Zeitschrift: Mémoires de la Société Fribourgeoise des Sciences Naturelles.

Mathématique et physique = Mitteilungen der Naturforschenden

Gesellschaft in Freiburg. Mathematik und Physik

Herausgeber: Société Fribourgeoise des Sciences Naturelles

Band: 2 (1912)

Artikel: Application des coordonnées sphériques homogènes à la

cristallographie géométrique

Autor: Bays, Sévérin

Kapitel: V

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-306718

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 24.08.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

CHAPITRE V

23. Reprenons maintenant les premiers éléments que nous fournit la construction zonale du complexe des *faces* cristallines, des 4 faces données pour son point de départ.

Les 3 faces possibles, tautozonales aux arêtes fondamentales (fig. 7):

$$p_1 \equiv \nu_2 \mathfrak{l}_2 + \nu_3 \mathfrak{l}_3$$

$$p_2 \equiv \nu_3 \mathfrak{l}_3 + \nu_1 \mathfrak{l}_1$$

$$p_3 \equiv \nu_1 \mathfrak{l}_1 + \nu_2 \mathfrak{l}_2$$

donnent par leur intersection deux à deux, les 3 nouvelles faces possibles, tautozonales aux mêmes arêtes:

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_{1}' &\equiv \mathbf{v}_{2} \mathbf{l}_{2} - \mathbf{v}_{3} \mathbf{l}_{3} \\ \mathbf{p}_{2}' &\equiv \mathbf{v}_{3} \mathbf{l}_{3} - \mathbf{v}_{1} \mathbf{l}_{1} \\ \mathbf{p}_{3}' &\equiv \mathbf{v}_{1} \mathbf{l}_{1} - \mathbf{v}_{2} \mathbf{l}_{2} \end{aligned}$$

et formant avec les premières, les valeurs $-\frac{\nu_3}{\nu_2} : \frac{\nu_3}{\nu_2}, -\frac{\nu_1}{\nu_3} : \frac{\nu_1}{\nu_3}, -\frac{\nu_2}{\nu_1} : \frac{\nu_2}{\nu_1}$ étant égales à -1, (§ 4 et 6) 3 couples de faces harmoniquement conjuguées par rapport au couple correspondant de faces fondamentales. Leur intersection commune $\pi_0 \equiv \mathbf{r}_0$, puisque la somme

Reprenons maintenant les premiers éléments que nous fournit la déduction zonale du complexe des arêtes cristallines, des 4 arêtes données pour son point de départ.

Les 3 arêtes possibles, coplanaires aux faces fondamentales (fig. 7):

$$egin{aligned} \pi_1 &\equiv \mu_2 \mathbf{r}_2 + \mu_3 \mathbf{r}_3 \\ \pi_2 &\equiv \mu_3 \mathbf{r}_3 + \mu_1 \mathbf{r}_1 \\ \pi_3 &\equiv \mu_1 \mathbf{r}_1 + \mu_2 \mathbf{r}_2 \end{aligned}$$

donnent par leur plan de jonction deux à deux, les 3 nouvelles arêtes possibles, coplanaires aux mêmes faces:

$$egin{aligned} \pi_1' &\equiv \mu_2 \mathbf{r}_2 - \mu_3 \mathbf{r}_3 \ \pi_2' &\equiv \mu_3 \mathbf{r}_3 - \mu_1 \mathbf{r}_1 \ \pi_3' &\equiv \mu_1 \mathbf{r}_1 - \mu_2 \mathbf{r}_2 \end{aligned}$$

et formant avec les premières, les valeurs $-\frac{\mu_3}{\mu_2}$; $\frac{\mu_3}{\mu_2}$, $-\frac{\mu_1}{\mu_3}$; $\frac{\mu_1}{\mu_3}$, $-\frac{\mu_2}{\mu_1}$; $\frac{\mu_2}{\mu_1}$, étant égales à -1, (§ 4 et 6), 3 couples d'arêtes harmoniquement conjuguées par rapport au couple correspondant d'arêtes fondamentales. Leur plan de jonction commun $p_0 \equiv l_0$, puisque la somme

de leurs vecteurs est nulle, est donc encore une arête *possible* du cristal, déterminant ainsi conjointement avec la face-unité un fai-

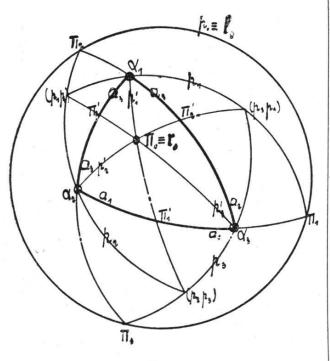


Fig. 7.

sceau harmonique de *faces* par chaque arête fondamentale :

$$(a_2 a_3 p_1 p_1') = -1$$

 $(a_3 a_1 p_2 p_2') = -1$
 $(a_1 a_2 p_3 p_3') = -1$

et par le fait, (§ 7) un faisceau harmonique d'arêtes sur chaque face fondamentale:

$$(a_2 a_3 \pi_1 \pi_1') = -1$$

 $(a_3 a_1 \pi_2 \pi_2') = -1$
 $(a_1 a_2 \pi_3 \pi_3') = -1$

Nous appellerons simplement cette arête, dont le point sur la sphère est le pôle trilinéaire de la droite sphérique correspondante à la face-unité, l'arête harmonique de cette même face-unité.

de leurs vecteurs est nulle, est donc encore une face *possible* du cristal, déterminant ainsi conjointement avec l'arête-unité un fai-

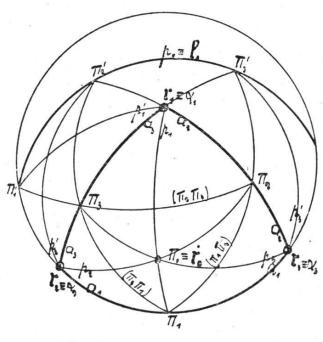


Fig. 7.

sceau harmonique d'arêtes sur chaque face fondamentale:

$$(a_2 a_3 \pi_1 \pi_1') = -1$$

$$(a_3 a_1 \pi_2 \pi_2') = -1$$

$$(a_1 a_2 \pi_3 \pi_3') = -1$$

et par le fait, (§ 7) un faisceau harmonique de *faces* par chaque arête fondamentale:

$$(a_2 a_3 p_1 p'_1) = -1$$

 $(a_3 a_1 p_2 p'_2) = -1$
 $(a_1 a_2 p_3 p'_3) = -1$

Nous appellerons simplement cette face, dont la droite sphérique correspondante est la polaire trilinéaire du point déterminé sur la sphère par l'arête-unité, la face harmonique de cette même arête-unité. 24. Son vecteur est le produit vectoriel de 2 quelconques des vecteurs des 3 faces qui la déterminent:

En divisant par le facteur constant $\nu_1\nu_2\nu_3$, le vecteur obtenu représente encore la même arête:

$$\frac{\sin A_1}{\nu_1} r_1 + \frac{\sin A_2}{\nu_2} r_2 + \frac{\sin A_3}{\nu_3} r_3$$

et ses indices sont les quotients des tenseurs de ses composantes par les constantes μ_i :

$$\frac{\sin A_1}{\mu_1 \nu_1}$$
 , $\frac{\sin A_2}{\mu_2 \nu_2}$, $\frac{\sin A_3}{\mu_3 \nu_3}$

Son vecteur est le produit vectoriel de 2 quelconque des vecteurs des 3 arêtes qui la déterminent:

$$V_{(\mu_{2}\mathbf{r}_{2} - \mu_{3}\mathbf{r}_{3})(\mu_{3}\mathbf{r}_{3} - \mu_{1}\mathbf{r}_{1}) = }$$

$$\mu_{2}\mu_{3}\sin a_{1}\mathbf{l}_{1} + \mu_{3}\mu_{1}\sin a_{2}\mathbf{l}_{2} + \mu_{1}\mu_{2}\sin a_{3}\mathbf{l}_{3}$$

En divisant par le facteur constant $\frac{\mu_1\mu_2\mu_3^*}{M}$, le vecteur obtenu représente encore la même face :

$$\frac{\sin A_1}{\mu_1}\,\mathfrak{l}_1+\frac{\sin A_2}{\mu_2}\,\mathfrak{l}_2+\frac{\sin A_3}{\mu_3}\mathfrak{l}_3$$

et ses indices sont les quotients des tenseurs de ses composantes par les constantes ν'_i :

$$\frac{\sin A_1}{\mu_1 \nu_1}$$
 , $\frac{\sin A_2}{\mu_2 \nu_2}$, $\frac{\sin A_3}{\mu_3 \nu_3}$

Or jusqu'ici nous n'avons encore établi aucune relation, entre la face et l'arêté-unités, c'est-à-dire entre les constantes μ_i et ν_i déterminant leurs vocteurs, et pourtant il nous faut une dépendance fixe entre ces 2 éléments, si nous voulons donner un sens précis aux relations qui lient entre elles les faces et les arêtes constituant le complexe du cristal.

La face-unité étant l'une quelconque des faces du cristal, nous choisissons dorénavant comme arête-unité, son arête harmonique, c'est-à-dire nous posons dorénavant entre les constantes μ_i et ν_i les relations qui suivent: L'arête-unité étant l'une quelconque des arêtes du cristal, nous choisissons dorénavant comme face-unité sa face harmonique, c'est à-dire nous posons dorenavant entre les constantes μ_i et ν_i les relations qui suivent:

$$\mu_1 \nu_1 = \sin A_1, \ \mu_2 \nu_2 = \sin A_2, \ \mu_3 \nu_3 = \sin A_3.$$
 (10)

25. Dans ce cas, la relation du § 13:

$$OE_1: OE_2: OE_3 = \frac{1}{\nu_1 \sin h_1} : \frac{1}{\nu_2 \sin h_2} : \frac{1}{\nu_3 \sin h_3}$$

^{*} M étant module $\frac{\sin A_i}{\sin a_i}$ du triangle de référence.

qui nous donne les longueurs interceptées sur les arêtes fondamentales (ou les *axes*) par la face-unité, devient immédiatement, si nous tenons compte que sin A_i sin $h_i = \Delta =$ constante, et de la relation (7) correspondante pour l'arête-unité:

$$OE_1 : OE_2 : OE_3 = \mu_1 : \mu_2 : \mu_3 = OD_1 : OD_2 : OD_3$$
 (11)

Si donc nous prenons comme arête-unité, l'harmonique de la face-unité, ses composantes OD_i sont les segments interceptés sur les axes par la face-unité déplacée parallèlement à elle-même, et celle-ci donnée, nous obtenons directement cette arête harmonique:

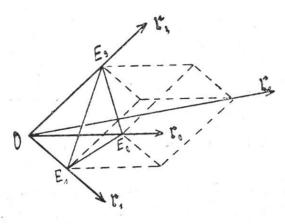


Fig. 8.

Elle est la diagonale principale du parallèlipipède construit sur les *3 axes-unités* comme arêtes. Si donc nous prenons comme face-unité, l'harmonique de l'arêteunité, les segments OE_i qu'elle intercepte sur les axes sont les composantes de l'arête-unité, et celle-ci donnée, nous obtenons directement cette face harmonique:

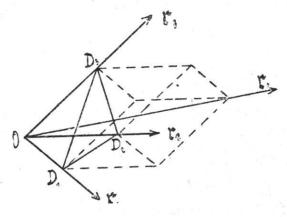


Fig. 8.

Elle est le plan diagonal (D₁D₂D₃) du parallélipipède construit sur les composantes OD₁ comme arêtes.

26. Cette relation posée des $\mu_i \nu_i = \sin A_i$ établit d'ailleurs, pour le cas général, entre les longueurs OH_i des segments qu'intercepte la face d'indices u_i sur les arêtes fondamentales, et les composantes OK_i de l'arête d'indices x_i , plus de symétrie qu'il n'y en avait jusqu'ici :

$$\begin{aligned} \mathrm{OH_1} \ : \ \mathrm{OH_2} \ : \ \mathrm{OH_3} &== \frac{\mu_1}{\mathrm{u}_1} : \frac{\mu_2}{\mathrm{u}_2} : \frac{\mu_3}{\mathrm{u}_3} \\ \mathrm{OK_1} \ : \ \mathrm{OK_2} \ : \ \mathrm{OK_3} &= \mu_1 \mathrm{x}_1 : \mu_2 \mathrm{x}_2 : \mu_3 \mathrm{x}_3 \end{aligned}$$

Les rapports des indices de cette face et de cette arête deviennent : (§ 14).

$$\begin{array}{l}
 u_1 : u_2 : u_3 = \mu_1 \cos \theta_1 : \mu_2 \cos \theta_2 : \mu_3 \cos \theta_3 \\
 x_1 : x_2 : x_3 = \nu_1 \cos \theta_1 : \nu_2 \cos \theta_2 : \nu_3 \cos \theta_3
 \end{array}
 \tag{12}$$

et enfin l'équation du § 16:

 $\mu_1 \nu_1 \sin h_1 \cdot x_1 u_1$ $+ \mu_2 v_2 \sin h_2 \cdot x_2 u_2 + \mu_3 v_3 \sin h_3 \cdot x_3 u_3 = 0$ prend immédiatement la forme simple et élégante:

$$x_1u_1 + x_2u_2 + x_3u_3 = 0$$

Toute combinaison de valeurs entières des indices u, satisfaisant cette relation, représente une face parallèle à l'arête x_i ; c'est donc là sous sa forme définitive, l'équation de cette arête du cristal.

27. La face-unité peut être une face quelconque du cristal. Toute face du cristal, pouvant donc être prise comme face-unité, a par conséquent son arête harmonique possible, et construisible par le procédé de la fig. 8, et, puisque, dans ce cas, les longueurs OH, interceptées par la face et les composantes OK; de l'arête, sur les axes sont égales (11) :

$$\frac{\mu_1}{u_1}: \frac{\mu_2}{u_2}: \frac{\mu_3}{u_3} = \mu_1 x_1 : \mu_2 x_2 : \mu_3 x_3 \qquad \mu_1 x_1 : \mu_2 x_2 : \mu_3 x_3 = \frac{\mu_1}{u_1}: \frac{\mu_2}{u_2}: \frac{\mu_3}{u_3}$$
et donc:
$$et donc:$$

$$u_1:u_2:u_3=\frac{1}{x_1}:\frac{1}{x_2}:\frac{1}{x_3}$$

c'est-à-dire que les indices d'une face quelconque du cristal sont les valeurs *inverses* de ceux de son arête harmonique.

 $\mu_1 \nu_1 \sin h_1 \cdot u_1 x_1 +$ $\mu_2 \nu_2 \sin h_2$. $u_2 x_2 + \mu_3 \nu_3 \sin h_3 u_3 x_3 = 0$ prend immédiatement la forme simple et élégante:

$$u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3 = 0$$
 (13)

Toute combinaison de valeurs entières des indices x_i satisfaisant cette relation, représente une arête parallèle à la face u; c'est donc là sous sa forme définitive l'équation de cette face du cristal.

L'arête-unité peut être une arête quelconque du cristal. Toute arête du cristal, pouvant donc être prise comme arête-unité, a par conséquent sa face harmonique possible, et construisible par le procédé de de la fig. 8, et, puisque, dans ce cas, les composantes OK i de l'arête et les longueurs OH; interceptées par la face, sur les axes sont égales (11):

$$\mu_1 \mathbf{x}_1 : \mu_2 \mathbf{x}_2 : \mu_3 \mathbf{x}_3 = \frac{\mu_1}{\mathbf{u}_1} : \frac{\mu_2}{\mathbf{u}_2} : \frac{\mu_3}{\mathbf{u}_3}$$
et donc:

$$x_1: x_2: x_3 = \frac{1}{u_1}: \frac{1}{u_2}: \frac{1}{u_3}$$

c'est-à-dire que les indices d'une arête quelconque du cristal sont les valeurs *inverses* de ceux de sa face harmonique.

27 bis. Remarquons encore que si nous appelons les 4 faces l_0, l_1, l_2, l_3 , déterminant le complexe des faces, et les 4 arêtes r_0, r_1, r_2, r_3 , déterminant celui des arêtes, les 4 faces et arêtes élémentaires du cristal, l'un quelconque de ces 2 systèmes est maintenant complètement connu dès que l'autre est donné. Les arêtes fondamentales sont en effet les intersections des faces fondamentales, l'arête-unité est l'harmonique de la face-unité, et réciproquement. Par le fait, soit les valeurs :

sin A_1 , sin A_2 , sin A_3 avec celles des rapports $\nu_1 : \nu_2 : \nu_3$ déterminant le système des faces élémentaires,

soit les valeurs:

 $\sin a_1$, $\sin a_2$, $\sin a_3$, avec celles des rapports $\mu_1: \mu_2: \mu_3$ déterminant celui des arêtes élémentaires,

déterminent à elles seules le système complet de référence du complexe cristallin, et pour cette raison, constituent les unes et les autres au même titre, les éléments du cristal.