Zeitschrift: Mémoires de la Société Fribourgeoise des Sciences Naturelles. Mathématique et physique = Mitteilungen der Naturforschenden Gesellschaft in Freiburg. Mathematik und Physik

Herausgeber: Société Fribourgeoise des Sciences Naturelles

Band: 2 (1912)

Artikel: Application des coordonnées sphériques homogènes à la cristallographie géométrique

Autor: Bays, Sévérin

Kapitel: II

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-306718

CHAPITRE II

8. Soient données maintenant *3 faces* $\mathfrak{l}_i \equiv a_i$ quelconques, mais non tautozonales, du complexe cristallin concentré par le point o. Leurs intersections donnent 3 *arêtes*, dont les vecteurs sont d'après le § 3:

$$V\mathfrak{l}_2\mathfrak{l}_3 = \sin\ A_1\mathfrak{r}_1$$
$$V\mathfrak{l}_3\mathfrak{l}_1 = \sin\ A_2\mathfrak{r}_2$$
$$V\mathfrak{l}_1\mathfrak{l}_2 = \sin\ A_3\mathfrak{r}_3$$

et dont les angles sont d'après le § 2:

$$\cos a_1 = \mathfrak{r}_2\mathfrak{r}_3 = \frac{V\mathfrak{l}_3\mathfrak{l}_1 - V\mathfrak{l}_1\mathfrak{l}_2}{\sin A_2 \sin A_3}$$

Soient données maintenant 3 *arêtes* $\mathfrak{r}_i$ quelconques, mais non coplanaires, du complexe cristallin concentré par le point o. Leurs plans de jonction donnent 3 *faces* dont les vecteurs sont d'après le § 3:

$$V\mathfrak{r}_2\mathfrak{r}_3 = \sin a_1\mathfrak{l}_1$$
$$V\mathfrak{r}_3\mathfrak{r}_1 = \sin a_2\mathfrak{l}_2 \qquad (1)$$
$$V\mathfrak{r}_1\mathfrak{r}_2 = \sin a_3\mathfrak{l}_3$$

et dont les angles sont d'après le § 2:

$$\cos A_1 = \mathfrak{l}_2\mathfrak{l}_3 = \frac{V\mathfrak{r}_3\mathfrak{r}_1 - V\mathfrak{r}_1\mathfrak{r}_2}{\sin a_2 \sin a_3}$$

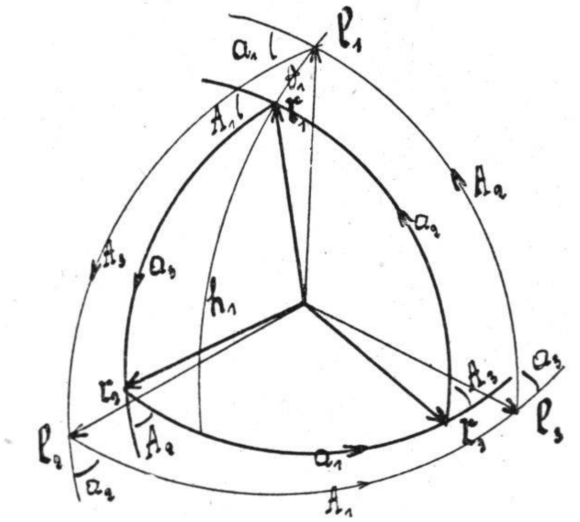

Fig. 3.

$$= \frac{\mathfrak{l}_3\mathfrak{l}_1 \, . \, \mathfrak{l}_1\mathfrak{l}_2 - \mathfrak{l}_3\mathfrak{l}_2}{\sin A_2 \sin A_3}$$

$$= \frac{\cos A_2 \cos A_3 - \cos A_1}{\sin A_2 \sin A_3} \qquad (1^{bis})$$

et en permutant pour les 2 autres:

$$\cos a_2 = \frac{\cos A_3 \cos A_1 - \cos A_2}{\sin A_3 \sin A_1}$$

$$\cos a_3 = \frac{\cos A_1 \cos A_2 - \cos A_3}{\sin A_1 \sin A_2}$$

Il est inutile de faire remarquer que le triangle des $\mathfrak{r}_i$ obtenus est le *polaire* de celui des $\mathfrak{l}_i$ donnés.

$$= \frac{\mathfrak{r}_3\mathfrak{r}_1 \, . \, \mathfrak{r}_1\mathfrak{r}_2 - \mathfrak{r}_3\mathfrak{r}_2}{\sin a_2 \sin a_3}$$

$$= \frac{\cos a_2 \cos a_3 - \cos a_1}{\sin a_3 \sin a_1} \qquad (1^{bis})$$

et en permutant pour les 2 autres:

$$\cos A_2 = \frac{\cos a_3 \cos a_1 - \cos a_2}{\sin a_3 \sin a_1}$$

$$\cos A_3 = \frac{\cos a_1 \cos a_2 - \cos a_3}{\sin a_1 \sin a_2}$$

Il est inutile de faire remarquer que le triangle des $\mathfrak{l}_i$ obtenus est le *polaire* de celui des $\mathfrak{r}_i$ donnés.

9. D'après le paragraphe 2 nous avons encore, en remarquant qu'une face normale par $\mathfrak{r}_i$ à la face $\mathfrak{l}_i$, passe également par le vecteur $\mathfrak{l}_i$:

$$\begin{array}{l|l}
\mathfrak{l}_1\mathfrak{r}_1 = \cos \vartheta_1 = \sin h_1 & \mathfrak{l}_1\mathfrak{r}_2 = \mathfrak{l}_1\mathfrak{r}_3 = 0 \\
\mathfrak{l}_2\mathfrak{r}_2 = \cos \vartheta_2 = \sin h_2 & \mathfrak{l}_2\mathfrak{r}_1 = \mathfrak{l}_2\mathfrak{r}_3 = 0 \\
\mathfrak{l}_3\mathfrak{r}_3 = \cos \vartheta_3 = \sin h_3 & \mathfrak{l}_3\mathfrak{r}_1 = \mathfrak{l}_3\mathfrak{r}_2 = 0
\end{array} \qquad (2)$$

de sorte qu'en multipliant scalairement les équations (1) par $\mathfrak{l}_1, \mathfrak{l}_2, \mathfrak{l}_3$ et $\mathfrak{r}_1, \mathfrak{r}_2, \mathfrak{r}_3$, nous obtenons :

$$\begin{array}{l}
\mathfrak{l}_1 \vee \mathfrak{l}_2\mathfrak{l}_3 = \sin A_1 \sin h_1 = \sin A_2 \sin h_2 = \sin A_3 \sin h_3 \\
\mathfrak{r}_1 \vee \mathfrak{r}_2\mathfrak{r}_3 = \sin a_1 \sin h_1 = \sin a_2 \sin h_2 = \sin a_3 \sin h_3
\end{array} \qquad (3)$$

et enfin par division :

$$\frac{\sin A_1}{\sin a_1} = \frac{\sin A_2}{\sin a_2} = \frac{\sin A_3}{\sin a_3} = \frac{\mathfrak{l}_1 \vee \mathfrak{l}_2\mathfrak{l}_3}{\mathfrak{r}_1 \vee \mathfrak{r}_2\mathfrak{r}_3} = M. \qquad (4)$$

c'est-à-dire que le *module M* du triangle sphérique $\mathfrak{r}_1\mathfrak{r}_2\mathfrak{r}_3$ est égal au rapport des *sinus* des angles *trièdres* $\mathfrak{l}_1 \vee \mathfrak{l}_2\mathfrak{l}_3$ et $\mathfrak{r}_1 \vee \mathfrak{r}_2\mathfrak{r}_3$.[1)]

---

[1] Le sinus d'un angle plan peut être défini comme la surface d'un parallélogramme dont les côtés sont l'unité; par analogie le volume du parallélipède construit avec les 3 vecteurs unités $\mathfrak{r}_i$ que représente le scalain $\mathfrak{r}_1 \vee \mathfrak{r}_2\mathfrak{r}_3$ est le *sinus* du trièdre $\mathfrak{r}_1\mathfrak{r}_2\mathfrak{r}_3$.

Or dans les 3 couples de triangles sphériques *rectangles* que détermine la construction des h_i, l'égalité des rapports $\sin A_i : \sin a_i$ nous donne :

$$\begin{aligned} \sin h_1 &= \sin A_2 \sin a_3 = \sin A_3 \sin a_2 \\ \sin h_2 &= \sin A_3 \sin a_1 = \sin A_1 \sin a_3 \\ \sin h_3 &= \sin A_1 \sin a_2 = \sin A_2 \sin a_1 \end{aligned} \tag{5}$$

ce qui, substitué dans les équations (3), donne encore :

$$\mathfrak{l}_1 \mathrm{V} \mathfrak{l}_2 \mathfrak{l}_3 = \sin A_1 \sin A_2 \sin a_3 = \sin A_2 \sin A_3 \sin a_1 = \sin A_3 \sin A_1 \sin a_2$$

$$\mathfrak{r}_1 \mathrm{V} \mathfrak{r}_2 \mathfrak{r}_3 = \sin a_1 \sin a_2 \sin A_3 = \sin a_2 \sin a_3 \sin a_1 = \sin a_3 \sin a_1 \sin A_2$$

et si nous posons les expressions équivalentes :

$$\sin A_1 \sin A_2 \sin a_3 = \cdots\cdots \equiv \Delta$$

$$\sin a_1 \sin a_2 \sin A_3 = \cdots\cdots \equiv D$$

nous avons très simplement, avec égalité des numérateurs et dénominateurs :

$$\frac{\mathfrak{l}_1 \mathrm{V} \mathfrak{l}_2 \mathfrak{l}_3}{\mathfrak{r}_1 \mathrm{V} \mathfrak{r}_2 \mathfrak{r}_3} = \frac{\Delta}{D} = M \tag{6}$$

10. Les valeurs Δ et D des sinus des trièdres peuvent prendre encore une autre forme. Pour simplifier, posons dorénavant :

$$\cos a_{ik} \equiv c_{ik} = c_{ki} \qquad \sin a_{ik} \equiv s_{ik} = -s_{ki}$$

$$\cos A_{ik} \equiv C_{ik} = C_{ki} \qquad \sin A_{ik} \equiv S_{ik} = -S_{ki}$$

En élevant au carré l'une des expression Δ :

$$\sin^2 A_1 \sin^2 A_2 \sin^2 a_3$$

et en y substituant la valeur de $\sin^2 a_3$, que nous fournit très facilement l'équation (1^{bis}) correspondante, nous obtenons après réduction :

$$\Delta^2 = 1 - C_1^2 - C_2^2 - C_1^2 + 2C_1C_2C_3$$

et sous forme de déterminant :

$$\Delta^2 = \left(\mathfrak{l}_1 \mathrm{V} \mathfrak{l}_2 \mathfrak{l}_3\right) = \begin{vmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} \end{vmatrix}$$

puisque $C_{ii} \equiv \cos A_{ii} = 1$.

En élevant au carré l'une des expression D :

$$\sin^2 a_1 \sin^2 a_2 \sin^2 A_3$$

et en y substituant la valeur de $\sin^2 A_3$, que nous fournit très facilement l'équation (1^{bis}) correspondante, nous obtenons après réduction :

$$D^2 = 1 - c_1^2 - c_2^2 - c_3^2 + 2c_1c_2c_3$$

et sous forme de déterminant :

$$D^2 = \left(\mathfrak{r}_1 \mathrm{V} \mathfrak{r}_2 \mathfrak{r}_3\right)^2 = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{12} & c_{22} & c_{23} \\ c_{13} & c_{23} & c_{33} \end{vmatrix}$$

puisque $c_{ii} = \cos a_{ii} = 1$.