

**Zeitschrift:** Mémoires de la Société Fribourgeoise des Sciences Naturelles. Mathématique et physique = Mitteilungen der Naturforschenden Gesellschaft in Freiburg. Mathematik und Physik

**Herausgeber:** Société Fribourgeoise des Sciences Naturelles

**Band:** 2 (1912)

**Artikel:** Application des coordonnées sphériques homogènes à la cristallographie géométrique

**Autor:** Bays, Séverin

**Kapitel:** VII

**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-306718>

### Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 08.02.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

## CHAPITRE VII

**41.** Les indices de l'arête *normale* à la face possible :

$$\nu_1 u_1 l_2 + \nu_2 u_2 l_2 + \nu_3 u_3 l_3$$

le vecteur de la face coïncidant avec celui de l'arête, se déduisent immédiatement de l'égalité vectorielle :

$$\nu_1 u_1 l_1 + \nu_2 u_2 l_2 + \nu_3 u_3 l_3 = \mu_1 x_1 r_1 + \mu_2 x_2 r_2 + \mu_3 x_3 r_3$$

En effet, en s'en rapportant toujours aux équations du chap. II' unissant entre eux les vecteurs des faces et des arêtes fondamentales, si nous multiplions scalairement les 2 membres de notre égalité successivement par  $\nu_1 l_1$ ,  $\nu_2 l_2$ ,  $\nu_3 l_3$ , et tenons compte des relations :  $\mu_1 \nu_1 = \sin A_i$  et  $\sin A_i \sin h_i = \Delta$ , nous obtenons :

$$\begin{aligned}\Delta x_1 &= \nu_1^2 u_1 + \nu_1 \nu_2 u_2 \cos A_{12} + \nu_1 \nu_3 u_3 \cos A_{13} \\ \Delta x_2 &= \nu_2^2 u_1 \cos A_{12} + \nu_2 \nu_3 u_3 \cos A_{13} \\ \Delta x_3 &= \nu_3^2 u_1 \cos A_{13} + \nu_3 \nu_2 u_2 \cos A_{23} + \nu_3^2 u_3\end{aligned}$$

ce qui, avec la notation introduite au § 28, nous donne sous une forme extraordinairement simple les indices demandés :

$$(23) \quad x_1 : x_2 : x_3 = \Omega'(u_1) : \Omega'(u_2) : \Omega'(u_3)$$

**42.** Or contrairement à tous ceux dont il a été question jusqu'ici, ces indices trouvés ne jouissent plus du tout nécessairement de l'es-

Les indices de la *face normale* à l'arête possible :

$$\mu_1 x_1 r_1 + \mu_2 x_2 r_2 + \mu_3 x_3 r_3$$

le vecteur de l'arête coïncidant avec celui de la face, se déduisent immédiatement de l'égalité vectorielle :

$$\mu_1 x_1 r_1 + \mu_2 x_2 r_2 + \mu_3 x_3 r_3$$

si nous multiplions scalairement les 2 membres de notre égalité successivement par  $\mu_1 r_1$ ,  $\mu_2 r_2$ ,  $\mu_3 r_3$  et tenons compte des relations :  $\mu_1 \nu_1 = \sin A_i$  et  $\sin A_i \sin h_i = \Delta$ , nous obtenons :

$$\begin{aligned}\Delta u_1 &= \mu_1^2 x_1 + \mu_1 \mu_2 x_2 \cos a_{12} + \mu_1 \mu_3 x_3 \cos a_{13} \\ \Delta u_2 &= \mu_2^2 x_1 \cos a_{12} + \mu_2 \mu_3 x_3 \cos a_{13} \\ \Delta u_3 &= \mu_3^2 x_1 \cos a_{13} + \mu_3 \mu_2 x_2 \cos a_{23} + \mu_3^2 x_3\end{aligned}$$

ce qui, avec la notation introduite au § 28, nous donne sous une forme extraordinairement simple les indices demandés :

$$u_1 : u_2 : u_3 = \omega'(x_1) : \omega'(x_2) : \omega'(x_3) \quad (23)$$

sentelle propriété que nous avons établie au § 20 des indices des faces et arêtes *possibles* du cristal. Les constantes  $\mu_i$  et  $\nu_i$  déterminant la face et l'arête-unité, et les cos  $A_{ik}$  et cos  $a_{ik}$  des angles que font entre elles les faces et arêtes fondamentales sont en effet pour le cas général des quantités irrationnelles quelconques ; les valeurs  $\Omega'(u_i)$  et  $\omega'(x_i)$  qui les impliquent, ne sont donc pas elles-mêmes en général des indices entiers, et par le fait la face ou l'arête normale à une arête ou une face possible, ne sont pas en général elles-mêmes une face ou une arête également possible.

Si par contre un complexe cristallin implique un système de 4 faces, telles que les cos  $A_{ik}$  de leurs angles et les composantes  $\nu_i$  de la face-unité sur les vecteurs des faces fondamentales \*, soient des quantités *rationnelles*, les indices  $\Omega'(u_i)$  de l'arête normale à toute face possible  $u_i$  sont également rationnels. A chaque face de ce complexe correspond donc une arête normale *possible*, et comme cette arête normale appartient au complexe, quelles que soient les 4 de ses faces prises pour point de départ de sa construction zonale, ses indices sont *entiers*, quelles que soient les 4 faces du complexe auxquelles on le rapporte.

Par le fait pour chaque système de référence que fournissent 4 faces quelconques du complexe en question, les coefficients  $\nu_1^2, \nu_1 \nu_2 \cos A_{12}$ , etc., des indices  $\Omega'(u_i)$  que nous avons appelés : (§ 28)

Si par contre un complexe cristallin implique un système de 4 arêtes, telles que les cos  $a_{ik}$  de leurs angles et les composantes  $\mu_i$  de l'arête-unité sur les vecteurs des arêtes fondamentales, soient des quantités *rationnelles*, les indices  $\omega'(x_i)$  de la face normale à toute arête possible  $x_i$  sont également rationnels. A chaque arête de ce complexe correspond donc une face normale *possible*, et comme cette face normale appartient au complexe, quelles que soient les 4 de ses arêtes prises pour point de départ de sa construction zonale, ses indices sont *entiers*, quelles que soient les 4 arêtes du complexe auxquelles on le rapporte.

Par le fait pour chaque système de référence que déterminent 4 arêtes quelconques du complexe en question, les coefficients  $\mu_1^2, \mu_1 \mu_2 \cos a_{12}$ , etc., des indices  $\omega'(x_i)$  que nous avons appelés : (§ 28)

\* Déterminées par les relations  $\mu_i \nu_i = \sin A_i$ , les  $\mu_i$  étant les segments interceptés par la face-unité sur les intersections des faces fondamentales.

$$\Omega_{11}, \Omega_{22}, \Omega_{33}, \Omega_{12}, \Omega_{13}, \Omega_{23}$$

doivent être des quantités *rationnelles*.

$$\omega_{11}, \omega_{22}, \omega_{33}, \omega_{12}, \omega_{13}, \omega_{23}$$

doivent être des quantités *rationnelles*.

**43.** Un seul complexe cristallin réalise totalement la condition énoncée ; le complexe *cubique* pour lequel nous avons (§ 85, V) en choisissant comme faces fondamentales les 3 faces du cube générateur et comme face-unité le plan diagonal déterminant ses 3 arêtes (face de l'octaèdre) :

$$\cos A_1 = \cos A_2 = \cos A_3 = 0$$

$$r_1 = r_2 = r_3 = 1$$

$$\sin A_1 = \sin A_2 = \sin A_3 = 1$$

Pour chaque *face* du complexe cubique l'arête normale est donc une arête *possible*, dont les indices  $\Omega'(u_i)$  se réduisent, dans le cas particulier du système de référence choisi, aux valeurs mêmes des indices de la face :

$$x_1 : x_2 : x_3 = u_1 : u_2 : u_3$$

En conséquence, puisque à chaque couple de faces du complexe, correspond une zone complète de faces possibles, leurs arêtes normales, situées chacune dans le plan commun perpendiculaire à l'axe zonal, déterminent ainsi une face possible du complexe. Par le fait, réciproquement pour chaque axe zonal, c'est-à-dire pour chaque arête du complexe cubique, la face normale est également possible.

en choisissant comme arêtes fondamentales les 3 arêtes du cube générateur et comme arête-unité sa diagonale principale passant par le point 0 :

$$\cos a_1 = \cos a_2 = \cos a_3 = 0$$

$$\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = 1$$

$$\sin A_1 = \sin A_2 = \sin A_3 = 1$$

Pour chaque *arête* du complexe cubique la face normale est une face *possible*, dont les indices  $\omega'(x_i)$  se réduisent, dans le cas particulier du système de référence choisi, aux valeurs mêmes des indices de l'arête :

$$u_1 : u_2 : u_3 = x_1 : x_2 : x_3$$

En conséquence, puisque à chaque couple d'arêtes du complexe, correspond un faisceau [complet d'arêtes possibles, leurs faces normales, passant chacune par l'intersection commune perpendiculaire au plan du faisceau, déterminent ainsi une arête possible du complexe. Par le fait, réciproquement pour chaque faisceau d'arêtes, c'est-à-dire pour chaque face du complexe cubique, l'arête normale est également possible.

Chaque face du complexe cubique fait donc en somme partie d'un système de 3 faces trinormales, comme chacune de ses arêtes est comprise dans un système de 3 arêtes perpendiculaires entre elles. Chaque zone du complexe est telle qu'à chacune de ses faces

correspond une face normale dans la même zone ; chaque faisceau ou *zone d'arêtes* est telle qu'à chacune de ses arêtes correspond une arête perpendiculaire dans la même face. Féodorow appelle zones *isotropes* des zones de faces et d'arêtes cristallines possédant cette propriété, et ce que nous venons de dire s'exprime plus simplement : chacune des zones de faces ou d'arêtes du complexe cubique est une zone *isotrope*.

**44.** Deux autres complexes cristallins (voir § 85) réalisent partiellement la condition du paragraphe 42. En effet, pour le complexe *quadratique*,

en choisissant comme faces fondamentales les 3 faces du prisme droit générateur à base *carrée* et comme face-unité le plan diagonal déterminant ses 3 arêtes (face de la protopyramide), les  $\cos A_{ik}$  et les constances  $\nu_i$  sont les valeurs \* :

$$\begin{aligned}\cos A_1 &= \cos A_2 = \cos A_3 = 0 \\ \nu_1, \nu_2 &= \nu_3 = 1\end{aligned}$$

et les indices  $\Omega'(u_i)$  de l'arête normale à la face possible  $u_i$ , se réduisent, pour ce système de référence choisi, aux rapports des 3 quantités dont la première est essentiellement irrationnelle (remarque du § suivant) :

$$x_1 : x_2 : x_3 = \nu_1^2 u_1 : u_2 : u_3$$

en choisissant comme arêtes fondamentales les 3 arêtes du prisme droit générateur à base *carrée* et comme arête-unité sa diagonale principale passant par le point 0, les  $\cos a_{ik}$  et les constances  $\mu_i$  sont les valeurs :

$$\begin{aligned}\cos a_1 &= \cos a_2 = \cos a_3 = 0 \\ \mu_1, \mu_2 &= \mu_3 = 1\end{aligned}$$

et les indices  $\omega'(x_i)$  de la face normale à l'arête  $x_i$  se réduisent, pour ce système de référence choisi, aux rapports des 3 quantités dont la première est essentiellement irrationnelle (remarque du § suivant) :

$$\nu_1 : \nu_2 : \nu_3 = \mu_1^2 x_1 : x_2 : x_3$$

Pour le complexe *hexagonal* (§ 85, IV), les faces fondamentales étant les 3 faces du prisme droit générateur à base *équilatérale*, et la face-unité le plan diagonal déterminant

arêtes fondamentales étant les 3 arêtes du prime droit générateur à base *équilatérale*, et l'arête-unité la diagonale principale pas-

\* En désignant simplement par la lettre correspondante celle de ses constances qui sont irrationnelles.

ses 3 arêtes (face de la protopyramide hexagonale) les éléments du système sont :

$$\cos A_1 = \frac{1}{2}, \cos A_2 = \cos A_3 = 0$$
$$\nu_1, \nu_2 = \nu_3 = 1$$

et les indices  $\omega'(u_i)$  de l'arête normale sont également les rapports des 3 expressions dont la première est encore irrationnelle (même remarque) :

$$x_1 : x : x_3 = \nu_1 u_1 : (u_2 + \frac{1}{2}u_3) : (\frac{1}{2}u_2 + u_3)$$

Pour l'un comme pour l'autre le premier indice  $u_1$  des faces tauzozonales à l'arête fondamentale  $r_1$  étant nul, les indices de leurs arêtes normales se réduisent aux 2 derniers, et sont ainsi des rapports de quantités rationnelles. Pour chaque face de la zone fondamentale  $r_1$ , l'arête normale est donc possible, et puisque par cette arête normale passe une nouvelle face dans la même zone, cette zone  $r_1$  est encore telle, qu'elle implique une face normale à chacune de ses faces.

Pour l'un et l'autre des 2 complexes quadratique et hexagonal, les *zones fondamentales* de faces et d'arêtes  $r_1$  et  $l_1$  sont donc encore des zones *isotropes*.

En appelant (Fedorow) zone *orthogonale* de faces ou d'arêtes celle qui n'implique qu'un seul couple de faces ou d'arêtes normales\*, on se rend compte en outre sans peine,

sant par le point 0, les éléments du système sont :

$$\cos a_1 = \frac{1}{2}, \cos a_2 = \cos a_3 = 0$$
$$\mu_1, \mu_2 = \mu_3 = 1$$

et les indices  $\omega'(x^i)$  de la face normale sont également les rapports des 3 expressions dont la première est encore irrationnelle (même remarque) :

$$u_1 : u_2 : u_3 = \mu_1^2 x_1 : (x_2 + \frac{1}{2}x_3) : (\frac{1}{2}x_2 + x_3)$$

de ces 2 complexes, le premier indice  $x_1$  des arêtes coplanaires à la face fondamentale  $l_1$  étant nul, les indices de leurs faces normales se réduisent aux 2 derniers, et sont ainsi des rapports de quantités rationnelles. Pour chaque arête du faisceau fondamental  $l_1$ , la face normale est donc possible, et puisque cette face normale détermine une nouvelle arête du même faisceau, cette zone d'arête  $l_1$  est encore telle, qu'elle implique une arête normale à chacune de ses arêtes.

\* On démontrerait facilement que dès qu'une zone de faces (d'arêtes) possède deux couples de faces (arêtes) normales, elle possède une face normale à chacune de ses faces, c'est-à-dire qu'elle est isotrope.

puisque chacune de leurs arêtes, c'est-à-dire chacun de leurs arcs zonaux est nécessairement situé sur une face de la zone fondamentale  $r_1$ , à laquelle correspond une arête normale, que *toutes* les autres zones de *faces* des 2 complexes sont des zones *orthogonales*.

**45.** Les 3 autres complexes cristallins, *rhombique*, *monoclinal* et *triclinique* (voir toujours § 85) n'ont plus aucun système de référence avec des éléments rationnels suffisants pour y nécessiter la présence de zones de faces ou d'arêtes isotropes.

En choisissant toujours comme faces élémentaires les 3 faces du parallélipipède générateur avec la face déterminant ses 3 arêtes, les éléments du complexe *rhombique* sont (prisme droit à base *rectangle*, faces des 3 pinakoïdes et de la protopyramide):

$$\cos A_1 = \cos A_2 : \cos A_3 = 0 \\ r_1, r_2, r_3$$

et les indices  $\Omega'(u_i)$  de l'arête normale sont les rapports des 3 quantités irrationnelles :

$$x_1 : x_2 : x_3 = r_1^2 u_1 : r_2^2 u_2 : r_3^2 u_3$$

Seules donc les arêtes normales aux 3 faces dont 2 indices sont nuls, c'est-à-dire aux 3 faces fondamentales  $r_1 l_1, r_2 l_2, r_3 l_3$ , sont des arêtes possibles. Ces 3 faces sont ainsi les seules faces du complexe auxquelles correspond une arête normale, et on se rend compte immédiatement que chaque zone

puisque chacune de leurs faces, c'est-à-dire chacune de leurs zones d'arêtes passe nécessairement par une arête du faisceau fondamental  $l_1$ , à laquelle correspond une arête normale, que *toutes* les autres zones d'arêtes des 2 complexes sont des zones *orthogonales*.

En choisissant toujours comme arêtes élémentaires les 3 arêtes du parallélipipède générateur avec la diagonale principale passant par 0, les éléments du complexe *rhombique* sont (prisme droit à base *rectangle*) :

$$\cos a_1 = \cos a_2 : \cos a_3 = 0 \\ \mu_1, \mu_2, \mu_3$$

et les indices  $\omega'(x_i)$  de la face normale sont les rapports des 3 quantités irrationnelles :

$$u_1 : u_2 : u_3 = \mu_1^2 x_1 : \mu_2^2 x_2 : \mu_3^2 x_3$$

Seules donc les faces normales aux 3 arêtes dont 2 indices sont nuls, c'est-à-dire aux 3 arêtes fondamentales  $\mu_1 r_1, \mu_2 r_2, \mu_3 r_3$ , sont des faces possibles. Ces 3 arêtes sont ainsi les seules arêtes du complexe auxquelles correspond une face normale, et on se rend compte immédiatement que chaque zone

de *faces* dont l'axe est situé sur l'une d'elles, est une zone *orthogonale*.

Pour le complexe *monocline*, le prisme est droit à base *parallélogrammique* quelconque (faces des 3 pinakoïdes et de l'hémipyramide positive), les éléments du système sont :

$$\cos A_1, \cos A_2 = \cos A_3 = 0 \\ \nu_1, \nu_2, \nu_3$$

et les indices irrationnels  $\Omega'(u_i)$  s'écrivent, abstraction du facteur proportionnel :

$$x_1 = \nu_1^2 u_1 \\ x_2 = \nu_2^2 u_2 + \nu_2 \nu_3 u_3 \cos A_1 \\ x_3 = \nu_3^2 u_3 + \nu_3 \nu_2 u_2 \cos A_1$$

Seule l'arête normale à la face dont les 2 indices  $u_2$  et  $u_3$  sont nuls, est une arête possible. La face fondamentale  $l_1$  est donc la seule face du complexe possédant une arête normale, et chaque zone de *faces* dont l'arête est située sur cette face, est une zone *orthogonale*.

d'*arêtes* dont la face support passe par l'une d'elles, est une zone *orthogonale*.

Pour le complexe *monocline* le prisme est droit à base *parallélogrammique* quelconque (arêtes du prisme, orthodome et clinodome), les éléments du système sont :

$$\cos a_1, \cos a_2 = \cos a_3 = 0 \\ \mu_1, \mu_2, \mu_3$$

et les indices irrationnels  $\omega'(x_i)$  s'écrivent, abstraction du facteur proportionnel :

$$u_1 = \mu_1^2 x_1 \\ u_2 = \mu_2^2 x_2 + \mu_2 \mu_3 x_3 \cos a_1 \\ u_3 = \mu_3^2 x_3 + \mu_3 \mu_2 x_2 \cos a_1$$

Seule la face normale à l'arête dont les 2 indices  $x_2$  et  $x_3$  sont nuls, est une face possible. L'arête fondamentale  $r_1$  est donc la seule arête du complexe possédant une face normale, et chaque zone d'*arête* dont le plan passe par cette arête, est une zone *orthogonale*.

Enfin pour le complexe *tricline*, les 3 faces du parallélipipède générateur sont des *parallélogrammes* quelconques ; les 6 constantes de chaque système sont des quantités essentiellement irrationnelles, et les indices  $\Omega'(u_i)$  et  $\omega'(x_i)$  restent sans aucune simplification ce qu'ils ont été trouvés au § 41. Pour aucune valeur des indices  $u_i$  et  $x_i$ , ils ne peuvent se réduire à un seul ou devenir rationnels ; le complexe *tricline* est donc le seul complexe cristallin qui n'ait aucune arête normale à l'une de ses faces.

**Remarque.** Le fait que les coefficients  $\Omega_{ik}$  et  $\omega_{ik}$ , en fonction desquels s'expriment les indices  $\Omega'(u_i)$  et  $\omega'(x_i)$ , implique chacun un produit ou un carré des constantes  $v_i$ ,  $\cos A_i$  ou  $\mu_i$ ,  $\cos a_i$  du complexe, ne permet, semble-t-il, rien d'absolu en ce qui concerne la propriété que nous venons d'établir des zones et des complexes cristallins. En principe, il ne serait sans doute aucunement impossible par exemple que 2 quelconques ou les 3 constantes irrationnelles  $\mu_1$ ,  $\mu_2$ ,  $\mu_3$ , (et par suite  $v_1$ ,  $v_2$ ,  $v_3$ ) c'est-à-dire les longueurs des axes-unités d'un complexe cristallin rhombique soient des valeurs de racines carrées quelconques:  $\sqrt{a}$ ,  $\sqrt{b}$ ,  $\sqrt{c}$ ; ce complexe rhombique possèderait dans ce cas, comme un complexe quadratique, une zone isotrope, ou pour chacune de ses faces une arête normale et réciproquement, comme le complexe cubique. Il en serait de même d'un complexe monocline dans le cas où ses constantes  $\mu_i$  ( $v_i$ ) seraient des racines carrées et ses  $\cos a_i$  et  $\cos A_i$  tels que les coefficients  $\mu_2\mu_3\cos a_1$  et  $v_2v_3\cos A_1$  soient des quantités rationnelles. Mais en réalité, pour l'étude du cristal, cette restriction n'a aucune importance. Si rien n'empêche que, momentanément, pour une température déterminée, les axes unités ou les constantes  $\mu_i$  d'un cristal rhombique ou monocline puissent prendre des valeurs de racines carrées, pour le plus petit changement de température, les propriétés physiques étant différentes sur chacune des 3 directions de ces axes, leurs dilatations inégales (positives ou négatives) auront aussitôt ramené ces constantes à des rapports de nombres *irrationnels quelconques*. C'est d'ailleurs la l'essence même de la nature du complexe cristallin: l'irrationnalité des rapports des constantes d'un cristal n'est qu'un cas spécial de la *non-équivalence physique* des directions correspondantes dans la substance cristalline.

Naturellement la même remarque s'applique aux complexes quadratique et hexagonal; au cas où leur première constante  $\mu_1$  (par suite  $v_1$ ) serait une valeur de racine carrée quelconque chacune de leurs zones de faces et d'arêtes pourrait être isotrope.

**46.** Le vecteur d'une *face parallèle* à une arête et *normale* à une face données  $x_i$  et  $u_i$ , est d'après le § 3, le produit vectoriel:

$$V(\mu_1 x_1 r_1 + \mu_2 x_2 r_2 + \mu_3 x_3 r_3)(v_1 u_1 l_1 + v_2 u_2 l_2 + v_3 u_3 l_3)$$

Ce produit vectoriel s'effectue très simplement si nous substituons au vecteur de la *face*:

$$v_1 u_1 l_1 + v_2 u_2 l_2 + v_3 u_3 l_3$$

le vecteur équivalent de son *arête normale*; en d'autres termes si nous rapportons, comme le vecteur de l'arête, le vecteur de la

Le vecteur d'une *arête parallèle* à une face et *normale* à une arête données  $u_i$  et  $x_i$ , est d'après le § 3, le produit vectoriel:

Ce produit vectoriel s'effectue très simplement si nous substituons au vecteur de l'*arête*:

$$\mu_1 x_1 r_1 + \mu_2 x_2 r_2 + \mu_3 x_3 r_3$$

le vecteur équivalent de sa *face normale*; en d'autres termes si nous rapportons, comme le vecteur de la face, le vecteur de l'a-

face au trièdre des arêtes fondamentales :

$$\mu_1 \Omega'(u_1) r_1 + \mu_2 \Omega'(u_2) r_2 + \mu_3 \Omega'(u_3) r_3$$

Cela revient d'ailleurs à chercher le vecteur de la *face coplanaire* aux 2 arêtes d'indices  $x_i$  et  $\Omega'(u_i)$ ; ses indices sont en effet (§ 31) les déterminants de 2<sup>me</sup> ordre :

$$\begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ \Omega'(u_2) \Omega'(u_3) \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_3 & x_1 \\ \Omega'(u_3) \Omega'(u_1) \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ \Omega'(u_1) \Omega'(u_2) \end{vmatrix}$$

que nous donnerait également le produit vectoriel posé.

Naturellement la même réserve est à faire ici que dans les paragraphes précédents. Cette face normale n'est une face possible que lorsque ses indices c'est-à-dire lorsque les valeurs  $\Omega'(u_i)$  sont des quantités rationnelles. Pour les faces du complexe cubique, les faces des zones isotropes du complexe hexagonal et quadratique, les 3 faces fondamentales du complexe rhombique et la face  $l_1$  du complexe monocline, la face normale passant par une arête quelconque est donc toujours une face possible. C'est d'ailleurs ce qui a déjà été dit sous une autre forme en parlant des zones orthogonales.

ête au trièdre des vecteurs des faces fondamentales :

$$\nu_1 \omega'(x_1) l_1 + \nu_2 \omega'(x_2) l_2 + \nu_3 \omega'(x_3) l_3$$

Cela revient d'ailleurs à chercher le vecteur de l'*arête intersection* des 2 faces d'indices  $u_i$  et  $\omega'(x_i)$ ; ses indices sont en effet (§ 31) les déterminants de 2<sup>me</sup> ordre :

$$\begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ \omega'(x_2) \omega'(x_3) \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} u_3 & u_1 \\ \omega'(x_3) \omega'(x_1) \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ \omega'(x_1) \omega'(x_2) \end{vmatrix}$$

que nous donnerait également le produit vectoriel posé.

Naturellement la même réserve est à faire ici que dans les paragraphes précédents. Cette arête normale n'est une arête possible que lorsque ses indices c'est-à-dire lorsque les valeurs  $\omega'(x_i)$  sont des quantités rationnelles. Pour les arêtes du complexe cubique, les arêtes des zones isotropes du complexe hexagonal et quadratique, les 3 arêtes fondamentales du complexe rhombique et l'arête  $r_1$  du complexe monocline, l'arête normale coplanaire à une face quelconque est donc toujours une arête possible. C'est d'ailleurs ce qui a déjà été dit sous une autre forme en parlant des zones d'arêtes orthogonales.