

Zeitschrift: Mémoires de la Société Fribourgeoise des Sciences Naturelles.
Mathématique et physique = Mitteilungen der Naturforschenden
Gesellschaft in Freiburg. Mathematik und Physik

Herausgeber: Société Fribourgeoise des Sciences Naturelles

Band: 2 (1912)

Artikel: Application des coordonnées sphériques homogènes à la
cristallographie géométrique

Autor: Bays, Séverin

Kapitel: II

DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-306718>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 25.02.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

CHAPITRE II

8. Soient données maintenant 3 faces $l_i \equiv a_i$ quelconques, mais non tautozonales, du complexe cristallin concentré par le point o. Leurs intersections donnent 3 arêtes, dont les vecteurs sont d'après le § 3 :

Soient données maintenant 3 arêtes r_i quelconques, mais non coplanaires, du complexe cristallin concentré par le point o. Leurs plans de jonction donnent 3 faces dont les vecteurs sont d'après le § 3 :

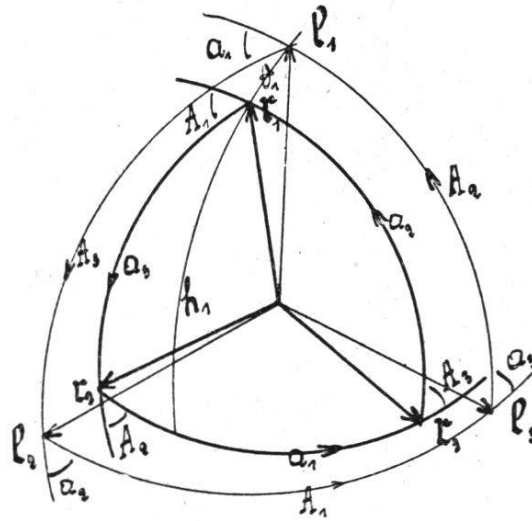


Fig. 3.

$$V_{l_2 l_3} = \sin A_1 r_1$$

$$V_{l_3 l_1} = \sin A_2 r_2$$

$$V_{l_1 l_2} = \sin A_3 r_3$$

et dont les angles sont d'après le § 2 :

$$\cos a_1 = r_2 r_3 = \frac{V_{l_3 l_1} - V_{l_1 l_2}}{\sin A_2 \sin A_3}$$

$$V_{r_2 r_3} = \sin a_1 l_1$$

$$V_{r_3 r_1} = \sin a_2 l_2$$

$$V_{r_1 r_2} = \sin a_3 l_3$$

(1)

et dont les angles sont d'après le § 2 :

$$\cos A_1 = l_2 l_3 = \frac{V_{r_3 r_1} - V_{r_1 r_2}}{\sin a_2 \sin a_3}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{l_3 l_1 \cdot l_1 l_2 - l_3 l_2}{\sin A_2 \sin A_3} \\
 &= \frac{\cos A_2 \cos A_3 - \cos A_1}{\sin A_2 \sin A_3} \quad (1^{bis})
 \end{aligned}$$

et en permutant pour les 2 autres :

$$\cos a_2 = \frac{\cos A_3 \cos A_1 - \cos A_2}{\sin A_3 \sin A_1}$$

$$\cos a_3 = \frac{\cos A_1 \cos A_2 - \cos A_3}{\sin A_1 \sin A_2}$$

Il est inutile de faire remarquer que le triangle des r_i obtenus est le *polaire* de celui des l_i donnés.

$$\begin{aligned}
 &= \frac{r_3 r_1 \cdot r_1 r_2 - r_3 r_2}{\sin a_2 \sin a_3} \\
 &= \frac{\cos a_2 \cos a_3 - \cos a_1}{\sin a_3 \sin a_1} \quad (1^{bis})
 \end{aligned}$$

et en permutant pour les 2 autres :

$$\cos A_2 = \frac{\cos a_3 \cos a_1 - \cos a_2}{\sin a_3 \sin a_1}$$

$$\cos A_3 = \frac{\cos a_1 \cos a_2 - \cos a_3}{\sin a_1 \sin a_2}$$

Il est inutile de faire remarquer que le triangle des l_i obtenus est le *polaire* de celui des r_i donnés.

9. D'après le paragraphe 2 nous avons encore, en remarquant qu'une face normale par r_i à la face l_i , passe également par le vecteur l_i :

$$\begin{array}{l|l}
 l_1 r_1 = \cos \vartheta_1 = \sin h_1 & l_1 r_2 = l_1 r_3 = 0 \\
 l_2 r_2 = \cos \vartheta_2 = \sin h_2 & l_2 r_1 = l_2 r_3 = 0 \\
 l_3 r_3 = \cos \vartheta_3 = \sin h_3 & l_3 r_1 = l_3 r_2 = 0
 \end{array} \quad (2)$$

de sorte qu'en multipliant scalairement les équations (1) par l_1, l_2, l_3 et r_1, r_2, r_3 , nous obtenons :

$$\begin{aligned}
 l_1 \vee l_2 l_3 &= \sin A_1 \sin h_1 = \sin A_2 \sin h_2 = \sin A_3 \sin h_3 \\
 r_1 \vee r_2 r_3 &= \sin a_1 \sin h_1 = \sin a_2 \sin h_2 = \sin a_3 \sin h_3
 \end{aligned} \quad (3)$$

et enfin par division :

$$\frac{\sin A_1}{\sin a_1} = \frac{\sin A_2}{\sin a_2} = \frac{\sin A_3}{\sin a_3} = \frac{l_1 \vee l_2 l_3}{r_1 \vee r_2 r_3} \equiv M. \quad (4)$$

c'est-à-dire que le *module* M du triangle sphérique $r_1 r_2 r_3$ est égal au rapport des *sinus* des angles *triédres* $l_1 \vee l_2 l_3$ et $r_1 \vee r_2 r_3$.¹⁾

¹ Le sinus d'un angle plan peut être défini comme la surface d'un parallélogramme dont les côtés sont l'unité; par analogie le volume du parallélépipède construit avec les 3 vecteurs unités r_i que représente le scalain $r_1 \vee r_2 r_3$ est le *sinus* du trièdre $r_1 r_2 r_3$.

Or dans les 3 couples de triangles sphériques *rectangles* que détermine la construction des h_i , l'égalité des rapports $\sin A_i : \sin a_i$ nous donne :

$$\begin{aligned}\sin h_1 &= \sin A_2 \sin a_3 = \sin A_3 \sin a_2 \\ \sin h_2 &= \sin A_3 \sin a_1 = \sin A_1 \sin a_3 \\ \sin h_3 &= \sin A_1 \sin a_2 = \sin A_2 \sin a_1\end{aligned}\quad (5)$$

ce qui, substitué dans les équations (3), donne encore :

$$l_1 V l_2 l_3 = \sin A_1 \sin A_2 \sin a_3 = \sin A_2 \sin A_3 \sin a_1 = \sin A_3 \sin A_1 \sin a_2$$

$$r_1 V r_2 r_3 = \sin a_1 \sin a_2 \sin A_3 = \sin a_2 \sin a_3 \sin a_1 = \sin a_3 \sin a_1 \sin A_2$$

et si nous posons les expressions équivalentes :

$$\sin A_1 \sin A_2 \sin a_3 = \dots \equiv \Delta$$

$$\sin a_1 \sin a_2 \sin A_3 = \dots \equiv D$$

nous avons très simplement, avec égalité des numérateurs et dénominateurs :

$$\frac{l_1 V l_2 l_3}{r_1 V r_2 r_3} = \frac{\Delta}{D} = M \quad (6)$$

10. Les valeurs Δ et D des sinus des trièdres peuvent prendre encore une autre forme. Pour simplifier, posons dorénavant :

$$\cos a_{ik} \equiv c_{ik} = c_{ki}$$

$$\cos A_{ik} \equiv C_{ik} = C_{ki}$$

$$\sin a_{ik} \equiv s_{ik} = -s_{ki}$$

$$\sin A_{ik} \equiv S_{ik} = -S_{ki}$$

En élevant au carré l'une des expression Δ :

$$\sin^2 A_1 \sin^2 A_2 \sin^2 a_3$$

et en y substituant la valeur de $\sin^2 a_3$, que nous fournit très facilement l'équation (1^{bis}) correspondante, nous obtenons après réduction :

$$\Delta^2 = 1 - C_1^2 - C_2^2 - C_3^2 + 2C_1 C_2 C_3$$

et sous forme de déterminant :

$$\Delta^2 = (l_1 V l_2 l_3)^2 = \begin{vmatrix} C_{11} C_{12} C_{13} \\ C_{12} C_{22} C_{23} \\ C_{13} C_{23} C_{33} \end{vmatrix}$$

$$\text{puisque } C_{ii} \equiv \cos A_{ii} = 1.$$

En élevant au carré l'une des expression D :

$$\sin^2 a_1 \sin^2 a_2 \sin^2 A_3$$

et en y substituant la valeur de $\sin^2 A_3$, que nous fournit très facilement l'équation (1^{bis}) correspondante, nous obtenons après réduction :

$$D^2 = 1 - c_1^2 - c_2^2 - c_3^2 + 2c_1 c_2 c_3$$

et sous forme de déterminant :

$$D^2 = (r_1 V r_2 r_3)^2 = \begin{vmatrix} c_{11} c_{12} c_{13} \\ c_{12} c_{22} c_{23} \\ c_{13} c_{23} c_{33} \end{vmatrix}$$

$$\text{puisque } c_{ii} = \cos a_{ii} = 1.$$