Zeitschrift: Mémoires de la Société Fribourgeoise des Sciences Naturelles. Mathématique et physique = Mitteilungen der Naturforschenden Gesellschaft in Freiburg. Mathematik und Physik

Herausgeber: Société Fribourgeoise des Sciences Naturelles

Band: 2 (1912)

Artikel: Application des coordonnées sphériques homogènes à la cristallographie géométrique

Autor: Bays, Sévérin

Kapitel: I

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-306718

CHAPITRE I

1. Le cristal, en tant qu'individu, c'est-à-dire exception faite des agrégats de cristaux, est un *complexe* de faces et d'arêtes, limitant un polyèdre *convexe*. Par le fait le théorème d'Euler nous donne la relation entre le nombre f de ses faces, s de ses sommets et a de ses arêtes :

$$\mathrm{f} + \mathrm{s} = \mathrm{a} + 2.$$

Ces faces et arêtes limites du polyèdre n'ayant de déterminé que leurs directions dans l'espace, leur concentration (en les déplaçant parallèlement à elles-mêmes) par un point quelconque, peut adéquatement représenter la forme géométrique du cristal. Dans ce cas l'ensemble des faces parallèles à une même arête et constituant une *zone* du cristal se réduit au faisceau de plans qui a pour support cette arête ou cet *axe zonal*, et l'ensemble des arêtes parallèles à une même face, au faisceau d'arêtes qui a pour support ce plan du complexe.

Si nous faisons maintenant de ce point de concentration des faces et arêtes du cristal, le centre O d'une sphère de rayon égal à l'unité, sur cette surface sphérique obtenue :

Chaque face est adéquatement représentée par la droite sphérique (ou grand cercle) correspondante, et comme telle univoquement déterminée par un vecteur unité $\mathfrak{l}$, partant du centre, normal à son plan, et dirigé à gauche du sens positif adopté pour en parcourir le contour.

Chaque arête est adéquatement représentée par son point d'affleurement et comme telle univoquement déterminée par un vecteur unité $\mathfrak{r}$, partant du centre et passant par ce point.

Chaque multiple positif de ce vecteur détermine la même arête ou le même axe zonal ; chaque

Chaque multiple positif de ce vecteur détermine la même face, chaque multiple négatif détermine la face opposée et parallèle à la première, c'est-à-dire la face *négative* correspondante du cristal.

multiple négatif détermine l'arête opposée et parallèle à la première, c'est-à-dire l'arête *négative* correspondante du cristal.

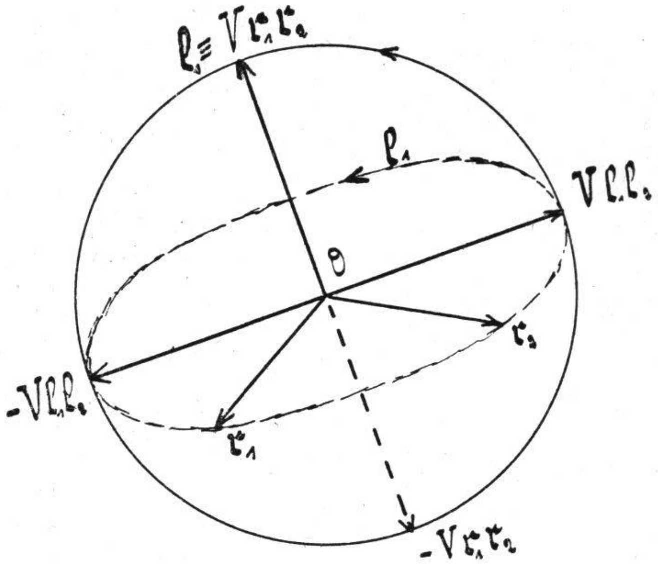

Fig. 1.

2. L'angle de 2 *faces* données $\mathfrak{l}_1$ et $\mathfrak{l}_2$, défini par l'angle de leurs normales est immédiatement fourni par le produit scalaire :

$$\mathfrak{l}_1\mathfrak{l}_2 = \cos\varphi.$$

L'angle de 2 *arêtes* données $\mathfrak{r}_1$ et $\mathfrak{r}_2$, est de même immédiatement fourni par le produit scalaire :

$$\mathfrak{r}_1\mathfrak{r}_2, = \cos\psi.$$

L'angle d'*incidence* d'une arête $\mathfrak{r}$ par rapport à une face $\mathfrak{l}$, défini par l'angle ϑ de l'arête avec le vecteur de la face est également donné par le scalaire :

$$\mathfrak{l}\mathfrak{r} = \cos\vartheta.$$

3. Le vecteur d'une face *parallèle* à 2 arêtes données $\mathfrak{r}_1$ et $\mathfrak{r}_2$, devant être normal au vecteur $\mathfrak{r}_1$ comme au vecteur $\mathfrak{r}_2$ est leur produit vectoriel :

$$\pm V\mathfrak{r}_1\mathfrak{r}_2$$

Le vecteur d'une arête *parallèle* à 2 faces données $\mathfrak{l}_1$ $\mathfrak{l}_2$, devant être normal au vecteur $\mathfrak{l}_1$ comme au vecteur $\mathfrak{l}_2$ est leur produit vectoriel :

$$\pm V\mathfrak{l}_1\mathfrak{l}_2$$

Le double signe correspond aux 2 faces opposées qui peuvent être parallèles aux 2 arêtes.

Le double signe correspond aux 2 arêtes opposées qui peuvent être parallèles aux 2 faces.

Le vecteur d'une face *parallèle* à une arête et *normale* à une face données $\mathfrak{r}$ et $\mathfrak{l}$, devant être normal au vecteur $\mathfrak{l}$ comme au vecteur $\mathfrak{r}$, est encore leur produit vectoriel :

$$\pm V\mathfrak{l}\mathfrak{r}$$

Le double signe correspond encore aux 2 faces opposées remplissant la condition demandée.

Evidemment rien ne change aux résultats de ces 2 derniers paragraphes, lorsque les vecteurs $\mathfrak{l}_i$ et $\mathfrak{r}_i$ cessent d'être vecteurs-unités ; dans le premier § nous n'avons qu'à tenir compte de leurs *tenseurs,* c'est-à-dire de leur valeur absolue, pour appliquer nos 3 formules, et dans le second, peu importe les tenseurs des produits vectoriels, un vecteur, quelque soit sa valeur absolue, déterminant toujours la même face ou la même arête.

4. Le vecteur d'une face *tautozonale* à 2 faces données $\mathfrak{l}_1$ et $\mathfrak{l}_2$, devant être coplanaire avec leurs vecteurs, est de la forme :

$$\mathfrak{l}_1 - \lambda\mathfrak{l}_2$$

et λ est le *rapport* de *position* de la 3^me^ face par rapport aux 2 premières.

En effet, les faces étant p_1, p_2, p_3, si τ est le tenseur de $\mathfrak{l}_1 - \lambda\,\mathfrak{l}_2$, qui n'est pas en général un vecteur-unité, nous avons d'après les règles du produit vectoriel :

$$V\mathfrak{l}_1(\mathfrak{l}_1 - \lambda\mathfrak{l}_2) = -\lambda V\mathfrak{l}_1\mathfrak{l}_2 = \tau\sin(p_1p_3)\,\mathfrak{r}_0$$
$$V\mathfrak{l}_2(\mathfrak{l}_1 - \lambda\mathfrak{l}_2) = -\ V\mathfrak{l}_1\mathfrak{l}_2 = \tau\sin(p_2p_3)\,\mathfrak{r}_0$$

et par division :

$$\lambda = \frac{\sin(p_1p_3)}{\sin(p_2p_3)} \equiv (p_1p_2p_3)$$

c. q. f. d.

Le vecteur d'une arête *coplanaire* à 2 arêtes données $\mathfrak{r}_1$ et $\mathfrak{r}_2$, est par le fait même nécessairement de la forme :

$$\mathfrak{r}_1 - \lambda\mathfrak{r}_2$$

et λ est le *rapport* de *position* de la 3^me^ arête par rapport aux 2 premières.

En effet, les arêtes étant π_1, π_2, π_3, si τ est le tenseur de $\mathfrak{r}_1 - \lambda\,\mathfrak{r}_2$ qui n'est pas en général un vecteur-unité, nous avons d'après les règles du produit vectoriel :

$$V\mathfrak{r}_1(\mathfrak{r}_1 - \lambda\mathfrak{r}_2) = -\lambda V\mathfrak{r}_1\mathfrak{r}_2 = \tau\sin(\pi_1\pi_3)\mathfrak{l}_0$$
$$V\mathfrak{r}_2(\mathfrak{r}_1 - \lambda\mathfrak{r}_2) = -\ V\mathfrak{r}_1\mathfrak{r}_2 = \tau\sin(\pi_2\pi_3)\mathfrak{l}_0$$

et par division :

$$\lambda = \frac{\sin(\pi_1\pi_3)}{\sin(\pi_2\pi_3)} \equiv (\pi_1\pi_2\pi_3)$$

c. q. f. d.

En remarquant que $\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{\sin(\alpha + \pi)}{\sin(\beta + \pi)}$, c'est-à-dire que les rapports de position sont égaux pour 2 faces ou arêtes opposées et parallèles, la fig. 2 nous montre immédiatement (du moins pour les arêtes, (ce serait identique pour les faces) que le rapport de position λ de la 3me face ou arête est *positif* quand elle passe dans l'angle extérieur, et *négatif*, quand elle passe dans l'angle intérieur des 2 faces ou arêtes données.

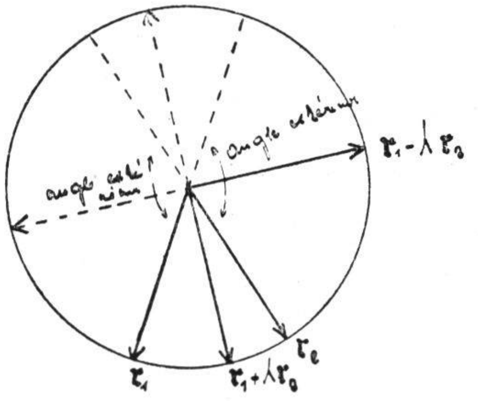

Fig. 2.

5. Trois faces $\mathfrak{l}_i$ sont *tautozonales*, s'il existe 3 nombres k_i tels que :

$$k_1 \mathfrak{l}_1 + k_2 \mathfrak{l}_2 = k_3 \mathfrak{l}_3 = o$$

puisque dans ce cas le 3me vecteur est nécessairement coplanaire aux 2 autres.

Trois arêtes $\mathfrak{r}_i$ sont *coplanaires*, s'il existe 3 nombres k_i tels que :

$$k_1 \mathfrak{r}_1 + k_2 \mathfrak{r}_2 + k_3 \mathfrak{r}_3 = o$$

puisque dans ce cas le 3me vecteur est nécessairement coplanaire aux 2 autres.

Encore ici rien ne change aux résultats des § 4 et 5, quand les vecteurs $\mathfrak{l}_i$ et $\mathfrak{r}_i$ cessent d'être vecteurs-unités ; dans les formes $\mathfrak{l}_1 - \lambda \mathfrak{l}_2$ et $\mathfrak{r}_1 - \lambda \mathfrak{r}_2$, nous n'avons qu'à les réduire à l'unité pour avoir la valeur exacte du rapport de position λ, et quels que soient leurs tenseurs, les vecteurs de 3 faces ou de 3 arêtes sont encore coplanaires, dès que, multipliés par 3 facteurs k_i, ils donnent une somme qui est nulle.

6. Enfin dans le cas de *4* faces *tantozonales* :

$$p_1 \equiv \mathfrak{l}_2 \qquad p_2 \equiv \mathfrak{l}_2$$
$$p_3 \equiv \mathfrak{l}_1 - \lambda \mathfrak{l}_2 \qquad p_4 \equiv \mathfrak{l}_1 - \mu \mathfrak{l}_2$$

nous appelons le quotient des rapports de position λ et μ des faces

Enfin dans le cas de *4* arêtes *coplanaires :*

$$\pi_1 \equiv \mathfrak{r}_1 \qquad \pi_2 \equiv \mathfrak{r}_2$$
$$\pi_3 \equiv \mathfrak{r}_1 - \lambda \mathfrak{r}_2 \qquad \pi_4 \equiv \mathfrak{r}_1 - \mu \mathfrak{r}_2$$

nous appelons le quotient des rapports de position λ et μ des arêtes

p_3 et p_4 par rapport aux faces p_1 et p_2 :

$$\frac{\lambda}{\mu} = \frac{\sin(p_1 p_3)}{\sin(p_2 p_3)} : \frac{\sin(p_1 p_4)}{\sin(p_2 p_4)}$$

le ***rapport anharmonique*** du couple des 2 dernières par rapport à celui des 2 premières et on l'écrit :

$$\frac{\lambda}{\mu} = \frac{(p_1 p_2 p_3)}{(p_1 p_2 p_4)} = (p_1 p_2 p_3 p_4)$$

On voit immédiatement en gardant unies les 2 faces de chaque couple, que ce rapport anharmonique des 2 couples p_1 p_2 et p_3 p_4 peut prendre 8 formes différentes ; mais si l'on prend les quotients des rapports de sinus représentés par ces formes, on ne leur trouve que 2 valeurs distinctes dont la seconde est l'*inverse* de la première :

$$(p_1 p_2 p_3 p_4) = (p_2 p_1 p_4 p_3) = (p_3 p_4 p_1 p_2) = (p_4 p_3 p_2 p_1)$$
$$(p_2 p_1 p_3 p_4) = (p_1 p_2 p_4 p_3) = (p_4 p_3 p_1 p_2) = (p_3 p_4 p_2 p_1).$$

π_3 et π_4 par rapport aux arêtes π_1 et π_2 :

$$\frac{\lambda}{\mu} = \frac{\sin(\pi_1 \pi_3)}{\sin(\pi_2 \pi_3)} : \frac{\sin(\pi_1 \pi_4)}{\sin(\pi_2 \pi_4)}$$

le ***rapport anharmonique*** du couple des 2 dernières par rapport à celui des 2 premières et on l'écrit :

$$\frac{\lambda}{\mu} = \frac{(\pi_1 \pi_2 \pi_3)}{(\pi_1 \pi_2 \pi_4)} = (\pi_1 \pi_2 \pi_3 \pi_4)$$

On voit immédiatement en gardant unies les 2 arêtes de chaque couple, que ce rapport anharmonique des 2 couples π_1 π_2 et π_3 π_4 peut prendre 8 formes différentes ; mais si l'on prend les quotients des rapports de sinus représentés par ces formes, on ne leur trouve que 2 valeurs distinctes dont la seconde est l'*inverse* de la première :

$$(\pi_1 \pi_2 \pi_3 \pi_4) = (\pi_2 \pi_1 \pi_4 \pi_3) = (\pi_3 \pi_4 \pi_1 \pi_2) = (\pi_4 \pi_3 \pi_2 \pi_1)$$
$$(\pi_2 \pi_1 \pi_3 \pi_4) = (\pi_1 \pi_2 \pi_4 \pi_3) = (\pi_4 \pi_3 \pi_1 \pi_2) = (\pi_3 \pi_4 \pi_2 \pi_1).$$

Le rapport anharmonique de 4 *éléments* (faces ou arêtes) se change en rapport *harmonique* lorsqu'il a pour valeur — 1. Dans ce cas, sa valeur inverse devenant égale à sa valeur directe, on peut non seulement intervertir l'ordre de ses 2 couples ou à la fois l'ordre des éléments des 2 couples, mais encore l'ordre des éléments d'un seul de ses couples, sans qu'il cesse d'être harmonique, et on dit pour cela que ses 2 couples sont alors *conjugués harmoniques* l'un par rapport à l'autre.

7. Si par 4 arêtes *coplanaires :*

$$\pi_1 \equiv \mathbf{r}_1 \qquad \pi_2 \equiv \mathbf{r}_2 \qquad \pi_3 \equiv \mathbf{r}_1 - \lambda \mathbf{r}_2 \qquad \pi_4 \equiv \mathbf{r}_1 - \mu \mathbf{r}_2$$

passent 4 faces *tautozonales :*

$$p_1 \equiv \mathfrak{l}_1 \qquad p_2 = \mathfrak{l}_2 \qquad p_3 \equiv \mathfrak{l}_1 - \lambda_0 \mathfrak{l}_2 \qquad p_4 \equiv \mathfrak{l}_1 - \mu_0 \mathfrak{l}_2$$

le rapport anharmonique des faces est égal au rapport anharmonique des arêtes.

En effet l'arête π_1 étant sur la face p_1, π_2 sur p_2, etc., on a d'abord :

$$\mathfrak{l}_1 \mathfrak{r}_1 = o \quad \mathfrak{l}_2 \mathfrak{r}_2 = o \quad (\mathfrak{r}_1 - \lambda \mathfrak{r}_2)(\mathfrak{l}_1 - \lambda_0 \mathfrak{l}_2) = o \quad (\mathfrak{r}_1 - \mu \mathfrak{r}_2)(\mathfrak{l}_1 - \mu_0 \mathfrak{l}_2) = o$$

et si l'on simplifie les 2 dernières équations à l'aide des 2 premières :

$$\lambda_0 \mathfrak{l}_2 \mathfrak{r}_1 + \lambda\, \mathfrak{l}_1 \mathfrak{r}_2 = o \qquad \text{et} \qquad \mu_0 \mathfrak{l}_2 \mathfrak{r}_1 + \mu \mathfrak{l}_1 \mathfrak{r}_2 = o$$

d'où l'on tire immédiatement :

$$\lambda_0 : \mu_0 = \lambda : \mu. \qquad \text{c. q. f. d.}$$