Zeitschrift: Mémoires de la Société Fribourgeoise des Sciences Naturelles. Mathématique et physique = Mitteilungen der Naturforschenden Gesellschaft in Freiburg. Mathematik und Physik

Herausgeber: Société Fribourgeoise des Sciences Naturelles

Band: 2 (1912)

Artikel: Application des coordonnées sphériques homogènes à la cristallographie géométrique

Autor: Bays, Sévérin

Kapitel: III

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-306718

CHAPITRE III

11. Soit maintenant une nouvelle *face* quelconque du même complexe dont nous allons déterminer la position par rapport aux 3 faces *fondamentales* que nous venons d'établir.

D'une part, cette position est complètement déterminée si nous décomposons le nouveau vecteur, qui n'est pas en général un vecteur-unité, et que nous écrirons donc $u_4\mathfrak{l}$, selon les 3 vecteurs $\mathfrak{l}_1, \mathfrak{l}_2, \mathfrak{l}_3$ des faces fondamentales, n_1, n_2, n_3, étant les tenseurs des 3 composantes ;

$$u_4\mathfrak{l} = n_1\mathfrak{l}_1 + n_2\mathfrak{l}_2 + n_3\mathfrak{l}_3$$

En introduisant les *constantes* ν_i, composantes elles-mêmes par rapport à ces mêmes 3 faces fondamentales, du vecteur d'une 5^{me} face du complexe et par le fait, *différentes* de o :

$$u_4\mathfrak{l} = \nu_1 u_1\mathfrak{l}_1 + \nu_2 u_2\mathfrak{l}_2 + \nu_3 u_3\mathfrak{l}_3$$

Pour tout choix complètement arbitraire des constantes ν_i, M. Daniëls appelle les valeurs u_i, déterminant le vecteur donné, ou un multiple positif quelconque de ces valeurs, les *coordonnées pro-*

Soit maintenant une nouvelle *arête* quelconque du même complexe dont nous allons déterminer la position par rapport aux 3 arêtes *fondamentales* que nous venons d'établir.

D'une part, cette position est complètement déterminée si nous décomposons le nouveau vecteur qui n'est pas en général un vecteur-unité et que nous écrirons donc $x_4\mathfrak{r}$, selon les 3 vecteurs $\mathfrak{r}_1, \mathfrak{r}_2, \mathfrak{r}_3$ des arêtes fondamentales, m_1, m_2 et m_3 étant les tenseurs des 3 composantes :

$$x_4\mathfrak{r} = m_1\mathfrak{r}_1 + m_2\mathfrak{r}_2 + m_3\mathfrak{r}_3$$

En introduisant les *constantes* μ_i, composantes elles-mêmes par rapport à ces mêmes 3 arêtes fondamentales, du vecteur d'une 5^{me} arête du complexe et par le fait, *différentes* de o :

$$x_4\mathfrak{r} = \mu_1 x_1\mathfrak{r}_1 + \mu_2 x_2\mathfrak{r}_2 + \mu_3 x_3\mathfrak{r}_3.$$

Pour tout choix complètement arbitraire des constantes μ_i, M. Daniëls appelle les valeurs x_i, déterminant le vecteur donné, ou un multiple positif quelconque de ces valeurs, les *coordonnées pro-*

jectives de la *droite* sphérique correspondante, par rapport au triangle de référence des droites sphériques données $\mathfrak{l}_i$.

Elles le sont donc encore si nous assujettissons ces 3 constantes à la condition que nous leur avons posée, et le vecteur que celles-ci déterminent, est alors celui de la *face-unité* du complexe, puisque ses coordonnées se réduisent chacune à l'unité :

$$\nu_1\mathfrak{l}_1 + \nu_2\mathfrak{l}_2 + \nu_3\mathfrak{l}_3$$

12. D'autre part si les longueurs OH_i sont les *segments* qu'intercepte la nouvelle face donnée, déplacée parallèlement à elle-même, sur les axes $\mathfrak{r}_i$ intersections des 3 faces fondamentales (fig. 4), les longueurs OE_i étant les segments correspondants interceptés par une 5me face du cristal prise comme face-unité, les rapports :

$$\frac{OE_1}{OH_1}, \frac{OE_2}{OH_2}, \frac{OE_3}{OH_3}$$

ou un multiple positif quelconque de leurs valeurs, déterminent également sa position par rapport aux 3 faces fondamentales et à la face-unité choisies et sont par rapport à ce système de référence, les *indices* de *Miller* de cette face quelconque du cristal.

13. Or le vecteur de cette face qui est en coordonnées projectives

$$u_4\mathfrak{l} = \nu_1 u_1 \mathfrak{l}_1 + \nu_2 u_2 \mathfrak{l}_2 + \nu_3 u_3 \mathfrak{l}_3$$

jectives du *point* correspondant sur la sphère, par rapport au triangle de référence des sommets donnés $\mathfrak{r}_1, \mathfrak{r}_2, \mathfrak{r}_3$.

Elles le sont donc encore si nous assujettissons ces 3 constantes à la condition que nous leur avons posée, et le vecteur que celles-ci déterminent, est alors celui de l'*arête-unité* du complexe, puisque ses coordonnées se réduisent chacune à l'unité :

$$\mu_1\mathfrak{r}_1 + \mu_2\mathfrak{r}_2 + \mu_3\mathfrak{r}_3$$

D'autre part, si les longueurs OK_i sont les *coordonnées* cartésiennes obliques de la nouvelle arête donnée par rapport au système d'axes $\mathfrak{r}_i$ coïncidant avec les 3 arêtes fondamentales (fig. 4), les longueurs OD_i étant les coordonnées obliques correspondantes d'une 5me arête du cristal prise comme arête-unité, les rapports :

$$\frac{OK_1}{OD_1}, \frac{OK_2}{OD_2}, \frac{OK_3}{OD_3}$$

ou un multiple positif quelconque de leurs valeurs, déterminent également sa position par rapport aux 3 arêtes fondamentales et à l'arête-unité choisies et sont par rapport à ce système de référence, les *indices* de *Miller* de cette arête quelconque du cristal.

Or les coordonnées obliques OK_i de cette arête sont les composantes mêmes de son vecteur et donne en le multipliant scalairement par $\mathfrak{r}_1, \mathfrak{r}_2, \mathfrak{r}_3$, d'après les § 2 et 9 : (fig. 4).

$$u_4 \mathfrak{l} \mathfrak{r}_1 = u_4 \cos \vartheta_1 = \nu_1 u_1 \sin h_1$$
$$u_4 \mathfrak{l} \mathfrak{r}_2 = u_4 \text{ cas } \vartheta_2 = \nu_2 u_2 \sin h_2$$
$$u_4 \mathfrak{l} \mathfrak{r}_3 = u_4 \cos \vartheta_3 = \nu_3 u_3 \sin h_3$$

donne également avec les 3 segments interceptés sur les axes $\mathfrak{r}_i$:

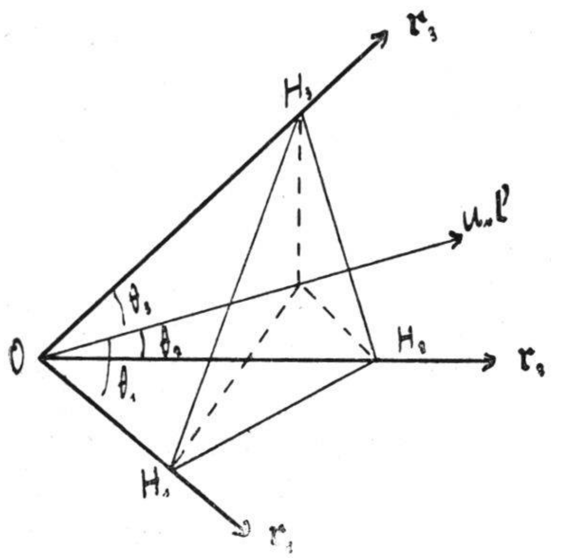

Fig. 4.

$$OH_1 \cos \vartheta_1 = OH_2 \cos \vartheta_2 = OH_3 \cos \vartheta_3$$

ou :

$$OH_1 : OH_2 : OH_3 = \frac{1}{\cos \vartheta_1} : \frac{1}{\cos \vartheta_2} : \frac{1}{\cos \vartheta_3}$$

D'où en comparant les 2 résultats :

$$OH_1 : OH_2 : OH_3 = \frac{1}{\nu_1 u_1 \sin h_1} : \frac{1}{\nu_2 u_2 \sin h_2} : \frac{1}{\nu_3 u_3 \sin h_3}$$

Nous aurions donc aussi pour la face-unité :

$$OE_1 : OE_2 : OE_3 = \frac{1}{\nu_1 \sin h_1} : \frac{1}{\nu_2 \sin h_2} : \frac{1}{\nu \sin h_3}$$

et enfin pour les indices de notre face quelconque du cristal :

$$\frac{OE_1}{OH_1} : \frac{OE_2}{OH_2} : \frac{OE_3}{OH_3} = u_1 : u_2 : u_3$$

ou plus brièvement : $\frac{OE_i}{OH_i} \therefore u_i$

en coordonnées projectives :

$$x_4 \mathfrak{r} = \mu_1 x_1 \mathfrak{r}_1 + \mu_2 x_2 \mathfrak{r}_2 + \mu_3 x_3 \mathfrak{r}_3$$

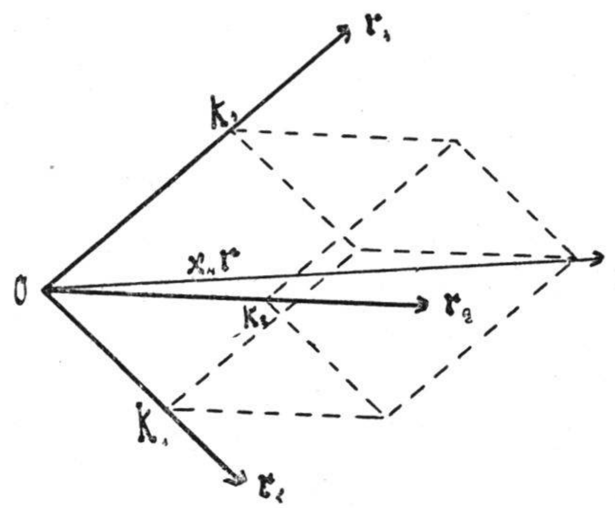

Fig. 4.

et par le fait :

$$OK_1 : OK_2 : OK_3 = \mu_1 x_1 : \mu_2 x_2 : \mu_3 x_3$$

Nous avons donc aussi pour l'arête-unité :

$$OD_1 : OD_2 : OD_3 = \mu_1 : \mu_2 : \mu_3 \qquad (7)$$

et enfin pour les indices de notre arête quelconque du cristal :

$$\frac{OK_1}{OD_1} : \frac{OK_2}{OD_2} : \frac{OK_3}{OD_3} = x_1 : x_2 : x_3$$

ou plus brièvement : $\frac{OK_i}{OD_i} \therefore x_i$

Donc les constantes μ_i étant elles-mêmes les composantes du vecteur d'une arête du complexe, les *coordonnées* projectives du point sur

Donc les constantes ν_i étant elles-mêmes les composantes du vecteur d'une face du complexe, les *coordonnées projectives* de la droite sphérique sont les *indices* de la face correspondante, et dès ce moment pour impliquer en un seul les 2 concepts, nous appelons les *valeurs* u_i les indices de la face du cristal dont ils déterminent le vecteur :

$$u_4\mathfrak{l} = \nu_1 u_1 \mathfrak{l}_1 + \nu_2 u_2 \mathfrak{l}_2 + \nu_3 u_3 \mathfrak{l}_3$$

la sphère, sont les *indices* de l'arête correspondante, et dès ce moment pour impliquer en un seul les 2 concepts nous appelons les *valeurs* x_i les indices de l'arête du cristal dont ils déterminent le vecteur :

$$x_4\mathfrak{r} = \mu_1 x_1 \mathfrak{r}_1 + \mu_2 x_2 \mathfrak{r}_2 + \mu_3 x_3 \mathfrak{r}_3$$

14. Nous avons donc en multipliant scalairement par $\mathfrak{r}_1, \mathfrak{r}_2, \mathfrak{r}_3$ le vecteur d'une face dont les indices sont u_i, (les ϑ_i étant les angles d'incidence de la face par rapport aux arêtes fondamentales) :

$$\begin{aligned} u_4\mathfrak{l}\mathfrak{r}_1 &= u_4 \cos\vartheta_1 = \nu_1 u_1 \sin h_1 \\ u_4\mathfrak{l}\mathfrak{r}_2 &= u_4 \cos\vartheta_2 = \nu_2 u_2 \sin h_2 \qquad (8) \\ u_4\mathfrak{l}\mathfrak{r}_3 &= u_4 \cos\vartheta_3 = \nu_3 u_3 \sin h_3 \end{aligned}$$

et donc directement la relation entre ces indices :

$$u_1 : u_2 : u_3 = \frac{\cos\vartheta_1}{\nu_1 \sin h_1} : \frac{\cos\vartheta_2}{\nu_2 \sin h_2} : \frac{\cos\vartheta_3}{\nu_3 \sin h_3} \qquad [9$$

Pour une seconde face dont les indices sont u'_i : =

$$u'_1 : u'_2 : u'_3 = \frac{\cos\vartheta'_1}{\nu_1 \sin h_1} : \frac{\cos\vartheta'_2}{\nu_2 \sin h_2} : \frac{\cos\vartheta'_3}{\nu_3 \sin h_3}$$

et enfin en divisant membre à membre :

$$\frac{u_1}{u'_1} : \frac{u_2}{u'_2} : \frac{u_3}{u'_3} = \frac{\cos\vartheta_1}{\cos\vartheta'_1} : \frac{\cos\vartheta_2}{\cos\vartheta'_2} : \frac{\cos\vartheta_3}{\cos\vartheta'_3}$$

ou plus brièvement :

$$\frac{u_i}{u'_i} \therefore \frac{\cos\vartheta_i}{\cos\vartheta'_i}$$

Nous avons également en multipliant scalairement par $\mathfrak{l}_1, \mathfrak{l}_2, \mathfrak{l}_3$ le vecteur de l'arête dont les indices sont x_i (les ϑ_i étant les angles d'incidence de l'arête par rapport aux faces fondamentales) :

$$\begin{aligned} x_4\mathfrak{r}\mathfrak{l}_1 &= x_4 \cos\vartheta_1 = \mu_1 x_1 \sin h_1 \\ x_4\mathfrak{r}\mathfrak{l}_2 &= x_4 \cos\vartheta_2 = \mu_2 x_2 \sin h_2 \qquad (8) \\ x_4\mathfrak{r}\mathfrak{l}_3 &= x_4 \cos\vartheta_3 = \mu_3 x_3 \sin h_3 \end{aligned}$$

et donc directement la relation entre ces indices :

$$x_1 : x_2 : x_3 = \frac{\cos\vartheta_1}{\mu_1 \sin h_1} : \frac{\cos\vartheta_2}{\mu_2 \sin h_2} : \frac{\cos h_3}{\mu_3 \sin h_3} \qquad [9$$

Pour une seconde arête dont les indications sont x'_i :

$$x'_1 : x'_2 : x'_3 = \frac{\cos\vartheta'_1}{\mu_1 \sin h_1} : \frac{\cos\vartheta'_2}{\mu_2 \sin h_2} : \frac{\cos\vartheta'_3}{\mu_3 \sin h_3}$$

et enfin en divisant membre à membre :

$$\frac{x_1}{x'_1} : \frac{x_2}{x'_2} : \frac{x_3}{x'_3} = \frac{\cos\vartheta_1}{\cos\vartheta'_1} : \frac{\cos\vartheta_2}{\cos\vartheta'_2} : \frac{\cos\vartheta_2}{\cos\vartheta'_3}$$

ou plus brièvement :

$$\frac{x_i}{x'_i} \therefore \frac{\cos\vartheta_i}{\cos\vartheta'_i}$$

c'est-à-dire que les quotients des indices de 2 faces sont proportionnels aux quotients des cos. des angles d'incidence des arêtes $\mathfrak{r}_i$ par rapport à ces faces.

c'est-à-dire que les quotients des indices de 2 arêtes sont proportionnels aux quotients des cos. des angles d'incidence de ces arêtes par rapport aux faces fondamentales.

15. La relation (9) nous donne immédiatement pour le signe des indices u_i d'une face quelconque: est *positif* l'indice u_i correspondant à l'*arête* fondamentale située par rapport à la face du même côté que son vecteur, et *négatif* celui du cas contraire;

La relation (9) nous donne immédiatement pour le signe des indices x_i d'une arête quelconque: est *positif* l'indice x_i correspondant à la *face* fondamentale par rapport à laquelle l'arête est située du même côté que son vecteur, et *négatif* celui du cas contraire;

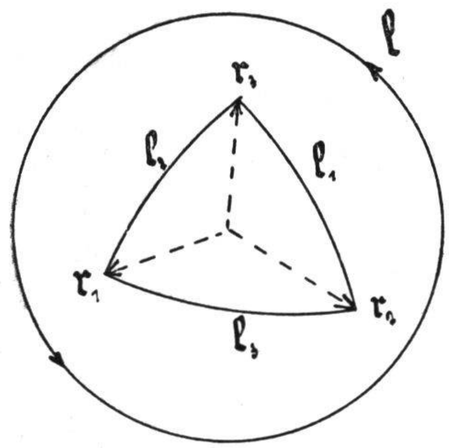

Fig. 5.

(Toute face $\mathfrak{l}$ n'entrant pas dans le trièdre des faces fondamentales, a donc seule ses 3 indices de même signe).

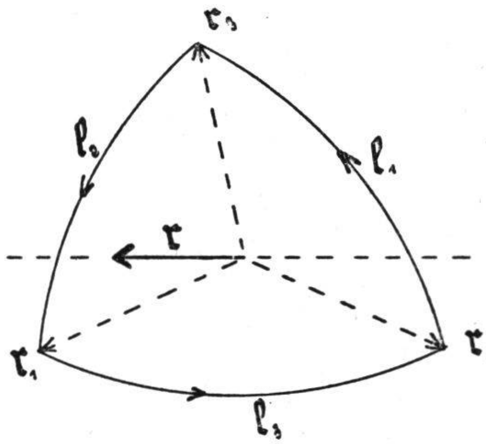

Fig. 5.

(Toute arête $\mathfrak{r}$ passant à l'intérieur du trièdre des arêtes fondamentales, a donc seule ses 3 indices de même signe).

et comme cas particulier: toute face *parallèle* à l'une des arêtes fondamentales a son indice u_i correspondant *nul*.

Toute face tautozonale à l'arête $\mathfrak{r}_1$ par ex. est donc de la forme; $\nu_2 u_2 \mathfrak{l}_2 + \nu_3 u_3 \mathfrak{l}_3$; son vecteur est en effet coplanaire à $\mathfrak{l}_2$ et $\mathfrak{l}_3$, et d'a-

et comme cas particulier: toute arête *parallèle* à l'une des faces fondamentales a son indice x_i correspondant *nul*.

Toute arête coplanaire à la face $\mathfrak{l}_1$ par ex. est donc de la forme: $\mu_2 x_2 \mathfrak{r}_2 + \mu_3 x_3 \mathfrak{r}_3$; son vecteur est en effet coplanaire aux vecteurs $\mathfrak{r}_2$ et $\mathfrak{r}_3$, près le § 4, $-\frac{\nu_3 u_3}{\nu_2 u_2}$ est son rapport de position par rapport à ces 2 faces.

et d'après § 4, $-\frac{\mu_3 x_3}{\mu_2 x_2}$ et son rapport de position par rapport à ces 2 arêtes.

16. Toute face parallèle à une arête donnée :

$$\mu_1 x_1 \mathfrak{r}_1 + \mu_2 x_2 \mathfrak{r}_2 + \mu_3 x_3 \mathfrak{r}_3$$

son vecteur devant être normal à cette arête, a ses indices tels qu'ils satisfont à la relation :

$$(\mu_1 x_1 \mathfrak{r}_1 + \mu_2 x_2 \mathfrak{r}_2 + \mu_3 x_3 \mathfrak{r}_3)(\nu_1 u_1 \mathfrak{l}_1 + \nu_2 u_2 \mathfrak{l}_2 + \nu_3 u_3 \mathfrak{l}_3) = 0$$

ou : $\mu_1 \nu_1 \sin h_1 . x_1 u_1 + \mu_2 \nu_2 \sin h_2 . x_2 u_2 + \mu_3 \nu_3 \sin h_3 . x_3 u_3 = 0$

Toute arête parallèle à une face donnée :

$$\nu_1 u_1 \mathfrak{l}_1 + \nu_2 u_2 \mathfrak{l}_2 + \nu_3 u_3 \mathfrak{l}_3$$

son vecteur devant être normal à celui de la face, a ses indices tels qu'ils satisfont à la relation :

$$(\nu_1 u_1 \mathfrak{l}_1 + \nu_2 u_2 \mathfrak{l}_2 + \nu_3 u_3 \mathfrak{l}_3)(\mu_1 x_1 \mathfrak{r}_1 + \mu_2 x_2 \mathfrak{r}_2 + \mu_3 x_2 \mathfrak{r}_3) = 0$$

ou : $\mu_1 \nu_1 \sin h_1 . u_1 x_1 + \mu_2 \nu_2 \sin h_2 u_2 x_2 + \mu_3 \nu_3 \sin h_3 . u_3 x_3 = 0$

16*bis*. Si l'arête donnée est coplanaire à la face fondamentale $\mathfrak{l}_1$ par ex., son indice x_1 étant nul, la relation précédente se réduit aux 2 termes :

$$\mu_2 \nu_2 \sin h_2 . x_2 u_2 + \mu_3 \nu_3 \sin h_3 . x_3 u_3 = 0$$

Elle n'est donc plus satisfaite que par une *seule* valeur du rapport des 2 indices u_i qu'elle contient encore, et toute face parallèle à l'arête donnée a nécessairement cette valeur pour le rapport de ses deux derniers indices u_2 et u_3. D'une manière générale, pour toutes les faces tautozonales à une arête parallèle à l'une des faces fondamentales, les 2 indices u_i correspondants aux 2 autres faces fondamentales sont *constants*, c'est-à-dires sont les mêmes pour toutes les faces dans le cas d'une *même* arête.

Si la face donnée est tautozonale à l'arête fondamentale $\mathfrak{r}_1$ par ex., son indice u_1 étant nul, la relation précédente se réduit aux 2 termes :

$$\mu_2 \nu_2 \sin h_2 . u_2 x_2 + \mu_3 \nu_3 \sin h_3 . u_3 x_3 = 0$$

Elle n'est donc plus satisfaite que par une *seule* valeur du rapport des 2 indices x_i qu'elle contient encore, et toute arête parallèle à la face donnée a nécessairement cette valeur pour le rapport de ses 2 derniers indices x_2 et x_3. D'une manière générale, pour toutes les arêtes coplanaires à une face parallèle à l'une des arrêtes fondamentales, les 2 indices x_i correspondants aux 2 autres arêtes fondamentales sont *constants*, c'est-à-dire sont les mêmes pour toutes les arêtes dans le cas d'une *même* face.