

Zeitschrift: Mémoires de la Société Fribourgeoise des Sciences Naturelles.
Mathématique et physique = Mitteilungen der Naturforschenden
Gesellschaft in Freiburg. Mathematik und Physik

Herausgeber: Société Fribourgeoise des Sciences Naturelles

Band: 2 (1912)

Artikel: Application des coordonnées sphériques homogènes à la
cristallographie géométrique

Autor: Bays, Séverin

Kapitel: X

DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-306718>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 08.02.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

CHAPITRE X

62. Sur la surface de la sphère de rayon-unité, les 4 droites sphériques qu'y découpent 4 faces quelconques du complexe cristallin, ou les 4 points d'affleurement de 4 quelconques de ses arêtes, nous fournissent donc par déduction zonale, le réseau complet des droites et points d'affleurement du complexe total, c'est-à-dire par le fait les *directions* dans l'espace de toutes les faces et arêtes possibles du cristal. Rapporté au système de référence de ces 4 faces ou arêtes élémentaires, le faisceau de ces directions est le faisceau (au sens figuré) des faces et arêtes à indices *rationnels*; mais comme jusqu'ici *seuls* les *rapports* des constantes μ_i et ν_i et des indices u_i et x_i entraient en ligne de compte, ni les longueurs des 3 axes-unités sur les arêtes fondamentales, ni les tenseurs des arêtes et des vecteurs des faces ne sont encore déterminés d'une manière *absolue*.

Puisque la longueur des arêtes et la grandeur des faces du cristal n'est en principe limitée en aucune manière, fixons donc arbitrairement la longueur de l'arête-unité ou la grandeur du triangle découpé sur la face-unité déplacée parallèlement à elle-même (fig. 8), et développons maintenant dans l'espace le noyau du complexe cristallin constitué de ses faces et arêtes élémentaires, et représentant son système complet de référence, tel que nous l'avons établi au chapitre V.

63. La déduction zonale partant des 4 faces élémentaires l_0, l_1, l_2, l_3 , nous donne successivement (fig. 7), en ne tenant compte que des *faces*, les faces p_1, p_2, p_3 ; puis p'_1, p'_2, p'_3 harmoniquement conjuguées avec les premières par rapport au couple correspondant de faces fonda-

La déduction zonale partant des 4 arêtes élémentaires r_0, r_1, r_2, r_3 , nous donne successivement (fig. 7), en ne tenant compte que des *arêtes*, les arêtes π_1, π_2, π_3 puis π'_1, π'_2, π'_3 , harmoniquement conjuguées avec les premières par rapport au couple correspondant d'arêtes fonda-

mentales et dont l'intersection commune est l'arête harmonique r_0 , choisie comme arête-unité du système. L'aire fixée du triangle découpé sur la face-unité (déplacée parallèlement à elle-même), déterminant la grandeur de ce déplacement, et par le fait les longueurs absolues des 3 axes-unités, le complexe élémentaire de la fig. 7 fournit dans l'espace, pour peu qu'on suive ce développement on s'en rend compte sans peine, précisément tous les éléments du parallélépipède que nous allons construire. Les 3 flèches sont dans la direction des plans p_i et p'_i , au point du croisement des arêtes π_i et π'_i ; les 3 arêtes intermédiaires ($p_2 p_3$), ($p_3 p_1$), ($p_1 p_2$) sont les 3 gran-

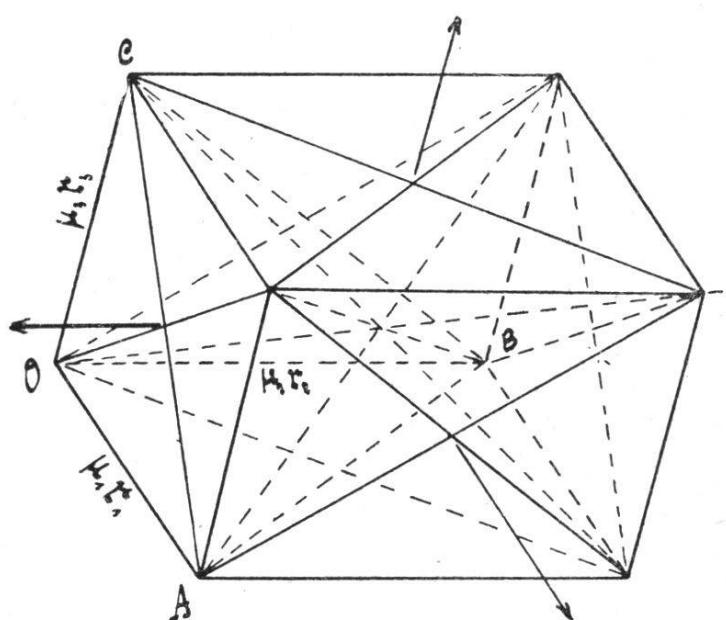
mentales, et dont le plan commun est la face harmonique l_0 , choisie comme face-unité du système.

La longueur fixée de l'arête-unité, déterminant par le fait les longueurs absolues des 3 axes-unités et ainsi les dimensions relatives des faces et arêtes déduites, le complexe élémentaire de la fig. 7 fournit dans l'espace, pour peu qu'on suive ce développement on s'en rend compte sans peine, précisément tous les éléments du parallélépipède que nous allons construire. Les 3 flèches sont dans la direction des plans p_i et p'_i ; les 3 plans intermédiaires ($\pi_2 \pi_3$), ($\pi_3 \pi_1$), ($\pi_1 \pi_2$) sont les 6 plans triangulaires (2 à 2 parallèles) au-

Arêtes π_3 et π'_3 harmon. conjug. avec r_1 et r_2
et plans p_3 et p'_3 harmon. conjug. avec l_1 et l_2

Fig. 9.

Arêtes π_2 et π'_2 , harmon. conjug. à r_3 et r_1 et plans p_2 et p'_2 harmon. conjug. à l_3 et l_1 .



Arêtes π_1 et π'_1 harmon. conj. avec r_2 et r_3
et plans p_1 et p'_1 harmon. conj. avec l_2 et l_3 .

des diagonales autres que r_0 , qui est elle-même l'arête-unité, intersection commune des 3 plans π_i .

tres que le plan diagonal (ABC), qui est lui-même la face-unité, plan commun des 3 arêtes π_i .

Juxtaposons ensuite sur les 6 faces de ce parallélépipède primordial 6 parallélépipèdes identiques, et de là continuons à les entasser à l'indéfini dans toutes les directions possibles. Les *sommets* de tous ces parallélépipèdes constituent un assemblage de *points* régulièrement distribués dans l'espace sur les 3 directions parallèles aux arêtes fondamentales du parallélépipède primitif. Les longueurs de ces arêtes étant prises comme axes-unités, tous ces points ont des coordonnées numériques entières, et de toute évidence ce sont là les seuls points jouissants de cette propriété par rapport à ces axes. Nous appellerons désormais un *Raumgitter** un tel assemblage de points dans l'espace, et le parallélépipède primordial qui l'engendre, le parallélépipède *élémentaire* du Raumgitter.

64. Faisons pour le moment abstraction de toutes les arêtes et diagonales parallèles des parallélépipèdes et ne laissons subsister que le faisceau de droites partant du point 0 dans toutes les directions et le réunissant à chaque sommet du Gitter. Tous les points dont les coordonnées numériques ont entre elles les mêmes rapports se trouvent évidemment sur la même droite, et le premier point sur chaque droite à partir du point 0 a nécessairement pour ses 3 coordonnées des nombres premiers entre eux, sinon elles seraient divisibles par un facteur commun, et nous aurions sur la même droite un point plus rapproché que le premier du point 0.

Or toute arête possible du cristal est représentée par le vecteur :

$$\mu_1 x_1 r_1 + \mu_2 x_2 r_2 + \mu_3 x_3 r_3$$

dans lequel, les μ_i étant précisément les longueurs prises pour axes-

¹⁾ J'ai employé le terme allemand : *Raumgitter* ou *Gitter* tout court au lieu des termes français équivalents : assemblage réticulaire ou réseau spatial et me suis réservé le mot français : *réseau* tout court pour signifier la même chose dans le plan (§ 67) au lieu des termes : plan réticulaire ou réseau plan, uniquement pour avoir à ma disposition 2 mots très courts essentiellement distincts pour les répéter dès maintenant aussi souvent qu'il sera nécessaire dans la suite de mon travail en toute facilité et sans crainte de confusion. J'emploierai indifféremment les expressions : points et sommets pour signifier les points constituant le Raumgitter.

unités des 3 arêtes fondamentales, les indices x_i ne sont autre chose que les coordonnées numériques des différents points de cette arête rapportée à ces mêmes axes. Mais ces indices x_i sont rationnels pour toutes les arêtes du cristal et uniquement pour elles ; c'est-à-dire sont entiers pour certains points de ces arêtes et des fractions ayant entre elles les mêmes rapports que ces nombres entiers pour les points intermédiaires. Puisque les sommets du Gitter sont tous les points et les seuls de coordonnées numériques entières, il s'ensuit très clairement que *toutes* les arêtes du cristal et *seules* ces arêtes passent par ces points, et donc que ce faisceau (au sens large) de droites joignant le point O à tous les points du Gitter, n'est autre que le faisceau ou le *complexe* même des arêtes *possibles* du cristal.

D'après ce que nous venons de dire plus haut, chacune de ces arêtes est ainsi le support d'une infinité de sommets du Raumgitter, dont le premier à partir du point O a pour ses coordonnées numériques, c'est-à-dire pour indices x_i , des nombres premiers entre eux. Le segment OT qui est la distance du point O à ce premier point sur chaque arête, mesure en outre la distance constante entre 2 points successifs quelconques de cette même arête ; en effet, ces points successifs sont obtenus à partir du premier en multipliant par 2, par 3, etc., ses coordonnées numériques premières entre elles, c'est-à-dire en doublant, triplant, etc., ses composantes sur les axes-unités et par le fait sa propre distance au point O. Nous appelons ce segment OT le segment *primitif* ou le *paramètre* de l'arête qui le supporte, et sa longueur nous est immédiatement donnée par la racine carrée de la forme quadratique $\omega(xx)$, les indices x_i y prenant les valeurs *absolues entières* et *premières* entre elles, correspondantes au premier point sur cette arête.

Enfin puisque seuls tous les plans de jonction de 2 quelconques de ses arêtes, sont des faces possibles du cristal, seuls tous les plans que déterminent avec le point O, 2 sommets quelconques du Gitter, sont ces faces possibles, et en un mot, le complexe des faces et arêtes cristallines n'est autre que celui des *droites* et des *plans* passant par le point O, et déterminés par chaque sommet ou chaque couple de sommets du Raumgitter.

65. La situation du point O est absolument celle de tous les points du Gitter ; chacun de ces points est en effet le sommet com-

mun de 8 parallélépipèdes élémentaires, sur lesquels s'entassent à l'indéfini dans toutes les directions des parallélépipèdes identiques. Le *groupement* dans l'espace des sommets du Gitter est donc le même autour de chaque point qu'il est autour du point O ; en d'autres termes, *chaque* point doit être entouré par les autres d'une manière absolument *pareille* à celle dont est entouré son voisin. Ce principe, évident à première vue, qui n'est en quelque sorte que l'expression même de la construction parallélipédique du Raumgitter et que nous pourrions appeler le principe de la *symétrie* du Gitter (en prêtant pour l'instant au mot : symétrie, un sens plus large qu'un sens exactement géométrique), est la source de toutes ses autres propriétés qui en découlent d'ailleurs sans aucune difficulté.

66. Sur chaque arête l'un quelconque A des points qu'elle supporte (fig. 10), exige de concert avec le point O, puisque chacun d'eux doit être entouré sur cette arête de la même manière que l'autre, un autre point dans chaque sens à une distance égale à la distance des 2 premiers, et par le fait une infinité d'autres points successifs, à la même distance sur chacune des demi-droites indéfinies que constitue l'arête partagée par le point O. Si c'est le sommet T le plus rapproché de O, qui est pris avec lui comme points de départ, nous avons ainsi l'infinité même des sommets du Raumgitter situés sur les 2 demi-droites de l'arête, à distance constante égale au paramètre, comme nous venons déjà plus ou moins de l'établir au § précédent ; les indices x_i des points que supporte la demi-droite opposée sont les indices pris en signe contraire des points de la demi-droite directe.

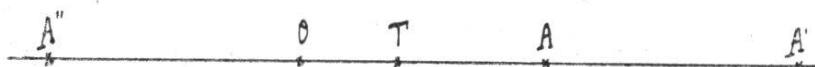


Fig. 10.

Puisque maintenant chaque autre point du Raumgitter doit être dans une situation identique à celle du point O et des différents points de l'arête considérée, chaque autre sommet du Gitter doit donc se trouver sur une *rangée* parallèle de points de même équidistance. L'ensemble des points du Raumgitter total est donc complètement représenté par un faisceau (au sens propre du terme) d'un nombre indéfini de rangées de points équidistants, toutes parallèles et identiques à la rangée de points que constitue l'une des *arêtes* quelconques du complexe.

67. Sur chaque plan P les 3 points qui le déterminent, les 2 points quelconques A et B du Gitter et le point O , nécessitent à eux trois, puisque chacun d'eux doit être entouré dans ce plan de la même manière qu'ils entourent chacun des 2 autres, 9 autres points répartis sur le pourtour du triangle des 3 premiers, à des distances égales aux côtés du triangle (fig. 11) et par le fait une infinité d'autres points sur ce même plan, distribués régulièrement comme les sommets de parallélogrammes identiques, juxtaposés dans toutes les directions, et formant ainsi une sorte de *réseau à maille parallélogrammique*, qui est pour le plan qui le supporte exactement ce qu'est le Raumgitter pour l'espace qu'il remplit.

Si nous prenons comme points de départ avec le point O , les 2 sommets du plan qui en sont les plus rapprochés, sans être évidemment sur la même droite avec le point, les sommets du réseau parallélogrammique obtenu doivent absorber sans exception tous les points du Raumgitter situés sur ce plan. S'il existait en effet en quelque endroit du plan, un point du Gitter localisé à l'intérieur ou sur l'un des côtés du parallélogramme *générateur*, en vertu du principe de la symétrie, ce point se retrouverait pour chacun des parallélogrammes identiques (fig. 12), et de quelque manière que ce soit, nous aurions un point plus rapproché du point O que les 2 sommets T et T' .

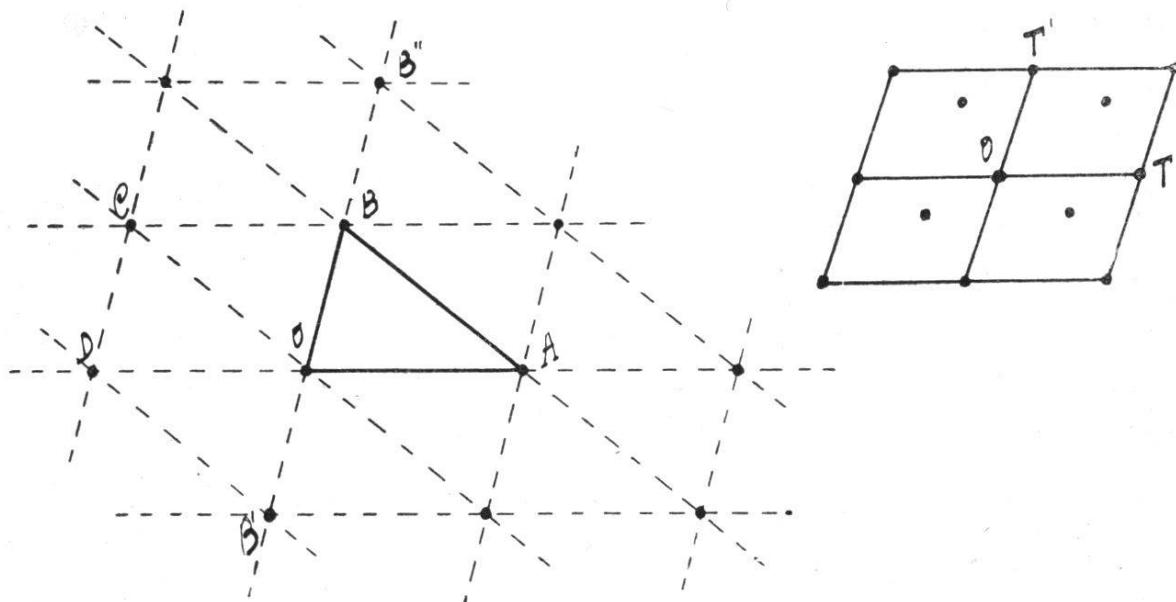


Fig. 11 et 12.

Le réseau parallélogrammique construit sur les 2 paramètres *minima* du plan, implique donc à lui seul l'infinité des réseaux parallélogrammiques à maille plus grande, que détermine avec le point O

chaque autre couple de points quelconques A et B situés dans ce plan. Nous l'appellerons, simplement par rapport aux autres et pour l'en distinguer, le réseau *primitif* du plan P, et son parallélogramme génératrice, celui dont les juxtapositions successives fournissent *tous* les sommets du réseau, le parallélogramme *élémentaire* du même plan.

Si nous prenons comme réseau primitif du plan P, le réseau parallélogrammique de la fig. 11, en y supposant que les points A et B sont les points T et T', on voit sans peine déjà que chaque couple de côtés (OA, OB), (BO, OC), (OC, OD) du triangle OTT' détermine également ce parallélogramme élémentaire. Tous les couples de *paramètres*, dont le parallélogramme correspondant fournit ainsi par ses juxtapositions successives tous les sommets du réseau, seront appelés les couples *conjugués* du réseau primitif donné.

68. Les mêmes conclusions sont à tirer ici qu'à la fin du paragraphe précédent. Puisque la situation du point O et des différents points du réseau primitif du plan P, doit être de nouveau celle de tous les points du Gitter, chacun d'eux doit être sommet d'un réseau de même direction dans l'espace et en tout pareil au premier. La superposition d'un nombre indéfini de réseaux parallèles et identiques au réseau primitif d'un *plan* quelconque du complexe, représente donc également l'ensemble des points du Raumgitter total.

Dans un même plan, les rangées parallèles à la même arête sont équidistantes (§ 66).

Si nous prenons en effet le point B, (fig. 11), le plus rapproché de O, sur l'arête OB doit exister le point B' tel que $OB = OB'$, et pour chaque arête menée par le point O, les 2 rangées parallèles passant par B et B' en seront équidistantes. La même preuve se répète pour les points B, B'' et O, et ainsi de suite. Toutes les rangées d'un réseau parallèles à la même arête, sont

Dans l'espace, les réseaux parallèles au réseau primitif d'un même plan sont équidistants.

Sur une arête menée par le point O en un point B quelconque du premier réseau supérieur, nous avons un point B' à égale distance en sens contraire, et pour chaque plan passant par le point O, les 2 réseaux parallèles par B et B' en sont équidistants. La même preuve se répète pour les points B, B'' et O, et ainsi de suite. Tous les réseaux d'un Raumgitter, parallèles au même plan,

donc équidistantes, et les 2 rangées passant par B et B', étant les plus rapprochées de l'arête, sont appelées ses 2 rangées *limitrophes*.

sont donc équidistants et les 2 réseaux contenant B et B', étant les plus rapprochés du plan, sont appelés ses 2 réseaux plans *limitrophes*.

L'ensemble de tous les points qui constituent le Raumgitter peut donc se concevoir sous une double infinité de formes que l'on se représente sans peine, et chaque élément du complexe *détermine* l'une de ces formes.

A chaque *arête* correspond le faisceau constitué du nombre indéfini de ses rangées parallèles et identiques de points équidistants ; la distance de ces rangées est indéterminée, mais dans un même plan elles sont équidistantes ; et si nous donnons avec le point O, la position du point A déterminant l'arête et son paramètre, et celle d'un point B quelconque de l'une de l'infinité des rangées *limitrophes* qui l'entourent, il est facile de se rendre compte que le réseau primitif lui-même du plan (OAB) est entièrement déterminé (§ 70).

A chaque *plan* correspond le système de ses réseaux parallèles en nombre indéfini, dont la maille a ses côtés parallèles et égaux à ceux du parallélogramme élémentaire du plan. Ces réseaux parallèles sont équidistants ; et si, avec les 3 points O, A et B déterminant le plan et son réseau primitif, nous donnons la position d'un 4^{me} point C quelconque de l'un des réseaux *limitrophes*, la position de tous les réseaux parallèles et ainsi de tous les points du Gitter, est par le fait encore complètement déterminée (§ 75).

69. Si nous revenons maintenant aux définitions données à la fin du § 67, l'unique condition à laquelle doit satisfaire un parallélogramme d'un réseau pour être *élémentaire*, est donc qu'il ne renferme à lui seul que 4 points du Gitter situés en chacun de ses sommets ; ses juxtapositions successives reproduisent en effet dans ce cas nécessairement tous les sommets du réseau.

De cette condition découle immédiatement que les *aires* de tous les parallélogrammes élémentaires d'un réseau sont *égales*. En effet sur une certaine surface indéfinie* du réseau suffisamment grande, à chaque

*) Cette démonstration donnée dans; Sommerfeld, Geometrische Cristallographie, p. 84, telle quelle, n'est pas rigoureuse au point de vue mathématique. Voir plus loin § 80.

parallélogramme élémentaire p' , comme à chaque parallélogramme élémentaire p , correspond exactement 4 sommets du Gitter. Le nombre des sommets contenus dans cette surface considérée étant naturellement le même qu'elle soit constituée de parallélogrammes p ou de parallélogrammes p' , il s'ensuit que le nombre des parallélogrammes p constituant cette surface est égal au nombre des parallélogrammes p' constituant la même surface, et donc que les *aires* de ces parallélogrammes sont *équivalentes*, comme il fallait le démontrer.

70. La même condition nous permet d'ailleurs de déterminer très facilement tous les parallélogrammes *élémentaires*, c'est-à-dire tous les couples *conjugués* d'un réseau parallégrammique donné; et l'on verra sans peine que les résultats trouvés se trouvent en réalité impliqués déjà dans les conclusions du § 68.

Les côtés d'un parallélogramme élémentaire ne sauraient être d'abord que des segments primitifs ou des paramètres du réseau. Soit donc un paramètre quelconque OT ; un autre paramètre ne pourra former avec lui un couple conjugué que s'il se termine sur l'une ou l'autre de ses 2 rangées *limitrophes*. S'il dépasse en effet l'une de ses 2 rangées, ce ne peut être qu'en passant par un sommet du réseau, et dans ce cas ce n'est plus un paramètre, ou en coupant la rangée entre 2 de ses points successifs, mais alors le côté parallèle par le sommet T la coupe également entre les 2 points suivants, et le parallélogramme, enfermant un point dans son intérieur, n'est plus élémentaire.

A *chaque paramètre* d'un réseau correspond donc une double infinité de parallélogrammes élémentaires, ou une double infinité de paramètres *conjugués*, se terminant en chaque point des 2 rangées limitrophes. Sans même qu'il nous soit nécessaire de tenir compte de la preuve du § précédent, tous ces parallélogrammes élémentaires ont déjà la même surface; ils ont en effet la même base, le paramètre de l'arête, et des hauteurs égales, la distance de l'arête à la rangée limitrophe.

Mais si nous la faisons intervenir, puisque toutes les aires *égales* des parallélogrammes élémentaires du réseau sont comprises entre un paramètre quelconque et ses 2 rangées limitrophes, les longueurs des paramètres sont en raison inverse de la distance des rangées parallèles, ou en d'autres termes: la *densité* des points sur les

rangées parallèles d'un réseau est en *raison inverse* de leur équidistance.

Naturellement si au paramètre OT, nous accouplons un segment, primitif ou non, se terminant en un point quelconque de l'une de ses 2^{mes} rangées parallèles, le parallélogramme qu'ils déterminent est double du parallélogramme élémentaire. Il serait triple, quadruple, etc., pour les rangées suivantes, et en s'exprimant encore d'une manière générale.

A chaque paramètre du réseau correspond une double infinité de parallélogrammes *multiples* du parallélogramme élémentaire ; le nombre qui représente ce multiple donne le rang de la rangée parallèle qui porte le côté du parallélogramme opposé au paramètre.

71. Nous obtenons sans peine la surface d'un parallélogramme quelconque et celle du parallélogramme élémentaire d'un plan, dès que nous sont donnés ses indices.

En effet soient x'_i et x''_i les indices ou coordonnées de 2 points quelconques du réseau d'un plan représentant une face cristalline donnée. Le tenseur du produit vectoriel des 2 vecteurs coïncidant avec les segments que ces 2 points interceptent jusqu'au point O sur les 2 arêtes qu'ils déterminent :

$$V(\mu_1 x'_1 \mathbf{r}_1 + \mu_2 x'_2 \mathbf{r}_2 + \mu_3 x'_3 \mathbf{r}_3)(\mu_1 x''_1 \mathbf{r}_1 + \mu_2 x''_2 \mathbf{r}_2 + \mu_3 x''_3 \mathbf{r}_3) \\ = \mu_2 \mu_3 \sin a_1 (x'_2 x''_3 - x'_3 x''_2) \mathbf{l}_1 + \mu_3 \mu_1 \sin a_2 (x'_3 x''_1 - x'_1 x''_3) \mathbf{l}_2 + \mu_1 \mu_2 \sin a_3 (x'_1 x''_2 - x'_2 x''_1) \mathbf{l}_3$$

nous donne la surface du parallélogramme construit sur ces 2 segments pour côtés, en fonction des valeurs $(x' x'')_1$, $(x' x'')_2$, $(x' x'')_3$, nécessairement entières puisque les x'_i , x''_i sont entières comme coordonnées de points du Gitter, et qui sont les *indices* mêmes (31) du plan donné.

Les produits $\mu_2 \mu_3 \sin a_1$, $\mu_3 \mu_1 \sin a_2$, $\mu_1 \mu_2 \sin a_3$, n'étant autres que les surfaces des parallélogrammes élémentaires des plans fondamentaux \mathbf{l}_1 , \mathbf{l}_2 , \mathbf{l}_3 , que nous pouvons appeler *parallélogrammes-unités*, nous constatons d'abord, puisque les vecteurs $\mu_2 \mu_3 \sin a_1 \mathbf{l}_1$, $\mu_3 \mu_1 \sin a_2 \mathbf{l}_2$, $\mu_1 \mu_2 \sin a_3 \mathbf{l}_3$, sont les vecteurs représentant ces parallélogrammes-unités, que ces indices *entiers* du plan ou de la face cristalline en question sont en même temps les *composantes* du vecteur d'un parallélogramme quelconque de cette face par rapport à ceux des parallélogrammes-unités ; tout comme les indices x_i sont les composantes entières par rapport aux axes-unités $\mu_i \mathbf{r}_i$ du segment

pris sur l'arête correspondante à partir du point O, jusqu'à l'un quelconque des points du Gitter qu'elle supporte.

Si nous mettons en facteur le quotient constant $\frac{\mu_1 \mu_2 \mu_3}{M}$, le produit vectoriel trouvé s'écrit comme autrefois (§ 31) :

$$\frac{\mu_1 \mu_2 \mu_3}{M} \left[\nu_1 (x' x'')_1 l_1 + \nu_2 (x' x'')_2 l_2 + \nu_3 (x' x'')_3 l_3 \right] \quad (37)$$

et la surface du parallélogramme cherché est représentée par la racine de la forme quadratique :

$$\frac{\mu_1 \mu_2 \mu_3}{M} \sqrt{Q[(x' x'') (x' x'')]}$$

72. Or les 2 triples d'indices entiers x'_i et x''_i peuvent prendre, et cela indépendamment l'un de l'autre, toutes les valeurs entières satisfaisant le couple d'équations :

$$\begin{aligned} x'_1 u_1 + x'_2 u_2 + x'_3 u_3 &= 0 \\ x''_1 u_1 + x''_2 u_2 + x''_3 u_3 &= 0 \end{aligned} \quad (I)$$

ou, ce qui revient au même le système équivalent

$$\begin{aligned} x'_2 x'_3 - x'_3 x'_2 &= \varrho u_1 \\ \text{des 3 équations : } x'_3 x''_1 - x'_1 x''_3 &= \varrho u_2 \\ x'_1 x''_2 - x'_2 x''_1 &= \varrho u_3 \end{aligned}$$

dans lesquelles, les u_i étant les indices *entiers premiers entre eux* du plan, ϱ doit être, puisque ces composantes ϱu_i sont entières, un facteur entier quelconque de proportionnalité.

Si donc nous donnons un triple quelconque x'_1, x'_2, x'_3 d'indices entiers premiers entre eux, (c'est-à-dire représentant un paramètre), satisfaisant son équation correspondante (I), chaque triple x'_1, x''_2, x''_3 , satisfaisant la seconde équation, combiné avec le premier dans les 3 équations suivantes, fournira une certaine valeur du facteur de proportionnalité ϱ , et son segment correspondant déterminera avec le paramètre donné un certain parallélogramme dont l'aire a pour mesure :

$$\varrho \frac{\mu_1 \mu_2 \mu_3}{M} \sqrt{(uu)}$$

Or nous venons de voir au § 70 que tous les segments déterminant avec un paramètre donné des parallélogrammes égaux, se

terminent en chaque point de l'une de ses rangées parallèles. Tous les triples x_i'' qui, satisfaisant l'équation correspondante (I), donnent une même valeur de ϱ , sont donc les indices des points d'une même rangée; et x_1' , x_2' , x_3' , étant les indices *donnés* de l'extrémité d'un paramètre quelconque, le système des 3 équations :

$$\begin{aligned}x_2'x_3'' - x_3'x_2'' &= Cu_1 \\x_3'x_1'' - x_1'x_3'' &= Cu_2 \\x_1'x_2'' - x_2'x_1'' &= Cu_3\end{aligned}$$

représente dans le plan d'indices u_i (toujours entiers et premier entre eux), *chacune* de ses rangées *parallèles*. C est un facteur constant pour la même rangée, mais prenant successivement toutes les valeurs entières; à 2 valeurs absolues égales, mais de signe contraire, correspondent les 2 rangées parallèles à la même distance de part et d'autre du paramètre, c'est-à-dire de l'arête donnée.

Naturellement pour la plus petite valeur de C qui est $C = \pm 1$, les x_i'' doivent prendre également parmi d'autres leurs plus petites valeurs, (en tous cas seules des valeurs premières entre elles et les points correspondants ne sauraient être tous sur une rangée qui ne serait pas limitrophe); et les rangées correspondantes sont les 2 rangées les plus rapprochées de l'arête. Les 3 équations :

$$\begin{aligned}x_2'x_3'' - x_3'x_2'' &= \pm u_1 \\x_3'x_1'' - x_1'x_3'' &= \pm u_2 \\x_1'x_2'' - x_2'x_1'' &= \pm u_3\end{aligned}$$

représente donc les 2 rangées *limitrophes*, et le produit $\frac{\mu_1\mu_2\mu_3}{M}\sqrt{\varrho(uu)}$, dans lequel les u_i sont les indices entiers et premiers entre eux d'une face quelconque, est la surface du parallélogramme *élémentaire* du réseau qu'elle contient.