Zeitschrift: Mémoires de la Société Fribourgeoise des Sciences Naturelles. Mathématique et physique = Mitteilungen der Naturforschenden Gesellschaft in Freiburg. Mathematik und Physik

Herausgeber: Société Fribourgeoise des Sciences Naturelles

Band: 2 (1912)

Artikel: Application des coordonnées sphériques homogènes à la cristallographie géométrique

Autor: Bays, Sévérin

Kapitel: IX

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-306718

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 08.02.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

CHAPITRE IX

56. Les *coordonnées projectives* de la droite ou du point sur la sphère ne sont les *indices* de la face et de l'arête correspondante (§ 13) qu'autant que les constantes ν_i (et μ_i) déterminent elles-mêmes une face (et une arête-unité) prises dans le complexe des faces et arêtes possibles du cristal. Pour tout autre choix purement arbitraire de ces constantes, les valeurs u_i et x_i n'ont donc plus rien de l'essentielle propriété des indices que constitue leur *rationnalité,* mais restent néanmoins pour la face et l'arête qu'elles déterminent ce qu'elles sont pour la droite sphérique et le point correspondant : les simples *coordonnées projectives* de cette face et de cette arête, rapportées au trièdre des 3 faces fondamentales avec des constantes ν_i (et μ_i arbitrairement choisies.)

Or tout ce qui a été établi jusqu'ici des indices, en dehors précisément de ce qui touche à leur rationnalité qui seul exige expressément pour sa démonstration que la face (et l'arête-unité) soient une face (et une arête du complexe), est complètement indépendant des valeurs ν_i et μ_i à la seule condition que celles-ci satisfassent aux relations essentielles $\mu_i \nu_i = \sin A_i$. Les résultats des §§ (23—55) subsistent donc intégralement pour toutes les combinaisons $\mu_i \nu_i$ satisfaisant à cette condition, c'est-à-dire pour chacun de cette infinité de systèmes possibles de coordonnées projectives auxquels nous pouvons rapporter notre complexe du cristal.

57. Un seul de ces systèmes nous offre ici un intérêt particulier ; celui pour lequel nous choisissons les constantes :

$$\mu_i = 1 \qquad\qquad \nu_i = \sin A_i$$

qui remplissent donc ainsi la condition nécessaire $\mu_i \nu_i = \sin A_i$. Le

point-unité sur la sphère étant alors le barycentre * du triangle sphérique que déterminent les $\mathfrak{r}_i$ (la droite-unité est sa polaire trilinéaire ou le grand cercle parallèle à la circonférence circonscrite à ce même triangle), on obtient ainsi directement les coordonnés barycentriques de Möbius de la droite et du point sur la sphère **, tandis que pour la face et l'arête correspondante les valeurs u_i et x_i ne sont autres que ce que Liebisch appelle tout court les *coordonnées* des faces et arêtes du cristal.

En effet dans ce cas, les rapports des valeurs u_i et x_i que nous fournit le § 26, se réduisent à :

$$u_1 : u_2 : u_3 = \cos\vartheta_1 : \cos\vartheta_2 : \cos\vartheta_3 \tag{33}$$
$$x_1 : x_2 : x_3 = \sin A_1 \cos\vartheta_1 : \sin A_2 \cos\vartheta_2 : \sin A_3 \cos\vartheta_3$$

Les coordonnées d'une *face* sont donc les *cosinus* des angles d'incidence de cette face par rapport aux *arêtes* fondamentales, ou un multiple positif quelconque de ces valeurs ; les coordonnées d'une *arête* sont les *cosinus, multiplié* chacun par le *sin* A_i *** correspondant, des angles d'incidence de cette arête par rapport aux *faces* fondamentales, ou un multiple positif quelconque de ces valeurs.

58. La relation fondamentale $\mu_i \nu_i = \sin A_i$ étant donc satisfaite, quoique non contenues l'une et l'autre dans le complexe des faces et arêtes possibles, l'arête-unité, ou plutôt la droite menée du point 0 au point-unité sur la sphère, n'en est pas moins l'harmonique de la face-unité, c'est-à-dire du plan du grand cercle qui est la droite-sphérique unité, et réciproquement. La relation :

$$u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3 = 0$$

qui est l'équation en *indices entiers* de la face u_i ou de l'arête x_i, reste l'équation en *coordonnées quelconques* de cette même face et

---

*) Si les vecteurs-unités $\mathfrak{r}_1$ $\mathfrak{r}_2$ $\mathfrak{r}_3$ déterminent les 3 sommets d'un triangle sphérique, le vecteur : $\mathfrak{r}_1 + \mathfrak{r}_2 + \mathfrak{r}_3$ détermine son barycentre, puisqu'il représente un point situé sur chacune des droites joignant un sommet au milieu du côté opposé.

**) M. Daniëls : Essai de géométrie sphérique en coordonnées projectives p. 45.

***) Liebisch multiplie par le sin a_i correspondant, mais ce sont les mêmes coordonnées puisque nous avons sin A_i .·. sin a_i, la seule différence qui en résulte est que plus loin nous trouverons la valeur Δ, sinus du trièdre des $\mathfrak{l}_i$ (§ 9), où Liebisch trouve la valeur D du sinus du trièdre des $\mathfrak{r}_i$, puisque $\Delta = MD$.

de cette même arête ; enfin identiquement au résultat du § 27, les coordonnées d'une face quelconque du cristal sont les valeurs *inverses* de celles de son arête harmonique, et celles d'une arête les valeurs inverses de celles de sa face harmonique,

Les coordonnées de *l'arête* intersection des 2 faces de coordonnées u_i et u'_i, sont encore les déterminants de second ordre :

$$\begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ u'_2 & u'_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} u_3 & u_1 \\ u'_3 & u'_1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ u'_1 & u'_2 \end{vmatrix}$$

Celles d'une 3me face tautozonale aux 2 faces données, sont également de la forme :

$$u_i - \lambda u'_i$$

mais le paramètre λ a perdu, comme les valeurs u_i et u'_i, sa propriété d'être nécessairement rationnel.

Enfin celles des 4 faces tautozonales u_i, u'_i, u''_i, u'''_i, satisfont encore l'égalité (19) :

$$(uu'u''u''') = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{(uu'')_i}{(u'u'')_i} : \frac{(uu''')_k}{(u'u''')_k}$$

et, quoique valeurs quelconques, représentent par ce rapport de leurs quotients ainsi constitués, la valeur rationnelle du rapport anharmonique des 4 faces.

Les coordonnées de la *face*-jonction des 2 arêtes de coordonnées x_i et x'_i, sont encore les déterminants de second ordre :

$$\begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ x'_2 & x'_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_3 & x_1 \\ x'_3 & x'_1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_1 & x_3 \\ x'_1 & x'_2 \end{vmatrix}$$

Celles d'une 3me arête coplanaire aux 2 arêtes données, sont également de la forme :

$$x_i - \lambda x'_i$$

mais le paramètre λ a perdu, comme les valeurs x_i et x'_i, sa propriété d'être essentiellement rationnel.

Enfin celles des 4 arêtes coplanaires x_i, x'_i, x''_i, x'''_i, satisfont encore l'égalité (19) :

$$(xx'x''x''') = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{(xx'')_i}{(x'x'')_i} : \frac{(xx''')_k}{(x'x''')_k}$$

et, quoique valeurs quelconques, représentent par ce rapport de leurs quotients ainsi constitués, la valeur rationnelle du rapport anharmonique des 4 arêtes.

59. Il serait facile de continuer à développer ainsi ce parallélisme complet entre les coordonnées et les indices des faces et arêtes du cristal pour les problèmes du § 38 et pour les autres résultats des chapitres précédents ; ce parallélisme est d'ailleurs naturellement le fait, comme nous l'avons dit, de chacun de l'infinité de systèmes possibles de coordonnées *projectives* auxquels nous pouvons rapporter le complexe du cristal. Il est par contre une particularité intéressante dans le système des *coordonnées* et y apportant une simplification qui ne se retrouve pour aucun autre système :

Le tenseur u_4 du vecteur de la face quelconque de coordonnées u_i :

$$\nu_1 u_1 \mathfrak{l}_1 + \nu_2 u_2 \mathfrak{l} + \nu_3 u_3 \mathfrak{l}_3$$

qui nous est fourni dans le cas général par la racine carrée de la forme quadratique $\Omega(uu)$, nous est en outre donné dans ce cas-ci, directement et sous une forme bien plus simple, par les 3 relations du § 14 :

$$u_4 \cos \vartheta_1 = \nu_1 u_1 \sin h_1$$
$$u_4 \cos \vartheta_2 = \nu_2 u_2 \sin h_2$$
$$u_4 \cos \vartheta_3 = \nu_3 u_3 \sin h_3$$

Si nous y substituons en effet aux valeurs u_i les coordonnées $\cos \vartheta_i$, chacune des 3 équations nous donne également :

$$u_4 = \sqrt{\Omega(uu)} = \Delta$$

ou mieux, pour éviter toute confusion, en écrivant dans la forme Ω, dont les coefficients ν_i sont les valeurs $\sin A_i$, les expressions mêmes $\cos \vartheta_i$:

$$\Delta = \sqrt{\Omega(\cos \vartheta \cos \vartheta)} \qquad (34)$$

Le tenseur x_4 du vecteur de l'arête quelconque de coordonnées x_i :

$$\mu_1 x_1 \mathfrak{r}_1 + \mu_2 x_2 \mathfrak{r}_2 + \mu_3 x_3 \mathfrak{r}_3$$

qui nous est fourni dans le cas général par la racine carrée de la forme quadratique $\omega(xx)$, nous est en outre donné dans ce cas-ci, directement et sous une forme bien plus simple, par les 3 relations du § 14 :

$$x_4 \cos \vartheta_1 = \mu_1 x_1 \sin h_1$$
$$x_4 \cos \vartheta_2 = \mu_2 x_2 \sin h_2$$
$$x_4 \cos \vartheta_3 = \mu_3 x_3 \sin h_3$$

Si nous y substituons en effet aux valeurs x_i les coordonnées $\sin A_i \cos \vartheta_i$, chacune des 3 équations nous donne également :

$$x_4 = \sqrt{\omega(xx)} = \Delta$$

ou mieux, pour éviter toute confusion, en écrivant dans la forme ω, dont les coefficients μ_i sont les valeurs $\mu_i = 1$, les expressions mêmes $\sin A_i \cos \vartheta_i$:

$$\Delta = \sqrt{\omega(\sin A \cos \vartheta . \sin A \cos \vartheta)} \quad (34)$$

Donc si les valeurs u_i et x_i sont les coordonnées *cos* ϑ_i et *sin* A_i *cos* ϑ_i des faces et arêtes du cristal, la racine de la fonction quadratique de ces coordonnées $\sqrt{\Omega(uu)}$ et $\sqrt{\omega(xx)}$, (nous écrivons u_i et x_i, également dans le paragraphe suivant, uniquement pour simplifier l'écriture), qui est le tenseur des vecteurs déterminant chaque face et chaque arête, est une quantité *constante,* indépendante de ces coordonnées u_i et x_i, et égale au *sinus* du *trièdre* des vecteurs des faces fondamentales.

60. Dans ces conditions, les résultats des §§ 29, 30, 32, etc., exprimés en coordonnées, nous donnent également les propriétés ou les simplifications suivantes.

Pour toute arête x_i non coplanaire à la face u_i, la fonction linéaire de leurs coordonnées ainsi constituée :

$$u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3 = \Delta \cos \vartheta \tag{35}$$

est constamment égale au produit du *sinus* du *trièdre* des l_i par le *cosinus* de l'*angle* d'incidence de l'arête par rapport à la face.

Le *cosinus* et le *sinus* de l'angle φ de 2 faces de coordonnées u_i et u'_i deviennent; en d'autres termes, entre le cosinus ou le sinus de l'angle φ de 2 faces, leurs $\cos \vartheta_i$ et $\cos \vartheta'_i$ correspondants, et les constantes angulaires du complexe, il existe les 2 relations suivantes :

$$\cos \varphi = \frac{\Omega(uu')}{\Delta^2}$$

$$\sin \varphi = \frac{M.\sqrt{\omega[(uu')(uu')]}}{\Delta}$$

Le *paramètre* λ des coordonnées de la 3me face u''_i tautozonale aux 2 faces données u_i et u'_i, est indépendant des tenseurs $\sqrt{\Omega(uu)}$ et $\sqrt{\Omega(u'u'}$ des vecteurs de ces faces :

$$\lambda = \frac{\sin uu''}{\sin u'u''}$$

Enfin la fonction linéaire suivante, constituée des coordonnées d'une *face* et de celles de son *arête* normale :

$$u_1\Omega'(u_1)+u_2\Omega'(u_2)+u_3\Omega'(u_3)=\Omega(uu)$$

est également une constante, et si nous remarquons que les valeurs $\Omega'(u_i)$ sont les valeurs absolues Δx_i (§ 41), la fonction des

Le *cosinus* et le *sinus* de l'angle ψ de 2 arêtes de coordonnées x_i et x'_i deviennent; en d'autres termes, entre le cosinus ou le sinus de l'angle ψ de 2 arêtes, leurs $\cos \vartheta_i$ et $\cos \vartheta'_i$ correspondants, et les constantes angulaires du complexe, il existe les 2 relations suivantes :

$$\cos \psi = \frac{\omega(xx')}{\Delta^2}$$

$$\sin \psi = \frac{\sqrt{\Omega[(xx')(xx')]}}{M.\Delta^2}$$

Le *paramètre* λ des coordonnées de la 3me arête x''_i coplanaire aux 2 arêtes données x_i et x'_i, est indépendant des tenseurs $\sqrt{\omega(xx)}$ et $\sqrt{\omega(x'x')}$ des vecteurs de ces arêtes :

$$\lambda = \frac{\sin xx''}{\sin x'x''}$$

Enfin la fonction linéaire suivante, constituée des coordonnées d'une *arête* et de celles de sa *face* normale :

$$x_1\omega'(x_1)+x_2\omega'(x_2)+x_3\omega'(x_3)=\omega(xx)$$

est également une constante, et si nous remarquons que les valeurs $\omega'(x_i)$ sont les valeurs absolues Δu_i (§ 41), la fonction des

seules coordonnées ($\cos\vartheta_i$ et $\sin A_i \cos\vartheta_i$) :

$$u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3 = \Delta \quad (36)$$

est encore une *constante* égale au *sinus* Δ des vecteurs des faces fondamentales.

seules coordonnées ($\sin A_i \cos\vartheta_i$ et $\cos\vartheta_i$) :

$$x_1u_1 + x_2u_2 + x_3u_3 = \Delta \quad (36)$$

est encore une *constante* égale au *sinus* Δ des vecteurs des faces fondamentales.

61. Tout ce qui vient d'être dit des coordonnées trouve son application immédiate dans le cas même des *indices* du premier complexe cristallin. En choisissant comme faces fondamentales les 3 faces du cube et comme face-unité la face de l'octaèdre dont l'arête harmonique *possible* est la diagonale du cube passant par le point 0 et détermine le barycentre du triangle sphérique des $\mathfrak{r}_i$, les constantes du complexe *cubique* satisfont en effet les conditions du système des coordonnées :

$$\mu_i = 1 \qquad \nu_i = \sin A_i = 1$$
$$\cos a_i = 0 \qquad \Delta = 1 \qquad \cos A_i = 0$$

Pour le système de référence choisi, les *indices entiers* des faces et arêtes du complexe cubique et leurs *coordonnées* sont donc les *mêmes valeurs.*

Pour chaque *face* du complexe, les $\cos\vartheta_i$ de ses angles d'incidence par rapport aux *arêtes* fondamentales, sont donc entre eux dans le rapport de 3 nombres *entiers* quelconques :

$$\cos\vartheta_1 : \cos\vartheta_2 : \cos\vartheta_3 = m : n : p$$

Pour chaque face du complexe, sa forme quadratique $\Omega(\cos\vartheta \cos\vartheta)$ correspondante, ainsi simplifiée puisque $\sin A_i = 1$ et $\cos A_i = 0$, se réduit à l'unité :

$$\cos^2\vartheta_1 + \cos^2\vartheta_2 + \cos^2\vartheta_3 = 1$$

Pour chaque *arête* du complexe, les $\cos\vartheta_i$ de ses angles d'incidence par rapport aux *faces* fondamentales (puisque $\sin A_i = 1$), sont donc entre eux dans le rapport de 3 nombres *entiers* quelconques :

$$\cos\vartheta_1 : \cos\vartheta_2 : \cos\vartheta_3 = m : n : p$$

Pour chaque arête du complexe, sa forme quadratique $\omega(\cos\vartheta \cos\vartheta)$ correspondante, ainsi simplifiée puisque $\sin A_i = 1$ et $\cos a_i = 0$, se réduit à l'unité :

$$\cos^2\vartheta_1 + \cos^2\vartheta_2 + \cos^2\vartheta_3 = 1$$

C'est la relation originelle entre la somme des carrés des cosinus-directeurs d'un vecteur quelconque par rapport au système d'axes rectangulaires passant par son origine.

Les indices de chaque *face* du complexe cubique sont ceux de son arête normale (§ 43). Les angles d'incidence de chaque face par rapport aux arêtes fondamentales étant les angles d'incidence de l'arête normale par rapport aux faces fondamentales avec le système de référence choisi, les coordonnées c'est-à-dire les cos ϑ_i de chaque face du complexe cubique sont également les coordonnées ou les cos ϑ_i de son arête normale. Leur fonction linéaire de la forme (36) a donc encore pour valeur Δ c'est-à-dire l'unité.

Les indices de chaque *arête* du complexe cubique sont ceux de sa face normale (§ 43). Les angles d'incidence de chaque arête par rapport aux faces fondamentales étant les angles d'incidence de la face normale par rapport aux arêtes fondamentales avec le système de référence choisi, les coordonnées c'est-à-dire les cos ϑ_i de chaque arête du complexe cubique sont également les coordonnées ou les cos ϑ_i de sa face normale. Leur fonction linéaire de la forme (36) a donc encore pour valeur Δ c'est-à-dire l'unité.

Le cos ϑ de l'angle d'incidence d'une face et d'une arête quelconque est la fonction des cos ϑ_i de cette face et de cette arête :

$$\cos\vartheta = \cos\vartheta_1 . \cos\vartheta_1 + \cos\vartheta_2 . \cos\vartheta_2 + \cos\vartheta_3 . \cos\vartheta_3$$

Le *cosinus* et le *sinus* de l'angle de 2 faces sont les fonctions de leurs cos ϑ_i et cos ϑ_i' :

$$\cos\varphi = \cos\vartheta_1\cos\vartheta_1' + \cos\vartheta_2'\cos\vartheta_2' + \cos\vartheta_3 c.\vartheta_3'$$

$$\sin\varphi = \sqrt{(\cos\vartheta_2\cos\vartheta_3' - \cos\vartheta_3 c.\vartheta_2')^2 + ()^2 + ()^2}$$

Le *cosinus* et le *sinus* de l'angle de 2 arêtes sont les fonctions de leurs cos ϑ_i et cos ϑ_i' :

$$\cos\psi = \cos\vartheta_1\cos\vartheta_1' + \cos\vartheta_2\cos\vartheta_2' + \cos\vartheta_3 c.\vartheta_3'$$

$$\sin\psi = \sqrt{(\cos\vartheta_2\cos\vartheta_3' - \cos\vartheta_3 c.\vartheta_2')^2 + ()^2 + ()^2}$$

Enfin puisque les coordonnées du complexe cubique sont également ses indices (naturellement uniquement toujours pour le système de référence choisi), le paramètre λ de ces coordonnés est une quantité *rationnelle* et puisque nous avons : (§ précédent)

$$\lambda = \frac{\sin uu''}{\sin u'u''}$$

le *rapport* de *position* de chaque *face* du complexe cubique par rapport à 2 autres quelconques qui lui sont tautozonales, est une quantité *rationnelle*. Ce paramètre rationnel peut donc valoir 1 ou —1 ; par le fait pour chaque couple de faces d'une zone quelconque du complexe cubique, la face *bissectrice* est une face *possible* et appartenant au complexe.

$$\lambda = \frac{\sin xx''}{\sin x'x''}$$

le *rapport* de *position* de chaque *arête* du complexe cubique par rapport à 2 autres quelconques qui lui sont coplanaires, est une quantité *rationnelle*. Ce paramètre rationnel peut donc valoir 1 ou —1 ; par le fait pour chaque couple d'arêtes d'une zone quelconque d'arêtes du complexe cubique, l'arête *bissectrice* est une arête *possible* et appartenant au complexe.