Zeitschrift: Mémoires de la Société Fribourgeoise des Sciences Naturelles. Mathématique et physique = Mitteilungen der Naturforschenden Gesellschaft in Freiburg. Mathematik und Physik

Herausgeber: Société Fribourgeoise des Sciences Naturelles

Band: 2 (1912)

Artikel: Application des coordonnées sphériques homogènes à la cristallographie géométrique

Autor: Bays, Sévérin

Kapitel: VI

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-306718

CHAPITRE VI

28. Le vecteur :

$$\nu_1 u_1 \mathfrak{l}_1 + \nu_2 u_2 \mathfrak{l} + \nu_3 u_3 \mathfrak{l}_3$$

n'est pas en général un vecteur-unité. Pour en trouver la valeur absolue que nous appelons u_4, nous élevons au carré les 2 membres de l'équation :

$$u_4 \mathfrak{l} = \nu_1 u_1 \mathfrak{l}_1 + \nu_2 u_2 \mathfrak{l}_2 + \nu_3 u_3 \mathfrak{l}_3$$

Nous obtenons ainsi, selon les règles du produit scalaire, la forme quadratique suivante :

$$u_4^2 = \nu_1^2 u_1^2 + \nu_2^2 u_2^2 + \nu_3^2 u_3^2 + 2\nu_1\nu_2 u_1 u_2 \cos A_{12} + 2\,\nu_2\nu_3 \ldots\ldots\ldots$$

qui peut s'écrire, si nous posons par abréviation :

$$\Omega_{ki} \equiv \nu_i \nu_k \cos A_{ik} \equiv \Omega_{ik}.$$

$$u_4^2 = \Omega_{11} u_1^2 + \Omega_{22} u_2^2 + \Omega_{33} u_3^2 + 2\Omega_{12} u_1 u_2 + 2\Omega_{23} u_2 u_3 + 2\Omega_{31} u_3 u_1$$

ou plus brièvement encore :

$$u_4^2 = \Omega(u_1 u_2 u_3) \equiv \Omega(uu)$$

Les expressions :

$$\Omega_{11} u_1 + \Omega_{12} u_2 + \Omega_{13} u_3 \equiv \Omega'(u_1)$$
$$\Omega_{12} u_1 + \Omega_{22} u_2 + \Omega_{23} u_3 \equiv \Omega'(u_2)$$
$$\Omega_{13} u_1 + \Omega_{23} u_2 + \Omega_{33} u_3 \equiv \Omega'(u_3)$$

Le vecteur :

$$\mu_1 x_1 \mathfrak{r}_1 + \mu_2 x_2 \mathfrak{r}_2 + \mu_3 x_3 \mathfrak{r}_3$$

n'est pas en général un vecteur-unité. Pour en trouver la valeur absolue que nous appelons x_4, nous élevons au carré, les 2 membres de l'équation :

$$x_4 \mathfrak{r} = \mu_1 x_1 \mathfrak{r}_1 + \mu_2 x_2 \mathfrak{r}_2 + \mu_3 x_3 \mathfrak{r}_3$$

Nous obtenons ainsi, selon les règles du produit scalaire, la forme quadratique suivante :

$$x_4^2 = \mu_1^2 x_1^2 + \mu_2^2 x_2^2 + \mu_3^2 x_3^2 + 2\,\mu_1\mu_2 x_1 x_2 \cos a_{12} + \ldots\ldots\ldots$$

qui peut s'écrire, si nous posons par abréviation :

$$\omega_{ki} \equiv \mu_i \mu_k \cos a_{ik} \equiv \omega_{ik}.$$

$$x_4^2 = \omega_{11} x_1^2 + \omega_{22} x_2^2 + \omega_{33} x_3^2 + 2\omega_{12} x_1 x_2 + 2\omega_{23} x_2 x_3 + 2\omega_{31} x_3 x_1$$

ou plus brièvement encore :

$$x_4^2 = \omega(x_1 x_2 x_3) \equiv \omega(xx).$$

Les expressions :

$$\omega_{11} x_1 + \omega_{12} x_2 + \omega_{13} x_3 \equiv \omega,(x_1)$$
$$\omega_{12} x_1 + \omega_{22} x_2 + \omega_{23} x_3 \equiv \omega'(x_2)$$
$$\omega_{13} x_1 + \omega_{23} x_2 + \omega_{33} x_3 \equiv \omega'(x_3)$$

sont les demi-dérivées partielles de la forme par rapport à u_1, u_2, u_3, et nous donnent pour sa valeur l'identité suivante :

$$\Omega(uu) \equiv u_1\Omega'(u_1) + u_2\Omega'(u_2) + u_3\Omega'(u_3)$$

Si nous divisons maintenant notre vecteur :

$$\nu_1 u_1 \mathfrak{l}_1 + \nu_2 u_2 \mathfrak{l}_2 + \nu_3 u_3 \mathfrak{l}_3$$

par la valeur $\pm\sqrt{\Omega(uu)}$, nous en faisons les vecteurs-*unités* des 2 faces possibles, opposées et parallèles dont les indices sont u_i par rapport au système de référence des 4 faces données $\mathfrak{l}_0, \mathfrak{l}_1, \mathfrak{l}_2, \mathfrak{l}_3$.

sont les demi-dérivées partielles de la forme par rapport à x_1, x_2, x_3, et nous donnent pour sa valeur l'identité suivante :

$$\omega(xx) \equiv x_1\omega'(x_1) + x_2\omega'(x_2) + x_3\omega'(x_3)$$

Si nous divisons maintenant notre vecteur :

$$\mu_1 x_1 \mathfrak{r}_1 + \mu_2 x_2 \mathfrak{r}_2 + \mu_3 x_3 \mathfrak{r}_3$$

par la valeur $\pm\sqrt{\omega(xx)}$, nous en faisons les vecteurs-*unités* des 2 arêtes possibles, opposées et parallèles, dont les indices sont x_i par rapport au système de référence des 4 arêtes données $\mathfrak{r}_0, \mathfrak{r}_1, \mathfrak{r}_2, \mathfrak{r}_3$.

29. Connaissant maintenant les tenseurs des vecteurs de la face d'indices u_i et de l'arête d'indices x_i, nous reprenons les résultats, établis au début, des § 2, 3, 4, 5 et 6, exprimés alors directement en vecteurs-*unités* des faces et des arêtes et cherchons ce qu'ils deviennent pour les valeurs absolues quelconques u_4 et x_4 de ces vecteurs, et comment ils s'expriment en fonction de leurs indices.

L'*angle* φ de 2 faces données d'indices entiers u_i et u'_i :

$$u_4\mathfrak{l} = \nu_1 u_1 \mathfrak{l}_1 + \nu_2 u_2 \mathfrak{l}_2 + \nu_3 u_3 \mathfrak{l}_3$$
$$u'_4\mathfrak{l}' = \nu_1 u'_1 \mathfrak{l}_1 + \nu_2 u'_2 \mathfrak{l}_2 + \nu_3 u'_3 \mathfrak{l}_3$$

est donc immédiatement fourni par le produit scalaire de leurs vecteurs, pour lequel nous obtenons ;

$$\nu_1^2 u_1 u'_1 + \nu_2^2 u_2 u'_2 + \nu_3^2 u_3 u'_3$$
$$+ \nu_1\nu_2 \cos A_{12}(u_1 u'_2 + u_2 u'_1) + \ldots\ldots.$$

ce qui peut s'écrire, en utilisant les abréviations du paragraphe précédent :

$$_{11}u_1 u'_1 + \Omega_{22} u_2 u'_2 + \Omega_{23} u_3 u'_3$$
$$+ \ _{12}(u_1 u'_2 + u_2 u'_1) + \ldots\ldots\ldots$$

L'*angle* ψ de 2 arêtes données d'indices x entiers x_i et x'_i :

$$x_4\mathfrak{r} = \mu_1 x_1 \mathfrak{r}_1 + \mu_2 x_2 \mathfrak{r}_2 + \mu_3 x_3 \mathfrak{r}_3$$
$$x'_4\mathfrak{r}' = \mu_1 x'_1 \mathfrak{r}_1 + \mu_2 x'_2 \mathfrak{r}_3 + \mu_3 x'_{33}\mathfrak{r}$$

est donc immédiatement fourni par le produit scalaire de leurs vecteurs, pour lequel nous obtenons :

$$\mu_1^2 x_1 x'_1 + \mu_2^2 x_2 x'_2 + \mu_3^2 x_3 x'_3$$
$$+ \mu_1\mu_2 \cos a_{12}(x_1 x'_2 + x_2 x'_1) + \ldots..$$

ce qui peut s'écrire, en utilisant les abréviations du paragraphe précédent :

$$\omega_{11} x_1 x'_1 + \omega_{22} x_2 x'_2 + \omega_{33} x_3 x'_3$$
$$+ \omega_{12}(x_1 x'_2 + x_2 x'_1) + \ldots\ldots\ldots$$

et par analogie avec la forme $\Omega(uu)$ et son expression en fonction de ses demi-dérivées partielles, plus simplement encore :

$$\Omega(uu') \equiv \Omega(u'u)$$

$$\text{ou :} = u_1\Omega(u_1') + u_2\Omega(u_2') + u_3\Omega(u_3')$$
$$= u_1'\Omega(u_1) + u_2'\Omega(u_2) + u_3'\Omega(u_1)$$

les u_i et les u_i' jouant un rôle parfaitement symétrique dans ce produit que nous venons d'obtenir.

Si nous tenons compte des tenseurs :

$$u_4 = \sqrt{\Omega(uu)} \text{ et } u_4' = \sqrt{\Omega(u'u')}$$

nous avons donc directement en fonction des indices :

$$\cos\varphi = \frac{\Omega(uu')}{\sqrt{\Omega(uu)\Omega(u'u')}} \qquad (14)$$

et par analogie avec la forme $\omega(xx)$ et son expression en fonction de ses demi-dérivées partielles, plus simplement encore :

$$\omega(xx') \equiv \omega(x'x)$$

$$\text{ou :} = x_1\omega(x_1') + x_2\omega(x_2') + x_3\omega(x_3')$$
$$= x_1'\omega(x_1) + x_2'\omega(x_2) + x_3'\omega(x_3)$$

les x_i et les x_i' jouant un rôle parfaitement symétrique dans ce produit que nous venons d'obtenir,

Si nous tenons compte des tenseurs :

$$x_4 = \sqrt{\omega(xx)} \text{ et } x_4' = \sqrt{\omega(x'x')}$$

nous avons donc directement en fonction des indices :

$$\cos\psi = \frac{\omega(xx')}{\sqrt{\omega(xx)\omega(x'x')}} \qquad (14$$

30. L'angle d'*incidence* ϑ de l'arête :

$$\mu_1 x_1 \mathfrak{r}_1 + \mu_2 x_2 \mathfrak{r}_2 + \mu_3 x_3 \mathfrak{r}_3$$

par rapport à la face :

$$\nu_1 u_1 \mathfrak{l}_1 + \nu_2 u_2 \mathfrak{l}_2 + \nu_3 u_3 \mathfrak{l}_3$$

est également donné par la multiplication scalaire des 2 vecteurs (§ 2), pour laquelle nous trouvons d'abord :

$$\mu_1\nu_1 \sin h_1 \,.\, x_1u_1 + \mu_2\nu_2 \sin h_2 \,.\, x_2u_2 + \mu_3\nu_3 \sin h_3 \,.\, x_3u_3$$

et ensuite, par le fait toujours des relations :

$$\mu_i\nu_i = \sin A_i \qquad \text{et} \qquad \sin A_i \sin h_i = \Delta.$$

$$\sin A_i \sin h_i (x_1u_1 + x_2u_2 + x_3u_3)$$

Les tenseurs de ces vecteurs étant $\sqrt{\omega(xx)}$ et $\sqrt{\Omega(uu)}$ nous avons encore directement en fonction des indices :

$$\cos\vartheta = \frac{(x_1u_1 + x_2u_2 + x_3u_3)\Delta}{\sqrt{\omega(xx)\Omega(uu)}} \qquad (15)$$

31. Le vecteur de l'*arête* possible parallèle aux 2 faces données :

$$\nu_1 u_1 \mathfrak{l}_1 + \nu_2 u_2 \mathfrak{l}_2 + \nu_3 u_3 \mathfrak{l}_3$$
$$\nu_1 u_1' \mathfrak{l}_1 + \nu_2 u_2' \mathfrak{l}_2 + \nu_3 u_3' \mathfrak{l}_3$$

est leur produit vectoriel (§ 3), pour lequel nous obtenons :

Le vecteur de la *face* possible parallèle aux 2 arêtes données :

$$\mu_1 x_1 \mathfrak{r}_1 + \mu_2 x_2 \mathfrak{r}_2 + \mu_3 x_3 \mathfrak{r}_3$$
$$\mu_1 x_1' \mathfrak{r}_1 + \mu_2 x_2' \mathfrak{r}_2 + \mu_3 x_3 \mathfrak{r}_3$$

est leur produit vectoriel (§ 3), pour lequel nous obtenons :

$$\nu_2\nu_3(u_2u_3'-u_3u_2')V\mathfrak{l}_2\mathfrak{l}_3 + \nu_3\nu_1(u_3u_1'-u_1u_3')V\mathfrak{l}_3\mathfrak{l}_1 + \nu_1\nu_2(u_1u_2'-u_2u_1')V\mathfrak{l}_1\mathfrak{l}_2$$

$$\mu_2\mu_3(x_2x_3'-x_3x_2')V\mathfrak{r}_2\mathfrak{r}_3 + \mu_3\mu_1(x_3x_1'-x_1x_3')V\mathfrak{r}_3\mathfrak{r}_1 + \mu_1\mu_2(x_1x_2'-x_2x_1')V\mathfrak{r}_1\mathfrak{r}_2$$

ce qui, en tenant compte de nouveau des relations $\mu_i\nu_i = \sin A_i$ et des équations (1), (§ 8), qui ensemble nous donnent :

$$V\mathfrak{l}_2\mathfrak{l}_3 = \sin A_1 \mathfrak{r}_1 = \mu_1\nu_1\mathfrak{r}_1, \text{ etc.}$$

peut aussi s'écrire :

ce qui, en tenant compte de nouveau des relations $\mu_i\nu_i = \sin A_i$ et des équations (1), (§ 8), qui ensemble nous donnent :

$$V\mathfrak{r}_2\mathfrak{r}_3 = \sin a_1 \mathfrak{l}_1 = \frac{\sin A_1}{M.}\mathfrak{l}_1 = \frac{\mu_1\nu_1}{M.}\mathfrak{l}_1, \text{etc.}$$

peut aussi s'écrire :

$$\nu_1\nu_2\nu_3\Big[\mu_1(u_2u_3'-u_3u_2')\mathfrak{r}_1 + \mu_2(u_3u_1'-u_1u_3')\mathfrak{r}_2 + \mu_3(u_1u_2'-u_2u_1')\mathfrak{r}_3\Big]$$

$$\frac{\mu_1\mu_2\mu_3}{M.}\Big[\nu_1(x_2x_3'-x_3x_2')\mathfrak{l}_1 + \nu_2(x_3x_1'-x_1x_3')\mathfrak{l}_2 + \nu_3(x_1x_2'-x_2x_1')\mathfrak{l}_3\Big]$$

ou bien encore, si nous posons dorénavant symboliquement :

$$u_2u_3' - u_3u_2' \equiv (uu')_1$$
$$u_3u_1' - u_1u_3' \equiv (uu')_2$$
$$u_1u_2' - u_2u_1' \equiv (uu')_3$$

$$\nu_1\nu_2\nu_3\Big[\mu_1(uu')_1\mathfrak{r}_1 + \mu_2(uu')_2\mathfrak{r}_2 + \mu_3(uu')_3\mathfrak{r}_3\Big] \qquad (16)$$

Les indices de cette arête sont donc les déterminants ainsi formés des indices u_i et u_i' des faces qui la déterminent :

$$\begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ u_2' & u_3' \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} u_3 & u_1 \\ u_3' & u_1' \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ u_1' & u_2' \end{vmatrix}$$

ou bien encore, si nous posons dorénavant symboliquement :

$$x_2x_3' - x_3x_2' \equiv (xx')_1$$
$$x_3x_1' - x_1x_3' \equiv (xx')_2$$
$$x_1x_2' - x_2x_1' \equiv (xx')_3$$

$$\frac{\mu_1\mu_2\mu_3}{M.}\Big[\nu_1(xx')_1\mathfrak{l}_1 + \nu_2(xx')_2\mathfrak{l}_2 + \nu_3(xx')_3\mathfrak{l}_3\Big] \qquad (16)$$

Les indices de cette face sont donc les déterminants ainsi formés des indices x_i et x_i' des arêtes qui la déterminent :

$$\begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ x_2' & x_3' \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} x_3 & x_1 \\ x_3' & x_1' \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ x_1' & x_2' \end{vmatrix}$$

et s'écrivent facilement sous la forme schématique qui s'interprête à première vue :

$$\begin{array}{c|cccc|c} u_1 & u_2 & u_3 & u_1 & u_2 & u_3 \\ & & \times & \times & \times & \\ u'_1 & u'_2 & u'_3 & u'_1 & u'_2 & u'_3 \end{array}$$

32. La valeur absolue du vecteur entre parenthèses (16) est d'après le paragraphe 28 la racine carrée de la forme :

$$\omega[(uu')_1(uu')_2(uu')_3] \equiv \omega[(uu')(uu')]$$

La valeur absolue du produit vectoriel total est donc d'une part :

$$\nu_1\nu_2\nu_3\sqrt{\omega[(uu')(uu')]}$$

et d'autre part le produit des tenseurs : $\sqrt{\Omega(uu)\Omega(u'u')}$ et du sinus de l'angle α des 2 faces d'indices u_i et u'_i. L'égalité de ces 2 valeurs nous donne immédiatement pour le sinus de cet angle :

$$\sin\varphi = \frac{\nu_1\nu_2\nu_3\sqrt{\omega[(uu')(uu')]}}{\sqrt{\Omega(uu)\Omega(u'u')}}$$

Si nous divisons cette expression de $\sin\varphi$ par celle de $\cos\varphi$ trouvée au § 29, nous avons, sous cette forme simple et définitive, la valeur de l'angle de 2 faces u_i et u'_i en fonction de leurs indices :

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\nu_1\nu_2\nu_3\sqrt{\omega[(uu')(uu')]}}{\Omega(uu')} \qquad (17)$$

et s'écrivent facilement sous la forme schématique qui s'interprête à première vue :

$$\begin{array}{c|cccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & x_1 & x_2 & x_3 \\ & & \times & \times & \times & \\ x'_1 & x'_2 & x'_3 & x'_1 & x'_2 & x'_3 \end{array}$$

La valeur absolue du vecteur entre parenthèses (16) est d'après le paragraphe 28, la racine carrée de la forme :

$$\Omega[(xx')_1(xx')_2(xx')_3] \equiv \Omega[(xx')(xx')]$$

La valeur absolue du produit vectoriel total est donc d'une part :

$$\frac{1}{M.}\mu_1\mu_2\mu_3\sqrt{\Omega[(uu')(uu')]}$$

et d'autre part le produit des tenseurs : $\sqrt{\omega(xx)}$ et $\sqrt{\omega(x'x')}$ et du sinus de l'angle ψ des 2 arêtes d'indices x_i et x'_i. L'égalité de ces 2 valeurs nous donnent immédiatement pour le sinus de cet angle :

$$\sin\psi = \frac{\mu_1\mu_2\mu_3\sqrt{\Omega[(xx')(xx')]}}{M\cdot\sqrt{\omega(xx)\omega(x'x')}}$$

Si nous divisons cette expression de $\sin\psi$ par celle de $\cos\psi$ trouvée au § 29, nous avons, sous cette forme simple et définitive, la valeur de l'angle de 2 arêtes x_i et x'_i en fonction de leurs indices :

$$\operatorname{tg}\psi = \frac{\mu_1\mu_2\mu_3\sqrt{\Omega[(xx')(xx')]}}{M.\omega(xx')} \qquad (17)$$

33. *Tout* vecteur de la forme :

$$(\nu_1 u_1 \mathfrak{l}_1 + \nu_2 u_2 \mathfrak{l}_2 + \nu_3 u_3 \mathfrak{l}_3) - \lambda(\nu_1 u_1' \mathfrak{l}_1 + \nu_2 u_2' \mathfrak{l}_2 + \nu_3 u_3' \mathfrak{l}_3),$$

les u_i et les u_i' étant les indices entiers de 2 faces possibles et λ prenant toutes les valeurs *rationnelles* de $-\infty$ à $+\infty$, représente une face également *possible,* puisque ses indices sont entiers et *tautozonale* aux 2 premières, puisque son vecteur est coplanaire aux 2 vecteurs qui le composent.

A chaque couple de faces u_i et u_i' du cristal correspond donc une *zone* de faces possibles qui a pour axe leur arête commune, et pour indices u_i'' de chacune de ses faces :

$$u_1'' : u_2'' : u_3'' = u_1 - \lambda u_1' : u_2 - \lambda u_2' : u_3 - \lambda u_3'$$

Tout vecteur de la forme :

$$(\mu_1 x_1 \mathfrak{r}_1 + \mu_2 x_2 \mathfrak{r}_2 + \mu_3 x_3 \mathfrak{r}_3) - \lambda(\mu_1 x_1' \mathfrak{r}_1 + \mu_2 x_2' \mathfrak{r}_2 + \mu_3 x_3' \mathfrak{r}_3),$$

les x_i et les x_i' étant les indices entiers de 2 arêtes possibles et λ prenant toutes les valeurs *rationnelles* de $-\infty$ à $+\infty$, représente une arête également *possible,* puisque ses indices sont entiers, et *coplanaire* avec les 2 premières, puisque son vecteur est coplanaire aux 2 vecteurs qui le composent.

A chaque couple d'arête x_i et x_i' du cristal, correspond donc un *faisceau* d'arêtes possibles qui a pour support leur plan commun, et pour indices x_i'' de chacune de ses arêtes :

$$x_1'' : x_2'' : x_2'' = x_1 - \lambda x_1' : x_2 - \lambda x_2' : x_3 - \lambda x_3'$$

34. Désignons, sans trop nous encombrer de parenthèses, par : (§ 4)

$$(uu'u'') \equiv \frac{\sin uu''}{\sin u'u''}$$

le rapport de position de cette face générale u_i'' par rapport aux 2 faces déterminant la zone, et nous trouvons très facilement sa valeur.

D'une part le vecteur plus haut peut s'écrire sous cette forme qui représente la même face :

$$\left(\frac{\nu_1 u_1 \mathfrak{l}_1 + \nu_2 u_2 \mathfrak{l}_2 + \nu_3 u_3 \mathfrak{l}_3}{\sqrt{\Omega(uu)}}\right) - \lambda \frac{\sqrt{\Omega(u'u')}}{\sqrt{\Omega(uu)}} \left(\frac{\nu_1 u_1' \mathfrak{l}_1 + \nu_2 u_2' \mathfrak{l}_2 + \nu_3 u_3' \mathfrak{l}_3}{\sqrt{\Omega(u'u')}}\right)$$

Désignons, sans trop nous encombrer de parenthèses, par : (§ 4)

$$(xx'x'') \equiv \frac{\sin xx''}{\sin x'x''}$$

le rapport de position de cette arête générale x_i'' par rapport aux 2 arêtes déterminant le faisceau, et nous trouvons très facilement sa valeur.

D'une part le vecteur plus haut peut s'écrire sous cette forme qui représente la même arête :

$$\left(\frac{\mu_1 x_1 \mathfrak{r}_1 + \mu_2 x_2 \mathfrak{r}_2 + \mu_3 x_3 \mathfrak{r}_3}{\sqrt{\omega(xx)}}\right) - \lambda \frac{\sqrt{\omega(x'x')}}{\sqrt{\omega(xx)}} \left(\frac{\mu_1 x_1' \mathfrak{r}_1 + \mu_2 x_2' \mathfrak{r}_2 + \mu_3 x_3' \mathfrak{r}_3}{\sqrt{\omega(x'x')}}\right)$$

et chacun de ses vecteurs composants étant maintenant un vecteur-unité, nous avons, d'après ce qui a été établi pour le coefficient du second (§ 4):

$$\lambda \frac{\sqrt{\Omega(u'u')}}{\sqrt{\Omega(uu)}} = \frac{\sin\, uu''}{\sin\, uu'}$$

D'autre part, $\mathfrak{f}_u$, $\mathfrak{f}_{u'}$, $\mathfrak{f}_{u''}$ étant les vecteurs des 3 faces en question, formons le quotient des valeurs absolues des 2 produits vectoriels:

$$\frac{|\mathfrak{V}\mathfrak{f}_u\mathfrak{f}_{u''}|}{|\mathfrak{V}\mathfrak{f}_{u'}\mathfrak{f}_{u''}|} = \frac{\sqrt{\Omega(uu)}.\ \sqrt{\Omega(u''u'')}.\ \sin\, uu''}{\sqrt{\Omega(u'u')}.\ \sqrt{\Omega(u''u'')}\cdot \sin\, u'u''}$$

Puisque ces vecteurs $\mathfrak{V}\mathfrak{f}_u\mathfrak{f}_{u''}$ et $\mathfrak{V}\mathfrak{f}_{u'}\mathfrak{f}_{u''}$ ont tous deux la même direction, celle de l'arête commune aux 3 faces ou de leur axe zonal, on se rend compte sans peine que le rapport de leurs valeurs absolues est le même que celui de leurs composantes sur chacune des 3 arêtes fondamentales. Ces composantes, trouvées au § 31, s'expriment symboliquement: $(uu'')_1$, $(uu'')_2$, (uu''), $(u'u'')_1$, etc., et l'égalité posée devient:

$$\frac{\sqrt{\Omega(uu)}\ \sin\, uu''}{\sqrt{\Omega(u'u')}\ \sin\, u'u''} = \frac{(uu'')_i}{(u'u'')_i}$$

De la comparaison des 2 résultats obtenus, nous avons maintenant l'égalité générale:

$$\lambda = \frac{(uu'')_i}{(u'u'')_i} = \frac{\sqrt{\Omega(uu)}\ \sin\, uu''}{\sqrt{\Omega(u'u')}\ \sin\, u'u''} \tag{18}$$

et chacun de ses vecteurs composants étant maintenant un vecteur-unité, nous avons, d'après ce qui a été établi pour le coefficient du second (§ 4):

$$\lambda \frac{\sqrt{\omega(x'x')}}{\sqrt{\omega(xx)}} = \frac{\sin\, xx''}{\sin\, xx'}$$

D'autre part, $\mathfrak{r}_x$, $\mathfrak{r}_{x'}$, $\mathfrak{r}_{x''}$ étant les vecteurs des 3 arêtes en question, formons le quotient des valeurs absolues des 2 produits vectoriels:

$$\frac{|\mathfrak{V}\mathfrak{r}_x\mathfrak{r}_{x''}|}{|\mathfrak{V}\mathfrak{r}_{x'}\mathfrak{r}_{x''}|} = \frac{\sqrt{\omega(xx)}.\ \sqrt{\omega(x''x'')}.\ \sin\, xx''}{\sqrt{\omega(x'x')}.\ \sqrt{\omega(x''x'')}.\ \sin\, x'x''}$$

Puisque ces vecteurs $\mathfrak{V}\mathfrak{r}_x\mathfrak{r}_{x''}$ et $\mathfrak{V}\mathfrak{r}_{x'}\mathfrak{r}_{x''}$ ont tous deux la même direction, celle du vecteur de la face commune aux 3 arêtes, on se rend compte sans peine que le rapport de leurs valeurs absolues est le même que celui de leurs composantes sur chacune des directions des vecteurs des faces fondamentales. Ces composantes, trouvées au § 31, s'expriment symboliquement: $(xx'')_1$, $(xx'')_2$, $(xx'')_3$, etc., et l'égalité posée devient:

$$\frac{\sqrt{\omega(xx}\ \sin\, xx''}{\sqrt{\omega(x'x')}\ \sin\, x'x''} = \frac{(xx'')_i}{(x'x'')_i}$$

De la comparaison des 2 résultats obtenus, nous avons maintenant l'égalité générale:

$$\lambda = \frac{(xx'')_i}{(x'x'')_i} = \frac{\sqrt{\omega(xx)}\ \sin\, xx''}{\sqrt{\omega(x'x')}\ \sin\, x'x''} \tag{18}$$

35. De ces différentes relations se déduit très simplement une nouvelle expression du rapport des indices de 2 faces quelconques du cristal (§ 14).

Le couple de faces u_i et u'_i détermine donc une zone de faces possibles dont les indices sont de la forme, λ étant rationnel:

$$u_i - \lambda u'_i$$

Pour la face u^1 de cette zone parallèle à l'arête fondamentale $\mathfrak{r}_1$ son premier indice étant nécessairement nul, ils se réduisent aux 2 derniers:

$$u_2 - \lambda u'_2 \;,\; u_3 - \lambda u'_3$$

Or cette face, en tant que plan de jonction des 2 arêtes données:

$$\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ (uu)_1 & (uu)_2 & (uu)_3 \end{array}$$

a également pour indices d'après le schema du § 31:

$$-(uu')_3 \text{ et } (uu')_2$$

c'est-à-dire:

$$u_2u'_1 - u_1u'_2 \text{ et } u_3u'_1 - u_1u'_3$$

D'où, en comparant les 2 valeurs de ces indices, le résultat général du § précédent devient immédiatedans ce cas-ci:

$$\lambda = \frac{u_1}{u'_1} = \frac{\sqrt{\Omega(uu).}\ \sin uu^1}{\sqrt{\Omega(u'u').}\ \sin u'u^1}$$

Il en serait de même pour les faces u^2 et u^3 de cette même zone

De ces différentes relations se déduit très simplement une nouvelle expression du rapport des indices de 2 arêtes quelconques du cristal (§ 14).

Le couple d'arêtes x_i et x'_i détermine donc un faisceau d'arêtes possibles dont les indices sont de la forme, λ étant rationnel:

$$x_i - \lambda x'_i$$

Pour l'arête x^1 de ce faisceau coplanaire à la face fondamentale $\mathfrak{l}_1$, son premier indice étant nécessairement nul, ils se réduisent aux 2 derniers:

$$x_2 - \lambda x'_2 \;.\; x_3 - \lambda x'_3$$

Or cette arête en tant qu'intersection des 2 faces données:

$$\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ (xx')_1 & (xx')_2, & (xx')_3 \end{array}$$

a également pour indices d'après le schema du § 31:

$$-(xx')_3 \text{ et } (xx')_2$$

c'est-à-dire:

$$x_2x'_1 - x_1x'_2 \text{ et } x_3x'_1 - x_1x'_3$$

D'où, en comparant les 2 valeurs de ces indices, le résultat général du § précédent devient immédiatement dans ce cas-ci:

$$\lambda = \frac{x_1}{x'_1} = \frac{\sqrt{\omega(xx).}\ \sin xx^1}{\sqrt{\omega(x'x').}\ \sin x'x^1}$$

Il en serait de même pour les arêtes x^2 et x^3 de ce faisceau coparallèles aux 2 autres arêtes fondamentales, et des 3 équations que l'on obtiendrait ainsi résulte directement cette égalité de rapports :

$$\frac{u_1}{u_1'}:\frac{u_2}{u_2'}:\frac{u_3}{u_3'}=\frac{\sin uu^1}{\sin u'u^1}:\frac{\sin uu^2}{\sin u'u^2}:\frac{\sin uu^3}{\sin u'u^3}$$

c'est-à-dire que les quotients des des indices de 2 faces sont proportionnels aux quotients des *sinus* des angles qu'elles font avec la face de leur zone parallèle à l'arête fondamentale correspondante.

planaire aux 2 autres faces fondamentales et des 3 équations que l'on obtiendrait ainsi, résulte directement cette égalité de rapport :

$$\frac{x_1}{x_1'}:\frac{x_2}{x_2'}:\frac{x_3}{x_3'}:=\frac{\sin xx^1}{\sin x'x^1}:\frac{\sin xx^2}{\sin x'x^2}:\frac{\sin xx^3}{\sin x'x^3}$$

c'est-à-dire que les quotients des indices de 2 arêtes sont proportionnels aux quotients des *sinus* des angles qu'elles font avec l'arête de leur faisceau coplanaire à la face fondamentale correspondante.

36. Les 3 faces d'indices entiers :

$$\begin{aligned}&\nu_1 u_1 \mathfrak{l}_1 + \nu_2 u_2 \mathfrak{l}_2 + \nu_3 u_3 \mathfrak{l}_3\\&\nu_1 u_1' \mathfrak{l}_1 + \nu_2 u_2' \mathfrak{l}_2 + \nu_3 u_3' \mathfrak{l}_3\\&\nu_1 u_1'' \mathfrak{l}_1 + \nu_2 u_2'' \mathfrak{l}_2 + \nu_3 u_3'' \mathfrak{l}_3\end{aligned}$$

sont *tautozonales* (§ 5) s'il existe 3 nombres k_i tels que la somme des 3 vecteurs posés multipliés par ces facteurs soit nulle, c'est-à-dire, chaque $\mathfrak{l}_i$ devant avoir pour cela dans cette somme un coefficient qui s'annule, *tels que :*

$$\begin{aligned}k_1u_1 + k_2u_1' + k_3u_1'' &= 0\\k_1u_2 + k_2u_2' + k_3u_2'' &= 0\\k_1u_3 + k_2u_3' + k_3u_3'' &= 0\end{aligned}$$

Or ces 3 équations ne peuvent être simultanément satisfaites par des valeurs k_i autres que 0, que si le déterminant de leurs coefficients s'annule :

$$\begin{vmatrix}u_1 & u_1' & u_1''\\u_2 & u_2' & u_2''\\u_3 & u_3' & u_3''\end{vmatrix}=0$$

Des 3 arêtes d'indices entiers :

$$\begin{aligned}&\mu_1 x_1 \mathfrak{r}_1 + \mu_2 x_2 \mathfrak{r}_2 + \mu_3 x_3 \mathfrak{r}_3\\&\mu_1 x_1' \mathfrak{r}_1 + \mu_2 x_2' \mathfrak{r}_2 + \mu_3 x_3' \mathfrak{r}_3\\&\mu_1 x_1'' \mathfrak{r}_1 + \mu_2 x_2'' \mathfrak{r}_2 + \mu_3 x_2'' \mathfrak{r}_3\end{aligned}$$

sont *coplanaires* (§ 5) s'il existe 3 nombres k_i tels que la somme des 3 vecteurs posés multipliés par ces facteurs soit nulle, c'est-à-dire, chaque $\mathfrak{r}_i$ devant avoir pour cela dans cette somme un coefficient qui s'annule, *tels que :*

$$\begin{aligned}k_1x_1 + k_2x_1' + k_3x_1'' &= 0\\k_1x_2 + k_2x_2' + k_3x_2'' &= 0\\k_1x_3 + k_2x_3' + k_3x_3'' &= 0\end{aligned}$$

Or ces 3 équations ne peuvent être simultanément satisfaites par des valeurs k_i autres que 0, que si le déterminant de leurs coefficients s'annule :

$$\begin{vmatrix}x_1 & x_1' & x_1''\\x_2 & x_2' & x_2''\\x_3 & x_3' & x_3''\end{vmatrix}=0$$

Mai si cela est, les 3 facteurs k_i sont possibles ; les faces u_i et u'_i étant données, toute face d'indices entiers u''_i satisfaisant cette égalité, est par le fait tautozonale aux 2 premières et c'est donc là le déterminant *équation* de l'*arête* commune en fonction des indices des 2 faces déterminant cette arête.

37. Si enfin nous introduisons une 4^{me} face u'''_i, tautozonale encore aux 3 faces de la même zone u_i, u'_i et u''_i, nous appelons (§ 6) le rapport anharmonique de ces 4 faces, le quotient des rapports de sinus :

$$(uu'u''u''') = \frac{\sin uu''}{\sin u'u''} : \frac{\sin uu'''}{\sin u'u'''}$$

et nous servant des relations du § 34, λ et μ étant les *paramètres* des indices des 2 dernières en fonction de ceux des 2 premières, nous trouvons immédiatement sa valeur :

$$(19)\ (uu'u''u''') = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{(uu'')_i}{(u'u'')_i} : \frac{(uu''')_k}{(u'u''')_k}$$

Le rapport anharmonique de 4 faces tautozonales, s'exprimant donc uniquement en fonction de leurs indices entiers, est un nombre *rationnel ;* c'est un corollaire direct de la rationnalité des indices des faces du cristal.

Mais si cela est, les 3 facteurs k_i sont possibles ; les arêtes x_i et x'_i étant données, toute arête d'indices entiers x''_i satisfaisant cette égalité, est par le fait coplanaire aux 2 premières et c'est donc là le déterminant *équation* de la *face* commune en fonction des indices des 2 arêtes déterminant cette face.

Si enfin nous introduisons une 4^{me} arête x_i''', coplanaire encore aux 3 arêtes dans un même plan x_i, x'_i et x''_i, nous appelons le rapport anharmonique de ces 4 arêtes (§ 6), le quotient des rapports de sinus :

$$(xx'x''x''') = \frac{\sin xx''}{\sin x'x''} : \frac{\sin xx'''}{\sin x'x'''}$$

et nous servant des relations du § 34, λ et μ étant les *paramètres* des indices des 2 dernières en fontion de ceux des 2 premières, nous trouvons immédiatement sa valeur :

$$(xx'x''x''') = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{(xx'')_i}{(x'x'')} : \frac{(xx''')_k}{(x'x''')_k}\ (19)$$

Le rapport anharmonique de 4 arêtes coplanaires, s'exprimant donc uniquement en fonction de leurs indices entiers, est un nombre *rationnel ;* c'est un corollaire direct de la rationnalité des indices des arêtes du cristal.

38. Sur les 3 angles que déterminent entre elles les 3 faces tautozonales u_i, u'_i et u''_i ou les 6 angles que déterminent entre elles

les 4 faces de la même zone u_i, u'_i, u''_i et u'''_i, *deux* seuls dans le premier cas et *trois* seuls dans le second cas sont indépendants l'un de l'autre. Dans les 2 cas, il suffit donc de tenir compte uniquement de ceux de ces angles qui sont indépendants et pour lesquels nous prendrons dès à présent soit les 2 angles uu' et uu'', soit les 3 angles uu', uu'' et uu'''.

Avec cela le simple rapport de position des 3 faces reste sans aucune symétrie :

$$\frac{\sin uu''}{\sin u'u''} = \frac{\sin uu''}{\sin (u'u + uu'')}$$

mais le rapport anhormanique des 4 faces :

$$(uu'u''u''') \equiv \frac{\sin uu''}{\sin u'u''} : \frac{\sin uu'''}{\sin u'u'''}$$

s'écrit très facilement si nous appelons A sa valeur :

$$A = \frac{\cot uu''' - \cot uu'}{\cot uu'' - \cot uu'}$$

et nous avons donc entre les angles de 4 faces tautozonales et la valeur de leur rapport anharmonique la relation générale :

$$\cot uu''' = (1 - A) \cot uu' + A \cot uu'' \qquad (20)$$

Si ce rapport anharmonique a pour valeur —1, c'est-à-dire si les 4 faces sont conjuguées harmoniques, le couple des 2 dernières par rapport à celui des 2 premières, la relation se réduit à :

$$2 \cot uu' - \cot uu'' - \cot uu''' = 0 \qquad (21)$$

Si enfin nous prenons pour la 3me face u''_i la face u^i de la zone qui est parallèle à l'arête fondamentale $\mathfrak{r}_i$ (§ 35), le paramètre λ des indices de cette face étant alors $u_i : u'_i$, pour toute valeur rationnelle $p : q$ du paramètre μ de la 4me face u'''_i, nous aurons pour le rapport anharmonique correspondant : (19)

$$A = \frac{u_i q}{u'_i p}$$

et la relation générale (20) devient dans ces conditions :

$$pu'_i . \cot uu''' - qu_i . \cot uu^i = (pu'_i - qu_i) \cot uu' \qquad (22)$$

Naturellement tout ce qui vient d'être dit des angles de 3 ou 4 faces tautozonales se répéterait pour les angles que forment entre elles 3 ou 4 arêtes coplanaires ; l'égalité reliant les valeurs des 3 angles indépendants xx', xx'' et xx''' et celle de leur rapport anharmonique est donc également :

$$\cot xx''' = (1-A)\cot xx' + A \cot xx''$$

Elle devient si la valeur du rapport anharmonique est -1 :

$$2 \cot xx' - \cot xx'' - \cot xx''' = 0$$

et enfin si la 3me arête x''_i est l'arête x^i coplanaire à la face fondamentale I_i et la 4me, l'arête x'''_i de paramètre rationnel $p:q$, elle s'écrit d'une manière assez symétrique :

$$px'_i . \cot xx''' - qx_i . \cot xx^i = (px'_i - qx_i) \cot xx'$$

39. Les résultats de ces derniers paragraphes permettent de résoudre aisément les 2 petits problèmes suivants que nous appliquons aux faces tautozonales, mais qui évidemment se poseraient et se résoudraient d'une manière pareille pour le cas des arêtes coplanaires.

I. Etant donnés les *éléments* du cristal, les indices des faces u_i et u'_i et leur angle uu', toute face de leur zone :

1° son angle uu'' *connu*, a ses indices u''_i de la forme :

$$u_i - \lambda u'_i \quad \text{où} \quad \lambda = \frac{\sqrt{\Omega(uu)}.\ \sin uu''}{\sqrt{\Omega(u'u')}.\ \sin u'u''}$$

2° ses indices u''_i *connus*, a son angle uu'' déterminé par :

$$\frac{\sin uu''}{\sin(u'u + uu'')} = \frac{\sqrt{\Omega(u'u')}.(uu'')_i}{\sqrt{\Omega(uu)}.(u'u'')_i}$$

Si nous appelons $\operatorname{tg}\Theta$ la quantité connue que représente le second membre, nous avons par le fait de l'égalité posée :

$$\frac{1+\operatorname{tg}\Theta}{1-\operatorname{tg}\Theta} = \frac{\sin(u'u+uu'') + \sin uu''}{\sin(u'u-uu'') - \sin uu''} = \frac{\sin\left(\frac{u'u}{2}+uu''\right)\cos\frac{u'u}{2}}{\cos\left(\frac{u'u}{2}+uu''\right)\sin\frac{u'u}{2}}$$

ou encore, en changeant le signe des angles :

$$\operatorname{tg}\left(\frac{uu'}{2} - uu''\right) = \operatorname{tg}\frac{uu'}{2}.\operatorname{tg}(45^\circ + \Theta)$$

c'est-à-dire une expression plus directement logarithmique que la première.

II. Etant donné les indices des faces u_i, u'_i et u''_i et leurs angles uu' et uu'', toute face de leur zone :

1° son angle uu''' *connu*, a ses indices de la forme (§ 37) :

$$u_i - \mu u'_i \quad \text{où } \mu = \frac{1}{(uu'u''u''')} \cdot \frac{(uu'')_i}{(u'u'')_i}$$

2° ses indices u'''_i *connus*, a son angle uu''' déterminé par :

$$\cot uu''' = (1-A) \cot uu' + A \cot uu''$$

Mais comme nous pouvons aussi écrire :

$$\frac{\sin uu'''}{\sin (u'u + uu''')} = \frac{1}{A} \cdot \frac{\sin uu''}{\sin u'u''}$$

nous avons, en opérant d'une manière toute pareille à celle du cas précédent, si nous posons la quantité connue :

$$\frac{1}{A} \cdot \frac{\sin uu''}{\sin u'u''} = \operatorname{tg} \Theta$$

$$\operatorname{tg}\left(\frac{uu'}{2} - uu'''\right) = \operatorname{tg} \frac{uu'}{2} \operatorname{tg} (45^\circ + \Theta)$$

c'est-à-dire encore une expression bien plus avantageuse que la première au calcul par logarithmes.

40. Comme cas particulier, si les 3 faces u_i, u'_i et u''_i sont les 3 faces tautozonales à l'arête fondamentale $\mathfrak{r}_1$, d'indices 010, 001 et 011, (c'est-à-dire les 2 faces fondamentales $\mathfrak{l}_2$ et $\mathfrak{l}_3$ et la face p_1 (§ 19) les indices u'''_i d'une 4^me^ face quelconque de cette même zone sont donc de la forme :

$$u_i - \frac{1}{A} \cdot \frac{(uu'')_i}{(u'u'')_i} u'_i$$

Or en substituant les indices u_i, u'_i et u''_i donnés, pour $i=1$ cette forme se réduit à :

$$u_i + \frac{1}{A} u'_i$$

de sorte que nous obtenons pour le rapport des 2 indices u'''_i différents de 0 :

$$\frac{u'''_2}{u'''_3} = A.$$

On obtiendrait dans les mêmes conditions pour le rapport des 2 indices non nuls d'une face tautozonale à l'arête r_2 ou à l'arête r_3 :

$$\frac{u_3'''}{u_1'''} = A \quad \text{et} \quad \frac{u_1'''}{u_2'''} = A.$$

et le résultat général peut s'exprimer ainsi :

Pour toute face appartenant à l'une des 3 zones que constituent les arêtes fondamentales, le rapport de ses 2 indices non nuls est égal au rapport anharmonique obtenu en accouplant cette 4^{me} face au groupe correspondant des 3 faces u_i, u_i' et u_i'' choisies et maintenues dans l'ordre qui leur a été donné.