Zeitschrift: Mémoires de la Société Fribourgeoise des Sciences Naturelles. Mathématique et physique = Mitteilungen der Naturforschenden Gesellschaft in Freiburg. Mathematik und Physik

Herausgeber: Société Fribourgeoise des Sciences Naturelles

Band: 2 (1912)

Artikel: Application des coordonnées sphériques homogènes à la cristallographie géométrique

Autor: Bays, Sévérin

Kapitel: V

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-306718

CHAPITRE V

23. Reprenons maintenant les premiers éléments que nous fournit la construction zonale du complexe des *faces* cristallines, des 4 faces données pour son point de départ.

Les 3 faces possibles, tautozonales aux arêtes fondamentales (fig. 7) :

$$p_1 \equiv \nu_2 \mathfrak{l}_2 + \nu_3 \mathfrak{l}_3$$
$$p_2 \equiv \nu_3 \mathfrak{l}_3 + \nu_1 \mathfrak{l}_1$$
$$p_3 \equiv \nu_1 \mathfrak{l}_1 + \nu_2 \mathfrak{l}_2$$

donnent par leur intersection deux à deux, les 3 nouvelles faces possibles, tautozonales aux mêmes arêtes :

$$p'_1 \equiv \nu_2 \mathfrak{l}_2 - \nu_3 \mathfrak{l}_3$$
$$p'_2 \equiv \nu_3 \mathfrak{l}_3 - \nu_1 \mathfrak{l}_1$$
$$p'_3 \equiv \nu_1 \mathfrak{l}_1 - \nu_2 \mathfrak{l}_2$$

et formant avec les premières, les valeurs $-\frac{\nu_3}{\nu_2} : \frac{\nu_3}{\nu_2}, -\frac{\nu_1}{\nu_3} : \frac{\nu_1}{\nu_3}, -\frac{\nu_2}{\nu_1} : \frac{\nu_2}{\nu_1}$ étant égales à -1, (§ 4 et 6) 3 couples de faces *harmoniquement* conjuguées par rapport au couple correspondant de faces fondamentales. Leur intersection *commune* $\pi_0 \equiv \mathfrak{r}_0$, puisque la somme

Reprenons maintenant les premiers éléments que nous fournit la déduction zonale du complexe des *arêtes* cristallines, des 4 arêtes données pour son point de départ.

Les 3 arêtes possibles, coplanaires aux faces fondamentales (fig. 7) :

$$\pi_1 \equiv \mu_2 \mathfrak{r}_2 + \mu_3 \mathfrak{r}_3$$
$$\pi_2 \equiv \mu_3 \mathfrak{r}_3 + \mu_1 \mathfrak{r}_1$$
$$\pi_3 \equiv \mu_1 \mathfrak{r}_1 + \mu_2 \mathfrak{r}_2$$

donnent par leur plan de jonction deux à deux, les 3 nouvelles arêtes possibles, coplanaires aux mêmes faces :

$$\pi'_1 \equiv \mu_2 \mathfrak{r}_2 - \mu_3 \mathfrak{r}_3$$
$$\pi'_2 \equiv \mu_3 \mathfrak{r}_3 - \mu_1 \mathfrak{r}_1$$
$$\pi'_3 \equiv \mu_1 \mathfrak{r}_1 - \mu_2 \mathfrak{r}_2$$

et formant avec les premières, les valeurs $-\frac{\mu_3}{\mu_2} : \frac{\mu_3}{\mu_2}, -\frac{\mu_1}{\mu_3} : \frac{\mu_1}{\mu_3}, -\frac{\mu_2}{\mu_1} : \frac{\mu_2}{\mu_1}$, étant égales à -1, (§ 4 et 6), 3 couples d'arêtes *harmoniquement* conjuguées par rapport au couple correspondant d'arêtes fondamentales. Leur plan de jonction *commun* $p_0 \equiv \mathfrak{l}_0$, puisque la somme de leurs vecteurs est nulle, est donc encore une arête *possible* du cristal, déterminant ainsi conjointement avec la face-unité un fai-

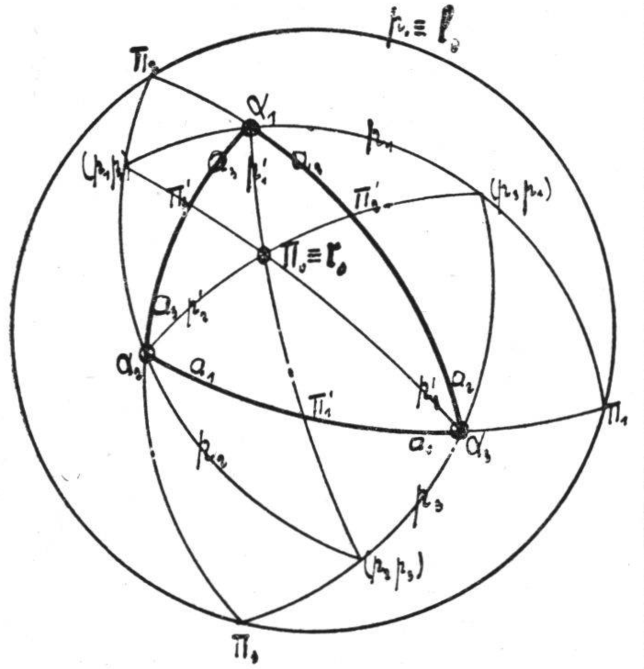

Fig. 7.

sceau harmonique de *faces* par chaque arête fondamentale :

$$(a_2 a_3 p_1 p'_1) = -1$$
$$(a_3 a_1 p_2 p'_2) = -1$$
$$(a_1 a_2 p_3 p'_3) = -1$$

et par le fait, (§ 7) un faisceau harmonique d'*arêtes* sur chaque face fondamentale :

$$(\alpha_2 \alpha_3 \pi_1 \pi'_1) = -1$$
$$(\alpha_3 \alpha_1 \pi_2 \pi'_2) = -1$$
$$(\alpha_1 \alpha_2 \pi_3 \pi'_3) = -1$$

Nous appellerons simplement cette arête, dont le point sur la sphère est le pôle trilinéaire de la droite sphérique correspondante à la face-unité, l'*arête harmonique* de cette même face-unité.

de leurs vecteurs est nulle, est donc encore une face *possible* du cristal, déterminant ainsi conjointement avec l'arête-unité un fai-

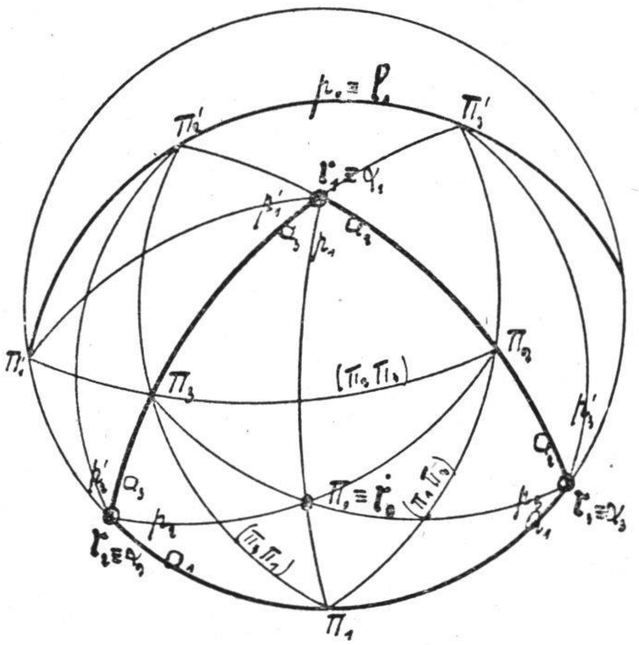

Fig. 7.

sceau harmonique d'*arêtes* sur chaque face fondamentale :

$$(\alpha_2 \alpha_3 \pi_1 \pi'_1) = -1$$
$$(\alpha_3 \alpha_1 \pi_2 \pi'_2) = -1$$
$$(\alpha_1 \alpha_2 \pi_3 \pi'_3) = -1$$

et par le fait, (§ 7) un faisceau harmonique de *faces* par chaque arête fondamentale :

$$(a_2 a_3 p_1 p'_1) = -1$$
$$(a_3 a_1 p_2 p'_2) = -1$$
$$(a_1 a_2 p_3 p'_3) = -1$$

Nous appellerons simplement cette face, dont la droite sphérique correspondante est la polaire trilinéaire du point déterminé sur la sphère par l'arête-unité, la *face harmonique* de cette même arête-unité.

24. Son vecteur est le produit vectoriel de 2 quelconques des vecteurs des 3 faces qui la déterminent :

$$\mathrm{V}(\nu_2\mathfrak{l}_2-\nu_3\mathfrak{l}_3)(\nu_3\mathfrak{l}_3-\nu_1\mathfrak{l}_1)=$$
$$\nu_2\nu_3 \sin \mathrm{A}_1\mathfrak{r}_1+\nu_3\nu_1 \sin \mathrm{A}_2\mathfrak{r}_2+\nu_1\nu_2 \sin \mathrm{A}_3\mathfrak{r}_3$$

En divisant par le facteur constant $\nu_1\nu_2\nu_3$, le vecteur obtenu représente encore la même arête :

$$\frac{\sin \mathrm{A}_1}{\nu_1}\mathfrak{r}_1+\frac{\sin \mathrm{A}_2}{\nu_2}\mathfrak{r}_2+\frac{\sin \mathrm{A}_3}{\nu_3}\mathfrak{r}_3$$

et ses indices sont les quotients des tenseurs de ses composantes par les constantes μ_i :

$$\frac{\sin \mathrm{A}_1}{\mu_1\nu_1},\ \frac{\sin \mathrm{A}_2}{\mu_2\nu_2},\ \frac{\sin \mathrm{A}_3}{\mu_3\nu_3}$$

Son vecteur est le produit vectoriel de 2 quelconque des vecteurs des 3 arêtes qui la déterminent :

$$\mathrm{V}(\mu_2\mathfrak{r}_2-\mu_3\mathfrak{r}_3)(\mu_3\mathfrak{r}_3-\mu_1\mathfrak{r}_1)=$$
$$\mu_2\mu_3 \sin \mathrm{a}_1\mathfrak{l}_1+\mu_3\mu_1 \sin \mathrm{a}_2\mathfrak{l}_2+\mu_1\mu_2 \sin \mathrm{a}_3\mathfrak{l}_3$$

En divisant par le facteur constant $\frac{\mu_1\mu_2\mu_3}{\mathrm{M}}$*, le vecteur obtenu représente encore la même face :

$$\frac{\sin \mathrm{A}_1}{\mu_1}\mathfrak{l}_1+\frac{\sin \mathrm{A}_2}{\mu_2}\mathfrak{l}_2+\frac{\sin \mathrm{A}_3}{\mu_3}\mathfrak{l}_3$$

et ses indices sont les quotients des tenseurs de ses composantes par les constantes ν_i' :

$$\frac{\sin \mathrm{A}_1}{\mu_1\nu_1},\ \frac{\sin \mathrm{A}_2}{\mu_2\nu_2},\ \frac{\sin \mathrm{A}_3}{\mu_3\nu_3}$$

Or jusqu'ici nous n'avons encore établi aucune relation, entre la face et l'arêté-*unités*, c'est-à-dire entre les constantes μ_i et ν_i déterminant leurs vecteurs, et pourtant il nous faut une dépendance fixe entre ces 2 éléments, si nous voulons donner un sens précis aux relations qui lient entre elles les faces et les arêtes constituant le complexe du cristal.

La *face-unité* étant l'une quelconque des faces du cristal, nous choisissons dorénavant comme *arête-unité*, son arête *harmonique*, c'est-à-dire nous posons dorénavant entre les constantes μ_i et ν_i les relations qui suivent :

L'*arête-unité* étant l'une quelconque des arêtes du cristal, nous choisissons dorénavant comme *face-unité* sa face *harmonique*, c'est-à-dire nous posons dorénavant entre les constantes μ_i et ν_i les relations qui suivent :

$$\mu_1\nu_1=\sin \mathrm{A}_1,\ \mu_2\nu_2=\sin \mathrm{A}_2,\ \mu_3\nu_3=\sin \mathrm{A}_3. \qquad (10)$$

25. Dans ce cas, la relation du § 13 :

$$\mathrm{OE}_1:\mathrm{OE}_2:\mathrm{OE}_3=\frac{1}{\nu_1 \sin \mathrm{h}_1}:\frac{1}{\nu_2 \sin \mathrm{h}_2}:\frac{1}{\nu_3 \sin \mathrm{h}_3}$$

* M étant module $\frac{\sin \mathrm{A}_i}{\sin \mathrm{a}_i}$ du triangle de référence.

qui nous donne les longueurs interceptées sur les arêtes fondamentales (ou les *axes*) par la face-unité, devient immédiatement, si nous tenons compte que $\sin A_i \sin h_i = \Delta =$ constante, et de la relation (7) correspondante pour l'arête-unité :

$$OE_1 : OE_2 : OE_3 = \mu_1 : \mu_2 : \mu_3 = OD_1 : OD_2 : OD_3 \qquad (11)$$

Si donc nous prenons comme arête-unité, l'harmonique de la face-unité, ses composantes OD_i sont les segments interceptés sur les axes par la face-unité déplacée parallèlement à elle-même, et celle-ci donnée, nous obtenons directement cette arête harmonique :

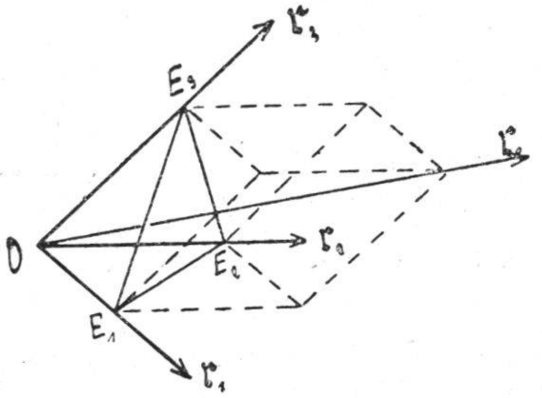

Fig. 8.

Elle est la diagonale principale du parallèlipipède construit sur les *3 axes-unités* comme arêtes.

Si donc nous prenons comme face-unité, l'harmonique de l'arête-unité, les segments OE_i qu'elle intercepte sur les axes sont les composantes de l'arête-unité, et celle-ci donnée, nous obtenons directement cette face harmonique :

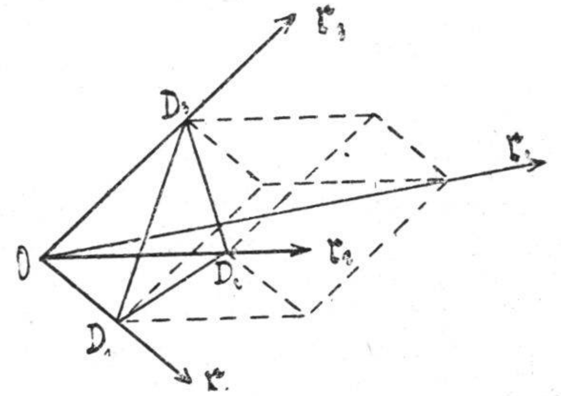

Fig. 8.

Elle est le plan diagonal $(D_1 D_2 D_3)$ du parallélipipède construit sur les composantes OD_i comme arêtes.

26. Cette relation posée des $\mu_i \nu_i = \sin A_i$ établit d'ailleurs, pour le cas général, entre les longueurs OH_i des segments qu'intercepte la face d'indices u_i sur les arêtes fondamentales, et les composantes OK_i de l'arête d'indices x_i, plus de symétrie qu'il n'y en avait jusqu'ici :

$$OH_1 : OH_2 : OH_3 = \frac{\mu_1}{u_1} : \frac{\mu_2}{u_2} : \frac{\mu_3}{u_3}$$

$$OK_1 : OK_2 : OK_3 = \mu_1 x_1 : \mu_2 x_2 : \mu_3 x_3$$

Les rapports des indices de cette face et de cette arête deviennent : (§ 14).

$$\begin{aligned} u_1 : u_2 : u_3 &= \mu_1 \cos \vartheta_1 : \mu_2 \cos \vartheta_2 : \mu_3 \cos \vartheta_3 \\ x_1 : x_2 : x_3 &= \nu_1 \cos \vartheta_1 : \nu_2 \cos \vartheta_2 : \nu_3 \cos \vartheta_3 \end{aligned} \qquad (12)$$

et enfin l'équation du § 16 :

$$\mu_1\nu_1 \sin h_1 . x_1u_1 + \mu_2\nu_2 \sin h_2 . x_2u_2 + \mu_3\nu_3 \sin h_3 . x_3u_3 = 0$$

prend immédiatement la forme simple et élégante :

$$x_1u_1 + x_2u_2 + x_3u_3 = 0$$

Toute combinaison de valeurs *entières* des indices u_i satisfaisant cette relation, représente une face parallèle à l'arête x_i ; c'est donc là sous sa forme définitive, l'*équation* de cette arête du cristal.

$$\mu_1\nu_1 \sin h_1 . u_1x_1 + \mu_2\nu_2 \sin h_2 . u_2x_2 + \mu_3\nu_3 \sin h_3 \, u_3x_3 = 0$$

prend immédiatement la forme simple et élégante :

$$u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3 = 0 \qquad (13)$$

Toute combinaison de valeurs *entières* des indices x_i satisfaisant cette relation, représente une arête parallèle à la face u_i ; c'est donc là sous sa forme définitive l'*équation* de cette face du cristal.

27. La face-unité peut être une face quelconque du cristal. Toute face du cristal, pouvant donc être prise comme face-unité, a par conséquent son arête harmonique *possible*, et construisible par le procédé de la fig. 8, et, puisque, dans ce cas, les longueurs OH_i interceptées par la face et les composantes OK_i de l'arête, sur les axes sont *égales* (11) :

$$\frac{\mu_1}{u_1} : \frac{\mu_2}{u_2} : \frac{\mu_3}{u_3} = \mu_1 x_1 : \mu_2 x_2 : \mu_3 x_3$$

et donc :

$$u_1 : u_2 : u_3 = \frac{1}{x_1} : \frac{1}{x_2} : \frac{1}{x_3}$$

c'est-à-dire que les indices d'une face quelconque du cristal sont les valeurs *inverses* de ceux de son arête harmonique.

L'arête-unité peut être une arête quelconque du cristal. Toute arête du cristal, pouvant donc être prise comme arête-unité, a par conséquent sa face harmonique *possible*, et construisible par le procédé de de la fig. 8, et, puisque, dans ce cas, les composantes OK_i de l'arête et les longueurs OH_i interceptées par la face, sur les axes sont *égales* (11) :

$$\mu_1 x_1 : \mu_2 x_2 : \mu_3 x_3 = \frac{\mu_1}{u_1} : \frac{\mu_2}{u_2} : \frac{\mu_3}{u_3}$$

et donc :

$$x_1 : x_2 : x_3 = \frac{1}{u_1} : \frac{1}{u_2} : \frac{1}{u_3}$$

c'est-à-dire que les indices d'une arête quelconque du cristal sont les valeurs *inverses* de ceux de sa face harmonique.

27 bis. Remarquons encore que si nous appelons les 4 faces $\mathfrak{l}_0, \mathfrak{l}_1, \mathfrak{l}_2, \mathfrak{l}_3$, déterminant le complexe des faces, et les 4 arêtes $\mathfrak{r}_0, \mathfrak{r}_1, \mathfrak{r}_2, \mathfrak{r}_3$, déterminant celui des arêtes, les 4 faces et arêtes *élémentaires* du cristal, l'un quelconque de ces 2 systèmes est maintenant complètement connu dès que l'autre est donné. Les arêtes fondamentales sont en effet les intersections des faces fondamentales, l'arête-unité est l'harmonique de la face-unité, et réciproquement. Par le fait, *soit* les valeurs :

> sin A_1. sin A_2, sin A_3 avec celles des rapports $\nu_1 : \nu_2 : \nu_3$ déterminant le système des faces élémentaires,

soit les valeurs :

> sin a_1, sin a_2, sin a_3, avec celles des rapports $\mu_1 : \mu_2 : \mu_3$ déterminant celui des arêtes élémentaires,

déterminent à elles seules le système *complet* de référence du complexe cristallin, et pour cette raison, constituent les unes et les autres au même titre, les *éléments* du cristal.