Zeitschrift: Mémoires de la Société Fribourgeoise des Sciences Naturelles. Mathématique et physique = Mitteilungen der Naturforschenden Gesellschaft in Freiburg. Mathematik und Physik

Herausgeber: Société Fribourgeoise des Sciences Naturelles

Band: 2 (1912)

Artikel: Application des coordonnées sphériques homogènes à la cristallographie géométrique

Autor: Bays, Sévérin

Kapitel: VIII

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-306718

CHAPITRE VIII

47. De la simple considération du complexe total des faces et arêtes possibles du cristal, nous avons déjà tiré la conclusion au dernier paragraphe du chap. IV (§ 22), que les indices de ces faces et arêtes restent *entiers* quelles que soient les 4 d'entre elles (faces ou arêtes) auxquelles on les rapporte. Si donc les $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i, \delta_i$, sont les indices de 4 faces ou de 4 arêtes du complexe par rapport à un premier système, et les $\alpha'_i, \beta'_i, \gamma'_i, \delta'_i$ leurs indices par rapport à un second système de référence (§ 27^{bis}), ceux-ci sont *entiers* comme les premiers; et puisque 4 faces ou 4 arêtes, dont il n'y en ait pas 3 tautozonales ou coplanaires, sont nécessaires et suffisantes pour déterminer complètement un complexe de faces et arêtes cristallines, le problème du changement des indices se pose ainsi d'une manière tout à fait générale: Etant donnés les 4 couples d'indices $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i, \delta_i$ et $\alpha'_i, \beta'_i, \gamma'_i, \delta'_i$, et les *éléments* complets du 1^er^ système de référence, déterminer successivement:

1° les nouveaux indices u'_i de toute face d'anciens indices u_i.
2° les éléments du système des nouvelles faces élémentaires.
3° les nouveaux indices x'_i de toute arête d'anciens indices x_i.
4° les éléments du système des nouvelles arêtes élémentaires.

Nous ne traitons que le cas où les indices donnés sont ceux de 4 *faces*, dont il n'y en a donc pas trois tautozonales; le cas où ils seraient les indices de 4 *arêtes*, non 3 à 3 coplanaires, se traiterait d'une manière identique et en tout parallèlement au premier.

48. Les 3 premières faces rapportées successivement au système *connu* $\mathfrak{l}_0, \mathfrak{l}_1, \mathfrak{l}_2, \mathfrak{l}_3$ et au système *inconnu* $\mathfrak{l}'_0, \mathfrak{l}'_1, \mathfrak{l}'_2, \mathfrak{l}'_3$, (mais par rapport auquel nous connaissons cependant leurs indices), nous donnent, les facteurs $\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3$ satisfaisant aux équations:

$$\Omega(\alpha\alpha) = \varrho_1^2\, \Omega'(\alpha'\alpha'),\quad \Omega(\beta\beta) = \varrho_2^2\, \Omega'(\beta'\beta'),\quad \Omega(\gamma\gamma) = \varrho_3^2\, \Omega'(\gamma'\gamma')$$

et par le fait rendant égaux les tenseurs des 2 membres correspondants, les 3 égalités vectorielles suivantes :

$$\begin{aligned} \nu_1\alpha_1\mathfrak{l}_1 + \nu_2\alpha_2\mathfrak{l}_2 + \nu_3\alpha_3\mathfrak{l}_3 &= \varrho_1(\nu'_1\alpha'_1\mathfrak{l}'_1 + \nu'_2\alpha'_2\mathfrak{l}'_2 + \nu'_3\alpha'_3\mathfrak{l}'_3) \\ \nu_1\beta_1\mathfrak{l}_1 + \nu_2\beta_2\mathfrak{l}_2 + \nu_3\beta_3\mathfrak{l}_3 &= \varrho_2(\nu'_1\beta'_1\mathfrak{l}'_1 + \nu'_2\beta'_2\mathfrak{l}'_2 + \nu'_3\beta'_3\mathfrak{l}'_3) \\ \nu_1\gamma_1\mathfrak{l}_1 + \nu_2\gamma_2\mathfrak{l}_2 + \nu_3\gamma_3\mathfrak{l}_3 &= \varrho_3(\nu'_1\gamma'_1\mathfrak{l}'_1 + \nu'_2\gamma'_2\mathfrak{l}'_2 + \nu'_3\gamma'_3\mathfrak{l}'_3) \end{aligned} \tag{24}$$

Désignons un peu arbitrairement, il est vrai, mais d'une manière avantageuse pour rendre claire et simple notre transformation, par les symboles $|\alpha_1\alpha_2\alpha_3|$, $|\varrho\alpha'_1\alpha_2\alpha_3|$ $|\varrho\alpha'_2\alpha_2\alpha_3|$, etc., les déterminants de 3^me^ ordre :

$$D_0 \equiv \begin{vmatrix} \alpha_1\alpha_2\alpha_3 \\ \beta_1\beta_2\beta_3 \\ \gamma_1\gamma_2\gamma_3 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} \varrho_1\alpha'_1\,\alpha_2\,\alpha_3 \\ \varrho_2\beta'_1\,\beta_2\,\beta_3 \\ \varrho_3\gamma'_1\,\gamma_2\,\gamma_3 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} \varrho_1\alpha'_2\alpha_2\alpha_3 \\ \varrho_2\beta'_2\beta_2\beta_3 \\ \varrho_3\gamma'_2\gamma_2\gamma_3 \end{vmatrix}, \text{ etc.,}$$

et multiplions successivement nos 3 égalités par les déterminants mineurs dans D_0 de α_1, β_1, γ_1, de α_2, β_2, γ_2, et de α_3, β_3, γ_3. Nous obtenons ainsi sans aucune difficulté 3 nouvelles équations qui sont l'expression directe des vecteurs $\mathfrak{l}_i$ et des constantes ν_i, composantes de la première face-unité, en fonction des vecteurs $\mathfrak{l}'_i$ et des composantes ν'_i de la nouvelle face-unité :

$$\begin{aligned} D_0\nu_1\mathfrak{l}_1 &= \nu'_1\,|\varrho\alpha'_1\alpha_2\alpha_3|\,\mathfrak{l}'_1 + \nu'_2\,|\varrho\alpha'_2\alpha_2\alpha_3|\,\mathfrak{l}'_2 + \nu'_3\,|\varrho\alpha'_3\alpha_2\alpha_3|\,\mathfrak{l}'_3 \\ D_0\nu_2\mathfrak{l}_2 &= \nu'_1\,|\alpha_1\varrho\alpha'_1\alpha_3|\,\mathfrak{l}'_1 + \nu'_2\,|\alpha_1\varrho\alpha'_2\alpha_3|\,\mathfrak{l}'_2 + \nu'_3\,|\alpha_1\varrho\alpha'_3\alpha_3|\,\mathfrak{l}'_3 \\ D_0\nu_3\mathfrak{l}_3 &= \nu'_1\,|\alpha_1\alpha_2\varrho\alpha'_1|\,\mathfrak{l}'_1 + \nu'_2\,|\alpha_1\alpha_2\varrho\alpha'_2|\,\mathfrak{l}'_2 + \nu'_3\,|\alpha_1\alpha_2\varrho\alpha'_3|\,\mathfrak{l}'_3 \end{aligned} \tag{25}$$

Si nous substituons, dans le vecteur de la face d'indices quelconques u_i par rapport au premier système :

$$D_0(\nu_1 u_1\mathfrak{l}_1 + \nu_2 u_2\mathfrak{l}_2 + \nu_3 u_3\mathfrak{l}_3)$$

aux valeurs $D_0\nu_i\mathfrak{l}_i$ celles que nous venons de trouver, nous obtenons le vecteur de cette même face rapporté au système des $\mathfrak{l}'_i$:

$$\begin{aligned} &\nu'_1(u_1\,|\varrho\alpha'_1\alpha_2\alpha_3| + u_2\,|\alpha_1\varrho\alpha'_1\alpha_3| + u_3\,|\alpha_1\alpha_2\varrho\alpha'_1|)\,\mathfrak{l}'_1 \\ +\, &\nu'_2(u_1\,|\varrho\alpha'_2\alpha_2\alpha_3| + u_2\,|\alpha_1\varrho\alpha'_2\alpha_3| + u_3\,|\alpha_1\alpha_2\varrho\alpha'_2|)\,\mathfrak{l}'_2 \\ +\, &\nu'_3(u_3\,|\varrho\alpha'_3\alpha_2\alpha_3| + u_2\,|\alpha_1\varrho\alpha'_3\alpha_3| + u_3\,|\alpha_1\alpha_2\varrho\alpha'_3|)\,\mathfrak{l}'_3 \end{aligned}$$

Et ainsi les quantités entre parenthèses ne sont autres que les nouveaux indices u'_i cherchés, qui d'ailleurs sous forme développée, s'écrivent très bien en déterminant de 4^me^ ordre :

$$u'_1 : u'_2 : u'_3 = \begin{vmatrix} u_1\; u_2\; u_3\; o \\ \alpha_1\alpha_2\alpha_3\varrho_1\alpha'_1 \\ \beta_1\beta_2\beta_3\varrho_2\beta'_1 \\ \gamma_1\gamma_2\gamma_3\varrho_3\gamma'_1 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} u_1\; u_2\; u_3\; o \\ \alpha_1\alpha_2\alpha_3\varrho_1\alpha'_2 \\ \beta_1\beta_2\beta_3\varrho_2\beta'_2 \\ \gamma_1\gamma_2\gamma_3\varrho_3\gamma'_2 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} u_1\; u_2\; u_3\; o \\ \alpha_1\alpha_2\alpha_3\varrho_1\alpha'_3 \\ \beta_1\beta_2\beta_3\varrho_2\beta'_3 \\ \gamma_1\gamma_2\gamma_3\varrho_3\gamma'_3 \end{vmatrix}$$

49. Reste à déterminer maintenant les facteurs ϱ_1, ϱ_2, ϱ_3, autrement que par les 3 équations qui nous ont servi à les poser, et dans lesquelles les formes $\Omega'(\alpha'\alpha')$, etc. sont pour le moment du moins également inconnues, et cela en utilisant précisément le couple d'indices δ_i et δ'_i de la 4^{me} face donnée. Ainsi la première question du problème sera complètement résolue.

Puisque les δ'_i sont les nouveaux indices de la face δ_i, ils doivent donc vérifier l'égalité proportionnelle que nous venons de trouver :

$$\delta'_1 : \delta'_2 : \delta'_3 = \begin{vmatrix} \delta_1 & \delta_2 & \delta_3 & 0 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \varrho_1\alpha'_1 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & \varrho_2\beta'_1 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 & \varrho_3\gamma'_1 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} \delta_1 & \delta_2 & \delta_3 & 0 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \varrho_1\alpha'_2 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & \varrho_2\beta'_2 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 & \varrho_3\gamma'_2 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} \delta_1 & \delta_2 & \delta_3 & 0 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \varrho_1\alpha'_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & \varrho_2\beta'_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 & \varrho_3\gamma'_3 \end{vmatrix}$$

et qui, abstraction faite d'un facteur de proportionnalité, se décompose par rapport aux inconnues ϱ_i en 3 équations partielles, dont nous écrivons encore symboliquement les déterminants-coefficients :

$$\begin{aligned} \delta'_1 &= \varrho_1\alpha'_1\,|\delta\,\beta\,\gamma| + \varrho_2\beta'_1\,|\delta\,\gamma\,\alpha| + \varrho_3\gamma'_1\,|\delta\,\alpha\,\beta| \\ \delta'_2 &= \varrho_1\alpha'_2\,|\delta\,\beta\,\gamma| + \varrho_2\beta'_2\,|\delta\,\gamma\,\alpha| + \varrho_3\gamma'_2\,|\delta\,\alpha\,\beta| \\ \delta'_3 &= \varrho_1\alpha'_3\,|\delta\,\beta\,\gamma| + \varrho_2\beta'_3\,|\delta\,\gamma\,\alpha| + \varrho_3\gamma'_3\,|\delta\,\alpha\,\beta| \end{aligned}$$

Ces 3 équations se résolvent immédiatement, mais comme en réalité, en tant que provenant d'une égalité de rapports, elles ne sont que deux à deux indépendantes l'une de l'autre, nous n'avons le droit d'en tirer de même que les rapports des quantités ϱ_i, pour lesquels nous avons donc en multipliant par le déterminant commun $|\alpha'\beta'\gamma'|$:

$$\varrho_1 : \varrho_2 : \varrho_3 = \frac{|\delta'\,\beta'\gamma'|}{|\delta\ \beta\ \gamma|} : \frac{|\delta'\,\gamma'\alpha'|}{|\delta\ \gamma\ \alpha|} : \frac{|\delta'\,\alpha'\beta'|}{|\delta\ \alpha\ \beta|} \tag{26}$$

Cela nous suffit d'ailleurs pleinement ; dans la proportion plus haut des indices u'_i, les facteurs ϱ_i jouant le même rôle dans chacun des indices et le premier terme de leur colonne étant nul, leurs rapports seuls entrent en ligne de compte. De même dans les proportions que nous trouverons plus loin les impliquant encore, ce ne sera toujours que le rapport de leurs valeurs qu'il nous sera nécessaire de connaître.

Introduisons donc notre résultat dans les déterminants de 4^{me} ordre du § précédent, et nous obtenons directement sous leur forme définitive les indices u'_i de toute face u_i uniquement en fonction des indices de 4 faces rapportées successivement aux 2 systèmes de référence :

$$(26^{bis})\quad \begin{aligned} u'_1 &= \frac{|u\beta\gamma|\,|\delta'\beta'\gamma'|}{|\delta\beta\gamma|}\,\alpha'_1 + \frac{|u\gamma\alpha|\,|\delta'\gamma'\alpha'|}{|\delta\gamma\alpha|}\,\beta'_1 + \frac{|u\alpha\beta|\,|\delta'\alpha'\beta'|}{|\delta\alpha\beta|}\,\gamma'_1 \\ u'_2 &= \frac{|u\beta\gamma|\,|\delta'\beta'\gamma'|}{|\delta\beta\gamma|}\,\alpha'_2 + \frac{|u\gamma\alpha|\,|\delta'\gamma'\alpha'|}{|\delta\gamma\alpha|}\,\beta'_2 + \frac{|u\alpha\beta|\,|\delta'\alpha'\beta'|}{|\delta\alpha\beta|}\,\gamma'_2 \\ u_3 &= \frac{|u\beta\gamma|\,|\delta'\beta'\gamma'|}{|\delta\beta\gamma|}\,\alpha'_3 + \frac{|u\gamma\alpha|\,|\delta'\gamma'\alpha'|}{|\delta\gamma\alpha|}\,\beta'_3 + \frac{|u\alpha\beta|\,|\delta'\alpha'\beta'|}{|\delta\alpha\beta|}\,\gamma'_3 \end{aligned}$$

50. Les ϱ_i ou du moins leurs rapports étant donc établis une fois pour toutes, les autres questions du problème ne présentent maintenant plus aucune difficulté. Continuons à désigner par les expressions $|\varrho\alpha'_1\ \varrho\alpha'_2\ \varrho\alpha'_3|$, $|\alpha_1\ \varrho\alpha'_2\ \varrho\alpha'_3|$, $|\alpha_2\ \varrho\alpha'_2\ \varrho\alpha'_3|$, etc., les déterminants de 3^me^ ordre :

$$\Delta_0 = \begin{vmatrix} \varrho_1\alpha'_1 & \varrho_1\alpha'_2 & \varrho_1\alpha'_3 \\ \varrho_2\beta'_1 & \varrho_2\beta'_2 & \varrho_2\beta'_3 \\ \varrho_3\gamma'_1 & \varrho_3\gamma'_2 & \varrho_3\gamma'_3 \end{vmatrix},\quad \begin{vmatrix} \alpha_1 & \varrho_1\alpha'_2 & \varrho_1\alpha'_3 \\ \beta_1 & \varrho_2\beta'_2 & \varrho_2\beta'_3 \\ \gamma_1 & \varrho_3\gamma'_2 & \varrho_3\gamma'_3 \end{vmatrix},\quad \begin{vmatrix} \alpha_2 & \varrho_1\alpha'_2 & \varrho_1\alpha'_3 \\ \beta_2 & \varrho_2\beta'_2 & \varrho_2\beta'_3 \\ \gamma_2 & \varrho_3\gamma'_2 & \varrho_3\gamma'_3 \end{vmatrix}$$

et inversement de ce que nous avons fait pour notre première transformation, multiplions successivement les 3 égalités vectorielles primitives par les déterminants mineurs dans Δ_0 de $\varrho_1\alpha'_1$, $\varrho_2\beta'_1$, $\varrho_3\gamma'_1$, de $\varrho_1\alpha'_2$, $\varrho_2\beta'_2$, $\varrho_3\gamma'_2$, et de $\varrho_1\alpha'_3$, $\varrho_2\beta'_3$, $\varrho_3\gamma'_3$. Nous obtenons de nouveau sans aucune peine ces 3 équations, qui sont la contrepartie des équations (25) :

$$\begin{aligned} \Delta_0\nu'_1\mathfrak{l}'_1 &= \nu_1|\alpha_1\varrho\alpha'_2\varrho\alpha'_3|\mathfrak{l}_1 + \nu_2|\alpha_2\varrho\alpha'_2\varrho\alpha'_3|\mathfrak{l}_2 + \nu_3|\alpha_3\varrho\alpha'_2\varrho\alpha'_3|\mathfrak{l}'_3 \\ \Delta_0\nu'_2\mathfrak{l}'_2 &= \nu_1|\varrho\alpha'_1\alpha_1\varrho\alpha'_3|\mathfrak{l}_1 + \nu_2|\varrho\alpha'_1\alpha_2\varrho\alpha'_3|\mathfrak{l}_2 + \nu_3|\varrho\alpha'_1\alpha_3\varrho\alpha'_3|\mathfrak{l}_3 \\ \Delta_0\nu'_3\mathfrak{l}'_3 &= \nu_1|\varrho\alpha'_1\varrho\alpha'_2\alpha_1|\mathfrak{l}_1 + \nu_2|\varrho\alpha'_1\varrho\alpha'_2\alpha_2|\mathfrak{l}_2 + \nu_3|\varrho\alpha'_1\varrho\alpha'_2\alpha_3|\mathfrak{l}_3 \end{aligned}\qquad (27)$$

et nous donnent immédiatement les *indices* des nouvelles faces fondamentales cherchées, rapportées au système connu de référence, et en les élevant au carré, le rapport des *composantes* ν'_i de la nouvelle face-unité, que nous écrivons, en faisant encore abstraction du facteur de proportionnalité :

$$\begin{aligned} \nu'^2_1 &= \Omega(|\alpha_1\varrho\alpha'_2\varrho\alpha'_3|\ \ |\alpha_2\varrho\alpha'_2\varrho\alpha'_3|\ \ |\alpha_3\varrho\alpha'_2\varrho\alpha'_3|) \\ \nu'^2_2 &= \Omega(|\varrho\alpha'_1\alpha_1\varrho\alpha'_3|\ \ |\varrho\alpha'_1\alpha_2\varrho\alpha'_3|\ \ |\varrho\alpha'_1\alpha_3\varrho\alpha'_3|) \\ \nu'^2_3 &= \Omega(|\varrho\alpha'_1\varrho\alpha'_2\alpha_1|\ \ |\varrho\alpha'_1\varrho\alpha'_2\alpha_2|\ \ |\varrho\alpha'_1\varrho\alpha'_2\alpha_3|) \end{aligned}\qquad (28)$$

Le calcul de ces dernières formes quadratiques quoique un peu long, n'offre aucune difficulté ; les constantes ν_i et les cos A_{ik} sont les éléments donnés du système des $\mathfrak{l}_i$, et il est facile de voir que dans ce cas-ci comme aussi pour les indices précédents des faces $\mathfrak{l}'_i$, il suffit toujours de la substitution des seuls rapports des facteurs ϱ_i trouvés au § précédent.

51. Avant de passer aux 2 autres questions du problème, appliquons nos résultats au cas particulier où les nouveaux indices α'_i, β'_i, γ'_i, δ'_i sont les valeurs 100, 010, 001, 111, c'est-à-dire au cas où les 4 faces données α_i, β_i, γ_i, δ_i sont prises elles-mêmes comme faces fondamentales du nouveau système de référence.

Les déterminants des équations (27) se réduisent immédiatement, comme cela doit être, aux simples indices α_i, β_i, γ_i des 3 nouvelles faces fondamentales données ; les déterminants $|\delta'\beta'\gamma'|$, $|\delta'\gamma'\alpha'|$, $|\delta'\alpha'\beta'|$ des égalités (26^{bis}) se ramenant à l'unité, toute face d'anciens indices u_i, reçoit pour ses nouveaux indices u'_i :

$$u'_1 : u'_2 : u'_3 = \frac{|u\beta\gamma|}{|\delta\beta\gamma|} : \frac{|u\gamma\alpha|}{|\delta\gamma\alpha|} : \frac{|u\alpha\beta|}{|\delta\alpha\beta|}$$

et enfin les formes quadratiques (28) se simplifiant considérablement, les composantes ν'_i de la nouvelle face-unité, d'anciens indices δ_i, deviennent d'abord, en sortant de la forme correspondante les facteurs $\varrho_i\varrho_k$:

$$\nu'^2_1 : \nu'^2_2 : \nu'^2_3 = \varrho_2^2\varrho_3^2\,\Omega(\alpha\alpha) : \varrho_3^2\varrho_1^2\,\Omega(\beta\beta) : \varrho_1^2\varrho_2^2\,\Omega(\gamma\gamma)$$

et ensuite, en divisant le second membre par le produit $\varrho_1^2\varrho_2^2\varrho_3^2$ et substituant aux ϱ_i les valeurs trouvées de leurs rapports :

$$\nu'_1 : \nu'_2 : \nu'_3 = |\delta\beta\gamma|\sqrt{\Omega(\alpha\alpha)} : |\delta\gamma\alpha|\sqrt{\Omega(\beta\beta)} : |\delta\alpha\beta|\sqrt{\Omega(\gamma\gamma)}$$

Au cas où les indices α_i, β_i, γ_i, δ_i seraient ***réduites***, c'est-à-dire telles que les tenseurs $\sqrt{\Omega(\alpha\alpha)}$, $\sqrt{\Omega(\beta\beta)}$, $\sqrt{\Omega(\gamma\gamma)}$, des vecteurs des faces correspondantes se réduisent à l'unité, le rapport des composantes ν'_i se réduirait également au seul rapport des 3 déterminants que constituent les indices.

52. Les deux dernières questions que nous nous sommes posées se traiteront maintenant sans aucune peine et par le même procédé que nous avons mis à traiter les 2 premières, dès que nous aurons établi, parallèlement aux égalités (24) entre les vecteurs des 3 premières faces données, 3 égalités correspondantes entre les vecteurs des *arêtes* qui déterminent les intersections de ces 3 faces.

Pour cela, multiplions vectoriellement deux à deux et membre à membre ces égalités (24). Si nous appelons A_i, B_i, Γ_i les mineurs du déterminant D_0, (§ 48), correspondants aux α_i, β_i, γ_i et $R_1 A'_i$ $R_2 B'_i$, R_3 Γ'_i, ceux du déterminant Δ_0, (§ 50), correspondants aux $\varrho_1 \alpha'_i$, $\varrho_2 \beta'_i$, $\varrho_3 \gamma'_i$; si nous tenons compte également, comme nous l'avons déjà fait au § 31, des équations (1), (§ 8), et de la relation fondamentale entre les composantes de la face et de l'arête-unité dans chacun des 2 systèmes de référence :

$$\mu_i \nu_i = \sin A_i \qquad\qquad \mu'_i \nu'_i = \sin A'_i \,;$$

si enfin nous négligeons d'écrire aux premiers membres le facteur constant : $\nu_1 \nu_2 \nu_3 : \nu'_1 \nu'_2 \nu'_3$, complètement inutile dans tout ce que nous voulons établir, nous obtenons sans difficulté, entre les vecteurs des arêtes demandées, les 3 nouvelles égalités, complètement homologues des 3 égalités vectorielles (24) :

$$\begin{array}{ll} & \mu_1 A_1 \mathbf{r}_1 + \mu_2 A_2 \mathbf{r}_2 + \mu_3 A_3 \mathbf{r}_3 = R_1 (\mu'_1 A'_1 \mathbf{r}'_1 + \mu'_2 A'_2 \mathbf{r}'_2 + \mu'_3 A'_3 \mathbf{r}'_3) \\ (29) & \mu_1 B_1 \mathbf{r}_1 + \mu_2 B_2 \mathbf{r}_2 + \mu_3 B_3 \mathbf{r}_3 = R_2 (\mu'_1 B'_1 \mathbf{r}'_1 + \mu'_2 B'_2 \mathbf{r}'_2 + \mu'_3 B'_3 \mathbf{r}'_3) \\ & \mu_1 \Gamma_1 \mathbf{r}_1 + \mu_2 \Gamma_2 \mathbf{r}_2 + \mu_3 \Gamma_3 \mathbf{r}_3 = R_3 (\mu'_1 \Gamma'_1 \mathbf{r}'_1 + \mu'_2 \Gamma'_2 \mathbf{r}'_2 + \mu'_3 \Gamma'_3 \mathbf{r}'_3) \end{array}$$

53. Reprenons naturellement pour les déterminants la notation symbolique employée dans la première partie et multiplions successivement ces 3 égalités vectorielles par α_1, β_1, γ_1, par α_2, β_2, γ_2 et par α_3, β_3, γ_3. Nous avons aussitôt, parallèlement aux équations (25), les 3 équations suivantes, qui sont l'expression immédiate des vecteurs $\mathbf{r}_i$ et des constantes μ_i, composantes de la première arête-unité, en fonction des vecteurs $\mathbf{r}'_i$ et des composantes μ'_i de la nouvelle arête-unité :

$$\begin{aligned} D_0 \mu_1 \mathbf{r}_1 &= \mu'_1 |\alpha_1 \varrho\alpha'_2 \varrho\alpha'_3| \mathbf{r}'_1 + \mu'_2 |\varrho\alpha'_1 \alpha_1 \varrho\alpha'_3| \mathbf{r}'_2 + \mu'_3 |\varrho\alpha'_1 \varrho\alpha'_2 \alpha_1| \mathbf{r}'_3 \\ D_0 \mu_2 \mathbf{r}_2 &= \mu'_1 |\alpha_2 \varrho\alpha'_2 \varrho\alpha'_3| \mathbf{r}'_1 + \mu'_2 |\varrho\alpha'_1 \alpha_2 \varrho\alpha'_3| \mathbf{r}'_2 + \mu'_3 |\varrho\alpha'_1 \varrho\alpha'_2 \alpha_2| \mathbf{r}'_3 \\ D_0 \mu_3 \mathbf{r}_3 &= \mu'_1 |\alpha_3 \varrho\alpha'_2 \varrho\alpha'_3| \mathbf{r}'_1 + \mu'_2 |\varrho\alpha'_1 \alpha_3 \varrho\alpha'_3| \mathbf{r}'_2 + \mu'_3 |\varrho\alpha'_1 \varrho\alpha'_2 \alpha_3| \mathbf{r}'_3 \end{aligned} \qquad (30)$$

En substituant dans le vecteur de l'arête d'indices quelconques x_i par rapport au système des $\mathbf{r}_i$:

$$D_0 (\mu_1 x_1 \mathbf{r}_1 + \mu_2 x_2 \mathbf{r}_2 + \mu_3 x_3 \mathbf{r}_3)$$

aux valeurs $D_0 \mu_i \mathbf{r}_i$ celles que nous venons de trouver, nous obtenons le vecteur de cette même arête rapportée au système des $\mathbf{r}'_i$:

$$\begin{aligned}
&\mu'_1(x_1|\alpha_1\varrho\alpha'_2\varrho\alpha'_3| + x_2|\alpha_2\varrho\alpha'_2\varrho\alpha'_3| + x_3|\alpha_3\varrho\alpha'_2\varrho\alpha'_3|\mathfrak{r}'_1\\
+\ &\mu'_2(x_1|\varrho\alpha'_1\alpha_1\varrho\alpha'_3| + x_2|\varrho\alpha'_1\alpha_2\varrho\alpha'_3| + x_3|\varrho\alpha'_1\alpha_3\varrho\alpha'_3|\mathfrak{r}'_2\\
+\ &\mu'_3(x_1|\varrho\alpha'_1\varrho\alpha'_2\alpha_1| + x_2|\varrho\alpha'_1\varrho\alpha'_2\alpha_2| + x_3|\varrho\alpha'_1\varrho\alpha'_2\alpha_3|\mathfrak{r}'_3
\end{aligned}$$

et entre parenthèses ses nouveaux ***indices*** x_i cherchés qui s'écrivent d'ailleurs très bien, en les développant, sous forme de ces déterminants de 3[me] ordre :

$$x'_1 : x'_2 : x'_3 =$$

$$\begin{vmatrix} x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + x_3\alpha_3 & \varrho_1\alpha'_2 & \varrho_1\alpha'_3 \\ x_1\beta_1 + x_2\beta_2 + x_3\beta_3 & \varrho_2\beta'_2 & \varrho_2\beta'_3 \\ x_1\gamma_1 + x_2\gamma_2 + x_3\gamma_3 & \varrho_3\gamma'_2 & \varrho_3\gamma'_3 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} \varrho_1\alpha'_1 & x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + x_3\alpha_3 & \varrho_1\alpha'_3 \\ \varrho_2\beta'_1 & x_1\beta_1 + x_2\beta_2 + x_3\beta_3 & \varrho_2\beta'_3 \\ \varrho_3\gamma'_1 & x_1\gamma_1 + x_2\gamma_2 + x_3\gamma_3 & \varrho_3\gamma'_3 \end{vmatrix}$$

$$: \begin{vmatrix} \varrho_1\alpha'_1 & \varrho_1\alpha'_2 & x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + x_3\alpha_3 \\ \varrho_2\beta'_1 & \varrho_2\beta'_2 & x_1\beta_1 + x_2\beta_2 + x_3\beta_3 \\ \varrho_3\gamma'_1 & \varrho_3\gamma'_2 & x_1\gamma_1 + x_2\gamma_2 + x_3\gamma_3 \end{vmatrix}$$

Comme dans les deux cas des valeurs des indices u'_i et des constantes ν'_i, ce n'est toujours que les rapports des ϱ_i qu'il nous est nécessaire de connaître, et nous pourrions, comme pour les indices u'_i écrire nos déterminants en y introduisant en place des ϱ_i les quotients (26) représentant leurs valeurs ; mais cette substitution est inutile et le résultat est plus élégant de le garder sous cette forme.

54. Si enfin, à l'inverse de nouveau de cette première transformation, nous multiplions successivement les 3 égalités (29) par $\varrho_1\alpha'_1$, $\varrho_2\beta'_1$, $\varrho_3\gamma'_1$, par $\varrho_1\alpha'_2$, $\varrho_2\beta'_2$, $\varrho_3\gamma'_2$ et par $\varrho_1\alpha'_3$, $\varrho_2\beta'_3$, $\varrho_3\gamma'_3$, nous obtenons parallèlement encore aux équations (27), ces 3 dernières égalités :

$$(31)\quad \begin{aligned}
\Delta_0\mu'_1\mathfrak{r}'_1 &= \mu_1\,|\varrho\alpha'_1\alpha_2\alpha_3|\,\mathfrak{r}_1 + \mu_2\,|\alpha_1\varrho\alpha'_1\alpha_3|\,\mathfrak{r}_2 + \mu_3\,|\alpha_1\alpha_2\varrho\alpha'_1|\,\mathfrak{r}_3\\
\Delta_0\mu'_2\mathfrak{r}'_2 &= \mu_1\,|\varrho\alpha'_2\alpha_2\alpha_3|\,\mathfrak{r}_1 + \mu_2\,|\alpha_1\varrho\alpha'_2\alpha_3|\,\mathfrak{r}_2 + \mu_3\,|\alpha_1\alpha_2\varrho\alpha'_2|\,\mathfrak{r}_3\\
\Delta_0\mu'_3\mathfrak{r}'_3 &= \mu_1\,|\varrho\alpha'_3\alpha_2\alpha_3|\,\mathfrak{r}_1 + \mu_2\,|\alpha_1\varrho\alpha'_3\alpha_3|\,\mathfrak{r}_2 + \mu_3\,|\alpha_1\alpha_2\varrho\alpha'_3|\,\mathfrak{r}_3
\end{aligned}$$

Elles nous donnent immédiatement les ***indices*** des nouvelles arêtes fondamentales cherchées par rapport au système connu de référence, et en les élevant au carré le rapport des ***composantes*** μ_i de la nouvelle arête-unité, que nous écrivons de nouveau en faisant abstraction du facteur proportionnel :

$$\begin{aligned}
\mu'^2_1 &= \omega\,(|\varrho\alpha'_1\alpha_2\alpha_3|\ \ |\alpha_1\varrho\alpha'_1\alpha_3|\ \ |\alpha_1\alpha_2\varrho\alpha'_1|)\\
\mu'^2_2 &= \omega\,(|\varrho\alpha'_2\alpha_2\alpha_3|\ \ |\alpha_1\varrho\alpha'_2\alpha_3|\ \ |\alpha_1\alpha_2\varrho\alpha'_2|)\\
\mu'^2_3 &= \omega\,(|\varrho\alpha'_3\alpha_2\alpha_3|\ \ |\alpha_1\varrho\alpha'_3\alpha_3|\ \ |\alpha_1\alpha_2\varrho\alpha'_3|)
\end{aligned}\qquad (32)$$

Comme celles qui représentent les carrés des constantes ν'_i, ces dernières formes quadratiques ne présentent aucune difficulté de calcul; les constantes μ_i et les cos a_{ik} sont les éléments donnés du système des vecteurs $\mathfrak{r}_i$, et dans ce cas-ci encore il est clair à première vue que ce sont seuls les rapports des facteurs ϱ_i qu'il importe de connaître.

55. En terminant, comme nous l'avons fait pour la première partie, appliquons nos résultats au cas particulier où les indices α'_i, β'_i, γ'_i, δ'_i, prennent de nouveau les valeurs 100, 010, 001, 111, c'est-à-dire au cas où les intersections des 3 premières faces données α_i, β_i, γ_i sont les arêtes fondamentales elles-mêmes du nouveau système de référence, et son arête-unité, l'arête harmonique de la 4^{me} face donnée δ_i.

Dans ces conditions, les déterminants du § 53 qui sont les indices x'_i de l'arête d'indices donnés x_i, se réduisent aux expressions suivantes:

$$x'_1 : x'_2 : x'_3 =$$
$$\varrho_2\varrho_3(x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + x_3\alpha_3) : \varrho_3\varrho_1(x_1\beta_1 + x_2\beta_2 + x_3\beta_3) : \varrho_1\varrho_2(x_1\gamma_1 + x_2\gamma_2 + x_3\gamma_3)$$

qui, divisées par le produit $\varrho_1\varrho_2\varrho_3$, prennent en substituant leurs valeurs aux ϱ_i qui restent en dénominateurs, la forme définitive:

$$x'_1 : x'_2 : x'_3 =$$
$$|\delta\beta\gamma|\,(x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + x_3\alpha_3) : |\delta\gamma\alpha|\,(x_1\beta_1 + x_2\beta_2 + x_3\beta_3) : |\delta\alpha\beta|\,(x_1\gamma_1 + x_2\gamma_2 + x_3\gamma_3)$$

Les 3 équations (31) qui nous donnent les indices des nouvelles arêtes fondamentales, deviennent chacune comme il doit en être, une égalité représentant le vecteur d'une arête en fonction des indices donnés des 2 faces dont elle est l'intersection: (§ 31)

$$\frac{1}{\varrho_1}\Delta_0\,\mu'_1\mathfrak{r}'_1 = \mu_1(\beta_2\gamma_3 - \beta_3\gamma_2)\mathfrak{r}_1 + \mu_2(\beta_3\gamma_1 - \beta_1\gamma_3)\mathfrak{r}_2 + \mu_3(\beta_1\gamma_2 - \beta_2\gamma_1)\mathfrak{r}_3$$
$$\frac{1}{\varrho_2}\Delta_0\,\mu'_2\mathfrak{r}'_2 = \mu_1(\gamma_2\alpha_3 - \gamma_3\alpha_2)\mathfrak{r}_1 + \mu_2(\gamma_3\alpha_1 - \gamma_1\alpha_3)\mathfrak{r}_2 + \mu_3(\gamma_1\alpha_2 - \alpha_1\gamma_2)\mathfrak{r}_3$$
$$\frac{1}{\varrho_3}\Delta_0\,\mu'_3\mathfrak{r}'_3 = \mu_1(\alpha_2\beta_3 - \alpha_3\beta_2)\mathfrak{r}_1 + \mu_2(\alpha_3\beta_1 - \alpha_1\beta_3)\mathfrak{r}_2 + \mu_3(\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1)\mathfrak{r}_3$$

Enfin par ce fait le rapport des composantes μ'_i se simplifie de la même manière; il s'écrit d'abord:

$$\mu'^2_1 : \mu'^2_2 : \mu'^2_3 =$$
$$\varrho^2_1\omega\,(\beta_2\gamma_3 - \beta_3\gamma_2 \ldots.) : \varrho^2_2\omega\,(\gamma_2\alpha_3 - \gamma_3\alpha_2 \ldots.) : \varrho^2_3\omega\,(\alpha_2\beta_3 - \alpha_3\beta_2 \ldots.)$$

et en substituant aux ϱ_1^2 leurs valeurs, il devient le rapport des quotients de ces formes quadratiques par le carré du déterminant correspondant :

$$\mu_1'^2 : \mu_2'^2 : \mu_3'^2 =$$

$$\frac{\omega(\beta_2\gamma_3 - \beta_3\gamma_2 \ldots.)}{|\delta\beta\gamma|^2} : \frac{\omega(\gamma_2\alpha_3 - \gamma_3\alpha_2 \ldots.)}{|\delta\gamma\alpha|^2} : \frac{\omega(\alpha_2\beta_3 - \alpha_3\beta_2 \ldots.)}{|\delta\alpha\beta|^2}$$