OT′ déterminant ce même parallélogramme élémentaire, une double infinité de triples conjugués, dont les 3mes paramètres se terminent en chaque point des 2 réseaux limitrophes. Tous ces parallélipipèdes élémentaires ont le même volume ; ils ont en effet la même base, le parallélogramme élémentaire donné, et des hauteurs égales, la distance du plan au réseau limitrophe. Mais puisque non seulement ces parallélipipèdes élémentaires de même base, mais tous les parallélipipèdes élémentaires d'un Raumgitter sont équivalents ; comme ils ont d'autre part tous, pour dimensions, le produit d'un parallélogramme élémentaire par sa distance au réseau limitrophe, les aires des parallélogrammes élémentaires des plans sont en raison inverse des distances de leurs réseaux parallèles, ou en d'autres termes : la *densité* des points sur les réseaux parallèles d'un Raumgitter est en raison *inverse* de leur *équidistance.*

Si au couple conjugué OT et OT′ nous associons un segment, primitif ou non, se terminant en un point quelconque de l'un ou l'autre des 2[mes] réseaux parallèles, le parallélipipède qu'ils construisent est naturellement double du parallélipipède élémentaire. Il serait triple, quadruple, etc., pour les réseaux suivants, et en s'exprimant d'une manière tout à fait générale : a chaque couple *conjugué* de paramètres, déterminant le parallélogramme élémentaire d'un plan quelconque du Raumgitter, correspond une double infinité de parallélipipèdes *multiples* du parallélipipède élementaire. Le volume de chacun d'eux est le produit scalaire trouvé au § précédent :

$$\mu_1\ \mu_2\ \mu_3 \begin{vmatrix} x_1' & x_2' & x_3' \\ x_1'' & x_2'' & x_3'' \\ x_1''' & x_2''' & x_3''' \end{vmatrix} \mathbf{r}_1 \mathrm{V}\, \mathbf{r}_2\, \mathbf{r}_3$$

et, puisque $\mu_1\mu_2\mu_3\ \mathbf{r}_1 \mathrm{V} \mathbf{r}_2 \mathbf{r}_3$ est le volume même du parallélipipède élémentaire, les coordonnées $x_i'$, $x_i''$, $x_i'''$ des 3 points A, B, C, qui les déterminent avec le point O, satisfont donc l'égalité où C est un multiple *entier* quelconque :

$$\begin{vmatrix} x_1' & x_2' & x_3' \\ x_1'' & x_2'' & x_3'' \\ x_1''' & x_2''' & x_3''' \end{vmatrix} = \mathrm{C}.$$

Cette équation représente donc pour l'un quelconque des 3 couples *conjugués* $(x_i''x_i''')$, $(x_i'''x_i')$, $(x_i'x_i'')$, *chacun* de ses réseaux *parallèles*. Le multiple C, constant pour un même réseau, donne le rang de ce réseau dont il détermine l'équation ; à 2 de ses valeurs égales et de signe contraire correspondent les 2 réseaux parallèles de même rang de part et d'autre du plan primitif.

Pour $\mathrm{C} = \pm 1$, nous retrouvons la condition algébrique pour que les 3 points A, B, C, déterminent eux-mêmes un parallélipipède élémentaire, mais avec sa signification complète ; pour l'un quelconque des 3 couples conjugués $(x_i''x_i''')$, $(x_i'''x_i')$, $(x_i'x_i'')$, la valeur-unité du déterminant :

$$\begin{vmatrix} x_1' & x_2' & x_3' \\ x_1'' & x_2'' & x_3'' \\ x_1''' & x_2''' & x_3''' \end{vmatrix} = \pm 1$$

est en effet également l'équation de ses 2 réseaux *limitrophes*.

**76.** Les 4 arêtes $\mathfrak{r}_i$ ou les 4 faces $\mathfrak{l}_i$ (§ 63) qui ont déterminé la construction du Raumgitter primitif et ainsi le déploiement dans l'espace du complexe total des faces et arêtes cristallines, étaient 4 arêtes et 4 faces absolument *quelconques* du complexe du cristal. Cette construction du Raumgitter primitif n'a dépendu d'ailleurs que de la ***position relative*** de ces 4 arêtes (si nous laissons de côté les 4 faces avec lesquelles on raisonnerait d'une manière toute pareille) élémentaires l'une par rapport aux autres ; les 3 arêtes fondamentales ont fourni les directions des arêtes du parallélipipède élémentaire, et l'arête-unité a déterminé leurs proportions respectives ; seule la longueur de celle-ci a été fixée arbitrairement, pour préciser les dimensions du Gitter, mais prise plus grande ou plus petite elle aurait donné un Gitter en tout semblable au premier.

Le Raumgitter quelconque (OABCD), (§ 73), construit avec les 4 arêtes du cristal OA, OB, OC, OD, puisque les 4 points A, B, C, D, sont des points du Gitter primitif, doit donc aussi bien que celui-ci, représenter la totalité du complexe des faces et arêtes cristallines. D'une part, tous ses points doivent donc être situés sur les arêtes de l'ancien Gitter : ils le sont en effet, et même coïncident tous avec des points de l'ancien Gitter, si nous prenons précisément le segment OD (fig. 13) comme longueur de son arête-unité. D'autre part, il doit avoir des points sur chaque arête du complexe, c'est-à-dire, OD étant toujours la longueur de son arête-unité, il doit absorber des points du Gitter primitif sur chacune de ses arêtes.

Réciproquement, il n'est pas de Raumgitter possible, représentant ce même complexe cristallin donné, qui n'ait pas tous ses points compris, si nous fixons convenablement la longueur de son arête-unité, dans ceux du Raumgitter primitif. Pour représenter ce complexe, il ne peut avoir en effet pour point de départ que 4 de ses arêtes (ou 4 de ses faces), mais comme le parallélipipède élémentaire que ces arêtes déterminent a nécessairement, dès que nous prenons pour longueur de l'arête-unité un segment de l'ancien Gitter, un point de celui-ci en chacun de ses 8 sommets, le Raumgitter total, constitué par ses juxtapositions successives, a par le fait également pour chacun de ses sommets un point du Raumgitter primitif.

Ainsi d'une part, chacun de cette infinité de Raumgitter (OABCD) impliqués dans le Raumgitter primitif, comme ayant pour point de départ 4 arêtes cristallines, représente également le complexe du cristal ;

d'autre part, tout Raumgitter représentant ce même complexe, pour une certaine longueur de son arête-unité (ce qui d'ailleurs n'influe aucunement sur la nature du Gitter et du complexe représenté), a nécessairement tous ses points compris dans ceux du Raumgitter primitif.

**77.** Ce résultat peut s'exprimer sous une autre forme peut être plus précise, à condition d'entendre par : *supprimer* des points sur une arête, les supprimer d'abord uniformément tout le long de l'arête, en maintenant l'équidistance entre les points qui subsistent, et ensuite de la même manière supprimer les points correspondants sur chacune des rangées parallèles.

Etant donné un Raumgitter primitif, nous pouvons à volonté *supprimer* un nombre quelconque de points sur *3* quelconques de ses arêtes, sans que rien ne soit changé au complexe qu'il représente. Si nous appelons A, B, C, le premier point qui demeure sur chacune des 3 arêtes choisies, cela revient en effet à supprimer du Raumgitter donné, tous ceux de ses points qui n'appartiennent pas au Raumgitter de parallélipipède élémentaire (OABCD), c'est-à-dire à remplacer le Raumgitter primitif par l'un quelconque des Raumgitter qu'il implique. Le nombre de points supprimés de ce fait sur chaque autre arête du complexe, est complètement déterminé ; les nouveaux paramètres et les nouveaux parallélogrammes élémentaires sont des multiples *entiers* des paramètres et des parallélogrammes élémentaires primitifs.

Etant donné un Raumgitter, nous pouvons à volonté *ajouter* (en donnant à ce mot sa signification correspondante) un nombre quelconque de points sur *3* quelconques de ses *arêtes*, sans que rien ne soit encore changé au complexe qu'il représente. Si A, B, C, est le premier point ajouté à partir du point O sur chacune des 3 arêtes choisies, cela revient inversement à remplacer le Raumgitter donné par un nouveau Raumgitter primitif, de parallélipipède élémentaire (OABCD), impliquant en lui tous les points du premier. Le nombre des points ajoutés de ce fait sur chaque autre arête du complexe est complètement déterminé ; les nouveaux paramètres et les nouveaux parallélogrammes élémentaires sont des *sous-multiples* (fractions dont le numérateur est 1) des paramètres et parallélogrammes élémentaires du Raumgitter donné.

Enfin puisque les 2 opérations successives n'ont aucune influence sur la nature du complexe représenté, dans un Raumgitter donné, nous pouvons à volonté ***simultanément*** supprimer des points sur 3 arêtes quelconques et ajouter d'autres points sur 3 autres de ses arêtes. Le Raumgitter obtenu représente encore le même complexe que le premier, et les nouveaux paramètres et parallélogrammes élémentaires sont alors des multiples ***rationnels*** des paramètres et parallélogrammes élémentaires primitifs.

Sommerfeld appelle les Raumgitters obtenus dans les 2 premiers cas: ganzzahlig commensurabeles Gitter, et le Gitter obtenu dans le dernier cas: rationnal commensurabeles Gitter, par rapport au Raumgitter donné.

Ainsi, puisque en réalité la présence avec le point O, de 3 sommets quelconques A, B, C d'un Raumgitter donné (mais situé chacun sur une arête différente), suffit dans un nouveau Raumgitter, pour qu'il soit l'un de l'infinité des Gitter représentant le même complexe que le premier, le problème du ***changement*** des ***coordonnées*** du Raumgitter se pose maintenant parallèlement et exactement pareil à celui du ***changement*** des ***indices*** du complexe (chapitre VIII).

Etant données les coordonnées $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$, des 3 sommets A, B, C d'un Raumgitter primitif, et les coordonnées $\alpha'_i, \beta'_i, \gamma'_i$, de ces mêmes sommets dans un Raumgitter de parallélipipède élémentaire encore inconnu, déterminer successivement :

1° les nouvelles coordonnées $\mathrm{x}'_i$ du sommet quelconque de coord. $\mathrm{x}_i$.
2° les 3 axes-unités du nouveau parallélipipède élémentaire.
3° les composantes $\mathrm{u}'_i$ du parallélogramme de composantes $\mathrm{u}_i$.
4° les 3 parallélogr.-unités du nouveau parallélip. élémentaire.

**78.** Les coordonnées $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ et $\alpha'_i, \beta'_i, \gamma'_i$, données sont en effet les composantes par rapport aux axes-unités correspondants des vecteurs que représentent les segments d'arêtes OA, OB, OC et en rapportant successivement ces 3 segments aux axes-unités primitifs $\mu_i \mathbf{r}_i$ et aux axes-unités inconnues que nous appelons tout naturellement $\mu'_i \mathbf{r}'_i$, nous écrivons les 3 égalités vectorielles en valeurs absolues :

$$
(41)\quad
\begin{aligned}
\mu_1\alpha_1\mathbf{r}_1 + \mu_2\alpha_2\mathbf{r}_2 + \mu_3\alpha_3\mathbf{r}_3 &= \mu'_1\alpha'_1\mathbf{r}'_1 + \mu'_2\alpha'_2\mathbf{r}'_2 + \mu'_3\alpha'_3\mathbf{r}'_3\\
\mu_1\beta_1\mathbf{r}_1 + \mu_2\beta_2\mathbf{r}_2 + \mu_3\beta_3\mathbf{r}_3 &= \mu'_1\beta'_1\mathbf{r}'_1 + \mu'_2\beta'_2\mathbf{r}'_2 + \mu'_3\beta'_3\mathbf{r}'_3\\
\mu_1\gamma_1\mathbf{r}_1 + \mu_2\gamma_2\mathbf{r}_2 + \mu_3\gamma_3\mathbf{r}_3 &= \mu'_1\gamma'_1\mathbf{r}'_1 + \mu'_2\gamma'_2\mathbf{r}'_2 + \mu'_3\gamma'_3\mathbf{r}'_3
\end{aligned}
$$

Par le fait que les coordonnées $\alpha_i$, $\beta_i$, $\gamma_i$ et $\alpha'_i$ $\beta'_i$ $\gamma'_i$, représentent non seulement les rapports, mais des valeurs absolues des indices des 3 arêtes OA, OB, OC, les facteurs $\varrho_1$, $\varrho_2$, $\varrho_3$, introduits auparavant dans les équations (24) correspondantes, se réduisent dans ce cas-ci à l'*unité*. Il ne nous est donc plus nécessaire des indices d'une 4$^{me}$ arête pour déterminer leurs valeurs, ou en d'autres termes, comme il vient déjà d'être dit plus haut, les coordonnées anciennes et nouvelles de *3* sommets quelconques suffisent complètement à déterminer le problème du changement de Raumgitter. Nous n'avons donc qu'à reprendre successivement les résultats des §§ (48-54), qui s'écrivent identiquement pour les arêtes ce qu'ils ont été établis avec 4 faces comme éléments donnés, et à y faire partout les facteurs $\varrho_i = 1$; il leur résultera d'ailleurs de ce fait une symétrie bien plus complète que celle qui leur a été obtenue dans le cas des indices.

Les vecteurs des axes-unités primitifs $\mu_i \mathfrak{r}_i$ sont en fonction des nouveaux axes-unités $\mu'_i \mathfrak{r}'_i$ :

$$
(42)\qquad
\begin{aligned}
D_0 \mu_1 \mathfrak{r}_1 &= \mu'_1 |\alpha'_1 \alpha_2 \alpha_3| \mathfrak{r}'_1 + \mu'_2 |\alpha'_2 \alpha_2 \alpha_3| \mathfrak{r}'_2 + \mu'_3 |\alpha'_3 \alpha_2 \alpha_3| \mathfrak{r}'_3 \\
D_0 \mu_2 \mathfrak{r}_2 &= \mu'_1 |\alpha_1 \alpha'_1 \alpha_3| \mathfrak{r}'_1 + \mu'_2 |\alpha_1 \alpha'_2 \alpha_3| \mathfrak{r}'_2 + \mu'_3 |\alpha_1 \alpha'_3 \alpha_3| \mathfrak{r}'_3 \\
D_0 \mu_3 \mathfrak{r}_3 &= \mu'_1 |\alpha_1 \alpha_2 \alpha'_1| \mathfrak{r}'_1 + \mu'_2 |\alpha_1 \alpha_2 \alpha'_2| \mathfrak{r}'_2 + \mu'_3 |\alpha_1 \alpha_2 \alpha'_3| \mathfrak{r}'_3
\end{aligned}
$$

Si les 3 déterminants de chaque ligne sont divisibles par $D_0$, les nouvelles coordonnées des sommets $\mu_i \mathfrak{r}_i$ sont *entières*, c'est-à-dire les sommets du parallélipipède élémentaire primitif sont en même temps des sommets du nouveau Raumgitter.

Le sommet quelconque de coordonnées $x_i$, dont le segment correspondant est représenté par le vecteur :

$$\mu_1 x_1 \mathfrak{r}_1 + \mu_2 x_2 \mathfrak{r}_2 + \mu_3 x_3 \mathfrak{r}_3$$

reçoit pour ses nouvelles coordonnées $x'_i$ :

$$
\frac{\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & 0 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha'_1 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & \beta'_1 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 & \gamma'_1 \end{vmatrix}}{D_0}, \quad
\frac{\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & 0 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha'_2 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & \beta'_2 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 & \gamma'_2 \end{vmatrix}}{D_0}, \quad
\frac{\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & 0 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha'_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & \beta'_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 & \gamma'_3 \end{vmatrix}}{D_0}
$$

Si les coordonnées $x_i$ sont premières entre elles, le sommet correspondant détermine un paramètre du Gitter primitif; pour que les nouvelles coordonnées $x'_i$ déterminent sur la même arête le paramètre du nouveau Gitter, il faut également qu'elles soient entières et premières entre elles. Si nous appelons A le produit des facteurs communs dans ces conditions aux 3 numérateurs, le nouveau paramètre est donc le multiple *rationnel* $\frac{D_0}{A}$ du paramètre primitif.

Le déterminant $\Delta_0$ devient le symétrique du déterminant $D_0$, et les composantes des 3 axes-unités $\mu_1'\mathfrak{r}_1'$, rapportés aux axes-unités primitifs, sont en fonction de $\Delta_0$ exactement ce que plus haut les composantes des $\mu_1\mathfrak{r}_1$ sont en fonction de $D_0$:

$$\begin{aligned}
\Delta_0\mu_1'\mathfrak{r}_1' &= \mu_1|\alpha_1\alpha_2'\alpha_3'|\mathfrak{r}_1 + \mu_2|\alpha_2\alpha_2'\alpha_3'|\mathfrak{r}_2 + \mu_3|\alpha_3\alpha_2'\alpha_3'|\mathfrak{r}_3 \\
\Delta_0\mu_2'\mathfrak{r}_2' &= \mu_1|\alpha_1'\alpha_1\alpha_3'|\mathfrak{r}_1 + \mu_2|\alpha_1'\alpha_2\alpha_3'|\mathfrak{r}_2 + \mu_3|\alpha_1'\alpha_3\alpha_3'|\mathfrak{r}_3 \qquad (43) \\
\Delta_0\mu_3'\mathfrak{r}_3' &= \mu_1|\alpha_1'\alpha_2'\alpha_1|\mathfrak{r}_1 + \mu_2|\alpha_1'\alpha_2'\alpha_2|\mathfrak{r}_2 + \mu_3|\alpha_1'\alpha_2'\alpha_3|\mathfrak{r}_3
\end{aligned}$$

Les longueurs de ces axes $\mu_1'\mathfrak{r}_1'$ sont les racines carrées des formes quadratiques divisées par $\Delta_0$:

$$\begin{aligned}
\mu_1' &= \frac{1}{\Delta_0}\sqrt{\omega(|\alpha_1\alpha_2'\alpha_3'|\,|\alpha_2\alpha_2'\alpha_3'|\,|\alpha_3\alpha_2'\alpha_3'|)} \\
\mu_2' &= \frac{1}{\Delta_0}\sqrt{\omega(|\alpha_1'\alpha_1\alpha_3'|\,|\alpha_1'\alpha_2\alpha_3'|\,|\alpha_1'\alpha_3\alpha_3'|)} \\
\mu_3' &= \frac{1}{\Delta_0}\sqrt{\omega(|\alpha_1'\alpha_2'\alpha_1|\,|\alpha_1'\alpha_2'\alpha_2|\,|\alpha_1'\alpha_2'\alpha_3|)}
\end{aligned}$$

et si nous faisons le produit scalaire des 3 vecteurs que nous avons écrit, de la forme:

$$\mu_1'\mu_2'\mu_3'\mathfrak{r}_1'\mathrm{V}\mathfrak{r}_2'\mathfrak{r}_3'$$

il nous donne directement le volume du nouveau parallélipipède élémentaire. En reprenant le produit scalaire pareil déjà effectué au § 74, et en écrivant le déterminant des coordonnées dont chaque terme est lui-même dans ce cas-ci un déterminant de 3$^{me}$ ordre:

$$\frac{1}{\Delta_0^3}\begin{vmatrix}
\begin{vmatrix}\alpha_1 & \alpha_2' & \alpha_3'\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}\alpha_2 & \alpha_2' & \alpha_3'\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}\alpha_3 & \alpha_2' & \alpha_3'\end{vmatrix} \\
\begin{vmatrix}\alpha_1' & \alpha_1 & \alpha_3'\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}\alpha_1' & \alpha_2 & \alpha_3'\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}\alpha_1' & \alpha_3 & \alpha_3'\end{vmatrix} \\
\begin{vmatrix}\alpha_1' & \alpha_2' & \alpha_1\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}\alpha_1' & \alpha_2' & \alpha_2\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}\alpha_1' & \alpha_2' & \alpha_3\end{vmatrix}
\end{vmatrix}$$

on voit aussitôt qu'il n'est autre que le produit des 2 déterminants également de 3$^{me}$ ordre:

$$\frac{1}{\Delta_0^3}\begin{vmatrix}\alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3\end{vmatrix}\begin{vmatrix}A_1' & B_1' & \Gamma_1' \\ A_2' & B_2' & \Gamma_2' \\ A_3' & B_3' & \Gamma_3'\end{vmatrix}$$

La valeur du second qui est le déterminant-adjoint de $\Delta_0$ est $\Delta_0^2$; le produit scalaire cherché s'écrit donc très simplement:

$$\mu_1'\mu_2'\mu_3'\mathfrak{r}_1'{}^{\mathrm{V}}\mathfrak{r}_2'\mathfrak{r}_3' = \mu_1\mu_2\mu_3 \frac{\mathrm{D}_0}{\Delta_0} \mathfrak{r}_1{}^{\mathrm{V}}\mathfrak{r}_2\mathfrak{r}_3$$

Le nouveau parallélipipède élémentaire est encore le multiple *rationnel* $\frac{\mathrm{D}_0}{\Delta_0}$ du parallélipipède élémentaire primitif.

**79.** Si nous faisons les produits vectoriels deux à deux et membre à membre des 3 équations (41), il ne nous est plus permis, dans ce cas-ci où il s'agit de valeurs absolues, de négliger d'écrire, comme nous avons négligé dans les équations (29) correspondantes le quotient constant $\nu_1\nu_2\nu_3 : \nu_1'\nu_2'\nu_3'$, les 2 facteurs qui en tenant compte toujours des relations $\mu_i\nu_i = \sin \mathrm{A}_i$, se mettent aisément en évidence:

$$\varrho = \frac{\mu_1\mu_2\mu_3}{\mathrm{M}.} \qquad\qquad \varrho' = \frac{\mu_1'\mu_2'\mu_3'}{\mathrm{M}'.}$$

Les vecteurs $\varrho\nu_i\mathfrak{l}_i$ et $\varrho'\nu_i'\mathfrak{l}_i'$ sont ainsi les vecteurs représentant les parallélogrammes-*unités* (§ 71) primitifs et nouveaux, c'est-à-dire les faces du parallélipipède élémentaire correspondant, et les 3 égalités que nous fournissent les produits vectoriels effectués sont l'expression des 3 parallélogrammes construits sur les segments d'arêtes (OA, OB), (OB, OC), (OC, OA), rapportés successivement aux parallélogrammes-unités primitifs $\varrho\nu_i\mathfrak{l}_i$ et aux nouveaux parallélogrammes-unités $\varrho'\nu_i'\mathfrak{l}_i'$ : (§ 71, 37)

$$\begin{aligned}
\varrho\nu_1 A_1\mathfrak{l}_1 + \varrho\nu_2 A_2\mathfrak{l}_2 + \varrho\nu_3 A_3\mathfrak{l}_3 &= \varrho'\nu_1' A_1'\mathfrak{l}_1' + \varrho'\nu_2' A_2'\mathfrak{l}_2' + \varrho'\nu_3' A_3'\mathfrak{l}_3' \\
\varrho\nu_1 B_1\mathfrak{l}_1 + \varrho\nu_2 B_2\mathfrak{l}_2 + \varrho\nu_3 B_3\mathfrak{l}_3 &= \varrho'\nu_1' B_1'\mathfrak{l}_1' + \varrho'\nu_2' B_2'\mathfrak{l}_2' + \varrho'\nu_3' B_3'\mathfrak{l}_3' \qquad (44) \\
\varrho\nu_1 \Gamma_1\mathfrak{l}_1 + \varrho\nu_2 \Gamma_2\mathfrak{l}_2 + \varrho\nu_3 \Gamma_3\mathfrak{l}_3 &= \varrho'\nu_1 \Gamma_1'\mathfrak{l}_1 + \varrho'\nu_2' \Gamma_2'\mathfrak{l}_2' + \varrho'\nu_3' \Gamma_3'\mathfrak{l}_3'
\end{aligned}$$

Les parallélogrammes-unités primitifs $\varrho\nu_i\mathfrak{l}_i$ sont en fonction des parallélogrammes-unité $\varrho'\nu_i'\mathfrak{l}_1'$ :

$$\begin{aligned}
\mathrm{D}_0\varrho\nu_1\mathfrak{l}_1 &= \varrho'\nu_1'|\alpha_1\alpha_2'\alpha_3'|\mathfrak{l}_1' + \varrho'\nu_2'|\alpha_1'\alpha_1\alpha_3'|\mathfrak{l}_2' + \varrho'\nu_3'|\alpha_1'\alpha_2'\alpha_1|\mathfrak{l}_3' \\
\mathrm{D}_0\varrho\nu_2\mathfrak{l}_2 &= \varrho'\nu_1'|\alpha_2\alpha_2'\alpha_3'|\mathfrak{l}_1' + \varrho'\nu_2'|\alpha_1'\alpha_2\alpha_3'|\mathfrak{l}_2' + \varrho'\nu_3'|\alpha_1'\alpha_2'\alpha_2|\mathfrak{l}_3' \qquad (45) \\
\mathrm{D}_0\varrho\nu_3\mathfrak{l}_3 &= \varrho'\nu_1'|\alpha_3\alpha_2'\alpha_3'|\mathfrak{l}_1' + \varrho'\nu_2'|\alpha_1'\alpha_3\alpha_3'|\mathfrak{l}_2' + \varrho'\nu_3'|\alpha_1'\alpha_2'\alpha_3|\mathfrak{l}_3'
\end{aligned}$$

Si les 3 déterminants de chaque ligne sont divisibles par $\mathrm{D}_0$, les nouvelles *composantes* des parallélogrammes $\varrho\nu_i\mathfrak{l}_i$ sont *entières;* leur surface est donc celle, dans le même plan, d'un parallélogramme du nouveau Gitter.

Les composantes $u'_i$ du parallélogramme quelconque de composantes $u_i$ :

$$\varrho\nu_1 u_1 \mathfrak{l}_1 + \varrho\nu_2 u_2 \mathfrak{l}_2 + \varrho\nu_3 u_3 \mathfrak{l}_3$$

sont les 3 déterminants divisés par $D_0$ :

$$\frac{\begin{vmatrix} u_1\alpha_1+u_2\alpha_2+u_3\alpha_3 & \alpha'_2 & \alpha'_3 \\ u_1\beta_1+u_2\beta_2+u_3\beta_3 & \beta'_2 & \beta'_3 \\ u_1\gamma_1+u_2\gamma_2+u_3\gamma_3 & \gamma'_2 & \gamma'_3 \end{vmatrix}}{D_0}, \quad \frac{\begin{vmatrix} \alpha'_1 & u_1\alpha_1+u_2\alpha_2+u_3\alpha_3 & \alpha'_3 \\ \beta'_1 & u_1\beta_1+u_2\beta_2+u_3\beta_3 & \beta'_3 \\ \gamma'_1 & u_1\gamma_1+u_2\gamma_2+u_3\gamma_3 & \gamma'_3 \end{vmatrix}}{D_0}, \quad \frac{\begin{vmatrix} \alpha'_1 & \alpha'_2 & u_1\alpha_1+u_2\alpha_2+u_3\alpha_3 \\ \beta'_1 & \beta'_2 & u_1\beta_1+u_2\beta_2+u_3\beta_3 \\ \gamma'_1 & \gamma'_2 & u_1\gamma_1+u_2\gamma_2+u_3\gamma_3 \end{vmatrix}}{D_0}$$

Si les composantes $u_i$ données sont premières entre elles, le parallélogramme correspondant est un parallélogramme élémentaire du Gitter primitif ; pour que les nouvelles composantes $u'_i$ déterminent dans le même plan le parallélogramme élémentaire du nouveau Gitter, il faut également qu'elles soient entières et premières entre elles. Si nous appelons A le produit des facteurs communs dans ces conditions aux 3 numérateurs, le nouveau parallélogramme élémentaire est donc le multiple *rationnel* $\frac{D_0}{A}$ du parallélogramme élémentaire primitif.

Les composantes des parallélogrammes-unités $\varrho'\nu'_i\mathfrak{l}'_i$, rapportés aux parallélogrammes primitif $\varrho\nu_i\mathfrak{l}_i$, sont de nouveau en fonction de $\Delta_0$ et $D_0$ exactement ce que plus haut les composantes des $\varrho\nu_i\mathfrak{l}_i$ sont en fonction de $D_0$ et $\Delta_0$ :

$$\begin{aligned} \Delta_0\varrho'\nu'_1\mathfrak{l}'_1 &= \varrho\nu_1|\alpha'_1\alpha_2\alpha_3|\mathfrak{l}_1 + \varrho\nu_1|\alpha_1\alpha'_1\alpha_3|\mathfrak{l}_2 + \varrho\nu_3|\alpha_1\alpha_2\alpha'_1|\mathfrak{l}_3 \\ \Delta_0\varrho'\nu'_2\mathfrak{l}'_2 &= \varrho\nu_1|\alpha'_2\alpha_2\alpha_3|\mathfrak{l}_1 + \varrho\nu_2|\alpha_1\alpha'_2\alpha_3|\mathfrak{l}_2 + \varrho\nu_3|\alpha_1\alpha_2\alpha'_2|\mathfrak{l}_3 \\ \Delta_0\varrho'\nu'_3\mathfrak{l}'_3 &= \varrho\nu_1|\alpha'_3\alpha_2\alpha_3|\mathfrak{l}_1 + \varrho\nu_3|\alpha_1\alpha'_3\alpha_3|\mathfrak{l}_2 + \varrho\nu_3|\alpha_1\alpha_2\alpha'_3|\mathfrak{l}_3 \end{aligned} \tag{46}$$

Les surfaces de ces parallélogrammes élémentaires sont les racines carrées des formes quadratiques correspondantes divisées par $\Delta_0$ :

$$\begin{aligned} \varrho'\nu'_1 &= \frac{1}{\Delta_0}\sqrt{\Omega(|\alpha'_1\alpha_2\alpha_3|\,|\alpha_1\alpha'_1\alpha_3|\,|\alpha_1\alpha_2\alpha'_1|)} \\ \varrho'\nu'_2 &= \frac{1}{\Delta_0}\sqrt{\Omega(|\alpha'_2\alpha_2\alpha_3|\,|\alpha_1\alpha'_2\alpha_3|\,|\alpha_1\alpha_2\alpha'_2|)} \\ \varrho'\nu'_3 &= \frac{1}{\Delta_0}\sqrt{\Omega(|\alpha'_3\alpha_2\alpha_3|\,|\alpha_1\alpha'_3\alpha_3|\,|\alpha_1\alpha_2\alpha'_3|)} \end{aligned}$$

et si nous faisons le produit scalaire des 3 vecteurs que nous avons écrit, de la forme :

$$\varrho'^3\nu'_1\nu'_2\nu'_3\mathfrak{l}'_1 \mathrm{V} \mathfrak{l}'_2\mathfrak{l}'_3$$

il nous donne le volume d'un nouveau parallélipipède construit sur les 3 vecteurs $\varrho'\nu'_i\mathfrak{l}'_i$ comme *arêtes*. En écrivant encore, comme au §

précédent, le déterminant des composantes, dont chaque terme est lui-même un déterminant de 3^me^ ordre :

$$\frac{1}{\Delta_0^3}\begin{vmatrix} |\alpha'_1\alpha_2\alpha_3| & |\alpha_1\alpha'_1\alpha_3| & |\alpha_1\alpha_2\alpha'_1| \\ |\alpha'_2\alpha_2\alpha_3| & |\alpha_1\alpha'_2\alpha_3| & |\alpha_1\alpha_2\alpha'_2| \\ |\alpha'_3\alpha_2\alpha_3| & |\alpha_1\alpha'_3\alpha_3| & |\alpha_1\alpha_2\alpha'_3| \end{vmatrix}$$

on voit immédiatement qu'il se réduit de nouveau au produit des 2 déterminants :

$$\frac{1}{\Delta_0^3}\begin{vmatrix} \alpha'_1 & \beta'_1 & \gamma'_1 \\ \alpha'_2 & \beta'_2 & \gamma'_2 \\ \alpha'_3 & \beta'_3 & \gamma'_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} A_1 & B_1 & \Gamma_1 \\ A_2 & B_2 & \Gamma_2 \\ A_3 & B_3 & \Gamma_3 \end{vmatrix}$$

La valeur du second qui est le déterminant-adjoint de $D_0$ est $D_0^2$, et le produit scalaire cherché s'écrit :

$$\varrho^3\nu'_1\nu'_2\nu'_3\mathfrak{l}'_1 V \mathfrak{l}'_2\mathfrak{l}'_3 = \varrho^3\nu_1\nu_2\nu_3\frac{D_0^2}{\Delta_0^2}\mathfrak{l}_1 V \mathfrak{l}_2\mathfrak{l}_3$$

Le parallélipipède en question est donc le multiple *rationnel* $\left(\frac{D_0}{\Delta_0}\right)^2$ du parallélipipède du même type construit sur les 3 vecteurs $\varrho\nu_i\mathfrak{l}_i$ comme *arêtes.*

Bravais divise les arêtes $\varrho\nu_i\mathfrak{l}_i$ et $\varrho'\nu_i'\mathfrak{l}_i'$ de ces 2 derniers parallélipipèdes par la racine cubique du volume du parallélipipède élémentaire correspondant et appelle les 2 nouveaux Raumgitter dont ils sont dans ces conditions les parallélipipèdes générateurs, les Raumgitter *polaires* des Raumgitters $\mu_i\mathfrak{r}_i$ et $\mu_i'\mathfrak{r}_i'$.

La transformation de coordonnées traitée dans ces 2 derniers paragraphes est la transformation *générale*, effectuée d'un Raumgitter donné en un Raumgitter *rationnellement* commensurable par rapport au premier. Il n'y aurait aucune difficulté maintenant à chercher à quelles conditions doivent satisfaire les triples de coordonnées $\alpha_i$, $\beta_i$, $\gamma_i$, et $\alpha'_i$, $\beta'_i$, $\gamma'_i$ données pour qu'elles déterminent les 2 changements spéciaux de coordonnées où le nouveau Raumgitter est *entièrement* commensurable par rapport au premier (§ 77). Il suffit pour cela que les relations entre les $\alpha_i$, $\beta_i$, $\gamma_i$ et $\alpha'_i$, $\beta'_i$, $\gamma'_i$ soient telles que les 9 déterminants coefficients des $\mu'_i\mathfrak{r}'_i$ dans les équations (42) soient chacun divisible par $D_0$, ou que les 9 déterminants coefficients des $\mu_i\mathfrak{r}_i$ dans les équations (43) soient chacun divisible par $\Delta_0$. D'autre part, on obtient directement ce que deviennent dans ces 2 cas particuliers les résultats de la transformation générale en y substituant successivement aux $\alpha_i$, $\beta_i$, $\gamma_i$. et aux $\alpha'_i$, $\beta'_i$, $\gamma'_i$ les valeurs particulières 100, 010, 001, (le second cas correspond à celui des § 51 et 55 du changement des indices) ; c'est-à-dire en prenant soit les 3 sommets quelconques $\alpha'_i$, $\beta'_i$, $\gamma'_i$ du nouveau Gitter comme sommets du parallélipipède élémentaire du Gitter primitif, soit les 3 sommets quelconques $\alpha_i$, $\beta_i$, $\gamma_i$, de l'ancien Gitter, comme sommets du parallélipipède élémentaire du nouveau Gitter.

**80.** La démonstration donnée aux § 69 et 74 de l'égalité des parallélogrammes et des parallélipipèdes élémentaires, basée directement sur la structure du Gitter, et qui peut d'ailleurs être rendue rigoureuse au point de vue mathématique,* donne comme corollaire direct (§ 74) la valeur-unité du déterminant $|x'_1 x''_2 x'''_3| = 1$ comme condition pour que le parallélipipède construit sur les arêtes $\mu'_i \mathfrak{r}'_i$ soit parallélipipède élémentaire du Gitter primitif. M. Daniëls me permet d'ajouter ici ce dernier paragraphe où ***inversement*** il montre que la même condition $|b_{11} b_{22} b_{33}| = 1$ est ***nécessaire*** et ***suffisante*** pour que les 2 Raumgitters $\mu_i \mathfrak{r}_i$ et $\mu'_i \mathfrak{r}'_i$ soient équivalents (que le parallélipipède construit sur $\mu'_i \mathfrak{r}'_i$ soit parallélipipède élémentaire du premier Gitter et inversement), et déduit alors de là une preuve ***rigoureuse*** et ***complète*** de l'égalité des parallélipipèdes et des parallélogrammes élémentaires.

1) Pour que la figure (Raumgitter) construite sur les arêtes $\mu_i \mathfrak{r}_i$ soit équivalente à celle construite sur les arêtes $\mu'_i \mathfrak{r}'_i$, leurs relations — nécessairement à coefficients entiers $b_{ik}$ et $\frac{B_{ik}}{B} \equiv \beta_{ik}$ — étant

$$\text{(I)} \quad \begin{aligned} \mu'_1 \mathfrak{r}'_1 &= \mu_1 b_{11} \mathfrak{r}_1 + \mu_2 b_{12} \mathfrak{r}_2 + \mu_3 b_{13} \mathfrak{r}_3 \\ \mu'_2 \mathfrak{r}'_2 &= \mu_1 b_{21} \mathfrak{r}_1 + \mu_2 b_{22} \mathfrak{r}_2 + \mu_3 b_{23} \mathfrak{r}_3 \\ \mu'_3 \mathfrak{r}'_3 &= \mu_1 b_{31} \mathfrak{r}_1 + \mu_2 b_{32} \mathfrak{r}_2 + \mu_3 b_{33} \mathfrak{r}_3 \end{aligned} \qquad \text{et} \qquad \text{(II)} \quad \begin{aligned} \mu_1 \mathfrak{r}_1 &= \mu'_1 \frac{B_{11}}{B} \mathfrak{r}'_1 + \mu'_2 \frac{B_{21}}{B} \mathfrak{r}'_2 + \mu'_3 \frac{B_{31}}{B} \mathfrak{r}'_3 \\ \mu_2 \mathfrak{r}_2 &= \mu'_1 \frac{B_{12}}{B} \mathfrak{r}'_1 + \mu'_2 \frac{B_{22}}{B} \mathfrak{r}'_2 + \mu'_3 \frac{B_{32}}{B} \mathfrak{r}'_3 \\ \mu_3 \mathfrak{r}_3 &= \mu'_1 \frac{B_{13}}{B} \mathfrak{r}'_1 + \mu'_2 \frac{B_{23}}{B} \mathfrak{r}'_2 + \mu'_3 \frac{B_{33}}{B} \mathfrak{r}'_3 \end{aligned}$$

***il suffit, que le déterminant $B$ des neuf $b_{ik}$ en valeur absolue soit égal à l'unité.***

En effet $|b_{11} b_{22} b_{33}| = 1 = |B_{11} B_{22} B_{33}|$

nous apprend 1° que dans chacune des six équations les trois coefficients entiers sont premiers entre eux, et 2°, qu'à cause des relations (I—II)

$$\mu_1 x_1 \mathfrak{r}_1 + \mu_2 x_2 \mathfrak{r}_2 + \mu_3 x_3 \mathfrak{r}_3 = \mu'_1 (B_{11} x_1 + B_{12} x_2 + B_{13} x_3) \mathfrak{r}'_1 + \mu'_2 (—) \mathfrak{r}'_2 + \mu'_3 (—) \mathfrak{r}'_3$$
$$\mu'_1 y_1 \mathfrak{r}'_1 + \mu'_2 y_2 \mathfrak{r}'_2 + \mu'_3 x_3 \mathfrak{r}'_2 = \mu_1 (b_{11} y_1 + b_{21} y_2 + b_{31} y_3) \mathfrak{r}_1 + \mu_2 (—) \mathfrak{r}_2 + \mu_3 (—) \mathfrak{r}_3$$

*) Schönflies, Kristallsysteme und Krystallstructur, pag. 272. Brawais Mémoires sur les systèmes de points distribués régulièrement dans l'espace.

ce qui nous prouve *que tout point à coordonnées entières du premier système est encore un point à coordonnées entières du second et inversement* c. q. f. d.

2) La condition $B=1$ est encore *nécessaire.* En effet nous avons

$$B.b_{11}=B_{22}B_{33}-B_{23}B_{32}=B^2(\beta_{22}\beta_{33}-\beta_{23}\beta_{32}) \quad \text{ou encore}$$

$$b_{11}=B.(\beta_{22}\beta_{33}-\beta_{23}\beta_{32}) \quad b_{12}=B.(\beta_{31}\beta_{23}-\beta_{21}\beta_{33}) \quad b_{13}=B.(\beta_{21}\beta_{32}-\beta_{31}\beta_{22})$$

Les trois nombres $b_{11}b_{12}b_{13}$ ne seraient pas premiers entre eux, si $|B|\mp 1$.

3) Corollaire. Multipliant les équations I, nous trouvons à cause de $B=\pm 1$

$$\mu'_1\mu'_2\mu'_3[\mathfrak{r}'_1\mathfrak{r}'_2\mathfrak{r}'_3]=\pm\mu_1\mu_2\mu_3[\mathfrak{r}_1\mathfrak{r}_2\mathfrak{r}_3]$$

c'est-à-dire que les volumes des parallélépipèdes équivalents sont égaux.

Nous trouvons absolument de la même manière, lorsqu'un plan $\varepsilon$ contient les vecteurs-unités $\varrho_1, \varrho_2; \varrho'_1, \varrho'_2$, que les systèmes de parallélogrammes construits sur les côtés $\sigma_1\varrho_1, \sigma_2\varrho_2$ d'une part, et sur

$$\text{(III)} \begin{cases} \sigma'_1\varrho'_1=\sigma_1 b_{11}\varrho_1+\sigma_2 b_{12}\varrho_2 \\ \sigma'_2\varrho'_2=\sigma_1 b_{21}\varrho_1+\sigma_2 b_{22}\varrho_2 \end{cases}$$

d'autre part, ne sont équivalents que lorsque $B\equiv|b_{11}b_{22}|=\pm 1$.

Corollaire. En formant le produit vectoriel des équations III, nous obtenons B étant 1 ,

$$\sigma'_1\sigma'_2|V\varrho'_1\varrho'_2|=\sigma_1\sigma_2(b_{11}b_{22}-b^2_{12})|V\varrho_1\varrho_2|=\sigma_1\sigma_2|V\varrho_1\varrho_2|$$

c'est-à-dire que les surfaces des parallélogrammes élémentaires équivalents sont égales.

Or, les vecteurs $\sigma_1\varrho_1$ et $\sigma_2\varrho_2$ etant encore

$$\mu_1 x_1\mathfrak{r}_1+\mu_2 x_2\mathfrak{r}_2+\mu_3 x_3\mathfrak{r}_3 \quad \text{et} \quad \mu_1 y_1\mathfrak{r}_1+\mu_2 y_2\mathfrak{r}_2+\mu_3 y_3\mathfrak{r}_3$$

la surface du parallélogramme peut encore s'écrire

$$|V(\mu_1 x_1\mathfrak{r}_1+\ldots.)(\mu_1 y_1\mathfrak{r}_1+\ldots.)|=\frac{\mu_1\mu_2\mu_3}{M}\sqrt{\Omega(x_2y_3-x_3y_2,\ldots\ldots\ldots)}.$$