Zeitschrift: Mémoires de la Société Fribourgeoise des Sciences Naturelles. Mathématique et physique = Mitteilungen der Naturforschenden Gesellschaft in Freiburg. Mathematik und Physik

Herausgeber: Société Fribourgeoise des Sciences Naturelles

Band: 2 (1912)

Artikel: Application des coordonnées sphériques homogènes à la cristallographie géométrique

Autor: Bays, Sévérin

Kapitel: II

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-306718

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 12.12.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

CHAPITRE II

8. Soient données maintenant *3 faces* $\mathfrak{l}_i \equiv a_i$ quelconques, mais non tautozonales, du complexe cristallin concentré par le point o. Leurs intersections donnent 3 *arêtes*, dont les vecteurs sont d'après le § 3:

Soient données maintenant 3 *arêtes* $\mathfrak{r}_i$ quelconques, mais non coplanaires, du complexe cristallin concentré par le point o. Leurs plans de jonction donnent 3 *faces* dont les vecteurs sont d'après le § 3:

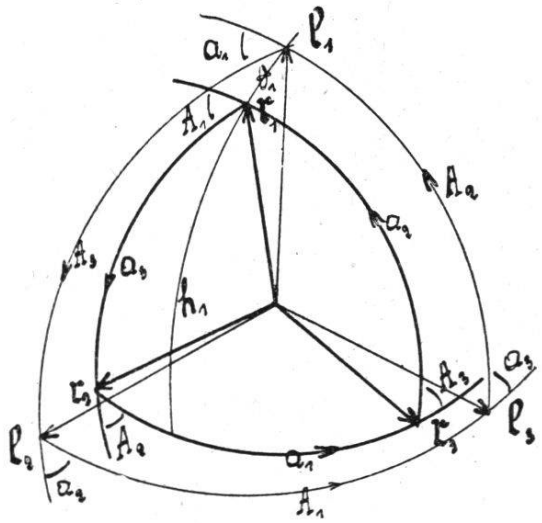

Fig. 3.

$$V\mathfrak{l}_2\mathfrak{l}_3 = \sin A_1\mathfrak{r}_1$$
$$V\mathfrak{l}_3\mathfrak{l}_1 = \sin A_2\mathfrak{r}_2$$
$$V\mathfrak{l}_1\mathfrak{l}_2 = \sin A_3\mathfrak{r}_3$$

et dont les angles sont d'après le § 2:

$$\cos a_1 = \mathfrak{r}_2\mathfrak{r}_3 = \frac{V\mathfrak{l}_3\mathfrak{l}_1 - V\mathfrak{l}_1\mathfrak{l}_2}{\sin A_2 \sin A_3}$$

$$V\mathfrak{r}_2\mathfrak{r}_3 = \sin a_1\mathfrak{l}_1$$
$$V\mathfrak{r}_3\mathfrak{r}_1 = \sin a_2\mathfrak{l}_2 \qquad (1)$$
$$V\mathfrak{r}_1\mathfrak{r}_2 = \sin a_3\mathfrak{l}_3$$

et dont les angles sont d'après le § 2:

$$\cos A_1 = \mathfrak{l}_2\mathfrak{l}_3 = \frac{V\mathfrak{r}_3\mathfrak{r}_1 - V\mathfrak{r}_1\mathfrak{r}_2}{\sin a_2 \sin a_3}$$

$$= \frac{\mathfrak{l}_3\mathfrak{l}_1 \,.\, \mathfrak{l}_1\mathfrak{l}_2 - \mathfrak{l}_3\mathfrak{l}_2}{\sin A_2 \sin A_3}$$

$$= \frac{\cos A_2 \cos A_3 - \cos A_1}{\sin A_2 \sin A_3} \qquad (1^{bis})$$

et en permutant pour les 2 autres:

$$\cos a_2 = \frac{\cos A_3 \cos A_1 - \cos A_2}{\sin A_3 \sin A_1}$$

$$\cos a_3 = \frac{\cos A_1 \cos A_2 - \cos A_3}{\sin A_1 \sin A_2}$$

Il est inutile de faire remarquer que le triangle des $\mathfrak{r}_i$ obtenus est le *polaire* de celui des $\mathfrak{l}_i$ donnés.

$$= \frac{\mathfrak{r}_3\mathfrak{r}_1 \,.\, \mathfrak{r}_1\mathfrak{r}_2 - \mathfrak{r}_3\mathfrak{r}_2}{\sin a_2 \sin a_3}$$

$$= \frac{\cos a_2 \cos a_3 - \cos a_1}{\sin a_3 \sin a_1} \qquad (1^{bis})$$

et en permutant pour les 2 autres:

$$\cos A_2 = \frac{\cos a_3 \cos a_1 - \cos a_2}{\sin a_3 \sin a_1}$$

$$\cos A_3 = \frac{\cos a_1 \cos a_2 - \cos a_3}{\sin a_1 \sin a_2}$$

Il est inutile de faire remarquer que le triangle des $\mathfrak{l}_i$ obtenus est le *polaire* de celui des $\mathfrak{r}_i$ donnés.

9. D'après le paragraphe 2 nous avons encore, en remarquant qu'une face normale par $\mathfrak{r}_i$ à la face $\mathfrak{l}_i$, passe également par le vecteur $\mathfrak{l}_i$:

$$\begin{array}{l|l} \mathfrak{l}_1\mathfrak{r}_1 = \cos\vartheta_1 = \sin h_1 & \mathfrak{l}_1\mathfrak{r}_2 = \mathfrak{l}_1\mathfrak{r}_3 = 0 \\ \mathfrak{l}_2\mathfrak{r}_2 = \cos\vartheta_2 = \sin h_2 & \mathfrak{l}_2\mathfrak{r}_1 = \mathfrak{l}_2\mathfrak{r}_3 = 0 \\ \mathfrak{l}_3\mathfrak{r}_3 = \cos\vartheta_3 = \sin h_3 & \mathfrak{l}_3\mathfrak{r}_1 = \mathfrak{l}_3\mathfrak{r}_2 = 0 \end{array} \qquad (2)$$

de sorte qu'en multipliant scalairement les équations (1) par $\mathfrak{l}_1, \mathfrak{l}_2, \mathfrak{l}_3$ et $\mathfrak{r}_1, \mathfrak{r}_2, \mathfrak{r}_3$, nous obtenons :

$$\begin{array}{l} \mathfrak{l}_1 \sqrt{\mathfrak{l}_2\mathfrak{l}_3} = \sin A_1 \sin h_1 = \sin A_2 \sin h_2 = \sin A_3 \sin h_3 \\ \mathfrak{r}_1 \sqrt{\mathfrak{r}_2\mathfrak{r}_3} = \sin a_1 \sin h_1 = \sin a_2 \sin h_2 = \sin a_3 \sin h_3 \end{array} \qquad (3)$$

et enfin par division :

$$\frac{\sin A_1}{\sin a_1} = \frac{\sin A_2}{\sin a_2} = \frac{\sin A_3}{\sin a_3} = \frac{\mathfrak{l}_1 \sqrt{\mathfrak{l}_2\mathfrak{l}_3}}{\mathfrak{r}_1 \sqrt{\mathfrak{r}_2\mathfrak{r}_3}} = M. \qquad (4)$$

c'est-à-dire que le *module M* du triangle sphérique $\mathfrak{r}_1\mathfrak{r}_2\mathfrak{r}_3$ est égal au rapport des *sinus* des angles *triédres* $\mathfrak{l}_1 \sqrt{\mathfrak{l}_2\mathfrak{l}_3}$ et $\mathfrak{r}_1 \sqrt{\mathfrak{r}_2\mathfrak{r}_3}$.[1]

---

[1] Le sinus d'un angle plan peut être défini comme la surface d'un parallélogramme dont les côtés sont l'unité; par analogie le volume du parallélipède construit avec les 3 vecteurs unités $\mathfrak{r}_i$ que représente le scalain $\mathfrak{r}_1 \sqrt{\mathfrak{r}_2\mathfrak{r}_3}$ est le *sinus* du trièdre $\mathfrak{r}_1\mathfrak{r}_2\mathfrak{r}_3$.

Or dans les 3 couples de triangles sphériques *rectangles* que détermine la construction des h_i, l'égalité des rapports $\sin A_i : \sin a_i$ nous donne :

$$\begin{aligned} \sin h_1 &= \sin A_2 \sin a_3 = \sin A_3 \sin a_2 \\ \sin h_2 &= \sin A_3 \sin a_1 = \sin A_1 \sin a_3 \\ \sin h_3 &= \sin A_1 \sin a_2 = \sin A_2 \sin a_1 \end{aligned} \qquad (5)$$

ce qui, substitué dans les équations (3), donne encore :

$$\mathfrak{l}_1 \sqrt{\mathfrak{l}_2 \mathfrak{l}_3} = \sin A_1 \sin A_2 \sin a_3 = \sin A_2 \sin A_3 \sin a_1 = \sin A_3 \sin A_1 \sin a_2$$

$$\mathfrak{r}_1 \sqrt{\mathfrak{r}_2 \mathfrak{r}_3} = \sin a_1 \sin a_2 \sin A_3 = \sin a_2 \sin a_3 \sin a_1 = \sin a_3 \sin a_1 \sin A_2$$

et si nous posons les expressions équivalentes :

$$\begin{aligned} \sin A_1 \sin A_2 \sin a_3 &= \cdots\cdots\cdots \equiv \Delta \\ \sin a_1 \sin a_2 \sin A_3 &= \cdots\cdots\cdots \equiv D \end{aligned}$$

nous avons très simplement, avec égalité des numérateurs et dénominateurs :

$$\frac{\mathfrak{l}_1 \sqrt{\mathfrak{l}_2 \mathfrak{l}_3}}{\mathfrak{r}_1 \sqrt{\mathfrak{r}_2 \mathfrak{r}_3}} = \frac{\Delta}{D} = M \qquad (6)$$

10. Les valeurs Δ et D des sinus des trièdres peuvent prendre encore une autre forme. Pour simplifier, posons dorénavant :

$$\cos a_{ik} \equiv c_{ik} = c_{ki} \qquad \sin a_{ik} \equiv s_{ik} = -s_{ki}$$

$$\cos A_{ik} \equiv C_{ik} = C_{ki} \qquad \sin A_{ik} \equiv S_{ik} = -S_{ki}$$

En élevant au carré l'une des expression Δ :

$$\sin^2 A_1 \sin^2 A_2 \sin^2 a_3$$

et en y substituant la valeur de $\sin^2 a_3$, que nous fournit très facilement l'équation (1bis) correspondante, nous obtenons après réduction :

$$\Delta^2 = 1 - C_1^2 - C_2^2 - C_1^2 + 2 C_1 C_2 C_3$$

et sous forme de déterminant :

$$\Delta^2 = \left(\mathfrak{l}_1 \sqrt{\mathfrak{l}_2 \mathfrak{l}_3}\right) = \begin{vmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} \end{vmatrix}$$

puisque $C_{ii} \equiv \cos A_{ii} = 1$.

En élevant au carré l'une des expression D :

$$\sin^2 a_1 \sin^2 a_2 \sin^2 A_3$$

et en y substituant la valeur de $\sin^2 A_3$, que nous fournit très facilement l'équation (1bis) correspondante, nous obtenons après réduction :

$$D^2 = 1 - c_1^2 - c_2^2 - c_3^2 + 2 c_1 c_2 c_3$$

et sous forme de déterminant :

$$D^2 = \left(\mathfrak{r}_1 \sqrt{\mathfrak{r}_2 \mathfrak{r}_3}\right)^2 = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{12} & c_{22} & c_{23} \\ c_{13} & c_{23} & c_{33} \end{vmatrix}$$

puisque $c_{ii} = \cos a_{ii} = 1$.