Zeitschrift: Mémoires de la Société Fribourgeoise des Sciences Naturelles. Mathématique et physique = Mitteilungen der Naturforschenden Gesellschaft in Freiburg. Mathematik und Physik

Herausgeber: Société Fribourgeoise des Sciences Naturelles

Band: 2 (1912)

Artikel: Application des coordonnées sphériques homogènes à la cristallographie géométrique

Autor: Bays, Sévérin

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-306718

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 24.08.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Vol. II. MATHÉMATIQUES ET PHYSIQUE. Band II.

MÉMOIRES
DE LA
SOCIÉTÉ FRIBOURGEOISE
DES
SCIENCES NATURELLES

MITTEILUNGEN
DER
NATURFORSCHENDEN GESELLSCHAFT
IN
FREIBURG (SCHWEIZ)

APPLICATION
DES
COORDONNÉES SPHÉRIQUES HOMOGÈNES
A LA
CRISTALLOGRAPHIE GÉOMÉTRIQUE

PAR LE
Dr SÉVÉRIN BAYS

FRIBOURG (SUISSE)
IMPRIMERIE FRAGNIÈRE FRÈRES
1912

INTRODUCTION

M. le professeur Daniëls a indiqué dans une note à la fin de son livre : *Essai de Géométrie sphérique en coordonnées projectives*, que ses coordonnées projectives, en choisissant des faces cristallines pour déterminer le trilatère sphérique de référence et sa droite-unité, ne sont autres que les indices de Miller des faces et arêtes du cristal et a montré en quelques théorèmes combien le calcul vectoriel et l'emploi de ses coordonnées sphériques rendaient plus simple et plus élégant le développement des formules de la cristallographie géométrique, formules généralement compliquées et qu'a établies principalement Liebisch : Th. Liebisch, *Geometrische Krystallographie*, Leipzig 1881. M. Daniëls a eu l'obligeance de m'indiquer lui-même un travail de thèse dans le développement de cette note et de me fournir tous les renseignements nécessaires pour appliquer ses résultats obtenus en coordonnées projectives sur la sphère aux indices des faces et arêtes cristallines et traiter ainsi d'une manière plus simple et plus concise tout ce que Liebisch a traité dans la première moitié de son ouvrage. C'est ce que j'ai fait dans la première partie de mon travail.

Sur les indications encore de M. Daniëls j'ai développé dans une seconde partie ou plutôt décrit avec ses propriétés la construction parallélipipédique de l'assemblage réticulaire de Bravais (réseau dans l'espace pour Mallard et Wallerant) dont l'étude est aujourd'hui inséparable du domaine de la Cristallographie géométrique et au moyen duquel principalement les cristallographes français ont tenté d'expliquer la structure intime du cristal. Enfin dans une troisième partie, j'ai montré qu'il n'existe, en tenant compte de la symétrie de leur réseau spatial primitif, que 6 types différents de complexes cristallins possibles et du groupe entier de symétrie de ce réseau primitif qui a la symétrie de la classe holoédrique correspondante, j'ai déduit par une méthode nouvelle les sous-groupes de symétrie indépendants, en d'autres termes, l'ensemble des 32 classes possibles de cristaux.

Ainsi conçu mon travail forme un tout suffisamment homogène et s'il peut prétendre renfermer la moindre idée utile et nouvelle, il la doit à M. le professeur Daniëls, à qui j'exprime en terminant mon entière reconnaissance.

SÉVÉRIN BAYS.

Les ouvrages auxquels mon travail se réfère ou que j'ai plus ou moins consultés sont les suivants :

Daniëls : *Essai de géométrie sphérique :* introduction, chapitres I, II, III, IV, § 83 et suivants, *note 2.*

Baumhauer : *Die neuere Entwickelung der Krystallographie,* page 23-53.

Liebisch : *Geometrische Krystallographie,* Leipzig, 1881, page 1-98.

Sommerfeld : *Geometrische Krystallographie,* Leipzig, 1906. Abschnitten II, III, IV et V, page 40-91

Bravais : *Mémoire sur les systèmes de points distribués régulièrement sur un plan ou dans l'espace. Etudes cristallographiques,* page 101-205.

Encyklopedie der Math. Wissensch., Krystallographie Bd. VI, cahier 3, 1906. A. page 395-429, B. page 437-452.

Schönflies : *Krystallsystem und Krystallstructur,* Leipzig 1891, page 1-105 et 237-304.

Gibbs : *Vector analysis.* London 1902, page 260-371.

Gadolin : *Mémoire sur la déduction d'un seul principe de tous les systèmes cristallographiques.* Acta. soc. fenn. 1871.

Sohncke : *Entwickelung einer Theorie der Krystallstructur,* Leipzig 1879. *Die unbegrenzten regelmäßigen Punktsysteme,* Karlsruhe 1876.

Mallard : *Traité de cristallographie geométrique et physique,* Paris 1879.

Les articles suivants du : *Zeitschrift für Krystallographie* :

N° 27, page 1. Viola : *Elementare Darstellungen der 32. Krystallclassen.*

Page 399. Viola : *Beweis der Rationalität einer 3-zähligen Deckaxe.*

N° 28, page 36. Fedorow : *Beitrag zur Syngonielehre.*

N° 30, page 390. Fedorow* : *Ein elementarer Beweis des Weiss'schen Zonengesetzes.*

N° 31, page 135. Goldschmidt* : *Über Krystallsysteme deren Definition und Erkennung.*

N° 32, page 49. Goldschmidt : *Über Abteilungen der Krystallsysteme.*

N° 33, page 555. Fedorow* : *Beiträge zur zonalen Krystallographie. III. Syngonie Ellipsoïd-Gesetz.*

et les 2 suivants du : *Neues Jahrbuch für Mineralogie 1896,* Beil.-Bd. 10, page 167-178. Viola : *Die Einführung des geometrischen Rechnens in der geometrischen Krystallographie,*

page 495-532. Viola : *Über die Symetrie der Krystalle und Anwendung der Quaternionen Rechnung.*

* Ceux qui m'ont plus spécialement servi, sont marqués d'un astérisque.

CHAPITRE I

1. Le cristal, en tant qu'individu, c'est-à-dire exception faite des agrégats de cristaux, est un *complexe* de faces et d'arêtes, limitant un polyèdre *convexe.* Par le fait le théorème d'Euler nous donne la relation entre le nombre f de ses faces, s de ses sommets et a de ses arêtes :

$$f + s = a + 2.$$

Ces faces et arêtes limites du polyèdre n'ayant de déterminé que leurs directions dans l'espace, leur concentration (en les déplaçant parallèlement à elles-mêmes) par un point quelconque, peut adéquatement représenter la forme géométrique du cristal. Dans ce cas l'ensemble des faces parallèles à une même arête et constituant une *zone* du cristal se réduit au faisceau de plans qui a pour support cette arête ou cet *axe zonal,* et l'ensemble des arêtes parallèles à une même face, au faisceau d'arêtes qui a pour support ce plan du complexe.

Si nous faisons maintenant de ce point de concentration des faces et arêtes du cristal, le centre O d'une sphère de rayon égal à l'unité, sur cette surface sphérique obtenue :

Chaque face est adéquatement représentée par la droite sphérique (ou grand cercle) correspondante, et comme telle univoquement déterminée par un vecteur unité $\mathfrak{l}$, partant du centre, normal à son plan, et dirigé à gauche du sens positif adopté pour en parcourir le contour.

Chaque arête est adéquatement représentée par son point d'affleurement et comme telle univoquement déterminée par un vecteur unité $\mathfrak{r}$, partant du centre et passant par ce point.

Chaque multiple positif de ce vecteur détermine la même arête ou le même axe zonal ; chaque

Chaque multiple positif de ce vecteur détermine la même face, chaque multiple négatif détermine la face opposée et parallèle à la première, c'est-à-dire la face *négative* correspondante du cristal.

multiple négatif détermine l'arête opposée et parallèle à la première, c'est-à-dire l'arête *négative* correspondante du cristal.

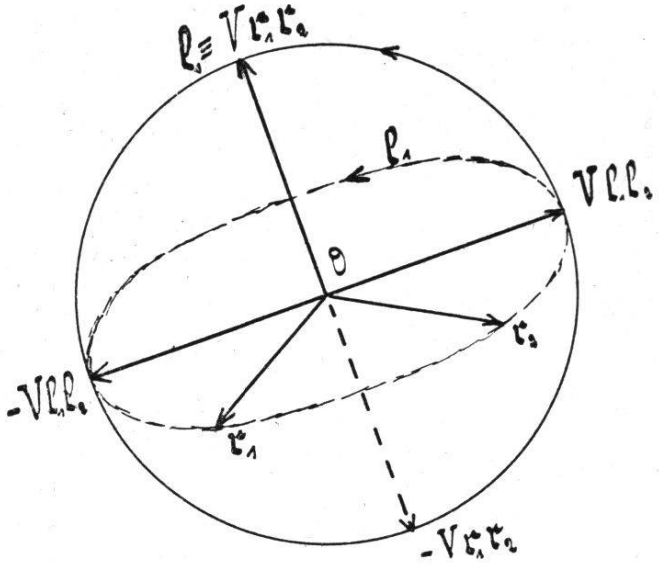


Fig. 1.

2. L'angle de 2 *faces* données $\mathfrak{l}_1$ et $\mathfrak{l}_2$, défini par l'angle de leurs normales est immédiatement fourni par le produit scalaire :

$$\mathfrak{l}_1\mathfrak{l}_2 = \cos\varphi.$$

L'angle de 2 *arêtes* données $\mathfrak{r}_1$ et $\mathfrak{r}_2$, est de même immédiatement fourni par le produit scalaire :

$$\mathfrak{r}_1\mathfrak{r}_2, = \cos\psi.$$

L'angle d'*incidence* d'une arête $\mathfrak{r}$ par rapport à une face $\mathfrak{l}$, défini par l'angle ϑ de l'arête avec le vecteur de la face est également donné par le scalaire :

$$\mathfrak{l}\mathfrak{r} = \cos\vartheta.$$

3. Le vecteur d'une face *parallèle* à 2 arêtes données $\mathfrak{r}_1$ et $\mathfrak{r}_2$, devant être normal au vecteur $\mathfrak{r}_1$ comme au vecteur $\mathfrak{r}_2$ est leur produit vectoriel :

$$\pm V\mathfrak{r}_1\mathfrak{r}_2$$

Le vecteur d'une arête *parallèle* à 2 faces données $\mathfrak{l}_1$ $\mathfrak{l}_2$, devant être normal au vecteur $\mathfrak{l}_1$ comme au vecteur $\mathfrak{l}_2$ est leur produit vectoriel :

$$\pm V\mathfrak{l}_1\mathfrak{l}_2$$

Le double signe correspond aux 2 faces opposées qui peuvent être parallèles aux 2 arêtes.

Le double signe correspond aux 2 arêtes opposées qui peuvent être parallèles aux 2 faces.

Le vecteur d'une face *parallèle* à une arête et *normale* à une face données $\mathfrak{r}$ et $\mathfrak{l}$, devant être normal au vecteur $\mathfrak{l}$ comme au vecteur $\mathfrak{r}$, est encore leur produit vectoriel :

$$\pm V\mathfrak{l}\mathfrak{r}$$

Le double signe correspond encore aux 2 faces opposées remplissant la condition demandée.

Evidemment rien ne change aux résultats de ces 2 derniers paragraphes, lorsque les vecteurs $\mathfrak{l}_i$ et $\mathfrak{r}_i$ cessent d'être vecteurs-unités ; dans le premier § nous n'avons qu'à tenir compte de leurs *tenseurs*, c'est-à-dire de leur valeur absolue, pour appliquer nos 3 formules, et dans le second, peu importe les tenseurs des produits vectoriels, un vecteur, quelque soit sa valeur absolue, déterminant toujours la même face ou la même arête.

4. Le vecteur d'une face *tautozonale* à 2 faces données $\mathfrak{l}_1$ et $\mathfrak{l}_2$, devant être coplanaire avec leurs vecteurs, est de la forme :

$$\mathfrak{l}_1 - \lambda \mathfrak{l}_2$$

et λ est le *rapport* de *position* de la 3me face par rapport aux 2 premières.

En effet, les faces étant p_1, p_2, p_3, si τ est le tenseur de $\mathfrak{l}_1 - \lambda\, \mathfrak{l}_2$, qui n'est pas en général un vecteur-unité, nous avons d'après les règles du produit vectoriel :

$$V\mathfrak{l}_1(\mathfrak{l}_1 - \lambda\mathfrak{l}_2) = -\lambda V\mathfrak{l}_1\mathfrak{l}_2 = \tau \sin(p_1 p_3)\, \mathfrak{r}_0$$

$$V\mathfrak{l}_2(\mathfrak{l}_1 - \lambda\mathfrak{l}_2) = - V\mathfrak{l}_1\mathfrak{l}_2 = \tau \sin(p_2 p_3)\, \mathfrak{r}_0$$

et par division :

$$\lambda = \frac{\sin(p_1 p_3)}{\sin(p_2 p_3)} = (p_1 p_2 p_3)$$

c. q. f. d.

Le vecteur d'une arête *coplanaire* à 2 arêtes données $\mathfrak{r}_1$ et $\mathfrak{r}_2$, est par le fait même nécessairement de la forme :

$$\mathfrak{r}_1 - \lambda \mathfrak{r}_2$$

et λ est le *rapport* de *position* de la 3me arête par rapport aux 2 premières.

En effet, les arêtes étant π_1, π_2, π_3, si τ est le tenseur de $\mathfrak{r}_1 - \lambda\, \mathfrak{r}_2$ qui n'est pas en général un vecteur-unité, nous avons d'après les règles du produit vectoriel :

$$V\mathfrak{r}_1(\mathfrak{r}_1 - \lambda\mathfrak{r}_2) = -\lambda V\mathfrak{r}_1\mathfrak{r}_2 = \tau \sin(\pi_1 \pi_3)\, \mathfrak{l}_0$$

$$V\mathfrak{r}_2(\mathfrak{r}_1 - \lambda\mathfrak{r}_2) = - V\mathfrak{r}_1\mathfrak{r}_2 = \tau \sin(\pi_2 \pi_3)\, \mathfrak{l}_0$$

et par division :

$$\lambda = \frac{\sin(\pi_1 \pi_3)}{\sin(\pi_2 \pi_3)} = (\pi_1 \pi_2 \pi_3)$$

c. q. f. d.

En remarquant que $\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{\sin (\alpha + \pi)}{\sin (\beta + \pi)}$, c'est-à-dire que les rapports de position sont égaux pour 2 faces ou arêtes opposées et parallèles, la fig. 2 nous montre immédiatement (du moins pour les arêtes, (ce serait identique pour les faces) que le rapport de position λ de la 3me face ou arête est *positif* quand elle passe dans l'angle extérieur, et *négatif*, quand elle passe dans l'angle intérieur des 2 faces ou arêtes données.

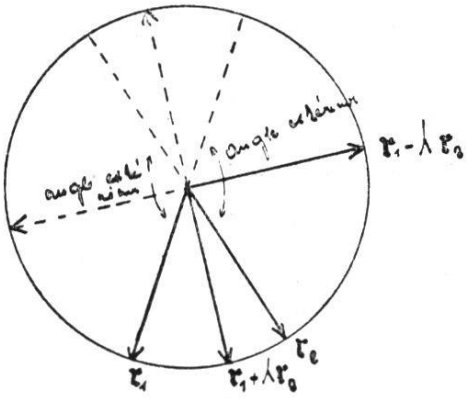


Fig. 2.

5. Trois faces $\mathfrak{l}_i$ sont *tautozonales*, s'il existe 3 nombres k_i tels que :

$$k_1 \mathfrak{l}_1 + k_2 \mathfrak{l}_2 = k_3 \mathfrak{l}_3 = 0$$

puisque dans ce cas le 3me vecteur est nécessairement coplanaire aux 2 autres.

Trois arêtes $\mathfrak{r}_i$ sont *coplanaires*, s'il existe 3 nombres k_i tels que :

$$k_1 \mathfrak{r}_1 + k_2 \mathfrak{r}_2 + k_3 \mathfrak{r}_3 = 0$$

puisque dans ce cas le 3me vecteur est nécessairement coplanaire aux 2 autres.

Encore ici rien ne change aux résultats des § 4 et 5, quand les vecteurs $\mathfrak{l}_i$ et $\mathfrak{r}_i$ cessent d'être vecteurs-unités ; dans les formes $\mathfrak{l}_1 - \lambda \mathfrak{l}_2$ et $\mathfrak{r}_1 - \lambda \mathfrak{r}_2$, nous n'avons qu'à les réduire à l'unité pour avoir la valeur exacte du rapport de position λ, et quels que soient leurs tenseurs, les vecteurs de 3 faces ou de 3 arêtes sont encore coplanaires, dès que, multipliés par 3 facteurs k_i, ils donnent une somme qui est nulle.

6. Enfin dans le cas de *4* faces *tantozonales* :

$$p_1 \equiv \mathfrak{l}_2 \qquad p_2 \equiv \mathfrak{l}_2$$
$$p_3 \equiv \mathfrak{l}_1 - \lambda \mathfrak{l}_2 \qquad p_4 \equiv \mathfrak{l}_1 - \mu \mathfrak{l}_2$$

nous appelons le quotient des rapports de position λ et μ des faces

Enfin dans le cas de *4* arêtes *coplanaires* :

$$\pi_1 \equiv \mathfrak{r}_1 \qquad \pi_2 \equiv \mathfrak{r}_2$$
$$\pi_3 \equiv \mathfrak{r}_1 - \lambda \mathfrak{r}_2 \qquad \pi_4 \equiv \mathfrak{r}_1 - \mu \mathfrak{r}_2$$

nous appelons le quotient des rapports de position λ et μ des arêtes

p_3 et p_4 par rapport aux faces p_1 et p_2 :

$$\frac{\lambda}{\mu} = \frac{\sin(p_1 p_3)}{\sin(p_2 p_3)} : \frac{\sin(p_1 p_4)}{\sin(p_2 p_4)}$$

le *rapport anharmonique* du couple des 2 dernières par rapport à celui des 2 premières et on l'écrit :

$$\frac{\lambda}{\mu} = \frac{(p_1 p_2 p_3)}{(p_1 p_2 p_4)} \equiv (p_1 p_2 p_3 p_4)$$

On voit immédiatement en gardant unies les 2 faces de chaque couple, que ce rapport anharmonique des 2 couples $p_1\ p_2$ et $p_3\ p_4$ peut prendre 8 formes différentes ; mais si l'on prend les quotients des rapports de sinus représentés par ces formes, on ne leur trouve que 2 valeurs distinctes dont la seconde est l'*inverse* de la première :

$$(p_1 p_2 p_3 p_4) = (p_2 p_1 p_4 p_3) = (p_3 p_4 p_1 p_2) = (p_4 p_3 p_2 p_1)$$
$$(p_2 p_1 p_3 p_4) = (p_1 p_2 p_4 p_3) = (p_4 p_3 p_1 p_2) = (p_3 p_4 p_2 p_1).$$

π_3 et π_4 par rapport aux arêtes π_1 et π_2 :

$$\frac{\lambda}{\mu} = \frac{\sin(\pi_1 \pi_3)}{\sin(\pi_2 \pi_3)} : \frac{\sin(\pi_1 \pi_4)}{\sin(\pi_2 \pi_4)}$$

le *rapport anharmonique* du couple des 2 dernières par rapport à celui des 2 premières et on l'écrit :

$$\frac{\lambda}{\mu} = \frac{(\pi_1 \pi_2 \pi_3)}{(\pi_1 \pi_2 \pi_4)} = (\pi_1 \pi_2 \pi_3 \pi_4)$$

On voit immédiatement en gardant unies les 2 arêtes de chaque couple, que ce rapport anharmonique des 2 couples $\pi_1\ \pi_2$ et $\pi_3\ \pi_4$ peut prendre 8 formes différentes ; mais si l'on prend les quotients des rapports de sinus représentés par ces formes, on ne leur trouve que 2 valeurs distinctes dont la seconde est l'*inverse* de la première :

$$(\pi_1 \pi_2 \pi_3 \pi_4) = (\pi_2 \pi_1 \pi_4 \pi_3) = (\pi_3 \pi_4 \pi_1 \pi_2) = (\pi_4 \pi_3 \pi_2 \pi_1)$$
$$(\pi_2 \pi_1 \pi_3 \pi_4) = (\pi_1 \pi_2 \pi_4 \pi_3) = (\pi_4 \pi_3 \pi_1 \pi_2) = (\pi_3 \pi_4 \pi_2 \pi_1).$$

Le rapport anharmonique de 4 *éléments* (faces ou arêtes) se change en rapport *harmonique* lorsqu'il a pour valeur — 1. Dans ce cas, sa valeur inverse devenant égale à sa valeur directe, on peut non seulement intervertir l'ordre de ses 2 couples ou à la fois l'ordre des éléments des 2 couples, mais encore l'ordre des éléments d'un seul de ses couples, sans qu'il cesse d'être harmonique, et on dit pour cela que ses 2 couples sont alors *conjugués harmoniques* l'un par rapport à l'autre.

7. Si par 4 arêtes *coplanaires :*

$$\pi_1 \equiv \mathbf{r}_1 \qquad \pi_2 \equiv \mathbf{r}_2 \qquad \pi_3 \equiv \mathbf{r}_1 - \lambda \mathbf{r}_2 \qquad \pi_4 \equiv \mathbf{r}_1 - \mu \mathbf{r}_2$$

passent 4 faces *tautozonales :*

$$p_1 \equiv \mathfrak{l}_1 \qquad p_2 = \mathfrak{l}_2 \qquad p_3 \equiv \mathfrak{l}_1 - \lambda_0 \mathfrak{l}_2 \qquad p_4 \equiv \mathfrak{l}_1 - \mu_0 \mathfrak{l}_2$$

le rapport anharmonique des faces est égal au rapport anharmonique des arêtes.

En effet l'arête π_1 étant sur la face p_1, π_2 sur p_2, etc., on a d'abord :

$$\mathfrak{l}_1 \mathfrak{r}_1 = 0 \quad \mathfrak{l}_2 \mathfrak{r}_2 = 0 \quad (\mathfrak{r}_1 - \lambda \mathfrak{r}_2)(\mathfrak{l}_1 - \lambda_0 \mathfrak{l}_2) = 0 \quad (\mathfrak{r}_1 - \mu \mathfrak{r}_2)(\mathfrak{l}_1 - \mu_0 \mathfrak{l}_2) = 0$$

et si l'on simplifie les 2 dernières équations à l'aide des 2 premières :

$$\lambda_0 \mathfrak{l}_2 \mathfrak{r}_1 + \lambda \mathfrak{l}_1 \mathfrak{r}_2 = 0 \qquad \text{et} \qquad \mu_0 \mathfrak{l}_2 \mathfrak{r}_1 + \mu \mathfrak{l}_1 \mathfrak{r}_2 = 0$$

d'où l'on tire immédiatement :

$$\lambda_0 : \mu_0 = \lambda : \mu. \qquad \text{c. q. f. d.}$$

CHAPITRE II

8. Soient données maintenant *3 faces* $\mathfrak{l}_i \equiv a_i$ quelconques, mais non tautozonales, du complexe cristallin concentré par le point o. Leurs intersections donnent 3 *arêtes*, dont les vecteurs sont d'après le § 3:

Soient données maintenant 3 *arêtes* $\mathfrak{r}_i$ quelconques, mais non coplanaires, du complexe cristallin concentré par le point o. Leurs plans de jonction donnent 3 *faces* dont les vecteurs sont d'après le § 3:

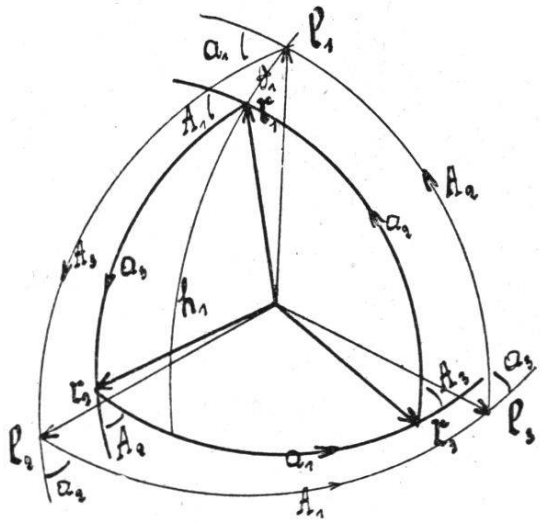


Fig. 3.

$$V\mathfrak{l}_2\mathfrak{l}_3 = \sin A_1\mathfrak{r}_1$$
$$V\mathfrak{l}_3\mathfrak{l}_1 = \sin A_2\mathfrak{r}_2$$
$$V\mathfrak{l}_1\mathfrak{l}_2 = \sin A_3\mathfrak{r}_3$$

et dont les angles sont d'après le § 2:

$$\cos a_1 = \mathfrak{r}_2\mathfrak{r}_3 = \frac{V\mathfrak{l}_3\mathfrak{l}_1 - V\mathfrak{l}_1\mathfrak{l}_2}{\sin A_2 \sin A_3}$$

$$V\mathfrak{r}_2\mathfrak{r}_3 = \sin a_1\mathfrak{l}_1$$
$$V\mathfrak{r}_3\mathfrak{r}_1 = \sin a_2\mathfrak{l}_2 \qquad (1)$$
$$V\mathfrak{r}_1\mathfrak{r}_2 = \sin a_3\mathfrak{l}_3$$

et dont les angles sont d'après le § 2:

$$\cos A_1 = \mathfrak{l}_2\mathfrak{l}_3 = \frac{V\mathfrak{r}_3\mathfrak{r}_1 - V\mathfrak{r}_1\mathfrak{r}_2}{\sin a_2 \sin a_3}$$

$$= \frac{\mathfrak{l}_3\mathfrak{l}_1 \,.\, \mathfrak{l}_1\mathfrak{l}_2 - \mathfrak{l}_3\mathfrak{l}_2}{\sin A_2 \sin A_3}$$

$$= \frac{\cos A_2 \cos A_3 - \cos A_1}{\sin A_2 \sin A_3} \qquad (1^{bis})$$

et en permutant pour les 2 autres:

$$\cos a_2 = \frac{\cos A_3 \cos A_1 - \cos A_2}{\sin A_3 \sin A_1}$$

$$\cos a_3 = \frac{\cos A_1 \cos A_2 - \cos A_3}{\sin A_1 \sin A_2}$$

Il est inutile de faire remarquer que le triangle des $\mathfrak{r}_i$ obtenus est le *polaire* de celui des $\mathfrak{l}_i$ donnés.

$$= \frac{\mathfrak{r}_3\mathfrak{r}_1 \,.\, \mathfrak{r}_1\mathfrak{r}_2 - \mathfrak{r}_3\mathfrak{r}_2}{\sin a_2 \sin a_3}$$

$$= \frac{\cos a_2 \cos a_3 - \cos a_1}{\sin a_3 \sin a_1} \qquad (1^{bis})$$

et en permutant pour les 2 autres:

$$\cos A_2 = \frac{\cos a_3 \cos a_1 - \cos a_2}{\sin a_3 \sin a_1}$$

$$\cos A_3 = \frac{\cos a_1 \cos a_2 - \cos a_3}{\sin a_1 \sin a_2}$$

Il est inutile de faire remarquer que le triangle des $\mathfrak{l}_i$ obtenus est le *polaire* de celui des $\mathfrak{r}_i$ donnés.

9. D'après le paragraphe 2 nous avons encore, en remarquant qu'une face normale par $\mathfrak{r}_i$ à la face $\mathfrak{l}_i$, passe également par le vecteur $\mathfrak{l}_i$:

$$\begin{array}{l|l} \mathfrak{l}_1\mathfrak{r}_1 = \cos\vartheta_1 = \sin h_1 & \mathfrak{l}_1\mathfrak{r}_2 = \mathfrak{l}_1\mathfrak{r}_3 = 0 \\ \mathfrak{l}_2\mathfrak{r}_2 = \cos\vartheta_2 = \sin h_2 & \mathfrak{l}_2\mathfrak{r}_1 = \mathfrak{l}_2\mathfrak{r}_3 = 0 \\ \mathfrak{l}_3\mathfrak{r}_3 = \cos\vartheta_3 = \sin h_3 & \mathfrak{l}_3\mathfrak{r}_1 = \mathfrak{l}_3\mathfrak{r}_2 = 0 \end{array} \qquad (2)$$

de sorte qu'en multipliant scalairement les équations (1) par $\mathfrak{l}_1, \mathfrak{l}_2, \mathfrak{l}_3$ et $\mathfrak{r}_1, \mathfrak{r}_2, \mathfrak{r}_3$, nous obtenons :

$$\begin{array}{l} \mathfrak{l}_1 \sqrt{\mathfrak{l}_2\mathfrak{l}_3} = \sin A_1 \sin h_1 = \sin A_2 \sin h_2 = \sin A_3 \sin h_3 \\ \mathfrak{r}_1 \sqrt{\mathfrak{r}_2\mathfrak{r}_3} = \sin a_1 \sin h_1 = \sin a_2 \sin h_2 = \sin a_3 \sin h_3 \end{array} \qquad (3)$$

et enfin par division :

$$\frac{\sin A_1}{\sin a_1} = \frac{\sin A_2}{\sin a_2} = \frac{\sin A_3}{\sin a_3} = \frac{\mathfrak{l}_1 \sqrt{\mathfrak{l}_2\mathfrak{l}_3}}{\mathfrak{r}_1 \sqrt{\mathfrak{r}_2\mathfrak{r}_3}} = M. \qquad (4)$$

c'est-à-dire que le *module M* du triangle sphérique $\mathfrak{r}_1\mathfrak{r}_2\mathfrak{r}_3$ est égal au rapport des *sinus* des angles *triédres* $\mathfrak{l}_1 \sqrt{\mathfrak{l}_2\mathfrak{l}_3}$ et $\mathfrak{r}_1 \sqrt{\mathfrak{r}_2\mathfrak{r}_3}$.[1]

---

[1] Le sinus d'un angle plan peut être défini comme la surface d'un parallélogramme dont les côtés sont l'unité; par analogie le volume du parallélipède construit avec les 3 vecteurs unités $\mathfrak{r}_i$ que représente le scalain $\mathfrak{r}_1 \sqrt{\mathfrak{r}_2\mathfrak{r}_3}$ est le *sinus* du trièdre $\mathfrak{r}_1\mathfrak{r}_2\mathfrak{r}_3$.

Or dans les 3 couples de triangles sphériques *rectangles* que détermine la construction des h_i, l'égalité des rapports $\sin A_i : \sin a_i$ nous donne :

$$\begin{aligned} \sin h_1 &= \sin A_2 \sin a_3 = \sin A_3 \sin a_2 \\ \sin h_2 &= \sin A_3 \sin a_1 = \sin A_1 \sin a_3 \\ \sin h_3 &= \sin A_1 \sin a_2 = \sin A_2 \sin a_1 \end{aligned} \qquad (5)$$

ce qui, substitué dans les équations (3), donne encore :

$$\mathfrak{l}_1 \sqrt{\mathfrak{l}_2 \mathfrak{l}_3} = \sin A_1 \sin A_2 \sin a_3 = \sin A_2 \sin A_3 \sin a_1 = \sin A_3 \sin A_1 \sin a_2$$

$$\mathfrak{r}_1 \sqrt{\mathfrak{r}_2 \mathfrak{r}_3} = \sin a_1 \sin a_2 \sin A_3 = \sin a_2 \sin a_3 \sin a_1 = \sin a_3 \sin a_1 \sin A_2$$

et si nous posons les expressions équivalentes :

$$\begin{aligned} \sin A_1 \sin A_2 \sin a_3 &= \cdots\cdots\cdots \equiv \Delta \\ \sin a_1 \sin a_2 \sin A_3 &= \cdots\cdots\cdots \equiv D \end{aligned}$$

nous avons très simplement, avec égalité des numérateurs et dénominateurs :

$$\frac{\mathfrak{l}_1 \sqrt{\mathfrak{l}_2 \mathfrak{l}_3}}{\mathfrak{r}_1 \sqrt{\mathfrak{r}_2 \mathfrak{r}_3}} = \frac{\Delta}{D} = M \qquad (6)$$

10. Les valeurs Δ et D des sinus des trièdres peuvent prendre encore une autre forme. Pour simplifier, posons dorénavant :

$$\cos a_{ik} \equiv c_{ik} = c_{ki} \qquad \sin a_{ik} \equiv s_{ik} = -s_{ki}$$

$$\cos A_{ik} \equiv C_{ik} = C_{ki} \qquad \sin A_{ik} \equiv S_{ik} = -S_{ki}$$

En élevant au carré l'une des expression Δ :

$$\sin^2 A_1 \sin^2 A_2 \sin^2 a_3$$

et en y substituant la valeur de $\sin^2 a_3$, que nous fournit très facilement l'équation (1bis) correspondante, nous obtenons après réduction :

$$\Delta^2 = 1 - C_1^2 - C_2^2 - C_1^2 + 2 C_1 C_2 C_3$$

et sous forme de déterminant :

$$\Delta^2 = \left(\mathfrak{l}_1 \sqrt{\mathfrak{l}_2 \mathfrak{l}_3}\right) = \begin{vmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} \end{vmatrix}$$

puisque $C_{ii} \equiv \cos A_{ii} = 1$.

En élevant au carré l'une des expression D :

$$\sin^2 a_1 \sin^2 a_2 \sin^2 A_3$$

et en y substituant la valeur de $\sin^2 A_3$, que nous fournit très facilement l'équation (1bis) correspondante, nous obtenons après réduction :

$$D^2 = 1 - c_1^2 - c_2^2 - c_3^2 + 2 c_1 c_2 c_3$$

et sous forme de déterminant :

$$D^2 = \left(\mathfrak{r}_1 \sqrt{\mathfrak{r}_2 \mathfrak{r}_3}\right)^2 = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{12} & c_{22} & c_{23} \\ c_{13} & c_{23} & c_{33} \end{vmatrix}$$

puisque $c_{ii} = \cos a_{ii} = 1$.

CHAPITRE III

11. Soit maintenant une nouvelle *face* quelconque du même complexe dont nous allons déterminer la position par rapport aux 3 faces *fondamentales* que nous venons d'établir.

D'une part, cette position est complètement déterminée si nous décomposons le nouveau vecteur, qui n'est pas en général un vecteur-unité, et que nous écrirons donc $u_4\mathfrak{l}$, selon les 3 vecteurs $\mathfrak{l}_1, \mathfrak{l}_2, \mathfrak{l}_3$ des faces fondamentales, n_1, n_2, n_3, étant les tenseurs des 3 composantes ;

$$u_4\mathfrak{l} = n_1\mathfrak{l}_1 + n_2\mathfrak{l}_2 + n_3\mathfrak{l}_3$$

En introduisant les *constantes* ν_i, composantes elles-mêmes par rapport à ces mêmes 3 faces fondamentales, du vecteur d'une 5me face du complexe et par le fait, *différentes* de o :

$$u_4\mathfrak{l} = \nu_1 u_1 \mathfrak{l}_1 + \nu_2 u_2 \mathfrak{l}_2 + \nu_3 u_3 \mathfrak{l}_3$$

Pour tout choix complètement arbitraire des constantes ν_i, M. Daniëls appelle les valeurs u_i, déterminant le vecteur donné, ou un multiple positif quelconque de ces valeurs, les *coordonnées pro-*

Soit maintenant une nouvelle *arête* quelconque du même complexe dont nous allons déterminer la position par rapport aux 3 arêtes *fondamentales* que nous venons d'établir.

D'une part, cette position est complètement déterminée si nous décomposons le nouveau vecteur qui n'est pas en général un vecteur-unité et que nous écrirons donc $x_4\mathfrak{r}$, selon les 3 vecteurs $\mathfrak{r}_1, \mathfrak{r}_2, \mathfrak{r}_3$ des arêtes fondamentales, m_1, m_2 et m_3 étant les tenseurs des 3 composantes :

$$x_4\mathfrak{r} = m_1\mathfrak{r}_1 + m_2\mathfrak{r}_2 + m_3\mathfrak{r}_3$$

En introduisant les *constantes* μ_i, composantes elles-mêmes par rapport à ces mêmes 3 arêtes fondamentales, du vecteur d'une 5me arête du complexe et par le fait, *différentes* de o :

$$x_4\mathfrak{r} = \mu_1 x_1 \mathfrak{r}_1 + \mu_2 x_2 \mathfrak{r}_2 + \mu_3 x_3 \mathfrak{r}_3.$$

Pour tout choix complètement arbitraire des constantes μ_i, M. Daniëls appelle les valeurs x_i, déterminant le vecteur donné, ou un multiple positif quelconque de ces valeurs, les *coordonnées pro-*

jectives de la *droite* sphérique correspondante, par rapport au triangle de référence des droites sphériques données $\mathfrak{l}_i$.

Elles le sont donc encore si nous assujettissons ces 3 constantes à la condition que nous leur avons posée, et le vecteur que celles-ci déterminent, est alors celui de la *face-unité* du complexe, puisque ses coordonnées se réduisent chacune à l'unité :

$$\nu_1 \mathfrak{l}_1 + \nu_2 \mathfrak{l}_2 + \nu_3 \mathfrak{l}_3$$

12. D'autre part si les longueurs OH_i sont les *segments* qu'intercepte la nouvelle face donnée, déplacée parallèlement à elle-même, sur les axes $\mathfrak{r}_i$ intersections des 3 faces fondamentales (fig. 4), les longueurs OE_i étant les segments correspondants interceptés par une 5me face du cristal prise comme face-unité, les rapports :

$$\frac{OE_1}{OH_1}, \frac{OE_2}{OH_2}, \frac{OE_3}{OH_3}$$

ou un multiple positif quelconque de leurs valeurs, déterminent également sa position par rapport aux 3 faces fondamentales et à la face-unité choisies et sont par rapport à ce système de référence, les *indices* de *Miller* de cette face quelconque du cristal.

13. Or le vecteur de cette face qui est en coordonnées projectives

$$u_4 \mathfrak{l} = \nu_1 u_1 \mathfrak{l}_1 + \nu_2 u_2 \mathfrak{l}_2 + \nu_3 u_3 \mathfrak{l}_3$$

jectives du *point* correspondant sur la sphère, par rapport au triangle de référence des sommets donnés $\mathfrak{r}_1, \mathfrak{r}_2, \mathfrak{r}_3$.

Elles le sont donc encore si nous assujettissons ces 3 constantes à la condition que nous leur avons posée, et le vecteur que celles-ci déterminent, est alors celui de l'*arête-unité* du complexe, puisque ses coordonnées se réduisent chacune à l'unité :

$$\mu_1 \mathfrak{r}_1 + \mu_2 \mathfrak{r}_2 + \mu_3 \mathfrak{r}_3$$

D'autre part, si les longueurs OK_i sont les *coordonnées* cartésiennes obliques de la nouvelle arête donnée par rapport au système d'axes $\mathfrak{r}_i$ coïncidant avec les 3 arêtes fondamentales (fig. 4), les longueurs OD_i étant les coordonnées obliques correspondantes d'une 5me arête du cristal prise comme arête-unité, les rapports :

$$\frac{OK_1}{OD_1}, \frac{OK_2}{OD_2}, \frac{OK_3}{OD_3}$$

ou un multiple positif quelconque de leurs valeurs, déterminent également sa position par rapport aux 3 arêtes fondamentales et à l'arête-unité choisies et sont par rapport à ce système de référence, les *indices* de *Miller* de cette arête quelconque du cristal.

Or les coordonnées obliques OK_i de cette arête sont les composantes mêmes de son vecteur

et donne en le multipliant scalairement par $\mathfrak{r}_1, \mathfrak{r}_2, \mathfrak{r}_3$, d'après les § 2 et 9 : (fig. 4).

$$u_4 \mathfrak{l}\mathfrak{r}_1 = u_4 \cos \vartheta_1 = \nu_1 u_1 \sin h_1$$
$$u_4 \mathfrak{l}\mathfrak{r}_2 = u_4 \text{ cas } \vartheta_2 = \nu_2 u_2 \sin h_2$$
$$u_4 \mathfrak{l}\mathfrak{r}_3 = u_4 \cos \vartheta_3 = \nu_3 u_3 \sin h_3$$

donne également avec les 3 segments interceptés sur les axes $\mathfrak{r}_i$:

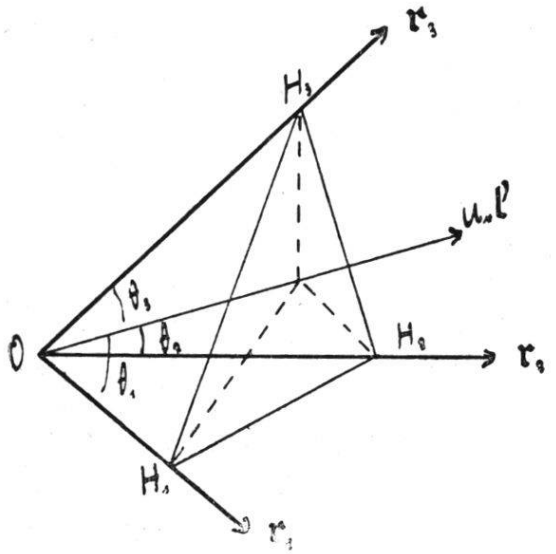


Fig. 4.

$$OH_1 \cos \vartheta_1 = OH_2 \cos \vartheta_2 = OH_3 \cos \vartheta_3$$

ou :

$$OH_1 : OH_2 : OH_3 = \frac{1}{\cos \vartheta_1} : \frac{1}{\cos \vartheta_2} : \frac{1}{\cos \vartheta_3}$$

D'où en comparant les 2 résultats :

$$OH_1 : OH_2 : OH_3 = \frac{1}{\nu_1 u_1 \sin h_1} : \frac{1}{\nu_2 u_2 \sin h_2} : \frac{1}{\nu_3 u_3 \sin h_3}$$

Nous aurions donc aussi pour la face-unité :

$$OE_1 : OE_2 : OE_3 = \frac{1}{\nu_1 \sin h_1} : \frac{1}{\nu_2 \sin h_2} : \frac{1}{\nu \sin h_3}$$

et enfin pour les indices de notre face quelconque du cristal :

$$\frac{OE_1}{OH_1} : \frac{OE_2}{OH_2} : \frac{OE_3}{OH_3} = u_1 : u_2 : u_3$$

ou plus brièvement : $\frac{OE_i}{OH_i} \therefore u_i$

en coordonnées projectives :

$$x_4 \mathfrak{r} = \mu_1 x_1 \mathfrak{r}_1 + \mu_2 x_2 \mathfrak{r}_2 + \mu_3 x_3 \mathfrak{r}_3$$

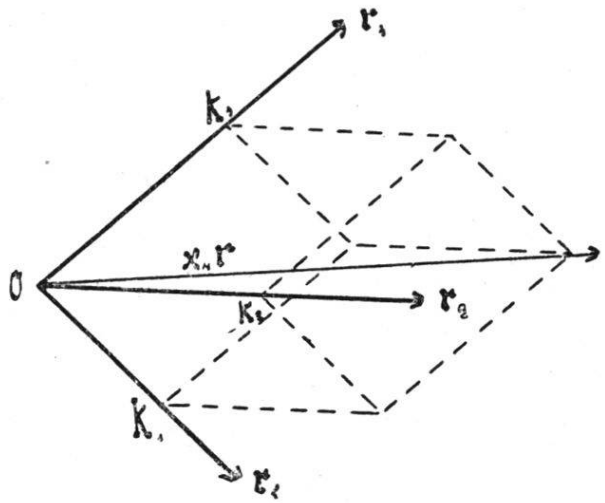


Fig. 4.

et par le fait :

$$OK_1 : OK_2 : OK_3 = \mu_1 x_1 : \mu_2 x_2 : \mu_3 x_3$$

Nous avons donc aussi pour l'arête-unité :

$$OD_1 : OD_2 : OD_3 = \mu_1 : \mu_2 : \mu_3 \qquad (7)$$

et enfin pour les indices de notre arête quelconque du cristal :

$$\frac{OK_1}{OD_1} : \frac{OK_2}{OD_2} : \frac{OK_3}{OD_3} = x_1 : x_2 : x_3$$

ou plus brièvement : $\frac{OK_i}{OD_i} \therefore x_i$

Donc les constantes μ_i étant elles-mêmes les composantes du vecteur d'une arête du complexe, les *coordonnées* projectives du point sur

Donc les constantes ν_i étant elles-mêmes les composantes du vecteur d'une face du complexe, les *coordonnées projectives* de la droite sphérique sont les *indices* de la face correspondante, et dès ce moment pour impliquer en un seul les 2 concepts, nous appelons les *valeurs* u_i les indices de la face du cristal dont ils déterminent le vecteur :

$$u_4 \mathfrak{l} = \nu_1 u_1 \mathfrak{l}_1 + \nu_2 u_2 \mathfrak{l}_2 + \nu_3 u_3 \mathfrak{l}_3$$

la sphère, sont les *indices* de l'arête correspondante, et dès ce moment pour impliquer en un seul les 2 concepts nous appelons les *valeurs* x_i les indices de l'arête du cristal dont ils déterminent le vecteur :

$$x_4 \mathfrak{r} = \mu_1 x_1 \mathfrak{r}_1 + \mu_2 x_2 \mathfrak{r}_2 + \mu_3 x_3 \mathfrak{r}_3$$

14. Nous avons donc en multipliant scalairement par $\mathfrak{r}_1, \mathfrak{r}_2, \mathfrak{r}_3$ le vecteur d'une face dont les indices sont u_i, (les ϑ_i étant les angles d'incidence de la face par rapport aux arêtes fondamentales) :

$$\begin{aligned} u_4 \mathfrak{l}\mathfrak{r}_1 &= u_4 \cos \vartheta_1 = \nu_1 u_1 \sin h_1 \\ u_4 \mathfrak{l}\mathfrak{r}_2 &= u_4 \cos \vartheta_2 = \nu_2 u_2 \sin h_2 \qquad (8) \\ u_4 \mathfrak{l}\mathfrak{r}_3 &= u_4 \cos \vartheta_3 = \nu_3 u_3 \sin h_3 \end{aligned}$$

et donc directement la relation entre ces indices :

$$u_1 : u_2 : u_3 = \frac{\cos \vartheta_1}{\nu_1 \sin h_1} : \frac{\cos \vartheta_2}{\nu_2 \sin h_2} : \frac{\cos \vartheta_3}{\nu_3 \sin h_3} \qquad [9$$

Pour une seconde face dont les indices sont u'_i : =

$$u'_1 : u'_2 : u'_3 = \frac{\cos \vartheta'_1}{\nu_1 \sin h_1} : \frac{\cos \vartheta'_2}{\nu_2 \sin h_2} : \frac{\cos \vartheta'_3}{\nu_3 \sin h_3}$$

et enfin en divisant membre à membre :

$$\frac{u_1}{u'_1} : \frac{u_2}{u'_2} : \frac{u_3}{u'_3} = \frac{\cos \vartheta_1}{\cos \vartheta'_1} : \frac{\cos \vartheta_2}{\cos \vartheta'_2} : \frac{\cos \vartheta_3}{\cos \vartheta'_3}$$

ou plus brièvement :

$$\frac{u_i}{u'_i} \cdot\cdot \frac{\cos \vartheta_i}{\cos \vartheta'_i}$$

Nous avons également en multipliant scalairement par $\mathfrak{l}_1, \mathfrak{l}_2, \mathfrak{l}_3$ le vecteur de l'arête dont les indices sont x_i (les ϑ_i étant les angles d'incidence de l'arête par rapport aux faces fondamentales) :

$$\begin{aligned} x_4 \mathfrak{r}\mathfrak{l}_1 &= x_4 \cos \vartheta_1 = \mu_1 x_1 \sin h_1 \\ x_4 \mathfrak{r}\mathfrak{l}_2 &= x_4 \cos \vartheta_2 = \mu_2 x_2 \sin h_2 \qquad (8) \\ x_4 \mathfrak{r}\mathfrak{l}_3 &= x_4 \cos \vartheta_3 = \mu_3 x_3 \sin h_3 \end{aligned}$$

et donc directement la relation entre ces indices :

$$x_1 : x_2 : x_3 = \frac{\cos \vartheta_1}{\mu_1 \sin h_1} : \frac{\cos \vartheta_2}{\mu_2 \sin h_2} : \frac{\cos h_3}{\mu_3 \sin h_3} \qquad [9$$

Pour une seconde arête dont les indications sont x'_i :

$$x'_1 : x'_2 : x'_3 = \frac{\cos \vartheta'_1}{\mu_1 \sin h_1} : \frac{\cos \vartheta'_2}{\mu_2 \sin h_2} : \frac{\cos \vartheta'_3}{\mu_3 \sin h_3}$$

et enfin en divisant membre à membre :

$$\frac{x_1}{x'_1} : \frac{x_2}{x'_2} : \frac{x_3}{x'_3} = \frac{\cos \vartheta_1}{\cos \vartheta'_1} : \frac{\cos \vartheta_2}{\cos \vartheta'_2} : \frac{\cos \vartheta_2}{\cos \vartheta'_3}$$

ou plus brièvement :

$$\frac{x_i}{x'_i} \cdot\cdot \frac{\cos \vartheta_i}{\cos \vartheta'_i}$$

c'est-à-dire que les quotients des indices de 2 faces sont proportionnels aux quotients des cos. des angles d'incidence des arêtes $\mathfrak{r}_i$ par rapport à ces faces.

15. La relation (9) nous donne immédiatement pour le signe des indices u_i d'une face quelconque: est *positif* l'indice u_i correspondant à l'*arête* fondamentale située par rapport à la face du même côté que son vecteur, et *négatif* celui du cas contraire;

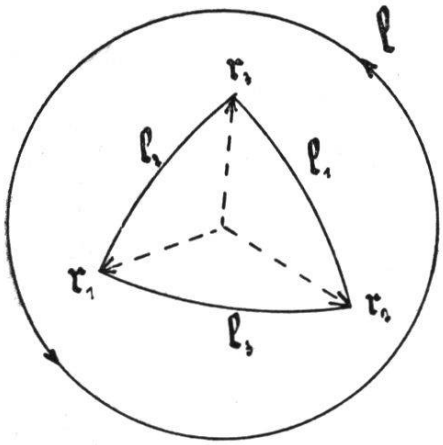


Fig. 5.

(Toute face $\mathfrak{l}$ n'entrant pas dans le trièdre des faces fondamentales, a donc seule ses 3 indices de même signe).

et comme cas particulier: toute face *parallèle* à l'une des arêtes fondamentales a son indice u_i correspondant *nul*.

Toute face tautozonale à l'arête $\mathfrak{r}_1$ par ex. est donc de la forme; $\nu_2 u_2 \mathfrak{l}_2 + \nu_3 u_3 \mathfrak{l}_3$; son vecteur est en effet coplanaire à $\mathfrak{l}_2$ et $\mathfrak{l}_3$, et d'a-

c'est-à-dire que les quotients des indices de 2 arêtes sont proportionnels aux quotients des cos. des angles d'incidence de ces arêtes par rapport aux faces fondamentales.

La relation (9) nous donne immédiatement pour le signe des indices x_i d'une arête quelconque: est *positif* l'indice x_i correspondant à la *face* fondamentale par rapport à laquelle l'arête est située du même côté que son vecteur, et *négatif* celui du cas contraire;

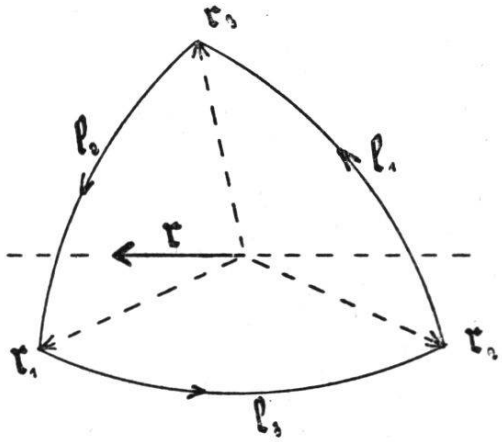


Fig. 5.

(Toute arête $\mathfrak{r}$ passant à l'intérieur du trièdre des arêtes fondamentales, a donc seule ses 3 indices de même signe).

et comme cas particulier: toute arête *parallèle* à l'une des faces fondamentales a son indice x_i correspondant *nul*.

Toute arête coplanaire à la face $\mathfrak{l}_1$ par ex. est donc de la forme: $\mu_2 x_2 \mathfrak{r}_2 + \mu_3 x_3 \mathfrak{r}_3$; son vecteur est en effet coplanaire aux vecteurs $\mathfrak{r}_2$ et $\mathfrak{r}_3$,

près le § 4, $-\frac{\nu_3 u_3}{\nu_2 u_2}$ est son rapport de position par rapport à ces 2 faces.

et d'après § 4, $-\frac{\mu_3 x_3}{\mu_2 x_2}$ et son rapport de position par rapport à ces 2 arêtes.

16. Toute face parallèle à une arête donnée :

$$\mu_1 x_1 \mathfrak{r}_1 + \mu_2 x_2 \mathfrak{r}_2 + \mu_3 x_3 \mathfrak{r}_3$$

son vecteur devant être normal à cette arête, a ses indices tels qu'ils satisfont à la relation :

$$(\mu_1 x_1 \mathfrak{r}_1 + \mu_2 x_2 \mathfrak{r}_2 + \mu_3 x_3 \mathfrak{r}_3)(\nu_1 u_1 \mathfrak{l}_1 + \nu_2 u_2 \mathfrak{l}_2 + \nu_3 u_3 \mathfrak{l}_3) = 0$$

ou : $\mu_1 \nu_1 \sin h_1 . x_1 u_1 + \mu_2 \nu_2 \sin h_2 . x_2 u_2 + \mu_3 \nu_3 \sin h_3 . x_3 u_3 = 0$

Toute arête parallèle à une face donnée :

$$\nu_1 u_1 \mathfrak{l}_1 + \nu_2 u_2 \mathfrak{l}_2 + \nu_3 u_3 \mathfrak{l}_3$$

son vecteur devant être normal à celui de la face, a ses indices tels qu'ils satisfont à la relation :

$$(\nu_1 u_1 \mathfrak{l}_1 + \nu_2 u_2 \mathfrak{l}_2 + \nu_3 u_3 \mathfrak{l}_3)(\mu_1 x_1 \mathfrak{r}_1 + \mu_2 x_2 \mathfrak{r}_2 + \mu_3 x_2 \mathfrak{r}_3) = 0$$

ou : $\mu_1 \nu_1 \sin h_1 . u_1 x_1 + \mu_2 \nu_2 \sin h_2 u_2 x_2 + \mu_3 \nu_3 \sin h_3 . u_3 x_3 = 0$

16$^{bis.}$ Si l'arête donnée est coplanaire à la face fondamentale $\mathfrak{l}_1$ par ex., son indice x_1 étant nul, la relation précédente se réduit aux 2 termes :

$$\mu_2 \nu_2 \sin h_2 . x_2 u_2 + \mu_3 \nu_3 \sin h_3 . x_3 u_3 = 0$$

Elle n'est donc plus satisfaite que par une *seule* valeur du rapport des 2 indices u_i qu'elle contient encore, et toute face parallèle à l'arête donnée a nécessairement cette valeur pour le rapport de ses deux derniers indices u_2 et u_3. D'une manière générale, pour toutes les faces tautozonales à une arête parallèle à l'une des faces fondamentales, les 2 indices u_i correspondants aux 2 autres faces fondamentales sont *constants*, c'est-à-dires sont les mêmes pour toutes les faces dans le cas d'une *même* arête.

Si la face donnée est tautozonale à l'arête fondamentale $\mathfrak{r}_1$ par ex., son indice u_1 étant nul, la relation précédente se réduit aux 2 termes :

$$\mu_2 \nu_2 \sin h_2 . u_2 x_2 + \mu_3 \nu_3 \sin h_3 . u_3 x_3 = 0$$

Elle n'est donc plus satisfaite que par une *seule* valeur du rapport des 2 indices x_i qu'elle contient encore, et toute arête parallèle à la face donnée a nécessairement cette valeur pour le rapport de ses 2 derniers indices x_2 et x_3. D'une manière générale, pour toutes les arêtes coplanaires à une face parallèle à l'une des arrêtes fondamentales, les 2 indices x_i correspondants aux 2 autres arêtes fondamentales sont *constants*, c'est-à-dire sont les mêmes pour toutes les arêtes dans le cas d'une *même* face.

CHAPITRE IV

17. Dans le milieu fermé contre toute perturbation des propriétés inhérentes à la substance cristalline, la température et la pression extérieures étant égales et constantes en chaque point, le cristal en formation, ne garde invariable que la *direction*

de ses *faces* et par le fait celle de ses arêtes, et n'est limité dans son développement que par la nature des *faces* qui peuvent intervenir.

1° Seuls les angles dièdres et polyèdres de ses faces sont fixes, et par le fait les angles plans de ses arêtes : c'est la loi de la *constance* des angles des *faces* du cristal. Il en résulte que toutes les directions parallèles aux intersections réalisées ou non des faces présentes ou pouvant intervenir,

de ses *arêtes*, et par le fait celle de ses faces, et n'est limité dans son développement que par la nature des *arêtes* qui peuvent intervenir.

1° Seuls les angles plans de ses arêtes sont fixes, et par le fait les angles dièdres et polyèdres de ses faces : c'est la loi de la *constance* des angles des *arêtes* du cristal. Il en résulte que tous les plans parallèles aux plans de jonction réalisés ou non, des arêtes présentes ou pouvant intervenir

ou plus simplement, en s'en rapportant à la concentration du complexe cristallin par le centre o de notre sphère de rayon-unité :

toutes les intersections des faces pouvant entrer dans le complexe, sont des *arêtes possibles* du cristal.

2° Seules peuvent intervenir dans le développement du cristal, les *faces parallèles* à 2 de ses arêtes, c'est-à-dire appartenant à 2 de ses zones présentes ou possibles ; c'est la *loi* des *zones*, qui rapportée encore au complexe con-

tous les plans de jonction des arêtes pouvant entrer dans le complexe, sont des *faces possibles* du cristal.

2° Seules peuvent intervenir dans le développement du cristal, les *arêtes parallèles* à 2 de ses faces présentes ou possibles ; c'est l'équivalent pour les arêtes de la loi des zones pour les faces, qui rapportée encore au complexe con-

centré par le point O, peut s'exprimer plus simplement : *seuls* les plans de jonction des arêtes pouvant entrer dans le complexe sont des *faces possibles* du cristal.

centré par le point O, peut s'exprimer plus simplement : *seules* les intersections des faces pouvant entrer dans le complexe sont des *arêtes possibles* du cristal.

18. Or le plus simple complexe cristallin de *faces* données et concentrées par le point O, nous permettant d'en déterminer *zonalement* de nouvelles, exige de toute évidence au moins 4 faces, dont il n'y en ait pas 3 tautozonales. En retour, étant données d'un cristal, 4 faces quelconques, mais remplissant la condition posée, la dépendance zonale des faces cristallines nous permet d'en déduire *toutes* les autres *faces* et par le fait toutes les arêtes présentes et possibles du cristal.

Or le plus simple complexe cristallin d'*arêtes* données et concentrées par le point O, nous permettant d'en déterminer *zonalement* de nouvelles, exige de toute évidence, au moins 4 arêtes, dont il n'y en ait pas 3 coplanaires ou parallèles à la même face. En retour, étant données d'un cristal, 4 arêtes quelconques, mais remplissant la condition posée, la dépendance zonale des arêtes cristallines nous permet d'en déduire *toutes* les autres *arêtes* et par le fait toutes les faces présentes et possibles du cristal.

19. Soient donc *4 faces* quelconques d'un cristal, $\mathfrak{l}_0, \mathfrak{l}_1, \mathfrak{l}_2, \mathfrak{l}_3$, dont il n'y en a pas 3 tautozonales. $\mathfrak{l}_1, \mathfrak{l}_2, \mathfrak{l}_3$ étant prises comme faces fondamentales, et $\mathfrak{l}_0 \equiv \mathfrak{p}_0$ comme face-unité :

$$\mathfrak{p}_0 \equiv \nu_1 \mathfrak{l}_1 + \nu_2 \mathfrak{l}_2 + \nu_3 \mathfrak{l}_3$$

nous avons pour les vecteurs des faces suivantes, *zonalement déduites* (fig. 6), d'après les cas particuliers des § 15 et 16, d'abord :

$$\mathfrak{p}_1 \equiv \nu_2 \mathfrak{l}_2 + \nu_3 \mathfrak{l}_3$$
$$\mathfrak{p}_2 \equiv \nu_3 \mathfrak{l}_3 + \nu_1 \mathfrak{l}_1$$
$$\mathfrak{p}_3 \equiv \nu_1 \mathfrak{l}_1 + \nu_2 \mathfrak{l}_2$$

Soient donc *4 arêtes* quelconques d'un cristal, $\mathfrak{r}_0, \mathfrak{r}_1, \mathfrak{r}_2, \mathfrak{r}_3$, dont il n'y en a pas 3 coplanaires. $\mathfrak{r}_1, \mathfrak{r}_2, \mathfrak{r}_3$ étant prises comme arêtes fondamentales et $\mathfrak{r}_0 \equiv \pi_0$ comme arête-unité :

$$\pi_0 \equiv \mu_1 \mathfrak{r}_1 + \mu_2 \mathfrak{r}_2 + \mu_3 \mathfrak{r}_3$$

nous avons pour les vecteurs des arêtes suivantes, *zonalement déduites* (fig. 6), d'après les cas particuliers des § 15 et 16, d'abord :

$$\pi_1 \equiv \mu_2 \mathfrak{r}_2 + \mu_3 \mathfrak{r}_3$$
$$\pi_2 \equiv \mu_3 \mathfrak{r}_3 + \mu_1 \mathfrak{r}_1$$
$$\pi_3 \equiv \mu_1 \mathfrak{r}_1 + \mu_2 \mathfrak{r}_2$$

et ensuite, en partant uniquement du couple des 2 dernières p_2 et p_3, et tenant compte encore que toute face par l'intersection commune de 2 autres, a son vecteur de la forme $\mathfrak{l}_1 - \lambda \mathfrak{l}_2$ (§ 4), les 2 systèmes suivants, qui s'établissent indépendemment l'un de l'autre; [mais dont nous faisons directement dans la fig. 6 concorder les intersections sur la face p_2; car il est en effet très facile de montrer que pour chacune d'elles, les vecteurs de 3 quelconques des faces qui y concourent, multiplié chacun par le facteur convenable, donnent une somme algébrique qui s'annule (§ 5)]:

1° en ajoutant p_2 à p_3, p_2 à p'_3, p_2 à p''_3, etc., successivement:

$$\begin{aligned} p_1^1 &\equiv 2\nu_1\mathfrak{l}_1 + \nu_2\mathfrak{l}_2 + \nu_3\mathfrak{l}_3 \\ p'_3 &\equiv 2\nu_1\mathfrak{l}_1 + \nu_2\mathfrak{l}_2 \\ p_1^2 &\equiv 3\nu_1\mathfrak{l}_1 + \nu_1\mathfrak{l}_2 + \nu_3\mathfrak{l}_3 \\ p''_3 &\equiv 3\nu_1\mathfrak{l}_1 + \nu_2\mathfrak{l}_2 \end{aligned}$$

etc.

2° en retranchant p_2 de p_3, p_2 de p_3^1, p_2 de p_3^2, etc., successivement:

$$\begin{aligned} p'_1 &\equiv \nu_2\mathfrak{l}_2 - \nu_3\mathfrak{l}_3 \\ p_3^1 &\equiv \nu_1\mathfrak{l}_1 + \nu_2\mathfrak{l}_2 - \nu_3\mathfrak{l}_3 \\ p''_1 &\equiv \nu_2\mathfrak{l}_2 - 2\nu_3\mathfrak{l}_3 \\ p_3^2 &\equiv \nu_1\mathfrak{l}_1 + \nu_2\mathfrak{l}_2 - 2\nu_3\mathfrak{l}_3 \end{aligned}$$

etc.

En mettant en ordre les résultats qui nous intéressent directement:

et ensuite, en partant uniquement du couple des 2 dernières π_2 et π_3, et tenant compte encore que toute arête dans le plan commun de 2 autres, a son vecteur de la forme $\mathfrak{r}_1 - \lambda \mathfrak{r}_2$ (§ 4), les 2 systèmes suivants, qui s'établissent indépendemment l'un de l'autre; [mais dont nous faisons directement dans la fig. 6 coïncider les plans de jonction par l'arête π_2; il est en effet très facile de montrer que pour chacun de ces plans, les vecteurs de 3 quelconques des arêtes qui s'y trouvent, multiplié chacun par le facteur convenable, donnent une somme algébrique qui s'annule (§ 5)]:

1° en ajoutant π_2 à π_3, π_2 à π'_3, π_2 à π''_3, etc., successivement:

$$\begin{aligned} \pi_1^1 &\equiv 2\mu_1\mathfrak{r}_1 + \mu_2\mathfrak{r}_2 + \mu_3\mathfrak{r}_3 \\ \pi'_3 &\equiv 2\mu_1\mathfrak{r}_1 + \mu_2\mathfrak{r}_2 \\ \pi_1^2 &\equiv 3\mu_1\mathfrak{r}_1 + \mu_2\mathfrak{r}_2 + \mu_3\mathfrak{r}_3 \\ \pi''_3 &\equiv 3\mu_1\mathfrak{r}_1 + \mu_2\mathfrak{r}_2 \end{aligned}$$

etc.

2° en retranchant π_2 de π_3, π_2 de π_3^1, π_2 de π_3^2, etc., successivement:

$$\begin{aligned} \pi'_1 &\equiv \mu_2\mathfrak{r}_2 - \mu_3\mathfrak{r}_3 \\ \pi_3^1 &\equiv \mu_1\mathfrak{r}_1 + \mu_2\mathfrak{r}_2 - \mu_3\mathfrak{r}_3 \\ \pi''_1 &\equiv \mu_2\mathfrak{r}_2 - 2\mu_3\mathfrak{r}_3 \\ \pi_3^2 &\equiv \mu_1\mathfrak{r}_1 + \mu_2\mathfrak{r}_2 - 2\mu_3\mathfrak{r}_3 \end{aligned}$$

etc.

En mettant en ordre les résultats qui nous intéressent directement:

$$p_1^1 \equiv 2\nu_1 l_1 + \nu_2 l_2 + \nu_3 l_3$$
$$p_1^2 \equiv 3\nu_1 l_1 + \nu_2 l_2 + \nu_3 l_3$$
$$p_1^3 \equiv 4\nu_1 l_1 + \nu_2 l_2 + \nu_3 l_3$$
etc.

et : $$p_3^1 \equiv \nu_1 l_1 + \nu_2 l_2 - \nu_3 l_3$$
$$p_3^2 \equiv \nu_1 l_1 + \nu_2 l_2 - 2\nu_3 l_3$$
$$p_3^3 \equiv \nu_1 l_1 + \nu_2 l_2 - 3\nu_3 l_3$$
etc.

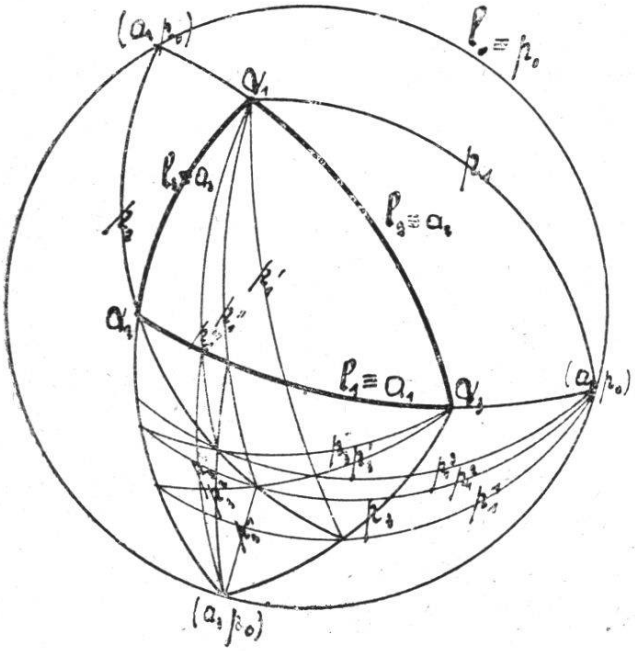


Fig. 6.

20. Nous obtenons donc par cette déduction zonale des faces du cristal, la face dont l'un des indices est le nombre *entier m* comme celle dont l'un des indices est le nombre *entier —m,* et cela sans changer leurs 2 autres indices. Evidemment le même procédé appliqué maintenant à ces 2 nouvelles faces, par rapport à l'un de leurs 2 indices encore unités, nous donnera de même la face quelconque qui a pour 2 de ses indices les valeurs entières m et n

$$\pi_1^1 \equiv 2\mu_1 \mathfrak{r}_1 + \mu_2 \mathfrak{r}_2 + \mu_3 \mathfrak{r}_3$$
$$\pi_1^2 \equiv 3\mu_1 \mathfrak{r}_1 + \mu_2 \mathfrak{r}_2 + \mu_3 \mathfrak{r}_3$$
$$\pi_1^3 \equiv 4\mu_1 \mathfrak{r}_1 + \mu_2 \mathfrak{r}_2 + \mu_3 \mathfrak{r}_3$$
etc.

et : $$\pi_3^1 \equiv \mu_1 \mathfrak{r}_1 + \mu_2 \mathfrak{r}_2 - \mu_3 \mathfrak{r}_3$$
$$\pi_3^2 \equiv \mu_1 \mathfrak{r}_1 + \mu_2 \mathfrak{r}_2 - 2\mu_3 \mathfrak{r}_3$$
$$\pi_3^3 \equiv \mu_1 \mathfrak{r}_1 + \mu_2 \mathfrak{r}_2 - 3\mu_3 \mathfrak{r}_3$$
etc.

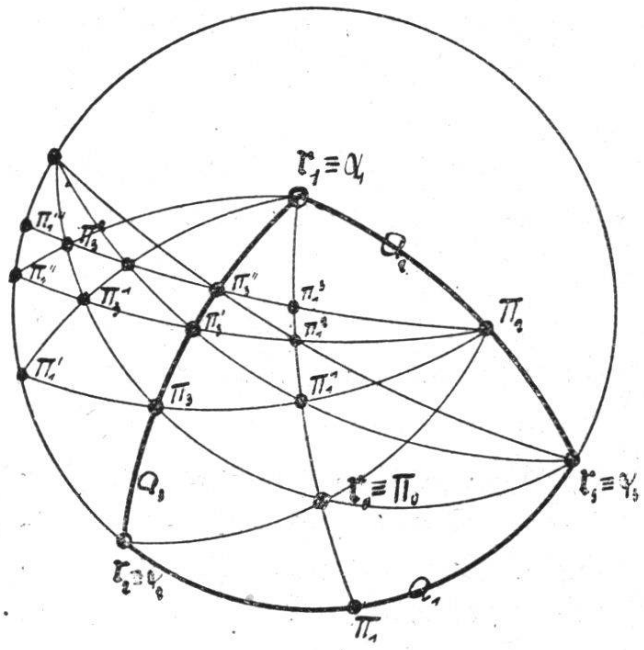


Fig. 6.

Nous obtenons donc par cette déduction zonale des arêtes du cristal, l'arête dont l'un des indices est le nombre *entier m,* comme celle dont l'un des indices est le nombre *entier —m,* et cela sans changer leurs 2 autres indices. Evidemment le même procédé appliqué maintenant à ces 2 nouvelles arêtes, par rapport à l'un de leurs 2 indices encore unités, nous donnera de même l'arête quelconque qui a pour 2 de ses indices les valeurs entières m et n

ou —m et —n. Enfin en le répétant encore pour le 3me indice unité restant, nous obtenons sans peine la face dont les 3 indices sont *entiers* quelconques *positifs* ou *négatifs*. D'une part donc, *toute* face d'indices entiers (positifs et négatifs) par rapport au système de référence des 4 faces données $\mathfrak{l}_0, \mathfrak{l}_1, \mathfrak{l}_2, \mathfrak{l}_3$, impliquée dans la déduction zonale qui a ces 4 faces pour point de départ, est impliquée par le fait dans le complexe des faces *possibles* du cristal.

D'autre part, toute face possible du cristal, que nous fournit la déduction zonale partant des 4 faces $\mathfrak{l}_0, \mathfrak{l}_1, \mathfrak{l}_2, \mathfrak{l}_3$, est une face d'indices *entiers* par rapport à ces faces. En effet supposons que $\mathfrak{l}_a, \mathfrak{l}_b, \mathfrak{l}_c, \mathfrak{l}_d$ soient les vecteurs de 4 faces d'indices a_i, b_i, c_i, d_i, obtenues par la construction du complexe. D'après le § 3, l'arête d'intersection des 2 premières est $\mathrm{V}\mathfrak{l}_a\mathfrak{l}_b$, et celle des 2 dernières $\mathrm{V}\mathfrak{l}_c\mathfrak{l}_d$, et la nouvelle face possible que déterminent ces 2 arêtes est leur produit vectoriel :

$$\mathrm{V}\mathrm{V}\mathfrak{l}_a\mathfrak{l}_b\mathrm{V}\mathfrak{l}_c\mathfrak{l}_d$$

qui s'écrit développé :

$$\mathfrak{l}_d\mathrm{V}\mathfrak{l}_a\mathfrak{l}_b.\mathfrak{l}_c - \mathfrak{l}_c\mathrm{V}\mathfrak{l}_a\mathfrak{l}_b.\mathfrak{l}_c$$

Chacun de ces vecteurs ayant la forme du premier :

$$\nu_1 d_1 \mathfrak{l}_1 + \nu_2 d_2 \mathfrak{l}_2 + \nu_3 d_3 \mathfrak{l}_3$$

ou —m et —n. Enfin en le répétant encore pour le 3me indice unité restant, nous obtenons sans peine l'arête dont les 3 indices sont *entiers* quelconques *positifs* ou *négatifs*. D'une part donc, *toute* arête d'indices entiers (positifs et négatifs) par rapport au système de référence des 4 arêtes données $\mathfrak{r}_0, \mathfrak{r}_1, \mathfrak{r}_2, \mathfrak{r}_3$, impliqué dans la déduction zonale qui a ces 4 arêtes pour point de départ, est impliquée par le fait dans le complexe des arêtes *possibles* du cristal.

D'autre part, toute arête possible du cristal, que nous fournit la déduction zonale partant des 4 arêtes $\mathfrak{r}_0, \mathfrak{r}_1\ \mathfrak{r}_2\ \mathfrak{r}_3$, est une arête d'indices *entiers* par rapport à ces 4 arêtes. En effet supposons que $\mathfrak{r}_a, \mathfrak{r}_b, \mathfrak{r}_c, \mathfrak{r}_d$ soient les vecteurs de 4 arêtes d'indices a_i, b_i, c_i, d_i, obtenues par la construction du complexe. D'après le § 3, la face de jonction des 2 premières est $\mathrm{V}\mathfrak{r}_a\mathfrak{r}_b$, et celle des 2 dernières $\mathrm{V}\mathfrak{r}_c\mathfrak{r}_d$, et la nouvelle arête possible que déterminent ces 2 faces est leur produit vectoriel :

$$\mathrm{V}\mathrm{V}\mathfrak{r}_a\mathfrak{r}_b\mathrm{V}\mathfrak{r}_c\mathfrak{r}_d$$

qui s'écrit développé :

$$\mathfrak{r}_d\mathrm{V}\mathfrak{r}_a\mathfrak{r}_b.\mathfrak{r}_c - \mathfrak{r}_c\mathrm{V}\mathfrak{r}_a\mathfrak{r}_b\mathfrak{r}_d$$

Chacun de ces vecteurs ayant la forme du premier :

$$\mu_1 d_1 \mathfrak{r}_1 + \mu_2 d_2 \mathfrak{r}_2 + \mu_3 d_3 \mathfrak{r}_3$$

les 2 produits scalaires $\mathfrak{l}_d \vee \mathfrak{l}_a \mathfrak{l}_b$ et $\mathfrak{l}_c \vee \mathfrak{l}_a \mathfrak{l}_b$ se calculent sans peine, et en se servant d'une abréviation toute naturelle pour écrire les déterminants, se réduisent aux 2 expressions :

$$\nu_1 \nu_2 \nu_3 |abd| \mathfrak{l}_1 \vee \mathfrak{l}_2 \mathfrak{l}_3$$

$$\nu_1 \nu_2 \nu_3 |abc| \mathfrak{l}_1 \vee \mathfrak{l}_2 \mathfrak{l}_3$$

En négligeant le facteur constant $\nu_1 \nu_2 \nu_3 \mathfrak{l}_1 \vee \mathfrak{l}_2 \mathfrak{l}_3$, le vecteur que représente le produit vectoriel cherché, tout en déterminant quand même la même face, s'écrit très simplement :

$$|abd| \mathfrak{l}_c - |abc| \mathfrak{l}_d$$

ou : $$p.\mathfrak{l}_c - r.\mathfrak{l}_d$$

Si les indices des 4 faces données sont entiers, il en est de même pour les déterminants de valeur p et r et donc pour les indices de la nouvelle face qui sont :

$$pc_1 - rd_1,\ pc_2 - rd_2,\ pc_3 - rd_3$$

Or les 4 faces qui servent de point de départ à toute la construction zonale, ont les indices entiers :

111, 100, 010, 001

Il en est donc de même pour toutes les faces déduites, c'est-à-dire pour *toute* face *possible* du cristal.

les 2 produits scalaires $\mathfrak{r}_d \vee \mathfrak{r}^a \mathfrak{r}_b$ et $\mathfrak{r}_c \vee \mathfrak{r}_a \mathfrak{r}_b$ se calculent sans peine, et en se servant d'une abréviation toute naturelle pour écrire les déterminants, se réduisent aux 2 expressions :

$$\mu_1 \mu_2 \mu_3 |abd| \mathfrak{r}_1 \vee \mathfrak{r}_2 \mathfrak{r}_3$$

$$\mu_1 \mu_2 \mu_3 |abc| \mathfrak{r}_1 \vee \mathfrak{r}_2 \mathfrak{r}_3$$

En négligeant le facteur constant $\mu_1 \mu_2 \mu_3 \mathfrak{r}_1 \vee \mathfrak{r}_2 \mathfrak{r}_3$, le vecteur que représente le produit vectoriel cherché, tout en déterminant quand même la même arête, s'écrit très simplement :

$$|abd| \mathfrak{r}_c - |abc| \mathfrak{r}_d$$

ou : $$\pi.\mathfrak{r}_c - \varrho.\mathfrak{r}_d$$

Si les indices des 4 arêtes données sont entiers, il en est de même pour les déterminants de valeur π et ϱ et donc pour les indices de la nouvelle arête qui sont :

$$\pi c_1 - \varrho d_1,\ \pi c_2 - \varrho d_2,\ \pi c_3 - \varrho d_3$$

Or les 4 arêtes qui servent de point de départ à toute la construction zonale, ont les indices entiers :

111, 100, 010, 001

Il en est donc de même pour toutes les arêtes déduites, c'est-à-dire pour *toute* arête *possible* du cristal.

21. Ainsi chaque face dont les indices sont entiers est une face

Ainsi chaque arête dont les indices sont entiers est une arête

du complexe cristallin et chaque face de ce complexe est une face dont les indices sont entiers. *Toutes* et *seules* les faces *possibles* du cristal sont donc des faces à indices entiers ; ou en d'autres termes, par le centre O de notre sphère de rayon-unité, le complexe des faces à indices entiers par rapport au système de référence que constituent les 4 faces lui servant de point de départ est *identique* au complexe des faces possibles du cristal.

du complexe cristallin et chaque arête de ce complexe est une arête dont les indices sont entiers. *Toutes* et *seules* les arêtes *possibles* du cristal sont donc des arêtes à indices entiers ; ou en d'autres termes, par le centre O de notre sphère de rayon-unité, le complexe des arêtes à indices entiers par rapport au système de référence que constituent les 4 arêtes lui servant de point de départ, est *identique* au complexe des arêtes possibles du cristal.

Le produit de la fusion des 2 lois expérimentales du cristal, lois des zones et de la constance des angles, est donc la loi mathématique de la *rationnalité* des indices, qui, bien que difficilement confirmable par l'expérience, n'en est pas moins la loi à la base de la cristallographie : les faces et arêtes à indices *entiers* sont les seules faces et arêtes *possibles* du cristal.

L'ensemble des droites sphériques correspondantes aux faces du complexe zonalement déduites, constitue l'extension donnée par M. Daniëls du réseau de Möbius aux droites sphériques

L'ensemble des points sur la sphère correspondants aux arêtes du complexe zonalement déduites, constitue le *réseau* de Möbius, et Möbius appelle ces droites et ces points ou les faces et arêtes correspondantes

géométriquement déductibles des 4 faces ou arêtes données et énonce ainsi la loi des zones : toute face et arête géométriquement déductible des 4 faces ou arêtes cristallines données est une face ou une arête également possible du cristal.

Naturellement quoique les indices que nous venons d'établir de chaque face ou arête du complexe cristallin, soient entiers, comme un multiple positif quelconque de leurs valeurs détermine la même face et la même arête, il est inutile même de faire remarquer que toutes les valeurs quelconques ayant entre elles les mêmes rapports que les 3 nombres entiers représentant les indices donnés, sont également les indices de la face ou de l'arête déterminée et il serait plus exact de formuler ainsi la loi établie : toutes les faces et arêtes dont les indices se réduisent à des rapports de nombre *rationnels* sont des faces et arêtes possibles du cristal.

Möbius appelle arithmétiquement déductible de 4 faces ou arêtes données toute face ou arête dont les rapports correspondants $OE_i : OH_i$ ou $OK_i : OD_i$ sont des valeurs rationnelles et exprime ainsi la loi de la rationnalité des indices : toute face et arête arithmétiquement déductible de 4 faces ou arêtes cristallines données, est une face ou une arête également possible du cristal.

22. Enfin de la considération du complexe total des faces possibles du cristal que nous venons de construire, nous avons encore immédiatement les conclusions suivantes. Puisque ce complexe des faces possibles reste évidemment *identique* à lui-même, quelles que soient les 4 de ses faces choisies comme point de départ pour sa déduction zonale, il reste également le complexe des faces dont les indices sont *entiers, quelles que soient* les faces fondamentales ou la face-unité auxquelles on le rapporte. Donc pour tout changement de ces faces fondamentales ou unité, non seulement les indices des faces restent entiers, mais encore ils restent *les mêmes,* quoique affectant des faces différentes, puisqu'ils sont dans chaque cas toutes les combinaisons possibles des nombres entiers positifs et négatifs.

Enfin de la considération du complexe total des arêtes possibles du cristal que nous venons de construire, nous avons encore immédiatement les conclusions suivantes. Puisque ce complexe des arêtes possibles reste évidemment *identique* à lui-même, quelles que soient les 4 de ses arêtes choisies comme point de départ pour sa déduction zonale, il reste également le complexe des arêtes dont les indices sont *entiers, quelles que soient* les arêtes fondamentales ou l'arête-unité auxquelles on le rapporte. Donc pour tout changement de ces arêtes fondamentales ou unité, non seulement les indices des arêtes restent entiers, mais encore ils restent *les mêmes,* quoique affectant des arêtes différentes, puisqu'ils sont dans chaque cas toutes les combinaisons possibles des nombres entiers positifs et négatifs.

CHAPITRE V

23. Reprenons maintenant les premiers éléments que nous fournit la construction zonale du complexe des *faces* cristallines, des 4 faces données pour son point de départ.

Les 3 faces possibles, tautozonales aux arêtes fondamentales (fig. 7) :

$$\mathfrak{p}_1 \equiv \nu_2 \mathfrak{l}_2 + \nu_3 \mathfrak{l}_3$$
$$\mathfrak{p}_2 \equiv \nu_3 \mathfrak{l}_3 + \nu_1 \mathfrak{l}_1$$
$$\mathfrak{p}_3 \equiv \nu_1 \mathfrak{l}_1 + \nu_2 \mathfrak{l}_2$$

donnent par leur intersection deux à deux, les 3 nouvelles faces possibles, tautozonales aux mêmes arêtes :

$$\mathfrak{p}'_1 \equiv \nu_2 \mathfrak{l}_2 - \nu_3 \mathfrak{l}_3$$
$$\mathfrak{p}'_2 \equiv \nu_3 \mathfrak{l}_3 - \nu_1 \mathfrak{l}_1$$
$$\mathfrak{p}'_3 \equiv \nu_1 \mathfrak{l}_1 - \nu_2 \mathfrak{l}_2$$

et formant avec les premières, les valeurs $-\frac{\nu_3}{\nu_2} : \frac{\nu_3}{\nu_2}, -\frac{\nu_1}{\nu_3} : \frac{\nu_1}{\nu_3}, -\frac{\nu_2}{\nu_1} : \frac{\nu_2}{\nu_1}$ étant égales à -1, (§ 4 et 6) 3 couples de faces *harmoniquement* conjuguées par rapport au couple correspondant de faces fondamentales. Leur intersection *commune* $\pi_0 \equiv \mathfrak{r}_0$, puisque la somme

Reprenons maintenant les premiers éléments que nous fournit la déduction zonale du complexe des *arêtes* cristallines, des 4 arêtes données pour son point de départ.

Les 3 arêtes possibles, coplanaires aux faces fondamentales (fig. 7) :

$$\pi_1 \equiv \mu_2 \mathfrak{r}_2 + \mu_3 \mathfrak{r}_3$$
$$\pi_2 \equiv \mu_3 \mathfrak{r}_3 + \mu_1 \mathfrak{r}_1$$
$$\pi_3 \equiv \mu_1 \mathfrak{r}_1 + \mu_2 \mathfrak{r}_2$$

donnent par leur plan de jonction deux à deux, les 3 nouvelles arêtes possibles, coplanaires aux mêmes faces :

$$\pi'_1 \equiv \mu_2 \mathfrak{r}_2 - \mu_3 \mathfrak{r}_3$$
$$\pi'_2 \equiv \mu_3 \mathfrak{r}_3 - \mu_1 \mathfrak{r}_1$$
$$\pi'_3 \equiv \mu_1 \mathfrak{r}_1 - \mu_2 \mathfrak{r}_2$$

et formant avec les premières, les valeurs $-\frac{\mu_3}{\mu_2} : \frac{\mu_3}{\mu_2}, -\frac{\mu_1}{\mu_3} : \frac{\mu_1}{\mu_3}, -\frac{\mu_2}{\mu_1} : \frac{\mu_2}{\mu_1}$, étant égales à -1, (§ 4 et 6), 3 couples d'arêtes *harmoniquement* conjuguées par rapport au couple correspondant d'arêtes fondamentales. Leur plan de jonction *commun* $\mathfrak{p}_0 \equiv \mathfrak{l}_0$, puisque la somme

de leurs vecteurs est nulle, est donc encore une arête *possible* du cristal, déterminant ainsi conjointement avec la face-unité un fai-

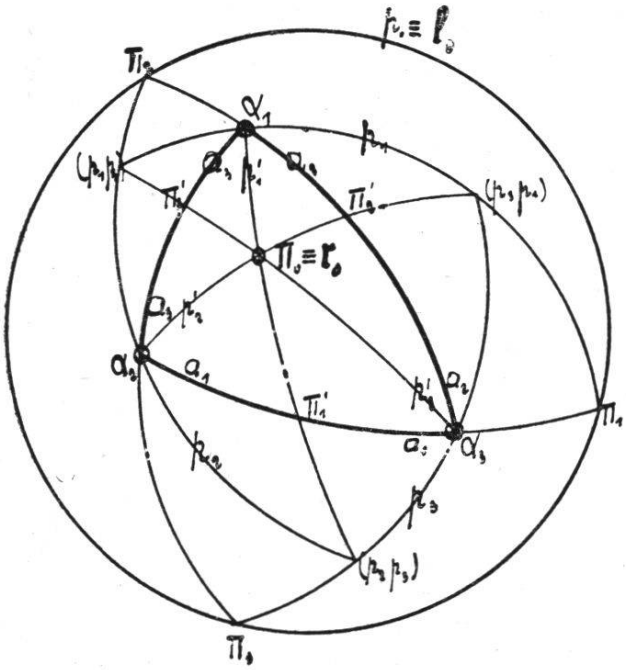


Fig. 7.

sceau harmonique de *faces* par chaque arête fondamentale :

$$(a_2 a_3 p_1 p'_1) = -1$$
$$(a_3 a_1 p_2 p'_2) = -1$$
$$(a_1 a_2 p_3 p'_3) = -1$$

et par le fait, (§ 7) un faisceau harmonique d'*arêtes* sur chaque face fondamentale :

$$(\alpha_2 \alpha_3 \pi_1 \pi'_1) = -1$$
$$(\alpha_3 \alpha_1 \pi_2 \pi'_2) = -1$$
$$(\alpha_1 \alpha_2 \pi_3 \pi'_3) = -1$$

Nous appellerons simplement cette arête, dont le point sur la sphère est le pôle trilinéaire de la droite sphérique correspondante à la face-unité, l'*arête harmonique* de cette même face-unité.

de leurs vecteurs est nulle, est donc encore une face *possible* du cristal, déterminant ainsi conjointement avec l'arête-unité un fai-

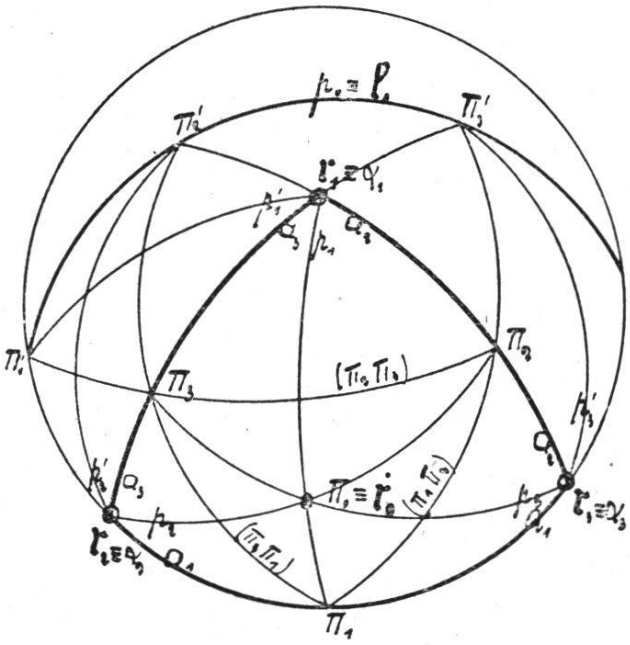


Fig. 7.

sceau harmonique d'*arêtes* sur chaque face fondamentale :

$$(\alpha_2 \alpha_3 \pi_1 \pi'_1) = -1$$
$$(\alpha_3 \alpha_1 \pi_2 \pi'_2) = -1$$
$$(\alpha_1 \alpha_2 \pi_3 \pi'_3) = -1$$

et par le fait, (§ 7) un faisceau harmonique de *faces* par chaque arête fondamentale :

$$(a_2 a_3 p_1 p'_1) = -1$$
$$(a_3 a_1 p_2 p'_2) = -1$$
$$(a_1 a_2 p_3 p'_3) = -1$$

Nous appellerons simplement cette face, dont la droite sphérique correspondante est la polaire trilinéaire du point déterminé sur la sphère par l'arête-unité, la *face harmonique* de cette même arête-unité.

24. Son vecteur est le produit vectoriel de 2 quelconques des vecteurs des 3 faces qui la déterminent :

$$V(\nu_2 \mathfrak{l}_2 - \nu_3 \mathfrak{l}_3)(\nu_3 \mathfrak{l}_3 - \nu_1 \mathfrak{l}_1) =$$

$$\nu_2\nu_3 \sin A_2 \mathfrak{r}_1 + \nu_3\nu_1 \sin A_2 \mathfrak{r}_2 + \nu_1\nu_2 \sin A_3 \mathfrak{r}_3$$

En divisant par le facteur constant $\nu_1\nu_2\nu_3$, le vecteur obtenu représente encore la même arête :

$$\frac{\sin A_1}{\nu_1}\mathfrak{r}_1 + \frac{\sin A_2}{\nu_2}\mathfrak{r}_2 + \frac{\sin A_3}{\nu_3}\mathfrak{r}_3$$

et ses indices sont les quotients des tenseurs de ses composantes par les constantes μ_i :

$$\frac{\sin A_1}{\mu_1\nu_1}, \frac{\sin A_2}{\mu_2\nu_2}, \frac{\sin A_3}{\mu_3\nu_3}$$

Son vecteur est le produit vectoriel de 2 quelconque des vecteurs des 3 arêtes qui la déterminent :

$$V(\mu_2 \mathfrak{r}_2 - \mu_3 \mathfrak{r}_3)(\mu_3 \mathfrak{r}_3 - \mu_1 \mathfrak{r}_1) =$$

$$\mu_2\mu_3 \sin a_1 \mathfrak{l}_1 + \mu_3\mu_1 \sin a_2 \mathfrak{l}_2 + \mu_1\mu_2 \sin a_3 \mathfrak{l}_3$$

En divisant par le facteur constant $\frac{\mu_1\mu_2\mu_3}{M}$*, le vecteur obtenu représente encore la même face :

$$\frac{\sin A_1}{\mu_1}\mathfrak{l}_1 + \frac{\sin A_2}{\mu_2}\mathfrak{l}_2 + \frac{\sin A_3}{\mu_3}\mathfrak{l}_3$$

et ses indices sont les quotients des tenseurs de ses composantes par les constantes ν'_i :

$$\frac{\sin A_1}{\mu_1\nu_1}, \frac{\sin A_2}{\mu_2\nu_2}, \frac{\sin A_3}{\mu_3\nu_3}$$

Or jusqu'ici nous n'avons encore établi aucune relation, entre la face et l'arête-*unités*, c'est-à-dire entre les constantes μ_i et ν_i déterminant leurs vecteurs, et pourtant il nous faut une dépendance fixe entre ces 2 éléments, si nous voulons donner un sens précis aux relations qui lient entre elles les faces et les arêtes constituant le complexe du cristal.

La *face-unité* étant l'une quelconque des faces du cristal, nous choisissons dorénavant comme *arête-unité*, son arête *harmonique*, c'est-à-dire nous posons dorénavant entre les constantes μ_i et ν_i les relations qui suivent :

L'*arête-unité* étant l'une quelconque des arêtes du cristal, nous choisissons dorénavant comme *face-unité* sa face *harmonique*, c'est-à-dire nous posons dorénavant entre les constantes μ_i et ν_i les relations qui suivent :

$$\mu_1\nu_1 = \sin A_1, \ \mu_2\nu_2 = \sin A_2, \ \mu_3\nu_3 = \sin A_3. \qquad (10)$$

25. Dans ce cas, la relation du § 13 :

$$OE_1 : OE_2 : OE_3 = \frac{1}{\nu_1 \sin h_1} : \frac{1}{\nu_2 \sin h_2} : \frac{1}{\nu_3 \sin h_3}$$

---

* M étant module $\frac{\sin A_i}{\sin a_i}$ du triangle de référence.

qui nous donne les longueurs interccptées sur les arêtes fondamentales (ou les *axes*) par la face-unité, devient immédiatement, si nous tenons compte que $\sin A_i \sin h_i = \Delta =$ constante, et de la relation (7) correspondante pour l'arête-unité :

$$OE_1 : OE_2 : OE_3 = \mu_1 : \mu_2 : \mu_3 = OD_1 : OD_2 : OD_3 \qquad (11)$$

Si donc nous prenons comme arête-unité, l'harmonique de la face-unité, ses composantes OD_i sont les segments interceptés sur les axes par la face-unité déplacée parallèlement à elle-même, et celle-ci donnée, nous obtenons directement cette arête harmonique :

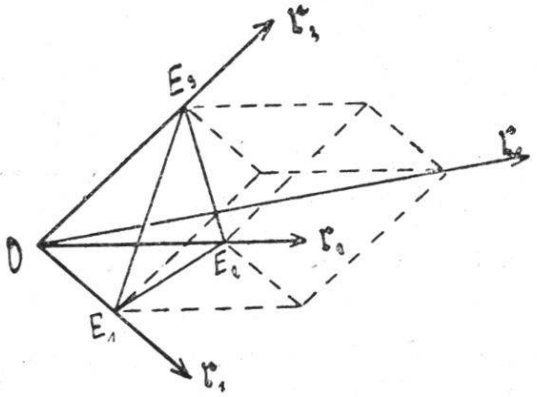


Fig. 8.

Elle est la diagonale principale du parallèlipipède construit sur les *3 axes-unités* comme arêtes.

Si donc nous prenons comme face-unité, l'harmonique de l'arête-unité, les segments OE_i qu'elle intercepte sur les axes sont les composantes de l'arête-unité, et celle-ci donnée, nous obtenons directement cette face harmonique :

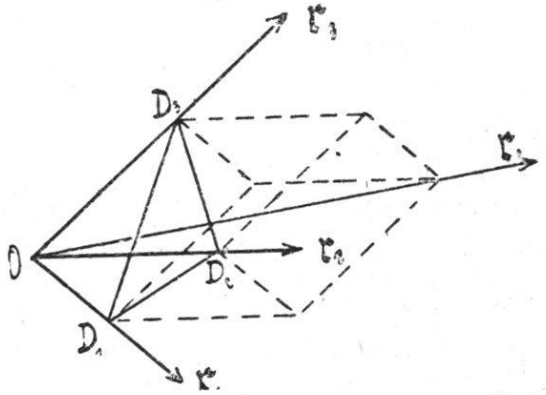


Fig. 8.

Elle est le plan diagonal $(D_1D_2D_3)$ du parallélipipède construit sur les composantes OD_i comme arêtes.

26. Cette relation posée des $\mu_i \nu_i = \sin A_i$ établit d'ailleurs, pour le cas général, entre les longueurs OH_i des segments qu'intercepte la face d'indices u_i sur les arêtes fondamentales, et les composantes OK_i de l'arête d'indices x_i, plus de symétrie qu'il n'y en avait jusqu'ici :

$$OH_1 : OH_2 : OH_3 = \frac{\mu_1}{u_1} : \frac{\mu_2}{u_2} : \frac{\mu_3}{u_3}$$

$$OK_1 : OK_2 : OK_3 = \mu_1 x_1 : \mu_2 x_2 : \mu_3 x_3$$

Les rapports des indices de cette face et de cette arête deviennent : (§ 14).

$$u_1 : u_2 : u_3 = \mu_1 \cos \vartheta_1 : \mu_2 \cos \vartheta_2 : \mu_3 \cos \vartheta_3$$
$$x_1 : x_2 : x_3 = \nu_1 \cos \vartheta_1 : \nu_2 \cos \vartheta_2 : \nu_3 \cos \vartheta_3 \qquad (12)$$

et enfin l'équation du § 16 :

$$\mu_1\nu_1 \sin h_1 . x_1u_1 + \mu_2\nu_2 \sin h_2 . x_2u_2 + \mu_3\nu_3 \sin h_3 . x_3u_3 = o$$

prend immédiatement la forme simple et élégante :

$$x_1u_1 + x_2u_2 + x_3u_3 = o$$

Toute combinaison de valeurs *entières* des indices u_i satisfaisant cette relation, représente une face parallèle à l'arête x_i ; c'est donc là sous sa forme définitive, l'*équation* de cette arête du cristal.

$$\mu_1\nu_1 \sin h_1 . u_1x_1 + \mu_2\nu_2 \sin h_2 . u_2x_2 + \mu_3\nu_3 \sin h_3 \; u_3x_3 = o$$

prend immédiatement la forme simple et élégante :

$$u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3 = o \qquad (13)$$

Toute combinaison de valeurs *entières* des indices x_i satisfaisant cette relation, représente une arête parallèle à la face u_i ; c'est donc là sous sa forme définitive l'*équation* de cette face du cristal.

27. La face-unité peut être une face quelconque du cristal. Toute face du cristal, pouvant donc être prise comme face-unité, a par conséquent son arête harmonique *possible*, et construisible par le procédé de la fig. 8, et, puisque, dans ce cas, les longueurs OH_i interceptées par la face et les composantes OK_i de l'arête, sur les axes sont *égales* (11) :

$$\frac{\mu_1}{u_1} : \frac{\mu_2}{u_2} : \frac{\mu_3}{u_3} = \mu_1x_1 : \mu_2x_2 : \mu_3x_3$$

et donc :

$$u_1 : u_2 : u_3 = \frac{1}{x_1} : \frac{1}{x_2} : \frac{1}{x_3}$$

c'est-à-dire que les indices d'une face quelconque du cristal sont les valeurs *inverses* de ceux de son arête harmonique.

L'arête-unité peut être une arête quelconque du cristal. Toute arête du cristal, pouvant donc être prise comme arête-unité, a par conséquent sa face harmonique *possible*, et construisible par le procédé de de la fig. 8, et, puisque, dans ce cas, les composantes OK_i de l'arête et les longueurs OH_i interceptées par la face, sur les axes sont *égales* (11) :

$$\mu_1x_1 : \mu_2x_2 : \mu_3x_3 = \frac{\mu_1}{u_1} : \frac{\mu_2}{u_2} : \frac{\mu_3}{u_3}$$

et donc :

$$x_1 : x_2 : x_3 = \frac{1}{u_1} : \frac{1}{u_2} : \frac{1}{u_3}$$

c'est-à-dire que les indices d'une arête quelconque du cristal sont les valeurs *inverses* de ceux de sa face harmonique.

27 bis. Remarquons encore que si nous appelons les 4 faces $\mathfrak{l}_0, \mathfrak{l}_1, \mathfrak{l}_2, \mathfrak{l}_3$, déterminant le complexe des faces, et les 4 arêtes $\mathfrak{r}_0, \mathfrak{r}_1, \mathfrak{r}_2, \mathfrak{r}_3$, déterminant celui des arêtes, les 4 faces et arêtes *élémentaires* du cristal, l'un quelconque de ces 2 systèmes est maintenant complètement connu dès que l'autre est donné. Les arêtes fondamentales sont en effet les intersections des faces fondamentales, l'arête-unité est l'harmonique de la face-unité, et réciproquement. Par le fait, *soit* les valeurs :

> $\sin A_1$. $\sin A_2$, $\sin A_3$ avec celles des rapports $\nu_1 : \nu_2 : \nu_3$ déterminant le système des faces élémentaires,

soit les valeurs :

> $\sin a_1$, $\sin a_2$, $\sin a_3$, avec celles des rapports $\mu_1 : \mu_2 : \mu_3$ déterminant celui des arêtes élémentaires,

déterminent à elles seules le système *complet* de référence du complexe cristallin, et pour cette raison, constituent les unes et les autres au même titre, les *éléments* du cristal.

CHAPITRE VI

28. Le vecteur :

$$\nu_1 u_1 \mathfrak{l}_1 + \nu_2 u_2 \mathfrak{l} + \nu_3 u_3 \mathfrak{l}_3$$

n'est pas en général un vecteur-unité. Pour en trouver la valeur absolue que nous appelons u_4, nous élevons au carré les 2 membres de l'équation :

$$u_4 \mathfrak{l} = \nu_1 u_1 \mathfrak{l}_1 + \nu_2 u_2 \mathfrak{l}_2 + \nu_3 u_3 \mathfrak{l}_3$$

Nous obtenons ainsi, selon les règles du produit scalaire, la forme quadratique suivante :

$$u_4^2 =. \nu_1^2, u_1^2, + \nu_2^2 u_2^2 + \nu_3^2 u_3^2$$
$$+ 2\nu_1\nu_2 u_1 u_2 \cos A_{12} + 2\,\nu_2\nu_3 \ldots\ldots\ldots$$

qui peut s'écrire, si nous posons par abréviation :

$$\Omega_{ki} \equiv \nu_i \nu_k \cos A_{ik} \equiv \Omega_{ik}.$$

$$u_4^2 = \Omega_{11} u_1^2 + \Omega_{22} u_2^2 + \Omega_{33} u_3^2$$
$$+ 2\Omega_{12} u_1 u_2 + 2\Omega_{23} u_2 u_3 + 2\Omega_{31} u_3 u_1$$

ou plus brièvement encore :

$$u_4^2 = \Omega(u_1 u_2 u_3) \equiv \Omega(uu)$$

Les expressions :

$$\Omega_{11} u_1 + \Omega_{12} u_2 + \Omega_{13} u_3 \equiv \Omega'(u_1)$$
$$\Omega_{12} u_1 + \Omega_{22} u_2 + \Omega_{23} u_3 \equiv \Omega'(u_2)$$
$$\Omega_{13} u_1 + \Omega_{23} u_2 + \Omega_{33} u_3 \equiv \Omega'(u_3)$$

Le vecteur :

$$\mu_1 x_1 \mathfrak{r}_1 + \mu_2 x_2 \mathfrak{r}_2 + \mu_3 x_3 \mathfrak{r}_3$$

n'est pas en général un vecteur-unité. Pour en trouver la valeur absolue que nous appelons x_4, nous élevons au carré, les 2 membres de l'équation :

$$x_4 \mathfrak{r} = \mu_1 x_1 \mathfrak{r}_1 + \mu_2 x_2 \mathfrak{r}_2 + \mu_3 x_3 \mathfrak{r}_3$$

Nous obtenons ainsi, selon les règles du produit scalaire, la forme quadratique suivante :

$$x_4^2 = \mu_1^2 x_1^2 + \mu_2^2 x_2^2 + \mu_3^2 x_3^2$$
$$+ 2\,\mu_1\mu_2 x_1 x_2 \cos a_{12} + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

qui peut s'écrire, si nous posons par abréviation :

$$\omega_{ki} \equiv \mu_i \mu_k \cos a_{ik} \equiv \omega_{ik}.$$

$$x_4^2 = \omega_{11} x_1^2 + \omega_{22} x_2^2 + \omega_{33} x_3^2$$
$$+ 2\omega_{12} x_1 x_2 + 2\omega_{23} x_2 x_3 + 2\omega_{31} x_3 x_1$$

ou plus brièvement encore :

$$x_4^2 = \omega(x_1 x_2 x_3) \equiv \omega(xx).$$

Les expressions :

$$\omega_{11} x_1 + \omega_{12} x_2 + \omega_{13} x_3 \equiv \omega,(x_1)$$
$$\omega_{12} x_1 + \omega_{22} x_2 + \omega_{23} x_3 \equiv \omega'(x_2)$$
$$\omega_{13} x_1 + \omega_{23} x_2 + \omega_{33} x_3 \equiv \omega'(x_3)$$

sont les demi-dérivées partielles de la forme par rapport à u_1, u_2, u_3, et nous donnent pour sa valeur l'identité suivante :

$$\Omega(uu) \equiv u_1 \Omega'(u_1) + u_2 \Omega'(u_2) + u_3 \Omega'(u_3)$$

Si nous divisons maintenant notre vecteur :

$$\nu_1 u_1 \mathfrak{l}_1 + \nu_2 u_2 \mathfrak{l}_2 + \nu_3 u_3 \mathfrak{l}_3$$

par la valeur $\pm\sqrt{\Omega(uu)}$, nous en faisons les vecteurs-*unités* des 2 faces possibles, opposées et parallèles dont les indices sont u_i par rapport au système de référence des 4 faces données $\mathfrak{l}_0, \mathfrak{l}_1, \mathfrak{l}_2, \mathfrak{l}_3$.

sont les demi-dérivées partielles de la forme par rapport à x_1, x_2, x_3, et nous donnent pour sa valeur l'identité suivante :

$$\omega(xx) \equiv x_1 \omega'(x_1) + x_2 \omega'(x_2) + x_3 \omega'(x_3)$$

Si nous divisons maintenant notre vecteur :

$$\mu_1 x_1 \mathfrak{r}_1 + \mu_2 x_2 \mathfrak{r}_2 + \mu_3 x_3 \mathfrak{r}_3$$

par la valeur $\pm\sqrt{\omega(xx)}$, nous en faisons les vecteurs-*unités* des 2 arêtes possibles, opposées et parallèles, dont les indices sont x_i par rapport au système de référence des 4 arêtes données $\mathfrak{r}_0, \mathfrak{r}_1, \mathfrak{r}_2, \mathfrak{r}_3$.

29. Connaissant maintenant les tenseurs des vecteurs de la face d'indices u_i et de l'arête d'indices x_i, nous reprenons les résultats, établis au début, des § 2, 3, 4, 5 et 6, exprimés alors directement en vecteurs-*unités* des faces et des arêtes et cherchons ce qu'ils deviennent pour les valeurs absolues quelconques u_4 et x_4 de ces vecteurs, et comment ils s'expriment en fonction de leurs indices.

L'*angle* φ de 2 faces données d'indices entiers u_i et u'_i :

$$u_4 \mathfrak{l} = \nu_1 u_1 \mathfrak{l}_1 + \nu_2 u_2 \mathfrak{l}_2 + \nu_3 u_3 \mathfrak{l}_3$$
$$u'_4 \mathfrak{l}' = \nu_1 u'_1 \mathfrak{l}_1 + \nu_2 u'_2 \mathfrak{l}_2 + \nu_3 u'_3 \mathfrak{l}_3$$

est donc immédiatement fourni par le produit scalaire de leurs vecteurs, pour lequel nous obtenons ;

$$\nu_1^2 u_1 u'_1 + \nu_2^2 u_2 u'_2 + \nu_3^2 u_3 u'_3$$
$$+ \nu_1 \nu_2 \cos A_{12}(u_1 u'_2 + u_2 u'_1) + \ldots\ldots$$

ce qui peut s'écrire, en utilisant les abréviations du paragraphe précédent :

$${}_{11} u_1 u'_1 + \Omega_{22} u_2 u'_2 + \Omega_{23} u_3 u'_3$$
$$+ \ {}_{12}(u_1 u'_2 + u_2 u'_1) + \ldots\ldots\ldots$$

L'*angle* ψ de 2 arêtes données d'indices x entiers x_i et x'_i :

$$x_4 \mathfrak{r} = \mu_1 x_1 \mathfrak{r}_1 + \mu_2 x_2 \mathfrak{r}_2 + \mu_3 x_3 \mathfrak{r}_3$$
$$x'_4 \mathfrak{r}' = \mu_1 x'_1 \mathfrak{r}_1 + \mu_2 x'_2 \mathfrak{r}_3 + \mu_3 x'_{33} \mathfrak{r}$$

est donc immédiatement fourni par le produit scalaire de leurs vecteurs, pour lequel nous obtenons :

$$\mu_1^2 x_1 x'_1 + \mu_2^2 x_2 x'_2 + \mu_3^2 x_3 x'_3$$
$$+ \mu_1 \mu_2 \cos a_{12}(x_1 x'_2 + x_2 x'_1) + \ldots\ldots$$

ce qui peut s'écrire, en utilisant les abréviations du paragraphe précédent :

$$\omega_{11} x_1 x'_1 + \omega_{22} x_2 x'_2 + \omega_{33} x_3 x'_3$$
$$+ \omega_{12}(x_1 x'_2 + x_2 x'_1) + \ldots\ldots\ldots$$

et par analogie avec la forme $\Omega(uu)$ et son expression en fonction de ses demi-dérivées partielles, plus simplement encore :

$$\Omega(uu') \equiv \Omega(u'u)$$

$$\text{ou} : = u_1\Omega(u_1') + u_2\Omega(u_2') + u_3\Omega(u_3')$$
$$= u_1'\Omega(u_1) + u_2'\Omega(u_2) + u_3'\Omega(u_1)$$

les u_i et les u_i' jouant un rôle parfaitement symétrique dans ce produit que nous venons d'obtenir.

Si nous tenons compte des tenseurs :

$$u_4 = \sqrt{\Omega(uu)} \text{ et } u_4' = \sqrt{\Omega(u'u')}$$

nous avons donc directement en fonction des indices :

$$\cos\varphi = \frac{\Omega(uu')}{\sqrt{\Omega(uu)\Omega(u'u')}} \qquad (14)$$

et par analogie avec la forme $\omega(xx)$ et son expression en fonction de ses demi-dérivées partielles, plus simplement encore :

$$\omega(xx') \equiv \omega(x'x)$$

$$\text{ou} : = x_1\omega(x_1') + x_2\omega(x_2') + x_3\omega(x_3')$$
$$= x_1'\omega(x_1) + x_2'\omega(x_2) + x_3'\omega(x_3)$$

les x_i et les x_i' jouant un rôle parfaitement symétrique dans ce produit que nous venons d'obtenir,

Si nous tenons compte des tenseurs :

$$x_4 = \sqrt{\omega(xx)} \text{ et } x_4' = \sqrt{\omega(x'x')}$$

nous avons donc directement en fonction des indices :

$$\cos\psi = \frac{\omega(xx')}{\sqrt{\omega(xx)\omega(x'x')}} \qquad (14$$

30. L'angle d'*incidence* ϑ de l'arête :

$$\mu_1 x_1 \mathfrak{r}_1 + \mu_2 x_2 \mathfrak{r}_2 + \mu_3 x_3 \mathfrak{r}_3$$

par rapport à la face :

$$\nu_1 u_1 \mathfrak{l}_1 + \nu_2 u_2 \mathfrak{l}_2 + \nu_3 u_3 \mathfrak{l}_3$$

est également donné par la multiplication scalaire des 2 vecteurs (§ 2), pour laquelle nous trouvons d'abord :

$$\mu_1\nu_1 \sin h_1 \,.\, x_1u_1 + \mu_2\nu_2 \sin h_2 \,.\, x_2u_2 + \mu_3\nu_3 \sin h_3 \,.\, x_3u_3$$

et ensuite, par le fait toujours des relations :

$$\mu_i\nu_i = \sin A_i \qquad \text{et} \qquad \sin A_i \sin h_i = \Delta.$$

$$\sin A_i \sin h_i (x_1u_1 + x_2u_2 + x_3u_3)$$

Les tenseurs de ces vecteurs étant $\sqrt{\omega(xx)}$ et $\sqrt{\Omega(uu)}$ nous avons encore directement en fonction des indices :

$$\cos\vartheta = \frac{(x_1u_1 + x_2u_2 + x_3u_3)\Delta}{\sqrt{\omega(xx)\Omega(uu)}} \qquad (15)$$

31. Le vecteur de l'*arête* possible parallèle aux 2 faces données :

$$\nu_1 u_1 \mathfrak{l}_1 + \nu_2 u_2 \mathfrak{l}_2 + \nu_3 u_3 \mathfrak{l}_3$$
$$\nu_1 u'_1 \mathfrak{l}_1 + \nu_2 u'_2 \mathfrak{l}_2 + \nu_3 u'_3 \mathfrak{l}_3$$

est leur produit vectoriel (§ 3), pour lequel nous obtenons :

Le vecteur de la *face* possible parallèle aux 2 arêtes données :

$$\mu_1 x_1 \mathfrak{r}_1 + \mu_2 x_2 \mathfrak{r}_2 + \mu_3 x_3 \mathfrak{r}_3$$
$$\mu_1 x'_1 \mathfrak{r}_1 + \mu_2 x'_2 \mathfrak{r}_2 + \mu_3 x_3 \mathfrak{r}_3$$

est leur produit vectoriel (§ 3), pour lequel nous obtenons :

$$\nu_2\nu_3(u_2u'_3 - u_3u'_2)\mathfrak{V}\mathfrak{l}_2\mathfrak{l}_3 + \nu_3\nu_1(u_3u'_1 - u_1u'_3)\mathfrak{V}\mathfrak{l}_3\mathfrak{l}_1 + \nu_1\nu_2(u_1u'_2 - u_2u'_1)\mathfrak{V}\mathfrak{l}_1\mathfrak{l}_2$$
$$\mu_2\mu_3(x_2x'_3 - x_3x'_2)\mathfrak{V}\mathfrak{r}_2\mathfrak{r}_3 + \mu_3\mu_1(x_3x'_1 - x_1x'_3)\mathfrak{V}\mathfrak{r}_3\mathfrak{r}_1 + \mu_1\mu_2(x_1x'_2 - x_2x'_1)\mathfrak{V}\mathfrak{r}_1\mathfrak{r}_2$$

ce qui, en tenant compte de nouveau des relations $\mu_i\nu_i = \sin A_i$ et des équations (1), (§ 8), qui ensemble nous donnent :

$$\mathfrak{V}\mathfrak{l}_2\mathfrak{l}_3 = \sin A_1 \mathfrak{r}_1 = \mu_1\nu_1\mathfrak{r}_1, \text{ etc.}$$

peut aussi s'écrire :

ce qui, en tenant compte de nouveau des relations $\mu_i\nu_i = \sin A_i$ et des équations (1), (§ 8), qui ensemble nous donnent :

$$\mathfrak{V}\mathfrak{r}_2\mathfrak{r}_3 = \sin a_1 \mathfrak{l}_1 = \frac{\sin A_1}{M.}\mathfrak{l}_1 = \frac{\mu_1\nu_1}{M.}\mathfrak{l}_1, \text{etc.}$$

peut aussi s'écrire :

$$\nu_1\nu_2\nu_3\left[\mu_1(u_2u'_3 - u_3u'_2)\mathfrak{r}_1 + \mu_2(u_3u'_1 - u_1u'_3)\mathfrak{r}_2 + \mu_3(u_1u'_2 - u_2u'_1)\mathfrak{r}_3\right]$$
$$\frac{\mu_1\mu_2\mu_3}{M.}\left[\nu_1(x_2x'_3 - x_3x'_2)\mathfrak{l}_1 + \nu_2(x_3x'_1 - x_1x'_3)\mathfrak{l}_2 + \nu_3(x_1x'_2 - x_2x'_1)\mathfrak{l}_3\right]$$

ou bien encore, si nous posons dorénavant symboliquement :

$$u_2u'_3 - u_3u'_2 \equiv (uu')_1$$
$$u_3u'_1 - u_1u'_3 \equiv (uu')_2$$
$$u_1u'_2 - u_2u'_1 \equiv (uu')_3$$

$$\nu_1\nu_2\nu_3\left[\mu_1(uu')_1\mathfrak{r}_1 + \mu_2(uu')_2\mathfrak{r}_2 + \mu_3(uu')_3\mathfrak{r}_3\right]$$

(16)

Les indices de cette arête sont donc les déterminants ainsi formés des indices u_i et u'_i des faces qui la déterminent :

$$\begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ u'_2 & u'_3 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} u_3 & u_1 \\ u'_3 & u'_1 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ u'_1 & u'_2 \end{vmatrix}$$

ou bien encore, si nous posons dorénavant symboliquement :

$$x_2x'_3 - x_3x'_2 \equiv (xx')_1$$
$$x_3x'_1 - x_1x'_3 \equiv (xx')_2$$
$$x_1x'_2 - x_2x'_1 \equiv (xx')_3$$

$$\frac{\mu_1\mu_2\mu_3}{M.}\left[\nu_1(xx')_1\mathfrak{l}_1 + \nu_2(xx')_2\mathfrak{l}_2 + \nu_3(xx')_3\mathfrak{l}_3\right]$$

(16)

Les indices de cette face sont donc les déterminants ainsi formés des indices x_i et x'_i des arêtes qui la déterminent :

$$\begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ x'_2 & x'_3 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} x_3 & x_1 \\ x'_3 & x'_1 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ x'_1 & x'_2 \end{vmatrix}$$

et s'écrivent facilement sous la forme schématique qui s'interprête à première vue :

$$\begin{array}{c|c|c} u_1 & u_2 u_3 u_1 u_2 & u_3 \\ & \times\times\times & \\ u'_1 & u'_2 u'_3 u'_1 u'_2 & u'_3 \end{array}$$

32. La valeur absolue du vecteur entre parenthèses (16) est d'après le paragraphe 28 la racine carrée de la forme :

$$\omega[(uu')_1(uu')_2(uu')_3] \equiv \omega[(uu')(uu')]$$

La valeur absolue du produit vectoriel total est donc d'une part :

$$\nu_1\nu_2\nu_3\sqrt{\omega[(uu')(uu')]}$$

et d'autre part le produit des tenseurs : $\sqrt{\Omega(uu)\Omega(u'u')}$ et du sinus de l'angle α des 2 faces d'indices u_i et u'_i. L'égalité de ces 2 valeurs nous donne immédiatement pour le sinus de cet angle :

$$\sin\varphi = \frac{\nu_1\nu_2\nu_3\sqrt{\omega[(uu')(uu')]}}{\sqrt{\Omega(uu)\Omega(u'u')}}$$

Si nous divisons cette expression de $\sin\varphi$ par celle de $\cos\varphi$ trouvée au § 29, nous avons, sous cette forme simple et définitive, la valeur de l'angle de 2 faces u_i et u'_i en fonction de leurs indices :

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\nu_1\nu_2\nu_3\sqrt{\omega[(uu')(uu')]}}{\Omega(uu')} \qquad (17)$$

et s'écrivent facilement sous la forme schématique qui s'interprête à première vue :

$$\begin{array}{c|c|c} x_1 & x_2 x_3 x_1 x_2 & x_3 \\ & \times\times\times & \\ x'_1 & x'_2 x'_3 x'_1 x'_2 & x'_3 \end{array}$$

La valeur absolue du vecteur entre parenthèses (16) est d'après le paragraphe 28, la racine carrée de la forme :

$$\Omega[(xx')_1(xx')_2(xx')_3] \equiv \Omega[(xx')(xx')]$$

La valeur absolue du produit vectoriel total est donc d'une part :

$$\frac{1}{M.}\mu_1\mu_2\mu_3\sqrt{\Omega[(uu')(uu')]}$$

et d'autre part le produit des tenseurs : $\sqrt{\omega(xx)}$ et $\sqrt{\omega(x'x')}$ et du sinus de l'angle ψ des 2 arêtes d'indices x_i et x'_i. L'égalité de ces 2 valeurs nous donnent immédiatement pour le sinus de cet angle :

$$\sin\psi = \frac{\mu_1\mu_2\mu_3\sqrt{\Omega[(xx')(xx')]}}{M\cdot\sqrt{\omega(xx)\omega(x'x')}}$$

Si nous divisons cette expression de $\sin\psi$ par celle de $\cos\psi$ trouvée au § 29, nous avons, sous cette forme simple et définitive, la valeur de l'angle de 2 arêtes x_i et x'_i en fonction de leurs indices :

$$\operatorname{tg}\psi = \frac{\mu_1\mu_2\mu_3\sqrt{\Omega[(xx')(xx')]}}{M.\omega(xx')} \qquad (17)$$

33. *Tout* vecteur de la forme :

$$(\nu_1 u_1 \mathfrak{l}_1 + \nu_2 u_2 \mathfrak{l}_2 + \nu_3 u_3 \mathfrak{l}_3)$$
$$-\lambda(\nu_1 u'_1 \mathfrak{l}_1 + \nu_2 u'_2 \mathfrak{l}_2 + \nu_3 u'_3 \mathfrak{l}_3),$$

les u_i et les u'_i étant les indices entiers de 2 faces possibles et λ prenant toutes les valeurs *rationnelles* de $-\infty$ à $+\infty$, représente une face également *possible,* puisque ses indices sont entiers et *tautozonale* aux 2 premières, puisque son vecteur est coplanaire aux 2 vecteurs qui le composent.

A chaque couple de faces u_i et u'_i du cristal correspond donc une *zone* de faces possibles qui a pour axe leur arête commune, et pour indices u''_i de chacune de ses faces :

$$u''_1 : u''_2 : u''_3 = u_1 - \lambda u'_1 : u_2 - \lambda u'_2 : u_3 - \lambda u'_3$$

Tout vecteur de la forme :

$$(\mu_1 x_1 \mathfrak{r}_1 + \mu_2 x_2 \mathfrak{r}_2 + \mu_3 x_3 \mathfrak{r}_3)$$
$$-\lambda(\mu_1 x'_1 \mathfrak{r}_1 + \mu_2 x'_2 \mathfrak{r}_2 + \mu_3 x'_3 \mathfrak{r}_3),$$

les x_i et les x'_i étant les indices entiers de 2 arêtes possibles et λ prenant toutes les valeurs *rationnelles* de $-\infty$ à $+\infty$, représente une arête également *possible,* puisque ses indices sont entiers, et *coplanaire* avec les 2 premières, puisque son vecteur est coplanaire aux 2 vecteurs qui le composent.

A chaque couple d'arête x_i et x'_i du cristal, correspond donc un *faisceau* d'arêtes possibles qui a pour support leur plan commun, et pour indices x''_i de chacune de ses arêtes :

$$x''_1 : x''_2 : x''_2 = x_1 - \lambda x'_1 : x_2 - \lambda x'_2 : x_3 - \lambda x'_3$$

34. Désignons, sans trop nous encombrer de parenthèses, par : (§ 4)

$$(uu'u'') \equiv \frac{\sin\ uu''}{\sin\ u'u''}$$

le rapport de position de cette face générale u''_i par rapport aux 2 faces déterminant la zone, et nous trouvons très facilement sa valeur.

D'une part le vecteur plus haut peut s'écrire sous cette forme qui représente la même face :

$$\left(\frac{\nu_1 u_1 \mathfrak{l}_1 + \nu_2 u_2 \mathfrak{l}_2 + \nu_3 u_3 \mathfrak{l}_3}{\sqrt{\Omega(uu)}}\right)$$
$$-\lambda\frac{\sqrt{\Omega(u'u')}}{\sqrt{\Omega(uu)}}\left(\frac{\nu_1 u'_1 \mathfrak{l}_1 + \nu_2 u'_2 \mathfrak{l}_2 + \nu_3 u'_3 \mathfrak{l}_3}{\sqrt{\Omega(u'u')}}\right)$$

Désignons, sans trop nous encombrer de parenthèses, par : (§ 4)

$$(xx'x'') \equiv \frac{\sin\ xx''}{\sin\ x'x''}$$

le rapport de position de cette arête générale x''_i par rapport aux 2 arêtes déterminant le faisceau, et nous trouvons très facilement sa valeur.

D'une part le vecteur plus haut peut s'écrire sous cette forme qui représente la même arête :

$$\left(\frac{\mu_1 x_1 \mathfrak{r}_1 + \mu_2 x_2 \mathfrak{r}_2 + \mu_3 x_3 \mathfrak{r}_3}{\sqrt{\omega(xx)}}\right)$$
$$-\lambda\frac{\sqrt{\omega(x'x')}}{\sqrt{\omega(xx)}}\left(\frac{\mu_1 x'_1 \mathfrak{r}_1 + \mu_2 x'_2 \mathfrak{r}_2 + \mu_3 x'_3 \mathfrak{r}_3}{\sqrt{\omega(x'x')}}\right)$$

et chacun de ses vecteurs composants étant maintenant un vecteur-unité, nous avons, d'après ce qui a été établi pour le coefficient du second (§ 4):

$$\lambda\frac{\sqrt{\Omega(u'u')}}{\sqrt{\Omega(uu)}}=\frac{\sin\ uu''}{\sin\ uu'}$$

D'autre part, $\mathfrak{l}_u$, $\mathfrak{l}_{u'}$, $\mathfrak{l}_{u''}$ étant les vecteurs des 3 faces en question, formons le quotient des valeurs absolues des 2 produits vectoriels:

$$\frac{|V\mathfrak{l}_u\mathfrak{l}_{u''}|}{|V\mathfrak{l}_{u'}\mathfrak{l}_{u''}|}=\frac{\sqrt{\Omega(uu)}.\ \sqrt{\Omega(u''u'')}.\ \sin\ uu''}{\sqrt{\Omega(u'u')}.\ \sqrt{\Omega(u''u'')}\cdot\ \sin\ u'u''}$$

Puisque ces vecteurs $V\mathfrak{l}_u\mathfrak{l}_{u''}$ et $V\mathfrak{l}_{u'}\mathfrak{l}_{u''}$ ont tous deux la même direction, celle de l'arête commune aux 3 faces ou de leur axe zonal, on se rend compte sans peine que le rapport de leurs valeurs absolues est le même que celui de leurs composantes sur chacune des 3 arêtes fondamentales. Ces composantes, trouvées au § 31, s'expriment symboliquement: $(uu'')_1$, $(uu'')_2$, (uu''), $(u'u'')_1$, etc., et l'égalité posée devient:

$$\frac{\sqrt{\Omega(uu)}\ \sin\ uu''}{\sqrt{\Omega(u'u')}\sin\ u'u''}=\frac{(uu'')_i}{(u'u'')_i}$$

De la comparaison des 2 résultats obtenus, nous avons maintenant l'égalité générale:

$$(18)\quad \lambda=\frac{(uu'')_i}{(u'u'')_i}=\frac{\sqrt{\Omega(uu)}\ \sin uu''}{\sqrt{\Omega(u'u')}\sin u'u''}$$

et chacun de ses vecteurs composants étant maintenant un vecteur-unité, nous avons, d'après ce qui a été établi pour le coefficient du second (§ 4):

$$\lambda\frac{\sqrt{\omega(x'x')}}{\sqrt{\omega(xx)}}=\frac{\sin\ xx''}{\sin\ xx'}$$

D'autre part, $\mathfrak{r}_x$, $\mathfrak{r}_{x'}$, $\mathfrak{r}_{x''}$ étant les vecteurs des 3 arêtes en question, formons le quotient des valeurs absolues des 2 produits vectoriels:

$$\frac{|V\mathfrak{r}_x\mathfrak{r}_{x''}|}{|V\mathfrak{r}_{x'}\mathfrak{r}_{x''}|}=\frac{\sqrt{\omega(xx)}.\ \sqrt{\omega(x''x'')}.\ \sin xx''}{\sqrt{\omega(x'x')}.\sqrt{\omega(x''x'')}.\sin x'x''}$$

Puisque ces vecteurs $V\mathfrak{r}_x\mathfrak{r}_{x''}$ et $V\mathfrak{r}_{x'}\mathfrak{r}_{x''}$ ont tous deux la même direction, celle du vecteur de la face commune aux 3 arêtes, on se rend compte sans peine que le rapport de leurs valeurs absolues est le même que celui de leurs composantes sur chacune des directions des vecteurs des faces fondamentales. Ces composantes, trouvées au § 31, s'expriment symboliquement: $(xx'')_1$, $(xx'')_2$, $(xx'')_3$, etc., et l'égalité posée devient:

$$\frac{\sqrt{\omega(xx}\ \sin\ xx''}{\sqrt{\omega(x'x')}\ \sin\ x'x''}=\frac{(xx'')_i}{(x'x'')_i}$$

De la comparaison des 2 résultats obtenus, nous avons maintenant l'égalité générale:

$$\lambda=\frac{(xx'')_i}{(x'x'')_i}=\frac{\sqrt{\omega(xx)}\ \sin\ xx''}{\sqrt{\omega(x'x')}\sin\ x'x''}\quad(18)$$

35. De ces différentes relations se déduit très simplement une nouvelle expression du rapport des indices de 2 faces quelconques du cristal (§ 14).

Le couple de faces u_i et u'_i détermine donc une zone de faces possibles dont les indices sont de la forme, λ étant rationnel :

$$u_i - \lambda u'_i$$

Pour la face u^1 de cette zone parallèle à l'arête fondamentale r_1 son premier indice étant nécessairement nul, ils se réduisent aux 2 derniers :

$$u_2 - \lambda u'_2 \ , \ u_3 - \lambda u'_3$$

Or cette face, en tant que plan de jonction des 2 arêtes données :

$$\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ (uu)_1 & (uu)_2 & (uu)_3 \end{matrix}$$

a également pour indices d'après le schema du § 31 :

$$-(uu')_3 \text{ et } (uu')_2$$

c'est-à-dire :

$$u_2u'_1 - u_1u'_2 \text{ et } u_3u'_1 - u_1u'_3$$

D'où, en comparant les 2 valeurs de ces indices, le résultat général du § précédent devient immédiatedans ce cas-ci :

$$\lambda = \frac{u_1}{u'_1} = \frac{\sqrt{\Omega(uu)}.\ \sin uu^1}{\sqrt{\Omega(u'u')}.\ \sin u'u^1}$$

Il en serait de même pour les faces u^2 et u^3 de cette même zone

De ces différentes relations se déduit très simplement une nouvelle expression du rapport des indices de 2 arêtes quelconques du cristal (§ 14).

Le couple d'arêtes x_i et x'_i détermine donc un faisceau d'arêtes possibles dont les indices sont de la forme, λ étant rationnel :

$$x_i - \lambda x'_i$$

Pour l'arête x^1 de ce faisceau coplanaire à la face fondamentale l_1, son premier indice étant nécessairement nul, ils se réduisent aux 2 derniers :

$$x_2 - \lambda x'_2 \ . \ x_3 - \lambda x'_3$$

Or cette arête en tant qu'intersection des 2 faces données :

$$\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ (xx')_1 & (xx')_2, & (xx')_3 \end{matrix}$$

a également pour indices d'après le schema du § 31 :

$$-(xx')_3 \text{ et } (xx')_2$$

c'est-à-dire :

$$x_2x'_1 - x_1x'_2 \text{ et } x_3x'_1 - x_1x'_3$$

D'où, en comparant les 2 valeurs de ces indices, le résultat général du § précédent devient immédiatement dans ce cas-ci :

$$\lambda = \frac{x_1}{x'_1} = \frac{\sqrt{\omega(xx)}.\ \sin xx^1}{\sqrt{\omega(x'x')}.\ \sin x'x^1}$$

Il en serait de même pour les arêtes x^2 et x^3 de ce faisceau co-

parallèles aux 2 autres arêtes fondamentales, et des 3 équations que l'on obtiendrait ainsi résulte directement cette égalité de rapports :

$$\frac{u_1}{u'_1}:\frac{u_2}{u'_2}:\frac{u_3}{u'_3}=\frac{\sin uu^1}{\sin u'u^1}:\frac{\sin uu^2}{\sin u'u^2}:\frac{\sin uu^3}{\sin u'u^3}$$

c'est-à-dire que les quotients des des indices de 2 faces sont proportionnels aux quotients des *sinus* des angles qu'elles font avec la face de leur zone parallèle à l'arête fondamentale correspondante.

planaire aux 2 autres faces fondamentales et des 3 équations que l'on obtiendrait ainsi, résulte directement cette égalité de rapport :

$$\frac{x_1}{x'_1}:\frac{x_2}{x'_2}:\frac{x_3}{x'_3}=\frac{\sin xx^1}{\sin x'x^1}:\frac{\sin xx^2}{\sin x'x^2}:\frac{\sin xx^3}{\sin x'x^3}$$

c'est-à-dire que les quotients des indices de 2 arêtes sont proportionnels aux quotients des *sinus* des angles qu'elles font avec l'arête de leur faisceau coplanaire à la face fondamentale correspondante.

36. Les 3 faces d'indices entiers :

$$\nu_1 u_1 \mathfrak{l}_1 + \nu_2 u_2 \mathfrak{l}_2 + \nu_3 u_3 \mathfrak{l}_3$$
$$\nu_1 u'_1 \mathfrak{l}_1 + \nu_2 u'_2 \mathfrak{l}_2 + \nu_3 u'_3 \mathfrak{l}_3$$
$$\nu_1 u''_1 \mathfrak{l}_1 + \nu_2 u''_2 \mathfrak{l}_2 + \nu_3 u''_3 \mathfrak{l}_3$$

sont *tautozonales* (§ 5) s'il existe 3 nombres k_i tels que la somme des 3 vecteurs posés multipliés par ces facteurs soit nulle, c'est-à-dire, chaque $\mathfrak{l}_i$ devant avoir pour cela dans cette somme un coefficient qui s'annule, *tels que :*

$$k_1 u_1 + k_2 u'_1 + k_3 u''_1 = 0$$
$$k_1 u_2 + k_2 u'_2 + k_3 u''_3 = 0$$
$$k_1 u_3 + k_2 u'_3 + k_3 u''_3 = 0$$

Or ces 3 équations ne peuvent être simultanément satisfaites par des valeurs k_i autres que 0, que si le déterminant de leurs coefficients s'annule :

$$\begin{vmatrix} u_1 & u'_1 & u''_1 \\ u_2 & u'_2 & u''_2 \\ u_3 & u'_3 & u''_3 \end{vmatrix} = 0$$

Des 3 arêtes d'indices entiers :

$$\mu_1 x_1 \mathfrak{r}_1 + \mu_2 x_2 \mathfrak{r}_2 + \mu_3 x_3 \mathfrak{r}_3$$
$$\mu_1 x'_1 \mathfrak{r}_1 + \mu_2 x'_2 \mathfrak{r}_2 + \mu_3 x'_3 \mathfrak{r}_3$$
$$\mu_1 x''_1 \mathfrak{r}_1 + \mu_2 x''_2 \mathfrak{r}_2 + \mu_3 x''_2 \mathfrak{r}_3$$

sont *coplanaires* (§ 5) s'il existe 3 nombres k_i tels que la somme des 3 vecteurs posés multipliés par ces facteurs soit nulle, c'est-à-dire, chaque $\mathfrak{r}_i$ devant avoir pour cela dans cette somme un coefficient qui s'annule, *tels que :*

$$k_1 x_1 + k_2 x'_1 + k_3 x''_1 = 0$$
$$k_1 x_2 + k_2 x'_2 + k_3 x''_2 = 0$$
$$k_1 x_3 + k_2 x'_3 + k_3 x''_3 = 0$$

Or ces 3 équations ne peuvent être simultanément satisfaites par des valeurs k_i autres que 0, que si le déterminant de leurs coefficients s'annule :

$$\begin{vmatrix} x_1 & x'_1 & x''_1 \\ x_2 & x'_2 & x''_2 \\ x_3 & x'_3 & x''_3 \end{vmatrix} = 0$$

Mai si cela est, les 3 facteurs k_i sont possibles ; les faces u_i et u'_i étant données, toute face d'indices entiers u''_i satisfaisant cette égalité, est par le fait tautozonale aux 2 premières et c'est donc là le déterminant *équation* de l'*arête* commune en fonction des indices des 2 faces déterminant cette arête.

Mais si cela est, les 3 facteurs k_i sont possibles ; les arêtes x_i et x'_i étant données, toute arête d'indices entiers x''_i satisfaisant cette égalité, est par le fait coplanaire aux 2 premières et c'est donc là le déterminant *équation* de la *face* commune en fonction des indices des 2 arêtes déterminant cette face.

37. Si enfin nous introduisons une 4me face u'''_i, tautozonale encore aux 3 faces de la même zone u_i, u'_i et u''_i, nous appelons (§ 6) le rapport anharmonique de ces 4 faces, le quotient des rapports de sinus :

$$(uu'u''u''') = \frac{\sin uu''}{\sin u'u''} : \frac{\sin uu'''}{\sin u'u'''}$$

et nous servant des relations du § 34, λ et μ étant les *paramètres* des indices des 2 dernières en fonction de ceux des 2 premières, nous trouvons immédiatement sa valeur :

$$(19)\ (uu'u''u''') = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{(uu'')_i}{(u'u'')_i} : \frac{(uu''')_k}{(u'u''')_k}$$

Le rapport anharmonique de 4 faces tautozonales, s'exprimant donc uniquement en fonction de leurs indices entiers, est un nombre *rationnel ;* c'est un corollaire direct de la rationnalité des indices des faces du cristal.

Si enfin nous introduisons une 4me arête x_i''', coplanaire encore aux 3 arêtes dans un même plan x_i, x'_i et x''_i, nous appelons le rapport anharmonique de ces 4 arêtes (§ 6), le quotient des rapports de sinus :

$$(xx'x''x''') = \frac{\sin xx''}{\sin x'x''} : \frac{\sin xx'''}{\sin x'x'''}$$

et nous servant des relations du § 34, λ et μ étant les *paramètres* des indices des 2 dernières en fonction de ceux des 2 premières, nous trouvons immédiatement sa valeur :

$$(xx'x''x''') = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{(xx'')_i}{(x'x'')} : \frac{(xx''')_k}{(x'x''')_k}\ (19)$$

Le rapport anharmonique de 4 arêtes coplanaires, s'exprimant donc uniquement en fonction de leurs indices entiers, est un nombre *rationnel ;* c'est un corollaire direct de la rationnalité des indices des arêtes du cristal.

38. Sur les 3 angles que déterminent entre elles les 3 faces tautozonales u_i, u'_i et u''_i ou les 6 angles que déterminent entre elles

les 4 faces de la même zone u_i, u'_i, u''_i et u'''_i, *deux* seuls dans le premier cas et *trois* seuls dans le second cas sont indépendants l'un de l'autre. Dans les 2 cas, il suffit donc de tenir compte uniquement de ceux de ces angles qui sont indépendants et pour lesquels nous prendrons dès à présent soit les 2 angles uu′ et uu″, soit les 3 angles uu′, uu″ et uu‴.

Avec cela le simple rapport de position des 3 faces reste sans aucune symétrie :

$$\frac{\sin uu''}{\sin u'u''} = \frac{\sin uu''}{\sin (u'u + uu'')}$$

mais le rapport anhormanique des 4 faces :

$$(uu'u''u''') = \frac{\sin uu''}{\sin u'u''} : \frac{\sin uu'''}{\sin u'u'''}$$

s'écrit très facilement si nous appelons A sa valeur :

$$A = \frac{\cot uu''' - \cot uu'}{\cot uu'' - \cot uu'}$$

et nous avons donc entre les angles de 4 faces tautozonales et la valeur de leur rapport anharmonique la relation générale :

$$\cot uu''' = (1 - A) \cot uu' + A \cot uu'' \qquad (20)$$

Si ce rapport anharmonique a pour valeur —1, c'est-à-dire si les 4 faces sont conjuguées harmoniques, le couple des 2 dernières par rapport à celui des 2 premières, la relation se réduit à :

$$2 \cot uu' - \cot uu'' - \cot uu''' = 0 \qquad (21)$$

Si enfin nous prenons pour la 3me face u''_i la face u^i de la zone qui est parallèle à l'arête fondamentale r_i (§ 35), le paramètre λ des indices de cette face étant alors $u_i : u'_i$, pour toute valeur rationnelle $p : q$ du paramètre μ de la 4me face u'''_i, nous aurons pour le rapport anharmonique correspondant : (19)

$$A = \frac{u_i q}{u'_i p}$$

et la relation générale (20) devient dans ces conditions :

$$pu'_i . \cot uu''' - qu_i . \cot uu^i = (pu'_i - qu_i) \cot uu' \qquad (22)$$

Naturellement tout ce qui vient d'être dit des angles de 3 ou 4 faces tautozonales se répéterait pour les angles que forment entre

elles 3 ou 4 arêtes coplanaires ; l'égalité reliant les valeurs des 3 angles indépendants xx′, xx″ et xx‴ et celle de leur rapport anharmonique est donc également :

$$\cot xx''' = (1-A) \cot xx' + A \cot xx''$$

Elle devient si la valeur du rapport anharmonique est —1 :

$$2 \cot xx' - \cot xx'' - \cot xx''' = 0$$

et enfin si la 3me arête x''_i est l'arête x^i coplanaire à la face fondamentale f_i et la 4me, l'arête x'''_i de paramètre rationnel p : q, elle s'écrit d'une manière assez symétrique :

$$px'_i . \cot xx''' - qx_i . \cot xx^i = (px'_i - qx_i) \cot xx'$$

39. Les résultats de ces derniers paragraphes permettent de résoudre aisément les 2 petits problèmes suivants que nous appliquons aux faces tautozonales, mais qui évidemment se poseraient et se résoudraient d'une manière pareille pour le cas des arêtes coplanaires.

I. Etant donnés les *éléments* du cristal, les indices des faces u_i et u'_i et leur angle uu′, toute face de leur zone :

1° son angle uu″ *connu*, a ses indices u''_i de la forme :

$$u_i - \lambda u'_i \quad \text{où} \quad \lambda = \frac{\sqrt{\Omega(uu)}.\ \sin uu''}{\sqrt{\Omega(u'u')}.\ \sin u'u''}$$

2° ses indices u''_i *connus*, a son angle uu″ déterminé par :

$$\frac{\sin uu''}{\sin(u'u + uu'')} = \frac{\sqrt{\Omega(u'u')}.(uu'')_i}{\sqrt{\Omega(uu)}.(u'u'')_i}$$

Si nous appelons tg Θ la quantité connue que représente le second membre, nous avons par le fait de l'égalité posée :

$$\frac{1 + \operatorname{tg} \Theta}{1 - \operatorname{tg} \Theta} = \frac{\sin(u'u + uu'') + \sin uu''}{\sin(u'u - uu'') - \sin uu''} = \frac{\sin\left(\frac{u'u}{2} + uu''\right) \cos\frac{u'u}{2}}{\cos\left(\frac{u'u}{2} + uu''\right) \sin\frac{u'u}{2}}$$

ou encore, en changeant le signe des angles :

$$\operatorname{tg}\left(\frac{uu'}{2} - uu''\right) = \operatorname{tg} \frac{uu'}{2} \operatorname{tg}(45^\circ + \Theta)$$

c'est-à-dire une expression plus directement logarithmique que la première.

II. Etant donné les indices des faces u_i, u'_i et u''_i et leurs angles uu' et uu'', toute face de leur zone :

1° son angle uu''' *connu*, a ses indices de la forme (§ 37) :

$$u_i - \mu u'_i \text{ où } \mu = \frac{1}{(uu'u''u''')} \cdot \frac{(uu'')_i}{(u'u'')_i}$$

2° ses indices u'''_i *connus*, a son angle uu''' déterminé par :

$$\cot uu''' = (1-A) \cot uu' + A \cot uu''$$

Mais comme nous pouvons aussi écrire :

$$\frac{\sin uu'''}{\sin (u'u + uu''')} = \frac{1}{A} \cdot \frac{\sin uu''}{\sin u'u''}$$

nous avons, en opérant d'une manière toute pareille à celle du cas précédent, si nous posons la quantité connue :

$$\frac{1}{A} \cdot \frac{\sin uu''}{\sin u'u''} = \operatorname{tg} \Theta$$

$$\operatorname{tg}\left(\frac{uu'}{2} - uu'''\right) = \operatorname{tg} \frac{uu'}{2} \operatorname{tg} (45^\circ + \Theta)$$

c'est-à-dire encore une expression bien plus avantageuse que la première au calcul par logarithmes.

40. Comme cas particulier, si les 3 faces u_i, u'_i et u''_i sont les 3 faces tautozonales à l'arête fondamentale r_1, d'indices 010, 001 et 011, (c'est-à-dire les 2 faces fondamentales l_2 et l_3 et la face p_1 (§ 19) les indices u'''_i d'une 4me face quelconque de cette même zone sont donc de la forme :

$$u_i - \frac{1}{A} \cdot \frac{(uu'')_i}{(u'u'')_i} u'_i$$

Or en substituant les indices u_i, u'_i et u''_i donnés, pour $i=1$ cette forme se réduit à :

$$u_i + \frac{1}{A} u'_i$$

de sorte que nous obtenons pour le rapport des 2 indices u'''_i différents de 0 :

$$\frac{u'''_2}{u'''_3} = A.$$

On obtiendrait dans les mêmes conditions pour le rapport des 2 indices non nuls d'une face tautozonale à l'arête r_2 ou à l'arête r_3 :

$$\frac{u'''_3}{u'''_1} = A \quad \text{et} \quad \frac{u'''_1}{u'''_2} = A.$$

et le résultat général peut s'exprimer ainsi :

Pour toute face appartenant à l'une des 3 zones que constituent les arêtes fondamentales, le rapport de ses 2 indices non nuls est égal au rapport anharmonique obtenu en accouplant cette 4me face au groupe correspondant des 3 faces u_i, u'_i et u''_i choisies et maintenues dans l'ordre qui leur a été donné.

CHAPITRE VII

41. Les indices de l'*arête normale* à la face possible :

$$\nu_1 u_1 \mathfrak{l}_2 + \nu_2 u_2 \mathfrak{l}_2 + \nu_3 u_3 \mathfrak{l}_3$$

le vecteur de la face coïncidant avec celui de l'arête, se déduisent immédiatement de l'égalité vectorielle :

Les indices de la *face normale* à l'arrête possible :

$$\mu_1 x_1 \mathfrak{r}_1 + \mu_2 x_2 \mathfrak{r}_2 + \mu_3 x_3 \mathfrak{r}_3$$

le vecteur de l'arête coïncidant avec celui de la face, se déduisent immédiatement de l'égalité vectorielle :

$$\nu_1 u_1 \mathfrak{l}_1 + \nu_2 u_2 \mathfrak{l}_2 + \nu_3 u_3 \mathfrak{l}_3 = \mu_1 x_1 \mathfrak{r}_1 + \mu_2 x_2 \mathfrak{r}_2 + \mu_3 x_3 \mathfrak{r}_3$$

En effet, en s'en rapportant toujours aux équations du chap. II' unissant entre eux les vecteurs des faces et des arêtes fondamentales, si nous multiplions scalairement les 2 membres de notre égalité successivement par $\nu_1 \mathfrak{l}_1$, $\nu_2 \mathfrak{l}_2$, $\nu_3 \mathfrak{l}_3$, et tenons compte des relations :

$$\mu_i \nu_i = \sin A_i \text{ et } \sin A_i \sin h_i = \Delta$$

nous obtenons :

$$\begin{aligned}
\Delta x_1 &= \nu_1^2 u_1 + \nu_1 \nu_2 u_2 \cos A_{12} + \nu_1 \nu_3 u_3 \cos A_{13} \\
\Delta x_2 &= \nu_2 \nu_1 u_1 \cos A_{12} + \nu_2^2 u_2 + \nu_2 \nu_3 u_3 \cos A_{13} \\
\Delta x_3 &= \nu_3 \nu_1 u_1 \cos A_{13} + \nu_3 \nu_2 u_2 \cos A_{23} + \nu_3^2 u_3
\end{aligned}$$

ce qui, avec la notation introduite au § 28, nous donne sous une forme extraordinairement simple les indices demandés :

$$x_1 : x_2 : x_3 = \Omega'(u_1) : \Omega'(u_2) : \Omega'(u_3) \qquad (23)$$

si nous multiplions scalairement les 2 membres de notre égalité successivement par $\mu_1 \mathfrak{r}_1$, $\mu_2 \mathfrak{r}_2$, $\mu_3 \mathfrak{r}_3$ et tenons compte des relations :

$$\mu_i \nu_i = \sin A_i \text{ et } \sin A_i \sin h_i = \Delta,$$

nous obtenons :

$$\begin{aligned}
\Delta u_1 &= \mu_1^2 x_1 + \mu_1 \mu_2 x_2 \cos a_{12} + \mu_1 \mu_3 x_3 \cos a_{13} \\
\Delta u_2 &= \mu_2 \mu_1 x_1 \cos a_{12} + \mu_3^2 x_2 + \mu_2 \mu_3 x_3 \cos a_{13} \\
\Delta u_3 &= \mu_3 \mu_1 x_1 \cos a_{13} + \mu_3 \mu_2 x_2 \cos a_{23} + \mu_3^2 x_3
\end{aligned}$$

ce qui, avec la notation introduite au § 28, nous donne sous une forme extraordinairement simple les indices demandés :

$$u_1 : u_2 : u_3 = \omega'(x_1) : \omega'(x_2) : \omega'(x_3) \qquad (23)$$

42. Or contrairement à tous ceux dont il a été question jusqu'ici, ces indices trouvés ne jouissent plus du tout nécessairement de l'es-

sentielle propriété que nous avons établie au § 20 des indices des faces et arêtes *possibles* du cristal. Les constances μ_i et ν_i déterminant la face et l'arête-unité, et les cos A_{ik} et cos a_{ik} des angles que font entre elles les faces et arêtes fondamentales sont en effet pour le cas général des quantités irrationnelles quelconques; les valeurs $\Omega'(u_i)$ et $\omega'(x_i)$ qui les impliquent, ne sont donc pas elles-mêmes en général des indices entiers, et par le fait la face ou l'arête normale à une arête ou une face possible, ne sont pas en général elles-mêmes une face ou une arête également possible.

Si par contre un complexe cristallin implique un système de 4 faces, telles que les *cos* A_{ik} de leurs angles et les composantes ν_i de la face-unité sur les vecteurs des faces fondamentales *, soient des quantités *rationnelles*, les indices $\Omega'(u_i)$ de l'arête normale à toute face possible u_i sont également rationnels. A chaque face de ce complexe correspond donc une arête normale *possible*, et comme cette arête normale appartient au complexe, quelles que soient les 4 de ses faces prises pour point de départ de sa construction zonale, ses indices sont *entiers*, quelles que soient les 4 faces du complexe auxquelles on le rapporte.

Par le fait pour chaque système de référence que fournissent 4 faces quelconques du complexe en question, les coefficients ν_1^2, $\nu_1\nu_2$ cos A_{12}, etc., des indices $\Omega'(u_i)$ que nous avons appelés : (§ 28)

Si par contre un complexe cristallin implique un système de 4 arêtes, telles que les *cos* a_{ik} de leurs angles et les composantes μ_i de l'arête-unité sur les vecteurs des arêtes fondamentales, soient des quantités *rationnelles*, les indices $\omega'(x_i)$ de la face normale à toute arête possible x_i sont également rationnels. A chaque arête de ce complexe correspond donc une face normale *possible*, et comme cette face normale appartient au complexe, quelles que soient les 4 de ses arêtes prises pour point de départ de sa construction zonale, ses indices sont *entiers*, quelles que soient les 4 arêtes du complexe auxquelles on le rapporte.

Par le fait pour chaque système de référence que déterminent 4 arêtes quelconques du complexe en question, les coefficients μ_1^2, $\mu_1\mu_2$ cos a_{12}, etc., des indices ω' (x_i) que nous avons appelés : (§ 28)

---

* Déterminées par les relations $\mu_i\nu_i = \sin A_i$, les μ_i étant les segments interceptés par la face-unité sur les intersections des faces fondamentales.

$\Omega_{11}, \Omega_{22}, \Omega_{33}, \Omega_{12}, \Omega_{13}, \Omega_{23}$

doivent être des quantités *rationnelles.*

$\omega_{11}, \omega_{22}, \omega_{33}, \omega_{12}, \omega_{13}, \omega_{23}$

doivent être des quantités *rationnelles.*

43. Un seul complexe cristallin réalise totalement la condition énoncée ; le complexe *cubique* pour lequel nous avons (§ 85, V)

en choisissant comme faces fondamentales les 3 faces du cube générateur et comme face-unité le plan diagonal déterminant ses 3 arêtes (face de l'octaèdre) :

$$\cos A_1 = \cos A_2 = \cos A_3 = 0$$
$$\nu_1 = \nu_2 = \nu_3 = 1$$

en choisissant comme arêtes fondamentales les 3 arêtes du cube générateur et comme arête-unité sa diagonale principale passant par le point 0 :

$$\cos a_1 = \cos a_2 = \cos a_3 = 0$$
$$\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = 1$$

$$\sin A_1 = \sin A_2 = \sin A_3 = 1$$

Pour chaque *face* du complexe cubique l'arête normale est donc une arête *possible,* dont les indices $\Omega'(u_i)$ se réduisent, dans le cas particulier du système de référence choisi, aux valeurs mêmes des indices de la face :

$$x_1 : x_2 : x_3 = u_1 : u_2 : u_3$$

En conséquence, puisque à chaque couple de faces du complexe, correspond une zone complète de faces possibles, leurs arêtes normales, situées chacune dans le plan commun perpendiculaire à l'axe zonal, déterminent ainsi une face possible du complexe. Par le fait, réciproquement pour chaque axe zonal, c'est-à-dire pour chaque arête du complexe cubique, la face normale est également possible.

Pour chaque *arête* du complexe cubique la face normale est une face *possible,* dont les indices $\omega'(x_i)$ se réduisent, dans le cas particulier du système de référence choisi, aux valeurs mêmes des indices de l'arête :

$$u_1 : u_2 : u_3 = x_1 : x_2 : x_3$$

En conséquence, puisque à chaque couple d'arêtes du complexe, correspond un faisceau complet d'arêtes possibles, leurs faces normales, passant chacune par l'intersection commune perpendiculaire au plan du faisceau, déterminent ainsi une arête possible du complexe. Par le fait, réciproquement pour chaque faisceau d'arêtes, c'est-à-dire pour chaque face du complexe cubique, l'arête normale est également possible.

Chaque face du complexe cubique fait donc en somme partie d'un système de 3 faces trinormales, comme chacune de ses arêtes est comprise dans un système de 3 arêtes perpendiculaires entre elles. Chaque zone du complexe est telle qu'à chacune de ses faces

correspond une face normale dans la même zone ; chaque faisceau ou *zone d'arêtes* est telle qu'à chacune de ses arêtes correspond une arête perpendiculaire dans la même face. Fédorow appelle zones *isotropes* des zones de faces et d'arêtes cristallines possédant cette propriété, et ce que nous venons de dire s'exprime plus simplement : chacune des zones de faces ou d'arêtes du complexe cubique est une zone *isotrope.*

44. Deux autres complexes cristallins (voir § 85) réalisent partiellement la condition du paragraphe 42. En effet, pour le complexe *quadratique,*

en choisissant comme faces fondamentales les 3 faces du prisme droit générateur à base *carrée* et comme face-unité le plan diagonal déterminant ses 3 arêtes (face de la protopyramide), les cos A_{ik} et les constances ν_i sont les valeurs * :

$$\cos A_1 = \cos A_2 = \cos A_3 = 0$$
$$\nu_1 \ , \ \nu_2 = \nu_3 = 1$$

et les indices $\Omega'(u_i)$ de l'arête normale à la face possible u_i, se réduisent, pour ce système de référence choisi, aux rapports des 3 quantités dont la première est essentiellement irrationnelle (remarque du § suivant :

$$x_1 : x_2 : x_3 = \nu_1^2 u_1 : u_2 : u_3$$

en choisissant comme arêtes fondamentales les 3 arêtes du prisme droit générateur à base *carrée* et comme arête-unité sa diagonale principale passant par le point 0, les cos a_{ik} et les constances μ_i sont les valeurs :

$$\cos a_1 = \cos a_2 = \cos_3 = 0$$
$$\mu_1 \ , \ \mu_2 = \mu_3 = 1$$

et les indices $\omega'(x_i)$ de la face normale à l'arête x_i se réduisent, pour ce système de référence choisi, aux rapports des 3 quantités dont la première est essentiellement irrationnelle (remarque du § suivant) :

$$\nu_1 : \nu_2 : u_3 = \mu_1^2 x_1 : x_2 : x_3$$

Pour le complexe *hexagonal* (§ 85, IV), les

faces fondamentales étant les 3 faces du prisme droit générateur à base *équilatérale,* et la face-unité le plan diagonal déterminant

arêtes fondamentales étant les 3 arêtes du prime droit générateur à base *équilatérale,* et l'arête-unité la diagonale principale pas-

* En désignant simplement par la lettre correspondante celle de ses constances qui sont irrationnelles.

ses 3 arêtes (face de la protopyramide hexagonale) les éléments du système sont :

$$\cos A_1 = \frac{1}{2}, \cos A_2 = \cos A_3 = 0$$

$$\nu_1, \quad \nu_2 = \nu_3 = 1$$

et les indices $\Omega'(u_i)$ de l'arête normale sont également les rapports des 3 expressions dont la première est encore irrationnelle (même remarque) :

$$x_1 : x : x_3 = \nu_1 u_1 : (u_2 + {}^1/_2 u_3) : ({}^1/_2 u_2 + u_3)$$

sant par le point 0, les éléments du système sont :

$$\cos a_1 = \frac{1}{2}, \cos a_2 = \cos a_3 = 0$$

$$\mu_1, \quad \mu_2 = \mu_3 = 1$$

et les indices $\omega'(x^i)$ de la face normale sont également les rapports des 3 expressions dont la première est encore irrationnelle (même remarque) :

$$u_1 : u_2 : u_3 = \mu_1^2 x_1 : (x_2 + {}^1/_2 x_3) : ({}^1/_2 x_2 + x_3)$$

Pour l'un comme pour l'autre de ces 2 complexes,

le premier indice u_1 des faces tautozonales à l'arête fondamentale $\mathfrak{r}_1$ étant nul, les indices de leurs arêtes normales se réduisent aux 2 derniers, et sont ainsi des rapports de quantités rationnelles. Pour chaque face de la zone fondamentale $\mathfrak{r}_1$, l'arête normale est donc possible, et puisque par cette arête normale passe une nouvelle face dans la même zone, cette zone $\mathfrak{r}_1$ est encore telle, qu'elle implique une face normale à chacune de ses faces.

le premier indice x_1 des arêtes coplanaires à la face fondamentale $\mathfrak{l}_1$ étant nul, les indices de leurs faces normales se réduisent aux 2 derniers, et sont ainsi des rapports de quantités rationnelles. Pour chaque arête du faisceau fondamental $\mathfrak{l}_1$, la face normale est donc possible, et puisque cette face normale détermine une nouvelle arête du même faisceau, cette zone d'arête $\mathfrak{l}_1$ est encore telle, qu'elle implique une arête normale à chacune de ses arêtes.

Pour l'un et l'autre des 2 complexes quadratique et hexagonal, les *zones fondamentales* de faces et d'arêtes $\mathfrak{r}_1$ et $\mathfrak{l}_1$ sont donc encore des zones *isotropes*.

En appelant (Fedorow) zone *orthogonale* de faces ou d'arêtes celle qui n'implique qu'un seul couple de faces ou d'arêtes normales*, on se rend compte en outre sans peine,

---

* On démontrerait facilement que dès qu'une zone de faces (d'arêtes) possède deux couples de faces (arêtes) normales, elle possède une face normale à chacune de ses faces, c'est-à-dire qu'elle est isotrope.

puisque chacune de leurs arêtes, c'est-à-dire chacun de leurs arcs zonaux est nécessairement situé sur une face de la zone fondamentale $\mathfrak{r}_1$, à laquelle correspond une arête normale, que *toutes* les autres zones de *faces* des 2 complexes sont des zones *orthogonales.*

puisque chacune de leurs faces, c'est-à-dire chacune de leurs zones d'arêtes passe nécessairement par une arête du faisceau fondamental $\mathfrak{l}_1$, à laquelle correspond une arête normale, que *toutes* les autres zones d'*arêtes* des 2 complexes sont des zones *orthogonales.*

45. Les 3 autres complexes cristallins, *rhombique, monocline* et *tricline* (voir toujours § 85) n'ont plus aucun système de référence avec des éléments rationnels suffisants pour y nécessiter la présence de zones de faces ou d'arêtes isotropes.

En choisissant toujours comme faces élémentaires les 3 faces du parallélipipède générateur avec la face déterminant ses 3 arêtes, les éléments du complexe *rhombique* sont (prisme droit à base *rectangle,* faces des 3 pinakoïdes et de la protopyramide) :

$$\cos A_1 = \cos A_2 : \cos A_3 = 0$$
$$\nu_1 \ , \ \nu_2 \ , \ \nu_3$$

et les indices $\Omega'(u_i)$ de l'arête normale sont les rapports des 3 quantités irrationnelles :

$$x_1 : x_2 : x_3 = \nu_1^2 u_1 : \nu_2^2 u_2 : \nu_3^2 u_3$$

Seules donc les arêtes normales aux 3 faces dont 2 indices sont nuls, c'est-à-dire aux 3 faces fondamentales $\nu_1\mathfrak{l}_1$, $\nu_2\mathfrak{l}_2$, $\nu_3\mathfrak{l}_3$, sont des arêtes possibles. Ces 3 faces sont ainsi les seules faces du complexe auxquelles corresponde une arête normale, et on se rend compte immédiatement que chaque zone

En choisissant toujours comme arêtes élémentaires les 3 arêtes du parallélipipède générateur avec la diagonale principale passant par 0, les éléments du complexe *rhombique* sont (prisme droit à base *rectangle*) :

$$\cos a_1 = \cos a_2 : \cos a_3 = 0$$
$$\mu_1 \ , \ \mu_2 \ , \ \mu_3$$

et les indices $\omega'(x_i)$ de la face normale sont les rapports des 3 quantités irrationnelles :

$$u_1 : u_2 : u_3 = \mu_1^2 x_1 : \mu_2^2 x_2 : \mu_3^2 x_3$$

Seules donc les faces normales aux 3 arêtes dont 2 indices sont nuls, c'est-à-dire aux 3 arêtes fondamentales $\mu_1\mathfrak{r}_1$, $\mu_2\mathfrak{r}_2$, $\mu_3\mathfrak{r}_3$, sont des faces possibles. Ces 3 arêtes sont ainsi les seules arêtes du complexe auxquelles corresponde une face normale, et on se rend compte immédiatement que chaque zone

de *faces* dont l'axe est situé sur l'une d'elles, est une zone *orthogonale.*

Pour le complexe *monocline,* le prisme est droit à base *parallélogrammique* quelconque (faces des 3 pinakoïdes et de l'hémipyramide positive), les éléments du système sont :

$$\cos A_1 \ , \ \cos A_2 = \cos A_3 = 0$$
$$\nu_1 \ , \ \nu_2 \ , \ \nu_3$$

et les indices irrationnels $\Omega'(u_i)$ s'écrivent, abstraction du facteur proportionnel :

$$x_1 = \nu_1^2 u_1$$
$$x_2 = \nu_2^2 u_2 + \nu_2 \nu_3 u_3 \cos A_1$$
$$x_3 = \nu_3 \nu_2 u_2 \cos A_1 + \nu_3^2 u_3$$

Seule l'arête normale à la face dont les 2 indices u_2 et u_3 sont nuls, est une arête possible. La face fondamentale f_1 est donc la seule face du complexe possédant une arête normale, et chaque zone de *faces* dont l'arête est située sur cette face, est une zone *orthogonale.*

d'*arêtes* dont la face support passe par l'une d'elles, est une zone *orthogonale.*

Pour le complexe *monocline* le prisme est droit à base *parallélogrammique* quelconque (arêtes du prisme, orthodome et clinodome), les éléments du système sont :

$$\cos a_1 \ , \ \cos a_2 = \cos a_3 = 0$$
$$\mu_1 \ , \ \mu_2 \ , \ \mu_3$$

et les indices irrationnels $\omega'(x_i)$ s'écrivent, abstraction du facteur proportionnel :

$$u_1 = \mu_1^2 x_1$$
$$u_2 = \mu_2^2 x_2 + \mu_2 \mu_3 x_3 \cos a_1$$
$$u_3 = \mu_3 \mu_2 x_2 \cos a_1 + \mu_3^2 x_3$$

Seule la face normale à l'arête dont les 2 indices x_2 et x_3 sont nuls, est une face possible. L'arête fondamentale r_1 est donc la seule arête du complexe possédant une face normale, et chaque zone d'*arête* dont le plan passe par cette arête, est une zone *orthogonale.*

Enfin pour le complexe *tricline,* les 3 faces du parallélipipède générateur sont des *parallélogrammes* quelconques ; les 6 constantes de chaque système sont des quantités essentiellement irrationnelles, et les indices $\Omega'(u_i)$ et $\omega'(x_i)$ restent sans aucune simplification ce qu'ils ont été trouvés au § 41. Pour aucune valeur des indices u_i et x_i, ils ne peuvent se réduire à un seul ou devenir rationnels ; le complexe tricline est donc le seul complexe cristallin qui n'ait aucune arête normale à l'une de ses faces.

Remarque. Le fait que les coefficients Ω_{ik} et ω_{ik}, en fonction desquels s'expriment les indices $\Omega'(u_i)$ et $\omega'(x_i)$, implique chacun un produit ou un carré des constantes ν_i, cos A_i ou μ_i, cos a_i du complexe, ne permet, semble-t-il, rien d'absolu en ce qui concerne la propriété que nous venons d'établir des zones et des complexes cristallins. En principe, il ne serait sans doute aucunement impossible par exemple que 2 quelconques ou les 3 constantes irrationnelles μ_1, μ_2, μ_3, (et par suite ν_1, ν_2, ν_3) c'est-à-dire les longueurs des axes-unités d'un complexe cristallin rhombique soient des valeurs de racines carrées quelconques: $\sqrt{a}$, $\sqrt{b}$, $\sqrt{c}$; ce complexe rhombique possèderait dans ce cas, comme un complexe quadratique, une zone isotrope, ou pour chacune de ses faces une arête normale et réciproquement, comme le complexe cubique. Il en serait de même d'un complexe monocline dans le cas où ses constantes μ_i (ν_i) seraient des racines carrées et ses cos a_i et cos A_i tels que les coefficients $\mu_2\mu_3$cos a_1 et $\nu_2\nu_3$cos A_1 soient des quantités rationnelles. Mais en réalité, pour l'étude du cristal, cette restriction n'a aucune importance. Si rien n'empêche que, momentanément, pour une température déterminée, les axes unités ou les constantes μ_i d'un cristal rhombique ou monocline puissent prendre des valeurs de racines carrées, pour le plus petit changement de température, les propriétés physiques étant différentes sur chacune des 3 directions de ces axes, leurs dilatations inégales (positives ou négatives) auront aussitôt ramené ces constantes à des rapports de nombres *irrationnels quelconques.* C'est d'ailleurs la l'essence même de la nature du complexe cristallin : l'irrationnalité des rapports des constantes d'un cristal n'est qu'un cas spécial de la *non-équivalence physique* des directions correspondantes dans la substance cristalline.

Naturellement la même remarque s'applique aux complexes quadratique et hexagonal; au cas où leur première constante μ_1 (par suite ν_1) serait une valeur de racine carrée quelconque chacune de leurs zones de faces et d'arêtes pourrait être isotrope.

46. Le vecteur d'une *face parallèle* à une arête et *normale* à une face données x_i et u_i, est d'après le § 3, le produit vectoriel:

Le vecteur d'une *arête parallèle* à une face et *normale* à une arête données u_i et x_i, est d'après le § 3, le produit vectoriel:

$$\mathrm{V}(\mu_1 x_1 \mathfrak{r}_1 + \mu_2 x_2 \mathfrak{r}_2 + \mu_3 x_3 \mathfrak{r}_3)(\nu_1 u_1 \mathfrak{l}_1 + \nu_2 u_2 \mathfrak{l}_2 + \nu_3 u_3 \mathfrak{l}_3)$$

Ce produit vectoriel s'effectue très simplement si nous substituons au vecteur de la *face:*

$$\nu_1 u_1 \mathfrak{l}_1 + \nu_2 u_2 \mathfrak{l}_2 + \nu_3 u_3 \mathfrak{l}_3$$

le vecteur équivalent de son *arête* normale; en d'autres termes si nous rapportons, comme le vecteur de l'arête, le vecteur de la

Ce produit vectoriel s'effectue très simplement si nous substituons au vecteur de l'*arête :*

$$\mu_1 x_1 \mathfrak{r}_1 + \mu_2 x_2 \mathfrak{r}_2 + \mu_3 x_3 \mathfrak{r}_3$$

le vecteur équivalent de sa *face* normale; en d'autres termes si nous rapportons, comme le vecteur de la face, le vecteur de l'a-

face au trièdre des arêtes fondamentales :

$$\mu_1 \Omega'(u_1)\mathfrak{r}_1 + \mu_2 \Omega'(u_2)\mathfrak{r}_2 + \mu_3 \Omega'(u_3)\mathfrak{r}_3$$

Cela revient d'ailleurs à chercher le vecteur de la *face coplanaire* aux 2 arêtes d'indices x_i et $\Omega'(u_i)$; ses indices sont en effet (§ 31) les déterminants de 2me ordre :

$$\begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ \Omega'(u_2) & \Omega'(u_3) \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_3 & x_1 \\ \Omega'(u_3) & \Omega'(u_1) \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ \Omega'(u_1) & \Omega'(u_2) \end{vmatrix}$$

que nous donnerait également le produit vectoriel posé.

Naturellement la même réserve est à faire ici que dans les paragraphes précédents. Cette face normale n'est une face possible que lorsque ses indices c'est-à-dire lorsque les valeurs $\Omega'(u_i)$ sont des quantités rationnelles. Pour les faces du complexe cubique, les faces des zones isotropes du complexe hexagonal et quadratique, les 3 faces fondamentales du complexe rhombique et la face $\mathfrak{l}_1$ du complexe monocline, la face normale passant par une arrête quelconque est donc toujours une face possible. C'est d'ailleurs ce qui a déjà été dit sous une autre forme en parlant des zones orthogonales.

rête au trièdre des vecteurs des faces fondamentales :

$$\nu_1 \omega'(x_1)\mathfrak{l}_1 + \nu^2 \omega'(x_2)\mathfrak{l}_2 + \nu_3 \omega'(x_3)\mathfrak{l}_3$$

Cela revient d'ailleurs à chercher le vecteur de l'*arête intersection* des 2 faces d'indices u_i et $\omega'(x_i)$; ses indices sont en effet (§ 31) les déterminants de 2me ordre :

$$\begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ \omega'(x_2) & \omega'(x_3) \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} u_3 & u_1 \\ \omega'(x_3) & \omega'(x_1) \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ \omega'(x_1) & \omega'(x_2) \end{vmatrix}$$

que nous donnerait également le produit vectoriel posé.

Naturellement la même réserve est à faire ici que dans les paragraphes précédents. Cette arête normale n'est une arête possible que lorsque ses indices c'est-à-dire lorsque les valeurs $\omega'(x_i)$ sont des quantités rationnelles. Pour les arêtes du complexe cubique, les arêtes des zones isotropes du complexe hexagonal et quadratique, les 3 arêtes fondamentales du complexe rhombique et l'arête $\mathfrak{r}_1$ du complexe monocline, l'arête normale coplanaire à une face quelconque est donc toujours une arête possible. C'est d'ailleurs ce qui a déjà été dit sous une autre forme en parlant des zones d'arêtes orthogonales.

CHAPITRE VIII

47. De la simple considération du complexe total des faces et arêtes possibles du cristal, nous avons déjà tiré la conclusion au dernier paragraphe du chap. IV (§ 22), que les indices de ces faces et arêtes restent *entiers* quelles que soient les 4 d'entre elles (faces ou arêtes) auxquelles on les rapporte. Si donc les $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i, \delta_i$, sont les indices de 4 faces ou de 4 arêtes du complexe par rapport à un premier système, et les $\alpha'_1, \beta'_i, \gamma'_i, \delta'_i$ leurs indices par rapport à un second système de référence (§ 27bis), ceux-ci sont *entiers* comme les premiers ; et puisque 4 faces ou 4 arêtes, dont il n'y en ait pas 3 tautozonales ou coplanaires, sont nécessaires et suffisantes pour déterminer complètement un complexe de faces et arêtes cristallines, le problème du changement des indices se pose ainsi d'une manière tout à fait générale : Etant donnés les 4 couples d'indices $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i, \delta_i$ et $\alpha'_i, \beta'_i, \gamma'_i, \delta'_i$, et les *éléments* complets du 1er système de référence, déterminer successivement :

1° les nouveaux indices u'_i de toute face d'anciens indices u_i.
2° les éléments du système des nouvelles faces élémentaires.
3° les nouveaux indices x'_i de toute arête d'anciens indices x_i.
4° les éléments du système des nouvelles arêtes élémentaires.

Nous ne traitons que le cas où les indices donnés sont ceux de 4 *faces,* dont il n'y en a donc pas trois tautozonales ; le cas où ils seraient les indices de 4 *arêtes,* non 3 à 3 coplanaires, se traiterait d'une manière identique et en tout parallèlement au premier.

48. Les 3 premières faces rapportées successivement au système *connu* $\mathfrak{l}_0$, $\mathfrak{l}_1$, $\mathfrak{l}_2$, $\mathfrak{l}_3$ et au système *inconnu* $\mathfrak{l}'_0$, $\mathfrak{l}'_1$, $\mathfrak{l}'_2$, $\mathfrak{l}'_3$, (mais par rapport auquel nous connaissons cependant leurs indices), nous donnent, les facteurs ϱ_1, ϱ_2, ϱ_3 satisfaisant aux équations :

$$\Omega(\alpha\alpha) = \varrho_1^2\, \Omega'(\alpha'\alpha'),\quad \Omega(\beta\beta) = \varrho_2^2\, \Omega'(\beta'\beta'),\quad \Omega(\gamma\gamma) = \varrho_3^2\, \Omega'(\gamma'\gamma')$$

et par le fait rendant égaux les tenseurs des 2 membres correspondants, les 3 égalités vectorielles suivantes :

$$\begin{aligned}
\nu_1\alpha_1\mathfrak{l}_1 + \nu_2\alpha_2\mathfrak{l}_2 + \nu_3\alpha_3\mathfrak{l}_3 &= \varrho_1(\nu'_1\alpha'_1\mathfrak{l}'_1 + \nu'_2\alpha'_2\mathfrak{l}'_2 + \nu'_3\alpha'_3\mathfrak{l}'_3)\\
\nu_1\beta_1\mathfrak{l}_1 + \nu_2\beta_2\mathfrak{l}_2 + \nu_3\beta_3\mathfrak{l}_3 &= \varrho_2(\nu'_1\beta'_1\mathfrak{l}'_1 + \nu'_2\beta'_2\mathfrak{l}'_2 + \nu'_3\beta'_3\mathfrak{l}'_3) \qquad (24)\\
\nu_1\gamma_1\mathfrak{l}_1 + \nu_2\gamma_2\mathfrak{l}_2 + \nu_3\gamma_3\mathfrak{l}_3 &= \varrho_3(\nu'_1\gamma'_1\mathfrak{l}'_1 + \nu'_2\gamma'_2\mathfrak{l}'_2 + \nu'_3\gamma'_3\mathfrak{l}'_3)
\end{aligned}$$

Désignons un peu arbitrairement, il est vrai, mais d'une manière avantageuse pour rendre claire et simple notre transformation, par les symboles $|\alpha_1\alpha_2\alpha_3|$, $|\varrho\alpha'_1\alpha_2\alpha_3|$ $|\varrho\alpha'_2\alpha_2\alpha_3|$, etc., les déterminants de 3me ordre :

$$D_0 \equiv \begin{vmatrix}\alpha_1\alpha_2\alpha_3\\ \beta_1\beta_2\beta_3\\ \gamma_1\gamma_2\gamma_3\end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix}\varrho_1\alpha'_1\alpha_2\alpha_3\\ \varrho_2\beta'_1\beta_2\beta_3\\ \varrho_3\gamma'_1\gamma_2\gamma_3\end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix}\varrho_1\alpha'_2\alpha_2\alpha_3\\ \varrho_2\beta'_2\beta_2\beta_3\\ \varrho_3\gamma'_2\gamma_2\gamma_3\end{vmatrix}, \text{ etc.,}$$

et multiplions successivement nos 3 égalités par les déterminants mineurs dans D_0 de α_1, β_1, γ_1, de α_2, β_2, γ_2, et de α_3, β_3, γ_3. Nous obtenons ainsi sans aucune difficulté 3 nouvelles équations qui sont l'expression directe des vecteurs $\mathfrak{l}_i$ et des constantes ν_i, composantes de la première face-unité, en fonction des vecteurs $\mathfrak{l}'_i$ et des composantes ν'_i de la nouvelle face-unité :

$$\begin{aligned}
D_0\nu_1\mathfrak{l}_1 &= \nu'_1\,|\varrho\alpha'_1\alpha_2\alpha_3|\,\mathfrak{l}'_1 + \nu'_2\,|\varrho\alpha'_2\alpha_2\alpha_3|\,\mathfrak{l}'_2 + \nu'_3\,|\varrho\alpha'_3\alpha_2\alpha_3|\,\mathfrak{l}'_3\\
D_0\nu_2\mathfrak{l}_2 &= \nu'_1\,|\alpha_1\varrho\alpha'_1\alpha_3|\,\mathfrak{l}'_1 + \nu'_2\,|\alpha_1\varrho\alpha'_2\alpha_3|\,\mathfrak{l}'_2 + \nu'_3\,|\alpha_1\varrho\alpha'_3\alpha_3|\,\mathfrak{l}'_3 \qquad (25)\\
D_0\nu_3\mathfrak{l}_3 &= \nu'_1\,|\alpha_1\alpha_2\varrho\alpha'_1|\,\mathfrak{l}'_1 + \nu'_2\,|\alpha_1\alpha_2\varrho\alpha'_2|\,\mathfrak{l}'_2 + \nu'_3\,|\alpha_1\alpha_2\varrho\alpha'_3|\,\mathfrak{l}'_3
\end{aligned}$$

Si nous substituons, dans le vecteur de la face d'indices quelconques u_i par rapport au premier système :

$$D_0(\nu_1 u_1\mathfrak{l}_1 + \nu_2 u_2\mathfrak{l}_2 + \nu_3 u_3\mathfrak{l}_3)$$

aux valeurs $D_0\nu_i\mathfrak{l}_i$ celles que nous venons de trouver, nous obtenons le vecteur de cette même face rapporté au système des $\mathfrak{l}'_i$:

$$\begin{aligned}
&\nu'_1(u_1\,|\varrho\alpha'_1\alpha_2\alpha_3| + u_2\,|\alpha_1\varrho\alpha'_1\alpha_3| + u_3\,|\alpha_1\alpha_2\varrho\alpha'_1|)\,\mathfrak{l}'_1\\
+\,&\nu'_2(u_1\,|\varrho\alpha'_2\alpha_2\alpha_3| + u_2\,|\alpha_1\varrho\alpha'_2\alpha_3| + u_3\,|\alpha_1\alpha_2\varrho\alpha'_2|)\,\mathfrak{l}'_2\\
+\,&\nu'_3(u_3\,|\varrho\alpha'_3\alpha_2\alpha_3| + u_2\,|\alpha_1\varrho\alpha'_3\alpha_3| + u_3\,|\alpha_1\alpha_2\varrho\alpha'_3|)\,\mathfrak{l}'_3
\end{aligned}$$

Et ainsi les quantités entre parenthèses ne sont autres que les nouveaux indices u'_i cherchés, qui d'ailleurs sous forme développée, s'écrivent très bien en déterminant de 4me ordre :

$$u'_1 : u'_2 : u'_3 = \begin{vmatrix}u_1\ u_2\ u_3\ o\\ \alpha_1\alpha_2\alpha_3\varrho_1\alpha'_1\\ \beta_1\beta_2\beta_3\varrho_2\beta'_1\\ \gamma_1\gamma_2\gamma_3\varrho_3\gamma'_1\end{vmatrix} : \begin{vmatrix}u_1\ u_2\ u_3\ o\\ \alpha_1\alpha_2\alpha_3\varrho_1\alpha'_2\\ \beta_1\beta_2\beta_3\varrho_2\beta'_2\\ \gamma_1\gamma_2\gamma_3\varrho_3\gamma'_2\end{vmatrix} : \begin{vmatrix}u_1\ u_2\ u_3\ o\\ \alpha_1\alpha_2\alpha_3\varrho_1\alpha'_3\\ \beta_1\beta_2\beta_3\varrho_2\beta'_3\\ \gamma_1\gamma_2\gamma_3\varrho_3\gamma'_3\end{vmatrix}$$

49. Reste à déterminer maintenant les facteurs ϱ_1, ϱ_2, ϱ_3, autrement que par les 3 équations qui nous ont servi à les poser, et dans lesquelles les formes $\Omega'(\alpha'\alpha')$, etc. sont pour le moment du moins également inconnues, et cela en utilisant précisément le couple d'indices δ_i et δ'_i de la 4me face donnée. Ainsi la première question du problème sera complètement résolue.

Puisque les δ'_i sont les nouveaux indices de la face δ_i, ils doivent donc vérifier l'égalité proportionnelle que nous venons de trouver :

$$\delta'_1 : \delta'_2 : \delta'_3 = \begin{vmatrix} \delta_1 & \delta_2 & \delta_3 & 0 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \varrho_1\alpha'_1 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & \varrho_2\beta'_1 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 & \varrho_3\gamma'_1 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} \delta_1 & \delta_2 & \delta_3 & 0 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \varrho_1\alpha'_2 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & \varrho_2\beta'_2 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 & \varrho_3\gamma'_2 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} \delta_1 & \delta_2 & \delta_3 & 0 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \varrho_1\alpha'_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & \varrho_2\beta'_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 & \varrho_3\gamma'_3 \end{vmatrix}$$

et qui, abstraction faite d'un facteur de proportionnalité, se décompose par rapport aux inconnues ϱ_i en 3 équations partielles, dont nous écrivons encore symboliquement les déterminants-coefficients :

$$\begin{aligned} \delta'_1 &= \varrho_1\alpha'_1\,|\delta\,\beta\,\gamma| + \varrho_2\beta'_1\,|\delta\,\gamma\,\alpha| + \varrho_3\gamma'_1\,|\delta\,\alpha\,\beta| \\ \delta'_2 &= \varrho_1\alpha'_2\,|\delta\,\beta\,\gamma| + \varrho_2\beta'_2\,|\delta\,\gamma\,\alpha| + \varrho_3\gamma'_2\,|\delta\,\alpha\,\beta| \\ \delta'_3 &= \varrho_1\alpha'_3\,|\delta\,\beta\,\gamma| + \varrho_2\beta'_3\,|\delta\,\gamma\,\alpha| + \varrho_3\gamma'_3\,|\delta\,\alpha\,\beta| \end{aligned}$$

Ces 3 équations se résolvent immédiatement, mais comme en réalité, en tant que provenant d'une égalité de rapports, elles ne sont que deux à deux indépendantes l'une de l'autre, nous n'avons le droit d'en tirer de même que les rapports des quantités ϱ_i, pour lesquels nous avons donc en multipliant par le déterminant commun $|\alpha'\beta'\gamma'|$:

$$\varrho_1 : \varrho_2 : \varrho_3 = \frac{|\delta'\,\beta'\gamma'|}{|\delta\;\beta\;\gamma|} : \frac{|\delta'\,\gamma'\alpha'|}{|\delta\;\gamma\;\alpha|} : \frac{|\delta'\,\alpha'\beta'|}{|\delta\;\alpha\;\beta|} \tag{26}$$

Cela nous suffit d'ailleurs pleinement ; dans la proportion plus haut des indices u'_i, les facteurs ϱ_i jouant le même rôle dans chacun des indices et le premier terme de leur colonne étant nul, leurs rapports seuls entrent en ligne de compte. De même dans les proportions que nous trouverons plus loin les impliquant encore, ce ne sera toujours que le rapport de leurs valeurs qu'il nous sera nécessaire de connaître.

Introduisons donc notre résultat dans les déterminants de 4me ordre du § précédent, et nous obtenons directement sous leur forme

définitive les indices u'_i de toute face u_i uniquement en fonction des indices de 4 faces rapportées successivement aux 2 systèmes de référence :

$$
(26^{bis})\quad
\begin{aligned}
u'_1 &= \frac{|u\beta\gamma||\delta'\beta'\gamma'|}{|\delta\beta\gamma|}\alpha'_1 + \frac{|u\gamma\alpha||\delta'\gamma'\alpha'|}{|\delta\gamma\alpha|}\beta'_1 + \frac{|u\alpha\beta||\delta'\alpha'\beta'|}{|\delta\alpha\beta|}\gamma'_1\\
u'_2 &= \frac{|u\beta\gamma||\delta'\beta'\gamma'|}{|\delta\beta\gamma|}\alpha'_2 + \frac{|u\gamma\alpha||\delta'\gamma'\alpha'|}{|\delta\gamma\alpha|}\beta'_2 + \frac{|u\alpha\beta||\delta'\alpha'\beta'|}{|\delta\alpha\beta|}\gamma'_2\\
u_3 &= \frac{|u\beta\gamma||\delta'\beta'\gamma'|}{|\delta\beta\gamma|}\alpha'_3 + \frac{|u\gamma\alpha||\delta'\gamma'\alpha'|}{|\delta\gamma\alpha|}\beta'_3 + \frac{|u\alpha\beta||\delta'\alpha'\beta'|}{|\delta\alpha\beta|}\gamma'_3
\end{aligned}
$$

50. Les ϱ_i ou du moins leurs rapports étant donc établis une fois pour toutes, les autres questions du problème ne présentent maintenant plus aucune difficulté. Continuons à désigner par les expressions $|\varrho\alpha'_1\ \varrho\alpha'_2\ \varrho\alpha'_3|$, $|\alpha_1\ \varrho\alpha'_2\ \varrho\alpha'_3|$, $|\alpha_2\ \varrho\alpha'_2\ \varrho\alpha'_3|$, etc., les déterminants de 3me ordre :

$$
\Delta_0 = \begin{vmatrix} \varrho_1\alpha'_1 & \varrho_1\alpha'_2 & \varrho_1\alpha'_3 \\ \varrho_2\beta'_1 & \varrho_2\beta'_2 & \varrho_2\beta'_3 \\ \varrho_3\gamma'_1 & \varrho_3\gamma'_2 & \varrho_3\gamma'_3 \end{vmatrix},\quad
\begin{vmatrix} \alpha_1 & \varrho_1\alpha'_2 & \varrho_1\alpha'_3 \\ \beta_1 & \varrho_2\beta'_2 & \varrho_2\beta'_3 \\ \gamma_1 & \varrho_3\gamma'_2 & \varrho_3\gamma'_3 \end{vmatrix},\quad
\begin{vmatrix} \alpha_2 & \varrho_1\alpha'_2 & \varrho_1\alpha'_3 \\ \beta_2 & \varrho_2\beta'_2 & \varrho_2\beta'_3 \\ \gamma_2 & \varrho_3\gamma'_2 & \varrho_3\gamma'_3 \end{vmatrix}
$$

et inversement de ce que nous avons fait pour notre première transformation, multiplions successivement les 3 égalités vectorielles primitives par les déterminants mineurs dans Δ_0 de $\varrho_1\alpha'_1$, $\varrho_2\beta'_1$, $\varrho_3\gamma'_1$, de $\varrho_1\alpha'_2$, $\varrho_2\beta'_2$, $\varrho_3\gamma'_2$, et de $\varrho_1\alpha'_3$, $\varrho_2\beta'_3$, $\varrho_3\gamma'_3$. Nous obtenons de nouveau sans aucune peine ces 3 équations, qui sont la contrepartie des équations (25) :

$$
(27)\quad
\begin{aligned}
\Delta_0\nu'_1\mathfrak{l}'_1 &= \nu_1|\alpha_1\varrho\alpha'_2\varrho\alpha'_3|\mathfrak{l}_1 + \nu_2|\alpha_2\varrho\alpha'_2\varrho\alpha'_3|\mathfrak{l}_2 + \nu_3|\alpha_3\varrho\alpha'_2\varrho\alpha'_3|\mathfrak{l}'_3\\
\Delta_0\nu'_2\mathfrak{l}'_2 &= \nu_1|\varrho\alpha'_1\alpha_1\varrho\alpha'_3|\mathfrak{l}_1 + \nu_2|\varrho\alpha'_1\alpha_2\varrho\alpha'_3|\mathfrak{l}_2 + \nu_3|\varrho\alpha'_1\alpha_3\varrho\alpha'_3|\mathfrak{l}_3\\
\Delta_0\nu'_3\mathfrak{l}'_3 &= \nu_1|\varrho\alpha'_1\varrho\alpha'_2\alpha_1|\mathfrak{l}_1 + \nu_2|\varrho\alpha'_1\varrho\alpha'_2\alpha_2|\mathfrak{l}_2 + \nu_3|\varrho\alpha'_1\varrho\alpha'_2\alpha_3|\mathfrak{l}_3
\end{aligned}
$$

et nous donnent immédiatement les *indices* des nouvelles faces fondamentales cherchées, rapportées au système connu de référence, et en les élevant au carré, le rapport des *composantes* ν'_i de la nouvelle face-unité, que nous écrivons, en faisant encore abstraction du facteur de proportionnalité :

$$
(28)\quad
\begin{aligned}
\nu'^2_1 &= \Omega(|\alpha_1\varrho\alpha'_2\varrho\alpha'_3|\ \ |\alpha_2\varrho\alpha'_2\varrho\alpha'_3|\ \ |\alpha_3\varrho\alpha'_2\varrho\alpha'_3|)\\
\nu'^2_2 &= \Omega(|\varrho\alpha'_1\alpha_1\varrho\alpha'_3|\ \ |\varrho\alpha'_1\alpha_2\varrho\alpha'_3|\ \ |\varrho\alpha'_1\alpha_3\varrho\alpha'_3|)\\
\nu'^2_3 &= \Omega(|\varrho\alpha'_1\varrho\alpha'_2\alpha_1|\ \ |\varrho\alpha'_1\varrho\alpha'_2\alpha_2|\ \ |\varrho\alpha'_1\varrho\alpha'_2\alpha_3|)
\end{aligned}
$$

Le calcul de ces dernières formes quadratiques quoique un peu long, n'offre aucune difficulté ; les constantes ν_i et les cos A_{ik} sont les éléments donnés du système des $\mathfrak{l}_i$, et il est facile de voir que dans ce cas-ci comme aussi pour les indices précédents des faces $\mathfrak{l}'_i$, il suffit toujours de la substitution des seuls rapports des facteurs ϱ_i trouvés au § précédent.

51. Avant de passer aux 2 autres questions du problème, appliquons nos résultats au cas particulier où les nouveaux indices α'_i, β'_i, γ'_i, δ'_i sont les valeurs 100, 010, 001, 111, c'est-à-dire au cas où les 4 faces données α_i, β_i, γ_i, δ_i sont prises elles-mêmes comme faces fondamentales du nouveau système de référence.

Les déterminants des équations (27) se réduisent immédiatement, comme cela doit être, aux simples indices α_i, β_i, γ_i des 3 nouvelles faces fondamentales données ; les déterminants $|\delta'\beta'\gamma'|$, $|\delta'\gamma'\alpha'|$, $|\delta'\alpha'\beta'|$ des égalités (26bis) se ramenant à l'unité, toute face d'anciens indices u_i, reçoit pour ses nouveaux indices u'_i :

$$u'_1 : u'_2 : u'_3 = \frac{|u\beta\gamma|}{|\delta\beta\gamma|} : \frac{|u\gamma\alpha|}{|\delta\gamma\alpha|} : \frac{|u\alpha\beta|}{|\delta\alpha\beta|}$$

et enfin les formes quadratiques (28) se simplifiant considérablement, les composantes ν'_i de la nouvelle face-unité, d'anciens indices δ_i, deviennent d'abord, en sortant de la forme correspondante les facteurs $\varrho_i\varrho_k$:

$$\nu'^2_1 : \nu'^2_2 : \nu'^2_3 = \varrho_2^2\varrho_3^2\Omega(\alpha\alpha) : \varrho_3^2\varrho_1^2\Omega(\beta\beta) : \varrho_1^2\varrho_2^2\Omega(\gamma\gamma)$$

et ensuite, en divisant le second membre par le produit $\varrho_1^2\varrho_2^2\varrho_3^2$ et substituant aux ϱ_i les valeurs trouvées de leurs rapports :

$$\nu'_1 : \nu'_2 : \nu'_3 = |\delta\beta\gamma|\sqrt{\Omega(\alpha\alpha)} : |\delta\gamma\alpha|\sqrt{\Omega(\beta\beta)} : |\delta\alpha\beta|\sqrt{\Omega(\gamma\gamma)}$$

Au cas où les indices α_i, β_i, γ_i, δ_i seraient *réduites*, c'est-à-dire telles que les tenseurs $\sqrt{\Omega(\alpha\alpha)}$, $\sqrt{\Omega(\beta\beta)}$, $\sqrt{\Omega(\gamma\gamma)}$, des vecteurs des faces correspondantes se réduisent à l'unité, le rapport des composantes ν'_i se réduirait également au seul rapport des 3 déterminants que constituent les indices.

52. Les deux dernières questions que nous nous sommes posées se traiteront maintenant sans aucune peine et par le même procédé que nous avons mis à traiter les 2 premières, dès que nous aurons

établi, parallèlement aux égalités (24) entre les vecteurs des 3 premières faces données, 3 égalités correspondantes entre les vecteurs des *arêtes* qui déterminent les intersections de ces 3 faces.

Pour cela, multiplions vectoriellement deux à deux et membre à membre ces égalités (24). Si nous appelons A_i, B_i, Γ_i les mineurs du déterminant D_0, (§ 48), correspondants aux α_i, β_i, γ_i et $R_1 A'_i$ $R_2 B'_i$, R_3 Γ'_i, ceux du déterminant Δ_0, (§ 50), correspondants aux $\varrho_1 \alpha'_i$, $\varrho_2 \beta'_i$, $\varrho_3 \gamma'_i$; si nous tenons compte également, comme nous l'avons déjà fait au § 31, des équations (1), (§ 8), et de la relation fondamentale entre les composantes de la face et de l'arête-unité dans chacun des 2 systèmes de référence :

$$\mu_i \nu_i = \sin A_i \qquad\qquad \mu'_i \nu'_i = \sin A'_i \ ;$$

si enfin nous négligeons d'écrire aux premiers membres le facteur constant : $\nu_1 \nu_2 \nu_3 : \nu'_1 \nu'_2 \nu'_3$, complètement inutile dans tout ce que nous voulons établir, nous obtenons sans difficulté, entre les vecteurs des arêtes demandées, les 3 nouvelles égalités, complètement homologues des 3 égalités vectorielles (24) :

$$\begin{aligned} &\mu_1 A_1 \mathfrak{r}_1 + \mu_2 A_2 \mathfrak{r}_2 + \mu_3 A_3 \mathfrak{r}_3 = R_1 (\mu'_1 A'_1 \mathfrak{r}'_1 + \mu'_2 A'_2 \mathfrak{r}'_2 + \mu'_3 A'_3 \mathfrak{r}'_3) \\ (29)\quad &\mu_1 B_1 \mathfrak{r}_1 + \mu_2 B_2 \mathfrak{r}_2 + \mu_3 B_3 \mathfrak{r}_3 = R_2 (\mu'_1 B'_1 \mathfrak{r}'_1 + \mu'_2 B'_2 \mathfrak{r}'_2 + \mu'_3 B'_3 \mathfrak{r}'_3) \\ &\mu_1 \Gamma_1 \mathfrak{r}_1 + \mu_2 \Gamma_2 \mathfrak{r}_2 + \mu_3 \Gamma_3 \mathfrak{r}_3 = R_3 (\mu'_1 \Gamma'_1 \mathfrak{r}'_1 + \mu'_2 \Gamma'_2 \mathfrak{r}'_2 + \mu'_3 \Gamma'_3 \mathfrak{r}'_3) \end{aligned}$$

53. Reprenons naturellement pour les déterminants la notation symbolique employée dans la première partie et multiplions successivement ces 3 égalités vectorielles par α_1, β_1, γ_1, par α_2, β_2, γ_2 et par α_3, β_3, γ_3. Nous avons aussitôt, parallèlement aux équations (25), les 3 équations suivantes, qui sont l'expression immédiate des vecteurs $\mathfrak{r}_i$ et des constantes μ_i, composantes de la première arête-unité, en fonction des vecteurs $\mathfrak{r}'_i$ et des composantes μ'_i de la nouvelle arête-unité :

$$\begin{aligned} D_0 \mu_1 \mathfrak{r}_1 &= \mu'_1 |\alpha_1 \varrho\alpha'_2 \varrho\alpha'_3| \mathfrak{r}'_1 + \mu'_2 |\varrho\alpha'_1 \alpha_1 \varrho\alpha'_3| \mathfrak{r}'_2 + \mu'_3 |\varrho\alpha'_1 \varrho\alpha'_2 \alpha_1| \mathfrak{r}'_3 \\ D_0 \mu_2 \mathfrak{r}_2 &= \mu'_1 |\alpha_2 \varrho\alpha'_2 \varrho\alpha'_3| \mathfrak{r}'_1 + \mu'_2 |\varrho\alpha'_1 \alpha_2 \varrho\alpha'_3| \mathfrak{r}'_2 + \mu'_3 |\varrho\alpha'_1 \varrho\alpha'_2 \alpha_2| \mathfrak{r}'_3 \qquad (30) \\ D_0 \mu_3 \mathfrak{r}_3 &= \mu'_1 |\alpha_3 \varrho\alpha'_2 \varrho\alpha'_3| \mathfrak{r}'_1 + \mu'_2 |\varrho\alpha'_1 \alpha_3 \varrho\alpha'_3| \mathfrak{r}'_2 + \mu'_3 |\varrho\alpha'_1 \varrho\alpha'_2 \alpha_3| \mathfrak{r}'_3 \end{aligned}$$

En substituant dans le vecteur de l'arête d'indices quelconques x_i par rapport au système des $\mathfrak{r}_i$:

$$D_0 (\mu_1 x_1 \mathfrak{r}_1 + \mu_2 x_2 \mathfrak{r}_2 + \mu_3 x_3 \mathfrak{r}_3)$$

aux valeurs $D_0 \mu_i \mathfrak{r}_i$ celles que nous venons de trouver, nous obtenons le vecteur de cette même arête rapportée au système des $\mathfrak{r}'_i$:

$$\begin{aligned} &\mu'_1(x_1|\alpha_1\varrho\alpha'_2\varrho\alpha'_3|+x_2|\alpha_2\varrho\alpha'_2\varrho\alpha'_3|+x_3|\alpha_3\varrho\alpha'_2\varrho\alpha'_3|\mathfrak{r}'_1 \\ +\ &\mu'_2(x_1|\varrho\alpha'_1\alpha_1\varrho\alpha'_3|+x_2|\varrho\alpha'_1\alpha_2\varrho\alpha'_3|+x_3|\varrho\alpha'_1\alpha_3\varrho\alpha'_3|\mathfrak{r}'_2 \\ +\ &\mu'_3(x_1|\varrho\alpha'_1\varrho\alpha'_2\alpha_1|+x_2|\varrho\alpha'_1\varrho\alpha'_2\alpha_2|+x_3|\varrho\alpha'_1\varrho\alpha'_2\alpha_3|\mathfrak{r}'_3 \end{aligned}$$

et entre parenthèses ses nouveaux *indices* x_i cherchés qui s'écrivent d'ailleurs très bien, en les développant, sous forme de ces déterminants de 3me ordre :

$$x'_1 : x'_2 : x'_3 =$$

$$\begin{vmatrix} x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_3\alpha_3 & \varrho_1\alpha'_2 & \varrho_1\alpha'_3 \\ x_1\beta_1+x_2\beta_2+x_3\beta_3 & \varrho_2\beta'_2 & \varrho_2\beta'_3 \\ x_1\gamma_1+x_2\gamma_2+x_3\gamma_3 & \varrho_3\gamma'_2 & \varrho_3\gamma'_3 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} \varrho_1\alpha'_1 & x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_3\alpha_3 & \varrho_1\alpha'_3 \\ \varrho_2\beta'_1 & x_1\beta_1+x_2\beta_2+x_3\beta_3 & \varrho_2\beta'_3 \\ \varrho_3\gamma'_1 & x_1\gamma_1+x_2\gamma_2+x_3\gamma_3 & \varrho_3\gamma'_3 \end{vmatrix}$$

$$: \begin{vmatrix} \varrho_1\alpha'_1 & \varrho_1\alpha'_2 & x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_3\alpha_3 \\ \varrho_2\beta'_1 & \varrho_2\beta'_2 & x_1\beta_1+x_2\beta_2+x_3\beta_3 \\ \varrho_3\gamma'_1 & \varrho_3\gamma'_2 & x_1\gamma_1+x_2\gamma_2+x_3\gamma_3 \end{vmatrix}$$

Comme dans les deux cas des valeurs des indices u'_i et des constantes ν'_i, ce n'est toujours que les rapports des ϱ_i qu'il nous est nécessaire de connaître, et nous pourrions, comme pour les indices u'_i écrire nos déterminants en y introduisant en place des ϱ_i les quotients (26) représentant leurs valeurs ; mais cette substitution est inutile et le résultat est plus élégant de le garder sous cette forme.

54. Si enfin, à l'inverse de nouveau de cette première transformation, nous multiplions successivement les 3 égalités (29) par $\varrho_1\alpha'_1$, $\varrho_2\beta'_1$, $\varrho_3\gamma'_1$, par $\varrho_1\alpha'_2$, $\varrho_2\beta'_2$, $\varrho_3\gamma'_2$ et par $\varrho_1\alpha'_3$, $\varrho_2\beta'_3$, $\varrho_3\gamma'_3$, nous obtenons parallèlement encore aux équations (27), ces 3 dernières égalités :

$$(31)\quad \begin{aligned} \Delta_0\mu'_1\mathfrak{r}'_1 &= \mu_1\,|\varrho\alpha'_1\alpha_2\alpha_3|\,\mathfrak{r}_1+\mu_2\,|\alpha_1\varrho\alpha'_1\alpha_3|\,\mathfrak{r}_2+\mu_3\,|\alpha_1\alpha_2\varrho\alpha'_1|\,\mathfrak{r}_3 \\ \Delta_0\mu'_2\mathfrak{r}'_2 &= \mu_1\,|\varrho\alpha'_2\alpha_2\alpha_3|\,\mathfrak{r}_1+\mu_2\,|\alpha_1\varrho\alpha'_2\alpha_3|\,\mathfrak{r}_2+\mu_3\,|\alpha_1\alpha_2\varrho\alpha'_2|\,\mathfrak{r}_3 \\ \Delta_0\mu'_3\mathfrak{r}'_3 &= \mu_1\,|\varrho\alpha'_3\alpha_2\alpha_3|\,\mathfrak{r}_1+\mu_2\,|\alpha_1\varrho\alpha'_3\alpha_3|\,\mathfrak{r}_2+\mu_3\,|\alpha_1\alpha_2\varrho\alpha'_3|\,\mathfrak{r}_3 \end{aligned}$$

Elles nous donnent immédiatement les *indices* des nouvelles arêtes fondamentales cherchées par rapport au système connu de référence, et en les élevant au carré le rapport des *composantes* μ_i de la nouvelle arête-unité, que nous écrivons de nouveau en faisant abstraction du facteur proportionnel :

$$\begin{aligned} \mu'^2_1 &= \omega\,(|\varrho\alpha'_1\alpha_2\alpha_3|\ \ |\alpha_1\varrho\alpha'_1\alpha_3|\ \ |\alpha_1\alpha_2\varrho\alpha'_1|) \\ \mu'^2_2 &= \omega\,(|\varrho\alpha'_2\alpha_2\alpha_3|\ \ |\alpha_1\varrho\alpha'_2\alpha_3|\ \ |\alpha_1\alpha_2\varrho\alpha'_2|) \\ \mu'^2_3 &= \omega\,(|\varrho\alpha'_3\alpha_2\alpha_3|\ \ |\alpha_1\varrho\alpha'_3\alpha_3|\ \ |\alpha_1\alpha_2\varrho\alpha'_3|) \end{aligned} \qquad (32)$$

Comme celles qui représentent les carrés des constantes ν'_i, ces dernières formes quadratiques ne présentent aucune difficulté de calcul; les constantes μ_i et les cos a_{ik} sont les éléments donnés du système des vecteurs $\mathfrak{r}_i$, et dans ce cas-ci encore il est clair à première vue que ce sont seuls les rapports des facteurs ϱ_i qu'il importe de connaître.

55. En terminant, comme nous l'avons fait pour la première partie, appliquons nos résultats au cas particulier où les indices α'_i, β'_i, γ'_i, δ'_i, prennent de nouveau les valeurs 100, 010, 001, 111, c'est-à-dire au cas où les intersections des 3 premières faces données α_i, β_i, γ_i sont les arêtes fondamentales elles-mêmes du nouveau système de référence, et son arête-unité, l'arête harmonique de la 4me face donnée δ_i.

Dans ces conditions, les déterminants du § 53 qui sont les indices x'_i de l'arête d'indices donnés x_i, se réduisent aux expressions suivantes:

$$x'_1 : x'_2 : x'_3 =$$
$$\varrho_2\varrho_3(x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + x_3\alpha_3) : \varrho_3\varrho_1(x_1\beta_1 + x_2\beta_2 + x_3\beta_3) : \varrho_1\varrho_2(x_1\gamma_1 + x_2\gamma_2 + x_3\gamma_3)$$

qui, divisées par le produit $\varrho_1\varrho_2\varrho_3$, prennent en substituant leurs valeurs aux ϱ_i qui restent en dénominateurs, la forme définitive:

$$x'_1 : x'_2 : x'_3 =$$
$$|\delta\beta\gamma|\,(x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + x_3\alpha_3) : |\delta\gamma\alpha|\,(x_1\beta_1 + x_2\beta_2 + x_3\beta_3) : |\delta\alpha\beta|\,(x_1\gamma_1 + x_2\gamma_2 + x_3\gamma_3)$$

Les 3 équations (31) qui nous donnent les indices des nouvelles arêtes fondamentales, deviennent chacune comme il doit en être, une égalité représentant le vecteur d'une arête en fonction des indices donnés des 2 faces dont elle est l'intersection: (§ 31)

$$\frac{1}{\varrho_1}\Delta_0\,\mu'_1\mathfrak{r}'_1 = \mu_1(\beta_2\gamma_3 - \beta_3\gamma_2)\mathfrak{r}_1 + \mu_2(\beta_3\gamma_1 - \beta_1\gamma_3)\mathfrak{r}_2 + \mu_3(\beta_1\gamma_2 - \beta_2\gamma_1)\mathfrak{r}_3$$
$$\frac{1}{\varrho_2}\Delta_0\,\mu'_2\mathfrak{r}'_2 = \mu_1(\gamma_2\alpha_3 - \gamma_3\alpha_2)\mathfrak{r}_1 + \mu_2(\gamma_3\alpha_1 - \gamma_1\alpha_3)\mathfrak{r}_2 + \mu_3(\gamma_1\alpha_2 - \alpha_1\gamma_2)\mathfrak{r}_3$$
$$\frac{1}{\varrho_3}\Delta_0\,\mu'_3\mathfrak{r}'_3 = \mu_1(\alpha_2\beta_3 - \alpha_3\beta_2)\mathfrak{r}_1 + \mu_2(\alpha_3\beta_1 - \alpha_1\beta_3)\mathfrak{r}_2 + \mu_3(\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1)\mathfrak{r}_3$$

Enfin par ce fait le rapport des composantes μ'_i se simplifie de la même manière; il s'écrit d'abord:

$$\mu'^2_1 : \mu'^2_2 : \mu'^2_3 =$$
$$\varrho_1^2\omega\,(\beta_2\gamma_3 - \beta_3\gamma_2 \ldots) : \varrho_2^2\omega\,(\gamma_2\alpha_3 - \gamma_3\alpha_2 \ldots) : \varrho_3^2\omega\,(\alpha_2\beta_3 - \alpha_3\beta_2 \ldots)$$

et en substituant aux ϱ_i^2 leurs valeurs, il devient le rapport des quotients de ces formes quadratiques par le carré du déterminant correspondant :

$$\mu_1'^2 : \mu_2'^2 : \mu_3'^2 =$$

$$\frac{\omega(\beta_2\gamma_3 - \beta_3\gamma_2 \ldots.)}{|\delta\beta\gamma|^2} : \frac{\omega(\gamma_2\alpha_3 - \gamma_3\alpha_2 \ldots.)}{|\delta\gamma\alpha|^2} : \frac{\omega(\alpha_2\beta_3 - \alpha_3\beta_2 \ldots.)}{|\delta\alpha\beta|^2}$$

CHAPITRE IX

56. Les *coordonnées projectives* de la droite ou du point sur la sphère ne sont les *indices* de la face et de l'arête correspondante (§ 13) qu'autant que les constantes ν_i (et μ_i) déterminent elles-mêmes une face (et une arête-unité) prises dans le complexe des faces et arêtes possibles du cristal. Pour tout autre choix purement arbitraire de ces constantes, les valeurs u_i et x_i n'ont donc plus rien de l'essentielle propriété des indices que constitue leur *rationnalité,* mais restent néanmoins pour la face et l'arête qu'elles déterminent ce qu'elles sont pour la droite sphérique et le point correspondant : les simples *coordonnées projectives* de cette face et de cette arête, rapportées au trièdre des 3 faces fondamentales avec des constantes ν_i (et μ_i arbitrairement choisies.)

Or tout ce qui a été établi jusqu'ici des indices, en dehors précisément de ce qui touche à leur rationnalité qui seul exige expressément pour sa démonstration que la face (et l'arête-unité) soient une face (et une arête du complexe), est complètement indépendant des valeurs ν_i et μ_i à la seule condition que celles-ci satisfassent aux relations essentielles $\mu_i \nu_i = \sin A_i$. Les résultats des §§ (23—55) subsistent donc intégralement pour toutes les combinaisons $\mu_i \nu_i$ satisfaisant à cette condition, c'est-à-dire pour chacun de cette infinité de systèmes possibles de coordonnées projectives auxquels nous pouvons rapporter notre complexe du cristal.

57. Un seul de ces systèmes nous offre ici un intérêt particulier ; celui pour lequel nous choisissons les constantes :

$$\mu_i = 1 \qquad\qquad \nu_i = \sin A_i$$

qui remplissent donc ainsi la condition nécessaire $\mu_i \nu_i = \sin A_i$. Le

point-unité sur la sphère étant alors le barycentre * du triangle sphérique que déterminent les $\mathfrak{r}_i$ (la droite-unité est sa polaire trilinéaire ou le grand cercle parallèle à la circonférence circonscrite à ce même triangle), on obtient ainsi directement les coordonnés barycentriques de Möbius de la droite et du point sur la sphère **, tandis que pour la face et l'arête correspondante les valeurs u_i et x_i ne sont autres que ce que Liebisch appelle tout court les *coordonnées* des faces et arêtes du cristal.

En effet dans ce cas, les rapports des valeurs u_i et x_i que nous fournit le § 26, se réduisent à :

$$u_1 : u_2 : u_3 = \cos\vartheta_1 : \cos\vartheta_2 : \cos\vartheta_3 \tag{33}$$
$$x_1 : x_2 : x_3 = \sin A_1 \cos\vartheta_1 : \sin A_2 \cos\vartheta_2 : \sin A_3 \cos\vartheta_3$$

Les coordonnées d'une *face* sont donc les *cosinus* des angles d'incidence de cette face par rapport aux *arêtes* fondamentales, ou un multiple positif quelconque de ces valeurs ; les coordonnées d'une *arête* sont les *cosinus, multiplié* chacun par le *sin* A_i *** correspondant, des angles d'incidence de cette arête par rapport aux *faces* fondamentales, ou un multiple positif quelconque de ces valeurs.

58. La relation fondamentale $\mu_i \nu_i = \sin A_i$ étant donc satisfaite, quoique non contenues l'une et l'autre dans le complexe des faces et arêtes possibles, l'arête-unité, ou plutôt la droite menée du point 0 au point-unité sur la sphère, n'en est pas moins l'harmonique de la face-unité, c'est-à-dire du plan du grand cercle qui est la droite-sphérique unité, et réciproquement. La relation :

$$u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3 = 0$$

qui est l'équation en *indices entiers* de la face u_i ou de l'arête x_i, reste l'équation en *coordonnées quelconques* de cette même face et

---

*) Si les vecteurs-unités $\mathfrak{r}_1$ $\mathfrak{r}_2$ $\mathfrak{r}_3$ déterminent les 3 sommets d'un triangle sphérique, le vecteur : $\mathfrak{r}_1 + \mathfrak{r}_2 + \mathfrak{r}_3$ détermine son barycentre, puisqu'il représente un point situé sur chacune des droites joignant un sommet au milieu du côté opposé.

**) M. Daniëls : Essai de géométrie sphérique en coordonnées projectives p. 45.

***) Liebisch multiplie par le sin a_i correspondant, mais ce sont les mêmes coordonnées puisque nous avons sin A_i .·. sin a_i, la seule différence qui en résulte est que plus loin nous trouverons la valeur Δ, sinus du trièdre des $\mathfrak{l}_i$ (§ 9), où Liebisch trouve la valeur D du sinus du trièdre des $\mathfrak{r}_i$, puisque $\Delta = MD$.

de cette même arête ; enfin identiquement au résultat du § 27, les coordonnées d'une face quelconque du cristal sont les valeurs *inverses* de celles de son arête harmonique, et celles d'une arête les valeurs inverses de celles de sa face harmonique,

Les coordonnées de *l'arête* intersection des 2 faces de coordonnées u_i et u'_i, sont encore les déterminants de second ordre :

$$\begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ u'_2 & u'_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} u_3 & u_1 \\ u'_3 & u'_1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ u'_1 & u'_2 \end{vmatrix}$$

Celles d'une 3me face tautozonale aux 2 faces données, sont également de la forme :

$$u_i - \lambda u'_i$$

mais le paramètre λ a perdu, comme les valeurs u_i et u'_i, sa propriété d'être nécessairement rationnel.

Enfin celles des 4 faces tautozonales u_i, u'_i, u''_i, u'''_i, satisfont encore l'égalité (19) :

$$(uu'u''u''') = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{(uu'')_i}{(u'u'')_i} : \frac{(uu''')_k}{(u'u''')_k}$$

et, quoique valeurs quelconques, représentent par ce rapport de leurs quotients ainsi constitués, la valeur rationnelle du rapport anharmonique des 4 faces.

Les coordonnées de la *face*-jonction des 2 arêtes de coordonnées x_i et x'_i, sont encore les déterminants de second ordre :

$$\begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ x'_2 & x'_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_3 & x_1 \\ x'_3 & x'_1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_1 & x_3 \\ x'_1 & x'_2 \end{vmatrix}$$

Celles d'une 3me arête coplanaire aux 2 arêtes données, sont également de la forme :

$$x_i - \lambda x'_i$$

mais le paramètre λ a perdu, comme les valeurs x_i et x'_i, sa propriété d'être essentiellement rationnel.

Enfin celles des 4 arêtes coplanaires x_i, x'_i, x''_i, x'''_i, satisfont encore l'égalité (19) :

$$(xx'x''x''') = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{(xx'')_i}{(x'x'')_i} : \frac{(xx''')_k}{(x'x''')_k}$$

et, quoique valeurs quelconques, représentent par ce rapport de leurs quotients ainsi constitués, la valeur rationnelle du rapport anharmonique des 4 arêtes.

59. Il serait facile de continuer à développer ainsi ce parallélisme complet entre les coordonnées et les indices des faces et arêtes du cristal pour les problèmes du § 38 et pour les autres résultats des chapitres précédents ; ce parallélisme est d'ailleurs naturellement le fait, comme nous l'avons dit, de chacun de l'infinité de systèmes possibles de coordonnées *projectives* auxquels nous pouvons rapporter le complexe du cristal. Il est par contre une particularité intéressante dans le système des *coordonnées* et y apportant une simplification qui ne se retrouve pour aucun autre système :

Le tenseur u_4 du vecteur de la face quelconque de coordonnées u_i :

$$\nu_1 u_1 \mathfrak{l}_1 + \nu_2 u_2 \mathfrak{l} + \nu_3 u_3 \mathfrak{l}_3$$

qui nous est fourni dans le cas général par la racine carrée de la forme quadratique $\Omega(uu)$, nous est en outre donné dans ce cas-ci, directement et sous une forme bien plus simple, par les 3 relations du § 14 :

$$u_4 \cos \vartheta_1 = \nu_1 u_1 \sin h_1$$
$$u_4 \cos \vartheta_2 = \nu_2 u_2 \sin h_2$$
$$u_4 \cos \vartheta_3 = \nu_3 u_3 \sin h_3$$

Si nous y substituons en effet aux valeurs u_i les coordonnées $\cos \vartheta_i$, chacune des 3 équations nous donne également :

$$u_4 = \sqrt{\Omega(uu)} = \Delta$$

ou mieux, pour éviter toute confusion, en écrivant dans la forme Ω, dont les coefficients ν_i sont les valeurs $\sin A_i$, les expressions mêmes $\cos \vartheta_i$:

$$\Delta = \sqrt{\Omega(\cos \vartheta \cos \vartheta)} \qquad (34)$$

Le tenseur x_4 du vecteur de l'arête quelconque de coordonnées x_i :

$$\mu_1 x_1 \mathfrak{r}_1 + \mu_2 x_2 \mathfrak{r}_2 + \mu_3 x_3 \mathfrak{r}_3$$

qui nous est fourni dans le cas général par la racine carrée de la forme quadratique $\omega(xx)$, nous est en outre donné dans ce cas-ci, directement et sous une forme bien plus simple, par les 3 relations du § 14 :

$$x_4 \cos \vartheta_1 = \mu_1 x_1 \sin h_1$$
$$x_4 \cos \vartheta_2 = \mu_2 x_2 \sin h_2$$
$$x_4 \cos \vartheta_3 = \mu_3 x_3 \sin h_3$$

Si nous y substituons en effet aux valeurs x_i les coordonnées $\sin A_i \cos \vartheta_i$, chacune des 3 équations nous donne également :

$$x_4 = \sqrt{\omega(xx)} = \Delta$$

ou mieux, pour éviter toute confusion, en écrivant dans la forme ω, dont les coefficients μ_i sont les valeurs $\mu_i = 1$, les expressions mêmes $\sin A_i \cos \vartheta_i$:

$$\Delta = \sqrt{\omega(\sin A \cos \vartheta . \sin A \cos \vartheta)} \quad (34)$$

Donc si les valeurs u_i et x_i sont les coordonnées *cos* ϑ_i et *sin* A_i *cos* ϑ_i des faces et arêtes du cristal, la racine de la fonction quadratique de ces coordonnées $\sqrt{\Omega(uu)}$ et $\sqrt{\omega(xx)}$, (nous écrivons u_i et x_i, également dans le paragraphe suivant, uniquement pour simplifier l'écriture), qui est le tenseur des vecteurs déterminant chaque face et chaque arête, est une quantité *constante,* indépendante de ces coordonnées u_i et x_i, et égale au *sinus* du *trièdre* des vecteurs des faces fondamentales.

60. Dans ces conditions, les résultats des §§ 29, 30, 32, etc., exprimés en coordonnées, nous donnent également les propriétés ou les simplifications suivantes.

Pour toute arête x_i non coplanaire à la face u_i, la fonction linéaire de leurs coordonnées ainsi constituée :

$$u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3 = \Delta \cos \vartheta \tag{35}$$

est constamment égale au produit du *sinus* du *trièdre* des l_i par le *cosinus* de l'*angle* d'incidence de l'arête par rapport à la face.

Le *cosinus* et le *sinus* de l'angle φ de 2 faces de coordonnées u_i et u'_i deviennent; en d'autres termes, entre le cosinus ou le sinus de l'angle φ de 2 faces, leurs $\cos \vartheta_i$ et $\cos \vartheta'_i$ correspondants, et les constantes angulaires du complexe, il existe les 2 relations suivantes :

$$\cos \varphi = \frac{\Omega(uu')}{\Delta^2}$$

$$\sin \varphi = \frac{M.\sqrt{\omega[(uu')(uu')]}}{\Delta}$$

Le *paramètre* λ des coordonnées de la 3me face u''_i tautozonale aux 2 faces données u_i et u'_i, est indépendant des tenseurs $\sqrt{\Omega(uu)}$ et $\sqrt{\Omega(u'u'}$ des vecteurs de ces faces :

$$\lambda = \frac{\sin uu''}{\sin u'u''}$$

Enfin la fonction linéaire suivante, constituée des coordonnées d'une *face* et de celles de son *arête* normale :

$$u_1\Omega'(u_1)+u_2\Omega'(u_2)+u_3\Omega'(u_3)=\Omega(uu)$$

est également une constante, et si nous remarquons que les valeurs $\Omega'(u_i)$ sont les valeurs absolues Δx_i (§ 41), la fonction des

Le *cosinus* et le *sinus* de l'angle ψ de 2 arêtes de coordonnées x_i et x'_i deviennent; en d'autres termes, entre le cosinus ou le sinus de l'angle ψ de 2 arêtes, leurs $\cos \vartheta_i$ et $\cos \vartheta'_i$ correspondants, et les constantes angulaires du complexe, il existe les 2 relations suivantes :

$$\cos \psi = \frac{\omega(xx')}{\Delta^2}$$

$$\sin \psi = \frac{\sqrt{\Omega[(xx')(xx')]}}{M.\Delta^2}$$

Le *paramètre* λ des coordonnées de la 3me arête x''_i coplanaire aux 2 arêtes données x_i et x'_i, est indépendant des tenseurs $\sqrt{\omega(xx)}$ et $\sqrt{\omega(x'x')}$ des vecteurs de ces arêtes :

$$\lambda = \frac{\sin xx''}{\sin x'x''}$$

Enfin la fonction linéaire suivante, constituée des coordonnées d'une *arête* et de celles de sa *face* normale :

$$x_1\omega'(x_1)+x_2\omega'(x_2)+x_3\omega'(x_3)=\omega(xx)$$

est également une constante, et si nous remarquons que les valeurs $\omega'(x_i)$ sont les valeurs absolues Δu_i (§ 41), la fonction des

seules coordonnées ($\cos\vartheta_i$ et $\sin A_i \cos\vartheta_i$) :

$$u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3 = \Delta \quad (36)$$

est encore une *constante* égale au *sinus* Δ des vecteurs des faces fondamentales.

seules coordonnées ($\sin A_i \cos\vartheta_i$ et $\cos\vartheta_i$) :

$$x_1u_1 + x_2u_2 + x_3u_3 = \Delta \quad (36)$$

est encore une *constante* égale au *sinus* Δ des vecteurs des faces fondamentales.

61. Tout ce qui vient d'être dit des coordonnées trouve son application immédiate dans le cas même des *indices* du premier complexe cristallin. En choisissant comme faces fondamentales les 3 faces du cube et comme face-unité la face de l'octaèdre dont l'arête harmonique *possible* est la diagonale du cube passant par le point 0 et détermine le barycentre du triangle sphérique des $\mathfrak{r}_i$, les constantes du complexe *cubique* satisfont en effet les conditions du système des coordonnées :

$$\mu_i = 1 \qquad \nu_i = \sin A_i = 1$$
$$\cos a_i = 0 \qquad \Delta = 1 \qquad \cos A_i = 0$$

Pour le système de référence choisi, les *indices entiers* des faces et arêtes du complexe cubique et leurs *coordonnées* sont donc les *mêmes valeurs.*

Pour chaque *face* du complexe, les $\cos\vartheta_i$ de ses angles d'incidence par rapport aux *arêtes* fondamentales, sont donc entre eux dans le rapport de 3 nombres *entiers* quelconques :

$$\cos\vartheta_1 : \cos\vartheta_2 : \cos\vartheta_3 = m : n : p$$

Pour chaque face du complexe, sa forme quadratique $\Omega(\cos\vartheta \cos\vartheta)$ correspondante, ainsi simplifiée puisque $\sin A_i = 1$ et $\cos A_i = 0$, se réduit à l'unité :

$$\cos^2\vartheta_1 + \cos^2\vartheta_2 + \cos^2\vartheta_3 = 1$$

Pour chaque *arête* du complexe, les $\cos\vartheta_i$ de ses angles d'incidence par rapport aux *faces* fondamentales (puisque $\sin A_i = 1$), sont donc entre eux dans le rapport de 3 nombres *entiers* quelconques :

$$\cos\vartheta_1 : \cos\vartheta_2 : \cos\vartheta_3 = m : n : p$$

Pour chaque arête du complexe, sa forme quadratique $\omega(\cos\vartheta \cos\vartheta)$ correspondante, ainsi simplifiée puisque $\sin A_i = 1$ et $\cos a_i = 0$, se réduit à l'unité :

$$\cos^2\vartheta_1 + \cos^2\vartheta_2 + \cos^2\vartheta_3 = 1$$

C'est la relation originelle entre la somme des carrés des cosinus-directeurs d'un vecteur quelconque par rapport au système d'axes rectangulaires passant par son origine.

Les indices de chaque *face* du complexe cubique sont ceux de son arête normale (§ 43). Les angles d'incidence de chaque face par rapport aux arêtes fondamentales étant les angles d'incidence de l'arête normale par rapport aux faces fondamentales avec le système de référence choisi, les coordonnées c'est-à-dire les cos ϑ_i de chaque face du complexe cubique sont également les coordonnées ou les cos ϑ_i de son arête normale. Leur fonction linéaire de la forme (36) a donc encore pour valeur Δ c'est-à-dire l'unité.

Les indices de chaque *arête* du complexe cubique sont ceux de sa face normale (§ 43). Les angles d'incidence de chaque arête par rapport aux faces fondamentales étant les angles d'incidence de la face normale par rapport aux arêtes fondamentales avec le système de référence choisi, les coordonnées c'est-à-dire les cos ϑ_i de chaque arête du complexe cubique sont également les coordonnées ou les cos ϑ_i de sa face normale. Leur fonction linéaire de la forme (36) a donc encore pour valeur Δ c'est-à-dire l'unité.

Le cos ϑ de l'angle d'incidence d'une face et d'une arête quelconque est la fonction des cos ϑ_i de cette face et de cette arête :

$$\cos\vartheta = \cos\vartheta_1 . \cos\vartheta_1 + \cos\vartheta_2 . \cos\vartheta_2 + \cos\vartheta_3 . \cos\vartheta_3$$

Le *cosinus* et le *sinus* de l'angle de 2 faces sont les fonctions de leurs cos ϑ_i et cos ϑ_i' :

$$\cos\varphi = \cos\vartheta_1\cos\vartheta_1' + \cos\vartheta_2'\cos\vartheta_2' + \cos\vartheta_3 c.\vartheta_3'$$

$$\sin\varphi = \sqrt{(\cos\vartheta_2\cos\vartheta_3' - \cos\vartheta_3 c.\vartheta_2')^2 + ()^2 + ()^2}$$

Le *cosinus* et le *sinus* de l'angle de 2 arêtes sont les fonctions de leurs cos ϑ_i et cos ϑ_i' :

$$\cos\psi = \cos\vartheta_1\cos\vartheta_1' + \cos\vartheta_2\cos\vartheta_2' + \cos\vartheta_3 c.\vartheta_3'$$

$$\sin\psi = \sqrt{(\cos\vartheta_2\cos\vartheta_3' - \cos\vartheta_3 c.\vartheta_2')^2 + ()^2 + ()^2}$$

Enfin puisque les coordonnées du complexe cubique sont également ses indices (naturellement uniquement toujours pour le système de référence choisi), le paramètre λ de ces coordonnés est une quantité *rationnelle* et puisque nous avons : (§ précédent)

$$\lambda = \frac{\sin uu''}{\sin u'u''}$$

le *rapport* de *position* de chaque *face* du complexe cubique par rapport à 2 autres quelconques qui lui sont tautozonales, est une quantité *rationnelle*. Ce paramètre rationnel peut donc valoir 1 ou —1 ; par le fait pour chaque couple de faces d'une zone quelconque du complexe cubique, la face *bissectrice* est une face *possible* et appartenant au complexe.

$$\lambda = \frac{\sin xx''}{\sin x'x''}$$

le *rapport* de *position* de chaque *arête* du complexe cubique par rapport à 2 autres quelconques qui lui sont coplanaires, est une quantité *rationnelle*. Ce paramètre rationnel peut donc valoir 1 ou —1 ; par le fait pour chaque couple d'arêtes d'une zone quelconque d'arêtes du complexe cubique, l'arête *bissectrice* est une arête *possible* et appartenant au complexe.

CHAPITRE X

62. Sur la surface de la sphère de rayon-unité, les 4 droites sphériques qu'y découpent 4 faces quelconques du complexe cristallin, ou les 4 points d'affleurement de 4 quelconques de ses arêtes, nous fournissent donc par déduction zonale, le réseau complet des droites et points d'affleurement du complexe total, c'est-à-dire par le fait les *directions* dans l'espace de toutes les faces et arêtes possibles du cristal. Rapporté au système de référence de ces 4 faces ou arêtes élémentaires, le faisceau de ces directions est le faisceau (au sens figuré) des faces et arêtes à indices *rationnels ;* mais comme jusqu'ici *seuls* les *rapports* des constantes μ_i et ν_i et des indices u_i et x_i entraient en ligne de compte, ni les longueurs des 3 axes-unités sur les arêtes fondamentales, ni les tenseurs des arêtes et des vecteurs des faces ne sont encore déterminés d'une manière *absolue.*

Puisque la longueur des arêtes et la grandeur des faces du cristal n'est en principe limitée en aucune manière, fixons donc arbitrairement la longueur de l'arête-unité ou la grandeur du triangle découpé sur la face-unité déplacée parallèlement à elle-même (fig. 8), et développons maintenant dans l'espace le noyau du complexe cristallin constitué de ses faces et arêtes élémentaires, et représentant son système complet de référence, tel que nous l'avons établi au chapitre V.

63. La déduction zonale partant des 4 faces élémentaires $\mathfrak{l}_0, \mathfrak{l}_1, \mathfrak{l}_2, \mathfrak{l}_3$, nous donne successivement (fig. 7), en ne tenant compte que des *faces,* les faces p_1, p_2, p_3 ; puis p'_1, p'_2, p'_3 harmoniquement conjuguées avec les premières par rapport au couple correspondant de faces fonda-

La déduction zonale partant des 4 arêtes élémentaires $\mathfrak{r}_0$, $\mathfrak{r}_1$, $\mathfrak{r}_2$, $\mathfrak{r}_3$ nous donne successivement (fig. 7), en ne tenant compte que des *arêtes,* les arêtes π_1, π_2, π_3 puis π'_1, π'_2, π'_3, harmoniquement conjuguées avec les premières par rapport au couple correspondant d'arêtes fonda-

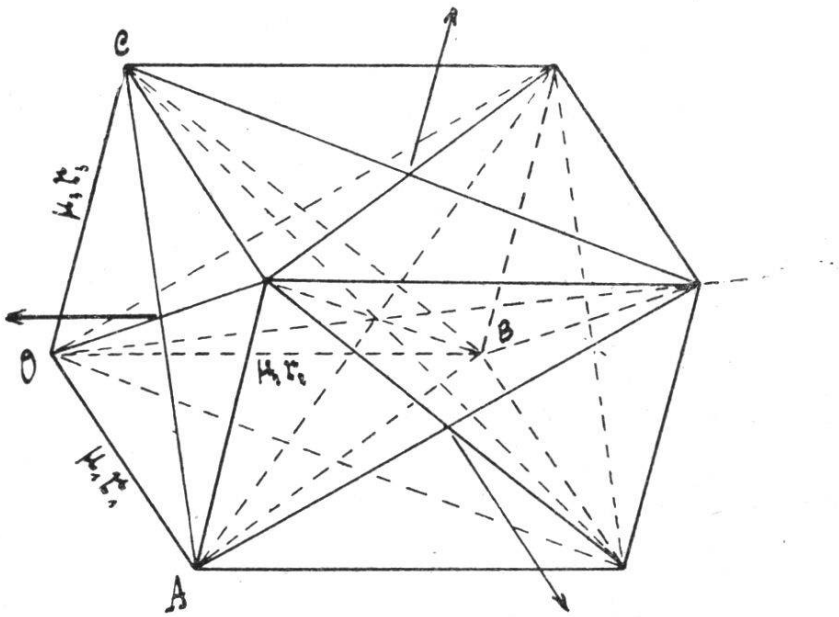
mentales et dont l'intersection commune est l'arête harmonique $\mathfrak{r}_0$, choisie comme arête-unité du système. L'*aire fixée* du triangle découpé sur la face-unité (déplacée parallèlement à elle-même), déterminant la grandeur de ce déplacement, et par le fait les longueurs absolues des 3 axes-unités, le complexe élémentaire de la fig. 7 fournit dans l'espace, pour peu qu'on suive ce développement on s'en rend compte sans peine, précisément tous les éléments du parallélipipède que nous allons construire. Les 3 flèches sont dans la direction des plans $\mathfrak{p}_i$ et $\mathfrak{p}'_i$, au point du croisement des arêtes π_i et π'_i ; les 3 arêtes intermédiaires $(\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_3)$, $(\mathfrak{p}_3\mathfrak{p}_1)$, $(\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2)$ sont les 3 grandes et dont le plan commun est la face harmonique $\mathfrak{l}_0$, choisie comme face-unité du système.

La *longueur fixée* de l'arête-unité, déterminant par le fait les longueurs absolues des 3 axes-unités et ainsi les dimensions relatives des faces et arêtes déduites, le complexe élémentaire de la fig. 7 fournit dans l'espace, pour peu qu'on suive ce développement on s'en rend compte sans peine, précisément tous les éléments du parallélipipède que nous allons construire. Les 3 flèches sont au point de croisement des arêtes π_i et π'_i et dans la direction des plans $\mathfrak{p}_i$ et $\mathfrak{p}'_i$; les 3 plans intermédiaires $(\pi_2\pi_3)$, $(\pi_3\pi_1)$, $(\pi_1\pi_2)$ sont les 6 plans triangulaires (2 à 2 parallèles) au-

Arêtes π_3 et π'_3 harmon. conjug. avec $\mathfrak{r}_1$ et $\mathfrak{r}_2$ et plans $\mathfrak{p}_3$ et $\mathfrak{p}'_3$ harmon. conjug. avec $\mathfrak{l}_1$ et $\mathfrak{l}_2$

Fig. 9.

Arêtes π_2 et π'_2, harmon. conjug. à $\mathfrak{r}_3$ et $\mathfrak{r}_1$ et plans $\mathfrak{p}_2$ et $\mathfrak{p}'_2$ harmon. conjug. à $\mathfrak{l}_3$ et $\mathfrak{l}_1$.



Arêtes π_1 et π'_1 harmon. conj. avec $\mathfrak{r}_2$ et $\mathfrak{r}_3$ et plans $\mathfrak{p}_1$ et $\mathfrak{p}'_1$ harmon. conj. avec $\mathfrak{l}_2$ et $\mathfrak{l}_3$.

des diagonales autres que $\mathfrak{r}_0$, qui est elle-même l'arête-unité, intersection commune des 3 plans p'_i.

tres que le plan diagonal (ABC), qui est lui-même la face-unité, plan commun des 3 arêtes π'_i.

Juxtaposons ensuite sur les 6 faces de ce parallélipipède primordial 6 parallélipipèdes identiques, et de là continuons à les entasser à l'indéfini dans toutes les directions possibles. Les *sommets* de tous ces parallélipipèdes constituent un assemblage de *points* régulièrement distribués dans l'espace sur les 3 directions parallèles aux arêtes fondamentales du parallélipipède primitif. Les longueurs de ces arêtes étant prises comme axes-unités, tous ces points ont des coordonnées numériques entières, et de toute évidence ce sont là les seuls points jouissants de cette propriété par rapport à ces axes. Nous appellerons désormais un *Raumgitter* * un tel assemblage de points dans l'espace, et le parallélipipède primordial qui l'engendre, le parallélipipède *élémentaire* du Raumgitter.

64. Faisons pour le moment abstraction de toutes les arêtes et diagonales parallèles des parallélipipèdes et ne laissons subsister que le faisceau de droites partant du point 0 dans toutes les directions et le réunissant à chaque sommet du Gitter. Tous les points dont les coordonnées numériques ont entre elles les mêmes rapports se trouvent évidemment sur la même droite, et le premier point sur chaque droite à partir du point 0 a nécessairement pour ses 3 coordonnées des nombres premiers entre eux, sinon elles seraient divisibles par un facteur commun, et nous aurions sur la même droite un point plus rapproché que le premier du point 0.

Or toute arête possible du cristal est représentée par le vecteur :

$$\mu_1 x_1 \mathfrak{r}_1 + \mu_2 x_2 \mathfrak{r}_2 + \mu_3 x_3 \mathfrak{r}_3$$

dans lequel, les μ_i étant précisément les longueurs prises pour axes-

---

[1]) J'ai employé le terme allemand : *Raumgitter* ou *Gitter* tout court au lieu des termes français équivalents : assemblage réticulaire ou réseau spatial et me suis réservé le mot français : *réseau* tout court pour signifier la même chose dans le plan (§ 67) au lieu des termes : plan réticulaire ou réseau plan, uniquement pour avoir à ma disposition 2 mots très courts essentiellement distincts pour les répéter dès maintenant aussi souvent qu'il sera nécessaire dans la suite de mon travail en toute facilité et sans crainte de confusion. J'emploierai indifféremment les expressions : points et sommets pour signifier les points constituant le Raumgitter.

unités des 3 arêtes fondamentales, les indices x_i ne sont autre chose que les coordonnées numériques des différents points de cette arête rapportée à ces mêmes axes. Mais ces indices x_i sont rationnels pour toutes les arêtes du cristal et uniquement pour elles ; c'est-à-dire sont entiers pour certains points de ces arêtes et des fractions ayant entre elles les mêmes rapports que ces nombres entiers pour les points intermédiaires. Puisque les sommets du Gitter sont tous les points et les seuls de coordonnées numériques entières, il s'ensuit très clairement que *toutes* les arêtes du cristal et *seules* ces arêtes passent par ces points, et donc que ce faisceau (au sens large) de droites joignant le point O à tous les points du Gitter, n'est autre que le faisceau ou le *complexe* même des arêtes *possibles* du cristal.

D'après ce que nous venons de dire plus haut, chacune de ces arêtes est ainsi le support d'une infinité de sommets du Raumgitter, dont le premier à partir du point O a pour ses coordonnées numériques, c'est-à-dire pour indices x_i, des nombres premiers entre eux. Le segment OT qui est la distance du point O à ce premier point sur chaque arête, mesure en outre la distance constante entre 2 points successifs quelconques de cette même arête ; en effet, ces points successifs sont obtenus à partir du premier en multipliant par 2, par 3, etc,, ses coordonnées numériques premières entre elles, c'est-à-dire en doublant, triplant, etc., ses composantes sur les axes-unités et par le fait sa propre distance au point O. Nous appelons ce segment OT le segment *primitif* ou le *paramètre* de l'arête qui le supporte, et sa longueur nous est immédiatement donnée par la racine carrée de la forme quadratique $\omega(xx)$, les indices x_i y prenant les valeurs *absolues entières* et *premières* entre elles, correspondantes au premier point sur cette arête.

Enfin puisque seuls tous les plans de jonction de 2 quelconques de ses arêtes, sont des faces possibles du cristal, seuls tous les plans que déterminent avec le point O, 2 sommets quelconques du Gitter, sont ces faces possibles, et en un mot, le complexe des faces et arêtes cristallines n'est autre que celui des *droites* et des *plans* passant par le point O, et déterminés par chaque sommet ou chaque couple de sommets du Raumgitter.

65. La situation du point O est absolument celle de tous les points du Gitter ; chacun de ces points est en effet le sommet com-

mun de 8 parallélipipèdes élémentaires, sur lesquels s'entassent à l'indéfini dans toutes les directions des parallélipipèdes identiques. Le *groupement* dans l'espace des sommets du Gitter est donc le même autour de chaque point qu'il est autour du point O ; en d'autres termes, *chaque* point doit être entouré par les autres d'une manière absolument *pareille* à celle dont est entouré son voisin. Ce principe, évident à première vue, qui n'est en quelque sorte que l'expression même de la construction parallélipipédique du Raumgitter et que nous pourrions appeler le principe de la *symétrie* du Gitter (en prêtant pour l'instant au mot : symétrie, un sens plus large qu'un sens exactement géométrique), est la source de toutes ses autres propriétés qui en découlent d'ailleurs sans aucune difficulté.

66. Sur chaque arête l'un quelconque A des points qu'elle supporte (fig. 10), exige de concert avec le point O, puisque chacun d'eux doit être entouré sur cette arête de la même manière que l'autre, un autre point dans chaque sens à une distance égale à la distance des 2 premiers, et par le fait une infinité d'autres points successifs, à la même distance sur chacune des demi-droites indéfinies que constitue l'arête partagée par le point O. Si c'est le sommet T le plus rapproché de O, qui est pris avec lui comme points de départ, nous avons ainsi l'infinité même des sommets du Raumgitter situés sur les 2 demi-droites de l'arête, à distance constante égale au paramètre, comme nous venons déjà plus ou moins de l'établir au § précédent ; les indices x_i des points que supporte la demi-droite opposée sont les indices pris en signe contraire des points de la demi-droite directe.

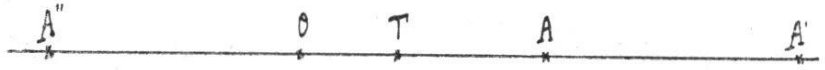


Fig. 10.

Puisque maintenant chaque autre point du Raumgitter doit être dans une situation identique à celle du point O et des différents points de l'arête considérée, chaque autre sommet du Gitter doit donc se trouver sur une *rangée* parallèle de points de même équidistance. L'ensemble des points du Raumgitter total est donc complètement représenté par un faisceau (au sens propre du terme) d'un nombre indéfini de rangées de points équidistants, toutes parallèles et identiques à la rangée de points que constitue l'une des *arêtes* quelconques du complexe.

67. Sur chaque plan P les 3 points qui le déterminent, les 2 points quelconques A et B du Gitter et le point O, nécessitent à eux trois, puisque chacun d'eux doit être entouré dans ce plan de la même manière qu'ils entourent chacun des 2 autres, 9 autres points répartis sur le pourtour du triangle des 3 premiers, à des distances égales aux côtés du triangle (fig. 11) et par le fait une infinité d'autres points sur ce même plan, distribués régulièrement comme les sommets de parallélogrammes identiques, juxtaposés dans toutes les directions, et formant ainsi une sorte de *réseau* à *maille* parallélogrammique, qui est pour le plan qui le supporte exactement ce qu'est le Raumgitter pour l'espace qu'il remplit.

Si nous prenons comme points de départ avec le point O, les 2 sommets du plan qui en sont les plus rapprochés, sans être évidemment sur la même droite avec le point, les sommets du réseau parallélogrammique obtenu doivent absorber sans exception tous les points du Raumgitter situés sur ce plan. S'il existait en effet en quelque endroit du plan, un point du Gitter localisé à l'intérieur ou sur l'un des côtés du parallélogramme *générateur*, en vertu du principe de la symétrie, ce point se retrouverait pour chacun des parallélogrammes identiques (fig. 12), et de quelque manière que ce soit, nous aurions un point plus rapproché du point O que les 2 sommets T et T'.

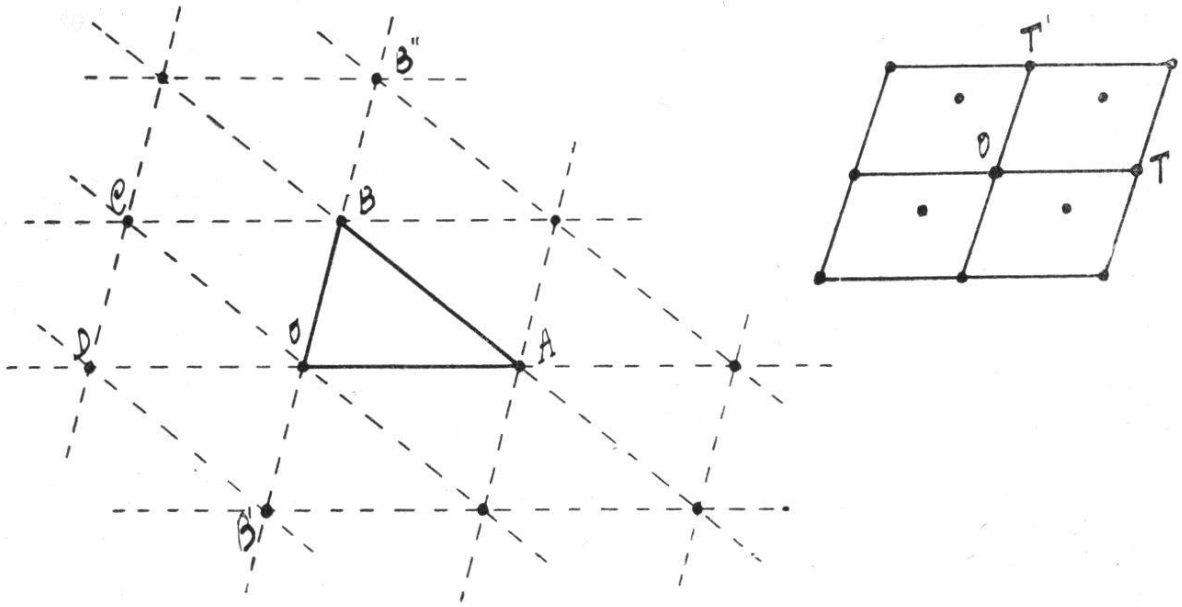


Fig. 11 et 12.

Le réseau parallélogrammique construit sur les 2 paramètres *minima* du plan, implique donc à lui seul l'infinité des réseaux parallélogrammiques à maille plus grande, que détermine avec le point O

chaque autre couple de points quelconques A et B situés dans ce plan. Nous l'appellerons, simplement par rapport aux autres et pour l'en distinguer, le réseau *primitif* du plan P, et son parallélogramme générateur, celui dont les juxtapositions successives fournissent *tous* les sommets du réseau, le parallélogramme *élémentaire* du même plan.

Si nous prenons comme réseau primitif du plan P, le réseau parallélogrammique de la fig. 11, en y supposant que les points A et B sont les points T et T′, on voit sans peine déjà que chaque couple de côtés (OA, OB), (BO, OC), (OC, OD) du triangle OTT′ détermine également ce parallélogramme élémentaire. Tous les couples de *paramètres*, dont le parallélogramme correspondant fournit ainsi par ses juxtapositions successives tous les sommets du réseau, seront appelés les couples *conjugués* du réseau primitif donné.

68. Les mêmes conclusions sont à tirer ici qu'à la fin du paragraphe précédent. Puisque la situation du point O et des différents points du réseau primitif du plan P, doit être de nouveau celle de tous les points du Gitter, chacun d'eux doit être sommet d'un réseau de même direction dans l'espace et en tout pareil au premier. La superposition d'un nombre indéfini de réseaux parallèles et identiques au réseau primitif d'un *plan* quelconque du complexe, représente donc également l'ensemble des points du Raumgitter total.

Dans un même plan, les rangées parallèles à la même arête sont équidistantes (§ 66).

Si nous prenons en effet le point B, (fig. 11), le plus rapproché de O, sur l'arête OB doit exister le point B′ tel que OB = OB′, et pour chaque arête menée par le point O, les 2 rangées parallèles passant par B et B′ en seront équidistantes. La même preuve se répète pour les points B, B″ et O, et ainsi de suite. Toutes les rangées d'un réseau parallèles à la même arête, sont

Dans l'espace, les réseaux parallèles au réseau primitif d'un même plan sont équidistants.

Sur une arête menée par le point O en un point B quelconque du premier réseau supérieur, nous avons un point B′ à égale distance en sens contraire, et pour chaque plan passant par le point O, les 2 réseaux parallèles par B et B′ en sont équidistants. La même preuve se répète pour les points B, B″ et O, et ainsi de suite. Tous les réseaux d'un Raumgitter, parallèles au même plan,

donc équidistantes, et les 2 rangées passant par B et B′, étant les plus rapprochées de l'arête, sont appelées ses 2 rangées *limitrophes.*

sont donc équidistants et les 2 réseaux contenant B et B′, étant les plus rapprochés du plan, sont appelés ses 2 réseaux plans *limitrophes.*

L'ensemble de tous les points qui constituent le Raumgitter peut donc se concevoir sous une double infinité de formes que l'on se représente sans peine, et chaque élément du complexe *détermine* l'une de ces formes.

A chaque *arête* correspond le faisceau constitué du nombre indéfini de ses rangées parallèles et identiques de points équidistants; la distance de ces rangées est indéterminée, mais dans un même plan elles sont équidistantes; et si nous donnons avec le point O, la position du point A déterminant l'arête et son paramètre, et celle d'un point B quelconque de l'une de l'infinité des rangées *limitrophes* qui l'entourent, il est facile de se rendre compte que le réseau primitif lui même du plan (OAB) est entièrement déterminé (§ 70).

A chaque *plan* correspond le système de ses réseaux parallèles en nombre indéfini, dont la maille a ses côtés parallèles et égaux à ceux du parallélogramme élémentaire du plan. Ces réseaux parallèles sont équidistants; et si, avec les 3 points O, A et B déterminant le plan et son réseau primitif, nous donnons la position d'un 4me point C quelconque de l'un des réseaux *limitrophes*, la position de tous les réseaux parallèles et ainsi de tous les points du Gitter, est par le fait encore complètement déterminée (§ 75).

69. Si nous revenons maintenant aux définitions données à la fin du § 67, l'unique condition à laquelle doit satisfaire un parallélogramme d'un réseau pour être *élémentaire*, est donc qu'il ne renferme à lui seul que 4 points du Gitter situés en chacun de ses sommets; ses juxtapositions successives reproduisent en effet dans ce cas nécessairement tous les sommets du réseau.

De cette condition découle immédiatement que les *aires* de tous les parallélogrammes élémentaires d'un réseau sont *égales*. En effet sur une certaine surface indéfinie* du réseau suffisamment grande, à chaque

*) Cette démonstration donnée dans; Sommerfeld, Geometrische Cristallographie, p. 84, telle quelle, n'est pas rigoureuse au point de vue mathématique. Voir plus loin § 80.

parallélogramme élémentaire p′, comme à chaque parallélogramme élémentaire p, correspond exactement 4 sommets du Gitter. Le nombre des sommets contenus dans cette surface considérée étant naturellement le même qu'elle soit constituée de parallélogrammes p ou de parallélogrammes p′, il s'ensuit que le nombre des parallélogrammes p constituant cette surface est égal au nombre des parallélogrammes p′ constituant la même surface, et donc que les *aires* de ces parallélogrammes sont *équivalentes*, comme il fallait le démontrer.

70. La même condition nous permet d'ailleurs de déterminer très facilement tous les parallélogrammes *élémentaires*, c'est-à-dire tous les couples *conjugués* d'un réseau parallélogrammique donné; et l'on verra sans peine que les résultats trouvés se trouvent en réalité impliqués déjà dans les conclusions du § 68.

Les côtés d'un parallélogramme élémentaire ne sauraient être d'abord que des segments primitifs ou des paramètres du réseau. Soit donc un paramètre quelconque OT; un autre paramètre ne pourra former avec lui un couple conjugué que s'il se termine sur l'une ou l'autre de ses 2 rangées *limitrophes*. S'il dépasse en effet l'une de ses 2 rangées, ce ne peut être qu'en passant par un sommet du réseau, et dans ce cas ce n'est plus un paramètre, ou en coupant la rangée entre 2 de ses points successifs, mais alors le côté parallèle par le sommet T la coupe également entre les 2 points suivants, et le parallélogramme, enfermant un point dans son intérieur, n'est plus élémentaire.

A *chaque paramètre* d'un réseau correspond donc une double infinité de parallélogrammes élémentaires, ou une double infinité de paramètres *conjugués*, se terminant en chaque point des 2 rangées limitrophes. Sans même qu'il nous soit nécessaire de tenir compte de la preuve du § précédent, tous ces parallélogrammes élémentaires ont déjà la même surface; ils ont en effet la même base, le paramètre de l'arête, et des hauteurs égales, la distance de l'arête à la rangée limitrophe.

Mais si nous la faisons intervenir, puisque toutes les aires *égales* des parallélogrammes élémentaires du réseau sont comprises entre un paramètre quelconque et ses 2 rangées limitrophes, les longueurs des paramètres sont en raison inverse de la distance des rangées parallèles, ou en d'autres termes: la *densité* des points sur les

rangées parallèles d'un réseau est en *raison inverse* de leur équidistance.

Naturellement si au paramètre OT, nous accouplons un segment, primitif ou non, se terminant en un point quelconque de l'une de ses 2mes rangées parallèles, le parallélogramme qu'ils déterminent est double du parallélogramme élémentaire. Il serait triple, quadruple, etc., pour les rangées suivantes, et en s'exprimant encore d'une manière générale.

A chaque paramètre du réseau correspond une double infinité de parallélogrammes *multiples* du parallélogramme élémentaire ; le nombre qui représente ce multiple donne le rang de la rangée parallèle qui porte le côté du parallélogramme opposé au paramètre.

71. Nous obtenons sans peine la surface d'un parallélogramme quelconque et celle du parallélogramme élémentaire d'un plan, dès que nous sont donnés ses indices.

En effet soient x'_i et x''_i les indices ou coordonnées de 2 points quelconques du réseau d'un plan représentant une face cristalline donnée. Le tenseur du produit vectoriel des 2 vecteurs coïncidant avec les segments que ces 2 points interceptent jusqu'au point O sur les 2 arêtes qu'ils déterminent :

$$V(\mu_1 x'_1 \mathfrak{r}_1 + \mu_2 x'_2 \mathfrak{r}_2 + \mu_3 x'_3 \mathfrak{r}_3)(\mu_1 x''_1 \mathfrak{r}_1 + \mu_2 x''_2 \mathfrak{r}_2 + \mu_3 x''_3 \mathfrak{r}_3)$$
$$= \mu_2\mu_3 \sin a_1 (x'_2 x''_3 - x'_3 x''_2)\mathfrak{l}_1 + \mu_3\mu_1 \sin a_2 (x'_3 x''_1 - x'_1 x''_3)\mathfrak{l}_2 + \mu_1\mu_2 \text{ s.} a_3 (x'_1 x''_2 - x'_2 x''_1)\mathfrak{l}_3$$

nous donne la surface du parallélogramme construit sur ces 2 segments pour côtés, en fonction des valeurs $(x'x'')_1$, $(x'x'')_2$, $(x'x'')_3$, nécessairement entières puisque les x'_i, x''_i sont entières comme coordonnées de points du Gitter, et qui sont les *indices* mêmes (31) du plan donné.

Les produits $\mu_2\mu_3 \sin a_1$, $\mu_3\mu_1 \sin a_2$, $\mu_1\mu_2 \sin a_3$, n'étant autres que les surfaces des parallélogrammes élémentaires des plans fondamentaux $\mathfrak{l}_1$, $\mathfrak{l}_2$, $\mathfrak{l}_3$, que nous pouvons appeler *parallélogrammes-unités,* nous constatons d'abord, puisque les vecteurs $\mu_2\mu_3 \sin a_1 \mathfrak{l}_1$, $\mu_3\mu_1 \sin a_2 \mathfrak{l}_2$, $\mu_1\mu_2 \sin a_3 \mathfrak{l}_3$, sont les vecteurs représentant ces parallélogrammes-unités, que ces indices *entiers* du plan ou de la face cristalline en question sont en même temps les *composantes* du vecteur d'un parallélogramme quelconque de cette face par rapport à ceux des parallélogrammes-unités ; tout comme les indices x_i sont les composantes entières par rapport aux axes-unités $\mu_i \mathfrak{r}_i$ du segment

pris sur l'arête correspondante à partir du point O, jusqu'à l'un quelconque des points du Gitter qu'elle supporte.

Si nous mettons en facteur le quotient constant $\frac{\mu_1 \mu_2 \mu_3}{M.}$, le produit vectoriel trouvé s'écrit comme autrefois (§ 31):

$$\frac{\mu_1 \mu_2 \mu_3}{M.} \left[\nu_1 (x' x'')_1 \mathfrak{i}_1 + \nu_2 (x' x'')_2 \mathfrak{i}_2 + \nu_3 (x' x'')_3 \mathfrak{i}_3 \right] \qquad (37$$

et la surface du parallélogramme cherché est représentée par la racine de la forme quadratique:

$$\frac{\mu_1 \mu_2 \mu_3}{M.} \sqrt{\Omega [(x' x'') (x' x'')]}$$

72. Or les 2 triples d'indices entiers x'_i et x''_i peuvent prendre, et cela indépendemment l'un de l'autre, toutes les valeurs entières satisfaisant le couple d'équations:

$$\begin{aligned} x'_1 u_1 + x'_2 u_2 + x'_3 u_3 &= 0 \\ x''_1 u_1 + x''_2 u_2 + x''_3 u_3 &= 0 \end{aligned} \qquad (I)$$

ou, ce qui revient au même le système équivalent

des 3 équations:

$$\begin{aligned} x'_2 x'_3 - x'_3 x''_2 &= \varrho u_1 \\ x'_3 x''_1 - x'_1 x''_3 &= \varrho u_2 \\ x'_1 x''_2 - x'_2 x''_1 &= \varrho u_3 \end{aligned}$$

dans lesquelles, les u_i étant les indices *entiers premiers entre eux* du plan, ϱ doit être, puisque ces composantes ϱu_i sont entières, un facteur entier quelconque de proportionnalité.

Si donc nous donnons un triple quelconque x'_1, x'_2, x'_3 d'indices entiers premiers entre eux, (c'est-à-dire représentant un paramètre), satisfaisant son équation correspondante (I), chaque triple x''_1, x''_2, x''_3, satisfaisant la seconde équation, combiné avec le premier dans les 3 équations suivantes, fournira une certaine valeur du facteur de proportionnalité ϱ, et son segment correspondant déterminera avec le paramètre donné un certain parallélogramme dont l'aire a pour mesure:

$$\varrho \frac{\mu_1 \mu_2 \mu_3}{M.} \sqrt{(uu)}$$

Or nous venons de voir au § 70 que tous les segments déterminant avec un paramètre donné des parallélogrammes égaux, se

terminent en chaque point de l'une de ses rangées parallèles. Tous les triples x''_i qui, satisfaisant l'équation correspondante (I), donnent une même valeur de ϱ, sont donc les indices des points d'une même rangée ; et x'_1, x'_2, x'_3, étant les indices *donnés* de l'extrémité d'un paramètre quelconque, le système des 3 équations :

$$x'_2 x''_3 - x'_3 x''_2 = Cu_1$$
$$x'_3 x''_1 - x'_1 x''_3 = Cu_2$$
$$x'_1 x''_2 - x'_2 x''_1 = Cu_3$$

représente dans le plan d'indices u_i (toujours entiers et premier entre eux), *chacune* de ses rangées *parallèles*. C est un facteur constant pour la même rangée, mais prenant successivement toutes les valeurs entières ; à 2 valeurs absolues égales, mais de signe contraire, correspondent les 2 rangées parallèles à la même distance de part et d'autre du paramètre, c'est-à-dire de l'arête donnée.

Naturellement pour la plus petite valeur de C qui est $C = \pm 1$, les x''_i doivent prendre également parmi d'autres leurs plus petites valeurs, (en tous cas seules des valeurs premières entre elles et les points correspondants ne sauraient être tous sur une rangée qui ne serait pas limitrophe) ; et les rangées correspondantes sont les 2 rangées les plus rapprochées de l'arête. Les 3 équations :

$$x'_2 x''_3 - x'_3 x''_2 = \pm u_1$$
$$x'_3 x''_1 - x'_1 x''_3 = \pm u_2$$
$$x'_1 x''_2 - x'_2 x''_1 = \pm u_3$$

représente donc les 2 rangées *limitrophes*, et le produit $\frac{\mu_1 \mu_2 \mu_3}{M.} \sqrt{\Omega(uu)}$, dans lequel les u_i sont les indices entiers et premiers entre eux d'une face quelconque, est la surface du parallélogramme *élémentaire* du réseau qu'elle contient.

CHAPITRE XI

73. Appliquons enfin au Raumgitter lui-même développé dans l'espace, son principe de symétrie du § 65, qui vient de nous donner déjà très simplement les propriétés de ses plans et de ses arêtes.

La présence dans le Raumgitter des 3 points quelconques A, B, C, et du point O, entraîne, puisque chacun d'eux doit être entouré d'autres points du Gitter de la même manière qu'eux-mêmes entourent chacun des 3 autres, celle de 24 autres points du Raumgitter, répartis de nouveau sur le pourtour du tétraèdre des 4 premiers, à des distances égales aux arêtes du tétraèdre, comme le montre la fig. 13. En répétant de là indéfiniment l'application du même principe, il se trouve donc que dans le Raumgitter lui-même, une infinité de ses points sont distribués parallélipipédiquement dans l'espace, autour du point O, et sont les sommets que fournissent les juxtapositions successives dans toutes les directions du parallélipipède construit sur les 3 arêtes OA, OB, OC ; ils forment ainsi un nouveau Raumgitter de parallélipipède *élémentaire* (OABCD), totalement impliqué dans le Raumgitter primitif. De même que

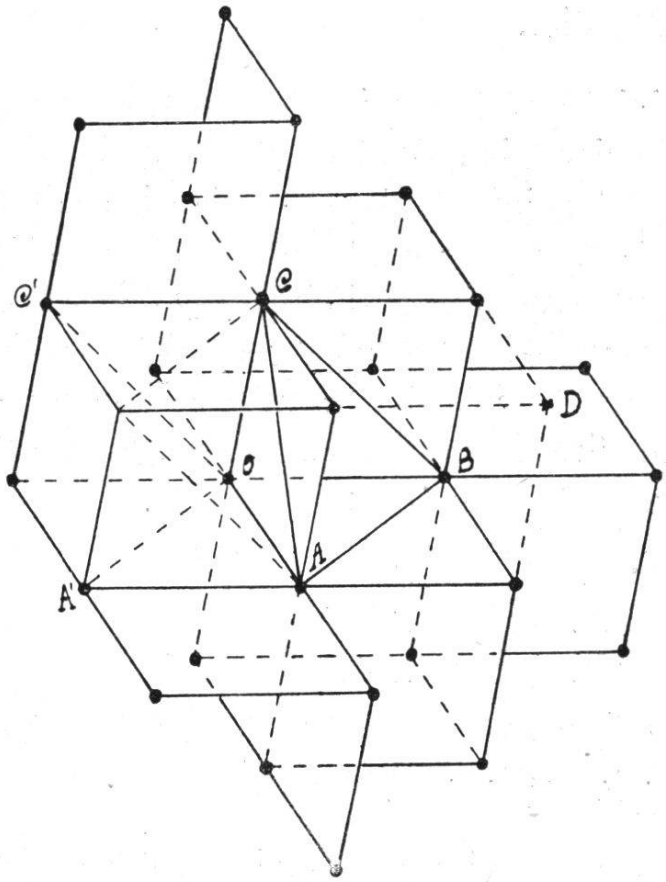


Fig. 13.

le réseau primitif d'un plan implique l'infinité de ses autres réseaux parallélogrammiques, le Raumgitter dont il a été question juqu'ici, construit sur les 3 paramètres minima $\mu_i \mathfrak{r}_i$, renferme donc également une infinité d'autres Raumgitters à maille parallélipipède plus grande, que déterminent avec le point O *chaque triple* A, B, C de points *quelconques* du premier. Nous l'appelons le Raumgitter *primitif* uniquement encore pour le distinguer de ceux qu'il renferme, qui sont d'ailleurs d'une nature identique, et nous désignerons par les lettres des sommets de son parallélipipède élémentaire l'un quelconque de ceux-ci.

Remarquons que nous ne venons de faire en outre autre chose que d'établir d'une manière générale que 4 points quelconques O, A, B, C, de l'espace, dont il n'y en a pas 3 coplanaires, exigent à eux seuls, dès que la condition est posée que chacun d'eux soit entouré dans l'espace de la même manière que chacun de ses voisins, la construction parallélipipèdique du Raumgitter telle que nous l'avons établie. Le principe que nous avons appelé la symétrie du Raumgitter, au sens large du mot, est donc bien en quelque sorte sa condition nécessaire et suffisante, ou en d'autres termes, sa propriété fondamentale qui l'exprime tout entier.

74. Le volume du parallélipipède élémentaire du nouveau Raumgitter quelconque (OABCD) s'obtient immédiatement, étant données les coordonnées x'_i, x''_i, x'''_i des 3 points A, B, C de l'ancien Gitter qui le déterminent avec le point O. Ces coordonnées sont en effet les composantes par rapport aux axes-unités primitifs $\mu_i \mathfrak{r}_i$ des vecteurs de ses arêtes OA, OB, OC ; et si nous appelons tout naturellement ces vecteurs, en tant que axes-unités d'un nouveau Raumgitter, $\mu'_1\mathfrak{r}'_1$, $\mu'_2\mathfrak{r}'_2$, $\mu'_3\mathfrak{r}'_3$, ils sont en direction et en valeur absolue les 3 vecteurs que représentent les seconds membres :

$$\begin{aligned}
\mu'_1\mathfrak{r}'_1 &= \mu_1 x'_1 \mathfrak{r}_1 + \mu_2 x'_2 \mathfrak{r}_2 + \mu_3 x'_3 \mathfrak{r}_3 \\
\mu'_2\mathfrak{r}'_2 &= \mu_1 x''_1 \mathfrak{r}_1 + \mu_2 x''_2 \mathfrak{r}_2 + \mu_3 x''_3 \mathfrak{r}_3 \\
\mu'_3\mathfrak{r}'_3 &= \mu_1 x'''_1 \mathfrak{r}_1 + \mu_2 x'''_2 \mathfrak{r}_2 + \mu_3 x'''_3 \mathfrak{r}_3
\end{aligned}$$

Leur produit scalaire de la forme :

$$\mu'_1\mu'_2\mu'_3 \; \mathfrak{r}'_1 \overline{\vee} \mathfrak{r}'_2 \mathfrak{r}'_3$$

que nous calculons sans peine, en multipliant scalairement par l'un deux le produit vectoriel des 2 autres et qui s'écrit très bien :

$$\mu_1 \ \mu_2 \ \mu_3 \begin{vmatrix} x_1' & x_2' & x_3' \\ x_1'' & x_2'' & x_3'' \\ x_1''' & x_2''' & x_3''' \end{vmatrix} \mathfrak{r}_1 \mathrm{V} \mathfrak{r}_2 \mathfrak{r}_3 \qquad (39)$$

est le volume du parallélipipède cherché.

Si les 3 points A, B, C sont tels que le parallélipipède qu'ils construisent, ne contient que 8 points du Raumgitter primitif, situés en chacun de ses sommets, les juxtapositions successives de ce parallélipipède fournissent exactement les sommets mêmes du Raumgitter primitif. C'est alors un parallélipipède élémentaire du Gitter primitif lui-même, et nous disons dans ce cas que les 3 segments OA, OB, OC, qui ne peuvent être dans ces conditions que des paramètres, forment un *triple conjugué* du Raumgitter primitif.

Tous les parallélipipèdes *élémentaires* d'un Raumgitter sont *égaux*. Cela découle directement de la condition qu'ils n'absorbent que 8 points du Raumgitter, dont un en chacun de leurs sommets, par un raisonnement identique à celui qui a été fait au § 69 pour les parallélogrammes élémentaires d'un réseau. Puisque le produit scalaire :

$$\mu_1\mu_2\mu_3 \, \mathfrak{r}_1 \mathrm{V} \mathfrak{r}_2 \mathfrak{r}_3 = \mu_1\mu_2\mu_3 \, \mathrm{D} \qquad (\S\ 9)$$

est le volume de son parallélipipède élémentaire primordial, construit sur ses 3 axes-unités, il doit être également le volume de chaque autre de ses parallélipipèdes élémentaires ; et la condition algébrique à laquelle doivent satisfaire les coordonnées x_i', x_i'', x_i''', pour que les 3 sommets A, B, C, déterminent un triple conjugué du Raumgitter donné, est donc le déterminant équation :

$$\begin{vmatrix} x_1' & x_2' & x_3' \\ x_1'' & x_2'' & x_3'' \\ x_1''' & x_2''' & x_3''' \end{vmatrix} = 1 \qquad (40)$$

Si l'on jette un coup d'œil sur le Raumgitter de la fig. 13, au paragraphe précédent, on voit sans peine que chaque triple non coplanaire : (OA, OB, OC), (OA, OC, OA′) (OA, OC, OC′), etc. que fournissent les 6 arêtes : OA, OB, OC, AB, BC, CA, du tétraèdre *fondamental*, détermine également déjà son parallélipipède élémentaire. Les coordonnées : (100, 010, 001), (100, 001, $1\bar{1}0$), (100, 001, $0\bar{1}1$) des points (A, B, C), (A, C, A′), (A, C, C′), etc., satisfont en effet la condition posée, et les triples de paramètres correspondants sont donc des triples *conjugués* du Raumgitter en question.

75. Il nous est de nouveau très simple de déterminer tous les parallélipipèdes élémentaires d'un Raumgitter, et encore ici les résultats trouvés se trouvent en réalité déjà contenus sous une autre forme dans les conclusions du § 68.

Les faces d'un parallélipipède élémentaire ne sauraient être d'abord que des parallélogrammes élémentaires, n'absorbant que 4 points du Raumgitter, un en chacun de leurs sommets. Soit donc le couple conjugué des 2 paramètres OT et OT′ et déterminant le parallélogramme élémentaire et ainsi le réseau primitif du plan (OTT′); un 3me paramètre OT″ ne pourra former avec eux un *triple conjugué* que s'il se termine en un point de l'un ou l'autre des 2 réseaux *limitrophes*. S'il les dépasse en effet, ce ne peut être qu'en passant par un sommet du Gitter, et dans ce cas, ce n'est même plus un paramètre ; ou en perçant le réseau sur l'un des côtés ou à l'intérieur de son parallélogramme élémentaire ; mais alors les arêtes parallèles par les sommets T, T′ et T‴, (T‴ est le 4me sommet du parallélogramme OTT′) le percent également en un point symétrique des parallélogrammes élementaires adjacents, et de quelque manière que ce soit, le parallélipipède construit porte nécessairement sur ses faces ou en son intérieur un ou deux sommets du Raumgitter de trop pour être élémentaire.

A chaque parallélogramme élémentaire d'un Raumgitter, correspond donc une double infinité de parallélipipèdes élémentaires ; à chaque couple conjugué de paramètres OT et OT′ déterminant ce même parallélogramme élémentaire, une double infinité de triples conjugués, dont les 3mes paramètres se terminent en chaque point des 2 réseaux limitrophes. Tous ces parallélipipèdes élémentaires ont le même volume ; ils ont en effet la même base, le parallélogramme élémentaire donné, et des hauteurs égales, la distance du plan au réseau limitrophe. Mais puisque non seulement ces parallélipipèdes élémentaires de même base, mais tous les parallélipipèdes élémentaires d'un Raumgitter sont équivalents ; comme ils ont d'autre part tous, pour dimensions, le produit d'un parallélogramme élémentaire par sa distance au réseau limitrophe, les aires des parallélogrammes élémentaires des plans sont en raison inverse des distances de leurs réseaux parallèles, ou en d'autres termes : la *densité* des points sur les réseaux parallèles d'un Raumgitter est en raison *inverse* de leur *équidistance*.

Si au couple conjugué OT et OT′ nous associons un segment, primitif ou non, se terminant en un point quelconque de l'un ou l'autre des 2mes réseaux parallèles, le parallélipipède qu'ils construisent est naturellement double du parallélipipède élémentaire. Il serait triple, quadruple, etc., pour les réseaux suivants, et en s'exprimant d'une manière tout à fait générale : a chaque couple *conjugué* de paramètres, déterminant le parallélogramme élémentaire d'un plan quelconque du Raumgitter, correspond une double infinité de parallélipipèdes *multiples* du parallélipipède élementaire. Le volume de chacun d'eux est le produit scalaire trouvé au § précédent :

$$\mu_1\,\mu_2\,\mu_3 \begin{vmatrix} x'_1 & x'_2 & x'_3 \\ x''_1 & x''_2 & x''_3 \\ x'''_1 & x'''_2 & x'''_3 \end{vmatrix} \mathfrak{r}_1 \bigvee \mathfrak{r}_2\,\mathfrak{r}_3$$

et, puisque $\mu_1\mu_2\mu_3\,\mathfrak{r}_1 \bigvee \mathfrak{r}_2\mathfrak{r}_3$ est le volume même du parallélipipède élémentaire, les coordonnées x'_i, x''_i, x'''_i des 3 points A, B, C, qui les déterminent avec le point O, satisfont donc l'égalité où C est un multiple *entier* quelconque :

$$\begin{vmatrix} x'_1 & x'_2 & x'_3 \\ x''_1 & x''_2 & x''_3 \\ x'''_1 & x'''_2 & x'''_3 \end{vmatrix} = C.$$

Cette équation représente donc pour l'un quelconque des 3 couples *conjugués* $(x''_i x'''_i)$, $(x'''_i x'_i)$, $(x'_i x''_i)$, *chacun* de ses réseaux *parallèles*. Le multiple C, constant pour un même réseau, donne le rang de ce réseau dont il détermine l'équation ; à 2 de ses valeurs égales et de signe contraire correspondent les 2 réseaux parallèles de même rang de part et d'autre du plan primitif.

Pour $C = \pm 1$, nous retrouvons la condition algébrique pour que les 3 points A, B, C, déterminent eux-mêmes un parallélipipède élémentaire, mais avec sa signification complète ; pour l'un quelconque des 3 couples conjugués $(x''_i x'''_i)$, $(x'''_i x'_i)$, $(x'_i x''_i)$, la valeur-unité du déterminant :

$$\begin{vmatrix} x'_1 & x'_2 & x'_3 \\ x''_1 & x''_2 & x''_3 \\ x'''_1 & x'''_2 & x'''_3 \end{vmatrix} = \pm 1$$

est en effet également l'équation de ses 2 réseaux *limitrophes*.

76. Les 4 arêtes r_i ou les 4 faces l_i (§ 63) qui ont déterminé la construction du Raumgitter primitif et ainsi le déploiement dans l'espace du complexe total des faces et arêtes cristallines, étaient 4 arêtes et 4 faces absolument *quelconques* du complexe du cristal. Cette construction du Raumgitter primitif n'a dépendu d'ailleurs que de la *position relative* de ces 4 arêtes (si nous laissons de côté les 4 faces avec lesquelles on raisonnerait d'une manière toute pareille) élémentaires l'une par rapport aux autres ; les 3 arêtes fondamentales ont fourni les directions des arêtes du parallélipipède élémentaire, et l'arête-unité a déterminé leurs proportions respectives ; seule la longueur de celle-ci a été fixée arbitrairement, pour préciser les dimensions du Gitter, mais prise plus grande ou plus petite elle aurait donné un Gitter en tout semblable au premier.

Le Raumgitter quelconque (OABCD), (§ 73), construit avec les 4 arêtes du cristal OA, OB, OC, OD, puisque les 4 points A, B, C, D, sont des points du Gitter primitif, doit donc aussi bien que celui-ci, représenter la totalité du complexe des faces et arêtes cristallines. D'une part, tous ses points doivent donc être situés sur les arêtes de l'ancien Gitter : ils le sont en effet, et même coïncident tous avec des points de l'ancien Gitter, si nous prenons précisément le segment OD (fig. 13) comme longueur de son arête-unité. D'autre part, il doit avoir des points sur chaque arête du complexe, c'est-à-dire, OD étant toujours la longueur de son arête-unité, il doit absorber des points du Gitter primitif sur chacune de ses arêtes.

Réciproquement, il n'est pas de Raumgitter possible, représentant ce même complexe cristallin donné, qui n'ait pas tous ses points compris, si nous fixons convenablement la longueur de son arête-unité, dans ceux du Raumgitter primitif. Pour représenter ce complexe, il ne peut avoir en effet pour point de départ que 4 de ses arêtes (ou 4 de ses faces), mais comme le parallélipipède élémentaire que ces arêtes déterminent a nécessairement, dès que nous prenons pour longueur de l'arête-unité un segment de l'ancien Gitter, un point de celui-ci en chacun de ses 8 sommets, le Raumgitter total, constitué par ses juxtapositions successives, a par le fait également pour chacun de ses sommets un point du Raumgitter primitif.

Ainsi d'une part, chacun de cette infinité de Raumgitter (OABCD) impliqués dans le Raumgitter primitif, comme ayant pour point de départ 4 arêtes cristallines, représente également le complexe du cristal ;

d'autre part, tout Raumgitter représentant ce même complexe, pour une certaine longueur de son arête-unité (ce qui d'ailleurs n'influe aucunement sur la nature du Gitter et du complexe représenté), a nécessairement tous ses points compris dans ceux du Raumgitter primitif.

77. Ce résultat peut s'exprimer sous une autre forme peut être plus précise, à condition d'entendre par : *supprimer* des points sur une arête, les supprimer d'abord uniformément tout le long de l'arête, en maintenant l'équidistance entre les points qui subsistent, et ensuite de la même manière supprimer les points correspondants sur chacune des rangées parallèles.

Etant donné un Raumgitter primitif, nous pouvons à volonté *supprimer* un nombre quelconque de points sur *3* quelconques de ses arêtes, sans que rien ne soit changé au complexe qu'il représente. Si nous appelons A, B, C, le premier point qui demeure sur chacune des 3 arêtes choisies, cela revient en effet à supprimer du Raumgitter donné, tous ceux de ses points qui n'appartiennent pas au Raumgitter de parallélipipède élémentaire (OABCD), c'est-à-dire à remplacer le Raumgitter primitif par l'un quelconque des Raumgitter qu'il implique. Le nombre de points supprimés de ce fait sur chaque autre arête du complexe, est complètement déterminé ; les nouveaux paramètres et les nouveaux parallélogrammes élémentaires sont des multiples *entiers* des paramètres et des parallélogrammes élémentaires primitifs.

Etant donné un Raumgitter, nous pouvons à volonté *ajouter* (en donnant à ce mot sa signification correspondante) un nombre quelconque de points sur *3* quelconques de ses *arêtes*, sans que rien ne soit encore changé au complexe qu'il représente. Si A, B, C, est le premier point ajouté à partir du point O sur chacune des 3 arêtes choisies, cela revient inversement à remplacer le Raumgitter donné par un nouveau Raumgitter primitif, de parallélipipède élémentaire (OABCD), impliquant en lui tous les points du premier. Le nombre des points ajoutés de ce fait sur chaque autre arête du complexe est complètement déterminé ; les nouveaux paramètres et les nouveaux parallélogrammes élémentaires sont des *sous-multiples* (fractions dont le numérateur est 1) des paramètres et parallélogrammes élémentaires du Raumgitter donné.

Enfin puisque les 2 opérations successives n'ont aucune influence sur la nature du complexe représenté, dans un Raumgitter donné, nous pouvons à volonté *simultanément* supprimer des points sur 3 arêtes quelconques et ajouter d'autres points sur 3 autres de ses arêtes. Le Raumgitter obtenu représente encore le même complexe que le premier, et les nouveaux paramètres et parallélogrammes élémentaires sont alors des multiples *rationnels* des paramètres et parallélogrammes élémentaires primitifs.

Sommerfeld appelle les Raumgitters obtenus dans les 2 premiers cas: ganzzahlig commensurabeles Gitter, et le Gitter obtenu dans le dernier cas: rationnal commensurabeles Gitter, par rapport au Raumgitter donné.

Ainsi, puisque en réalité la présence avec le point O, de 3 sommets quelconques A, B, C d'un Raumgitter donné (mais situé chacun sur une arête différente), suffit dans un nouveau Raumgitter, pour qu'il soit l'un de l'infinité des Gitter représentant le même complexe que le premier, le problème du *changement* des *coordonnées* du Raumgitter se pose maintenant parallèlement et exactement pareil à celui du *changement* des *indices* du complexe (chapitre VIII).

Etant données les coordonnées α_i, β_i, γ_i, des 3 sommets A, B, C d'un Raumgitter primitif, et les coordonnées α'_i, β'_i, γ'_i, de ces mêmes sommets dans un Raumgitter de parallélipipède élémentaire encore inconnu, déterminer successivement :

1° les nouvelles coordonnées x'_i du sommet quelconque de coord. x_i.
2° les 3 axes-unités du nouveau parallélipipède élémentaire.
3° les composantes u'_i du parallélogramme de composantes u_i.
4° les 3 parallélogr.-unités du nouveau parallélip. élémentaire.

78. Les coordonnées α_i, β_i, γ_i et α'_i, β'_i, γ'_i, données sont en effet les composantes par rapport aux axes-unités correspondants des vecteurs que représentent les segments d'arêtes OA, OB, OC et en rapportant successivement ces 3 segments aux axes-unités primitifs $\mu_i \mathfrak{r}_i$ et aux axes-unités inconnues que nous appelons tout naturellement $\mu'_i \mathfrak{r}'_i$, nous écrivons les 3 égalités vectorielles en valeurs absolues :

$$
(41)\quad
\begin{aligned}
\mu_1\alpha_1\mathfrak{r}_1 + \mu_2\alpha_2\mathfrak{r}_2 + \mu_3\alpha_3\mathfrak{r}_3 &= \mu'_1\alpha'_1\mathfrak{r}'_1 + \mu'_2\alpha'_2\mathfrak{r}'_2 + \mu'_3\alpha'_3\mathfrak{r}'_3\\
\mu_1\beta_1\mathfrak{r}_1 + \mu_2\beta_2\mathfrak{r}_2 + \mu_3\beta_3\mathfrak{r}_3 &= \mu'_1\beta'_1\mathfrak{r}'_1 + \mu'_2\beta'_2\mathfrak{r}'_2 + \mu'_3\beta'_3\mathfrak{r}'_3\\
\mu_1\gamma_1\mathfrak{r}_1 + \mu_2\gamma_2\mathfrak{r}_2 + \mu_3\gamma_3\mathfrak{r}_3 &= \mu'_1\gamma'_1\mathfrak{r}'_1 + \mu'_2\gamma'_2\mathfrak{r}'_2 + \mu'_3\gamma'_3\mathfrak{r}'_3
\end{aligned}
$$

Par le fait que les coordonnées α_i, β_i, γ_i et α'_i β'_1 γ'_i, représentent non seulement les rapports, mais des valeurs absolues des indices des 3 arêtes OA, OB, OC, les facteurs ϱ_1, ϱ_2, ϱ_3, introduits auparavant dans les équations (24) correspondantes, se réduisent dans ce cas-ci à l'*unité*. Il ne nous est donc plus nécessaire des indices d'une 4me arête pour déterminer leurs valeurs, ou en d'autres termes, comme il vient déjà d'être dit plus haut, les coordonnées anciennes et nouvelles de *3* sommets quelconques suffisent complètement à déterminer le problème du changement de Raumgitter. Nous n'avons donc qu'à reprendre successivement les résultats des §§ (48-54), qui s'écrivent identiquement pour les arêtes ce qu'ils ont été établis avec 4 faces comme éléments donnés, et à y faire partout les facteurs $\varrho_i = 1$; il leur résultera d'ailleurs de ce fait une symétrie bien plus complète que celle qui leur a été obtenue dans le cas des indices.

Les vecteurs des axes-unités primitifs $\mu_i \mathfrak{r}_i$ sont en fonction des nouveaux axes-unités $\mu'_i \mathfrak{r}'_i$:

$$
(42)\quad
\begin{aligned}
D_0\mu_1\mathfrak{r}_1 &= \mu'_1|\alpha'_1\alpha_2\alpha_3|\mathfrak{r}'_1 + \mu'_2|\alpha'_2\alpha_2\alpha_3|\mathfrak{r}'_2 + \mu'_3|\alpha'_3\alpha_2\alpha_3|\mathfrak{r}'_3\\
D_0\mu_2\mathfrak{r}_2 &= \mu'_1|\alpha_1\alpha'_1\alpha_3|\mathfrak{r}'_1 + \mu'_2|\alpha_1\alpha'_2\alpha_3|\mathfrak{r}'_2 + \mu'_3|\alpha_1\alpha'_3\alpha_3|\mathfrak{r}'_3\\
D_0\mu_3\mathfrak{r}_3 &= \mu'_1|\alpha_1\alpha_2\alpha'_1|\mathfrak{r}'_1 + \mu'_2|\alpha_1\alpha_2\alpha'_2|\mathfrak{r}'_2 + \mu'_3|\alpha_1\alpha_2\alpha'_3|\mathfrak{r}'_3
\end{aligned}
$$

Si les 3 déterminants de chaque ligne sont divisibles par D_0, les nouvelles coordonnées des sommets $\mu_i \mathfrak{r}_i$ sont *entières*, c'est-à-dire les sommets du parallélipipède élémentaire primitif sont en même temps des sommets du nouveau Raumgitter.

Le sommet quelconque de coordonnées x_i, dont le segment correspondant est représenté par le vecteur :

$$\mu_1 x_1 \mathfrak{r}_1 + \mu_2 x_2 \mathfrak{r}_2 + \mu_3 x_3 \mathfrak{r}_3$$

reçoit pour ses nouvelles coordonnées x'_i :

$$
\frac{\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & 0 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha'_1 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & \beta'_1 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 & \gamma'_1 \end{vmatrix}}{D_0}, \quad
\frac{\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & 0 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha'_2 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & \beta'_2 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 & \gamma'_2 \end{vmatrix}}{D_0}, \quad
\frac{\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & 0 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha'_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & \beta'_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 & \gamma'_3 \end{vmatrix}}{D_0}
$$

Si les coordonnées x_i sont premières entre elles, le sommet correspondant détermine un paramètre du Gitter primitif ; pour que les nouvelles coordonnées x'_i déterminent sur la même arête le para-

mètre du nouveau Gitter, il faut également qu'elles soient entières et premières entre elles. Si nous appelons A le produit des facteurs communs dans ces conditions aux 3 numérateurs, le nouveau paramètre est donc le multiple *rationnel* $\frac{D_0}{A}$ du paramètre primitif.

Le déterminant Δ_0 devient le symétrique du déterminant D_0, et les composantes des 3 axes-unités $\mu'_i \mathfrak{r}'_i$, rapportés aux axes-unités primitifs, sont en fonction de Δ_0 exactement ce que plus haut les composantes des $\mu_i \mathfrak{r}_i$ sont en fonction de D_0 :

$$\begin{aligned}
\Delta_0 \mu'_1 \mathfrak{r}'_1 &= \mu_1 |\alpha_1 \alpha'_2 \alpha'_3| \mathfrak{r}_1 + \mu_2 |\alpha_2 \alpha'_2 \alpha'_3| \mathfrak{r}_2 + \mu_3 |\alpha_3 \alpha'_2 \alpha'_3| \mathfrak{r}_3 \\
\Delta_0 \mu'_2 \mathfrak{r}'_2 &= \mu_1 |\alpha'_1 \alpha_1 \alpha'_3| \mathfrak{r}_1 + \mu_2 |\alpha'_1 \alpha_2 \alpha'_3| \mathfrak{r}_2 + \mu_3 |\alpha'_1 \alpha_3 \alpha'_3| \mathfrak{r}_3 \qquad (43) \\
\Delta_0 \mu'_3 \mathfrak{r}'_3 &= \mu_1 |\alpha'_1 \alpha'_2 \alpha_1| \mathfrak{r}_1 + \mu_2 |\alpha'_1 \alpha'_2 \alpha_2| \mathfrak{r}_2 + \mu_3 |\alpha'_1 \alpha'_2 \alpha_3| \mathfrak{r}_3
\end{aligned}$$

Les longueurs de ces axes $\mu'_i \mathfrak{r}'_i$ sont les racines carrées des formes quadratiques divisées par Δ_0 :

$$\begin{aligned}
\mu'_1 &= \frac{1}{\Delta_0} \sqrt{\omega(|\alpha_1 \alpha'_2 \alpha'_3|\,|\alpha_2 \alpha'_2 \alpha'_3|\,|\alpha_3 \alpha'_2 \alpha'_3|)} \\
\mu'_2 &= \frac{1}{\Delta_0} \sqrt{\omega(|\alpha'_1 \alpha_1 \alpha'_3|\,|\alpha'_1 \alpha_2 \alpha'_3|\,|\alpha'_1 \alpha_3 \alpha'_3|)} \\
\mu'_3 &= \frac{1}{\Delta_0} \sqrt{\omega(|\alpha'_1 \alpha'_2 \alpha_1|\,|\alpha'_1 \alpha'_2 \alpha_2|\,|\alpha'_1 \alpha'_2 \alpha_3|)}
\end{aligned}$$

et si nous faisons le produit scalaire des 3 vecteurs que nous avons écrit, de la forme :

$$\mu'_1 \mu'_2 \mu'_3 \mathfrak{r}'_1 \mathfrak{V} \mathfrak{r}'_2 \mathfrak{r}'_3$$

il nous donne directement le volume du nouveau parallélipipède élémentaire. En reprenant le produit scalaire pareil déjà effectué au § 74, et en écrivant le déterminant des coordonnées dont chaque terme est lui-même dans ce cas-ci un déterminant de 3me ordre :

$$\frac{1}{\Delta_0^3} \begin{vmatrix} |\alpha_1\ \alpha'_2\ \alpha'_3| & |\alpha_2\ \alpha'_2\ \alpha'_3| & |\alpha_3\ \alpha'_2\ \alpha'_3| \\ |\alpha'_1\ \alpha_1\ \alpha'_3| & |\alpha'_1\ \alpha_2\ \alpha'_3| & |\alpha'_1\ \alpha_3\ \alpha'_3| \\ |\alpha'_1\ \alpha'_2\ \alpha_1| & |\alpha'_1\ \alpha'_2\ \alpha_2| & |\alpha'_1\ \alpha'_2\ \alpha_3| \end{vmatrix}$$

on voit aussitôt qu'il n'est autre que le produit des 2 déterminants également de 3me ordre :

$$\frac{1}{\Delta_0^3} \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} A'_1 & B'_1 & \Gamma'_1 \\ A'_2 & B'_2 & \Gamma'_2 \\ A'_3 & B'_3 & \Gamma'_3 \end{vmatrix}$$

La valeur du second qui est le déterminant-adjoint de Δ_0 est Δ_0^2; le produit scalaire cherché s'écrit donc très simplement:

$$\mu_1'\mu_2'\mu_3'\mathfrak{r}_1'\mathrm{V}\mathfrak{r}_2'\mathfrak{r}_3' = \mu_1\mu_2\mu_3\frac{\mathrm{D}_0}{\Delta_0}\mathfrak{r}_1\mathrm{V}\mathfrak{r}_2\mathfrak{r}_3$$

Le nouveau parallélipipède élémentaire est encore le multiple *rationnel* $\frac{\mathrm{D}_0}{\Delta_0}$ du parallélipipède élémentaire primitif.

79. Si nous faisons les produits vectoriels deux à deux et membre à membre des 3 équations (41), il ne nous est plus permis, dans ce cas-ci où il s'agit de valeurs absolues, de négliger d'écrire, comme nous avons négligé dans les équations (29) correspondantes le quotient constant $\nu_1\nu_2\nu_3 : \nu_1'\nu_2'\nu_3'$, les 2 facteurs qui en tenant compte toujours des relations $\mu_i\nu_i = \sin \mathrm{A}_i$, se mettent aisément en évidence:

$$\varrho = \frac{\mu_1\mu_2\mu_3}{\mathrm{M}.} \qquad \varrho' = \frac{\mu_1'\mu_2'\mu_3'}{\mathrm{M}'.}$$

Les vecteurs $\varrho\nu_i\mathfrak{l}_i$ et $\varrho'\nu_i'\mathfrak{l}_i'$ sont ainsi les vecteurs représentant les parallélogrammes-*unités* (§ 71) primitifs et nouveaux, c'est-à-dire les faces du parallélipipède élémentaire correspondant, et les 3 égalités que nous fournissent les produits vectoriels effectués sont l'expression des 3 parallélogrammes construits sur les segments d'arêtes (OA, OB), (OB, OC), (OC, OA), rapportés successivement aux parallélogrammes-unités primitifs $\varrho\nu_i\mathfrak{l}_i$ et aux nouveaux parallélogrammes-unités $\varrho'\nu_i'\mathfrak{l}_i'$: (§ 71, 37)

$$\begin{aligned}
\varrho\nu_1 A_1\mathfrak{l}_1 + \varrho\nu_2 A_2\mathfrak{l}_2 + \varrho\nu_3 A_3\mathfrak{l}_3 &= \varrho'\nu_1' A_1'\mathfrak{l}_1' + \varrho'\nu_2' A_2'\mathfrak{l}_2' + \varrho'\nu_3' A_3'\mathfrak{l}_3' \\
\varrho\nu_1 B_1\mathfrak{l}_1 + \varrho\nu_2 B_2\mathfrak{l}_2 + \varrho\nu_3 B_3\mathfrak{l}_3 &= \varrho'\nu_1' B_1'\mathfrak{l}_1' + \varrho'\nu_2' B_2'\mathfrak{l}_2' + \varrho'\nu_3' B_3'\mathfrak{l}_3' \qquad (44) \\
\varrho\nu_1 \Gamma_1\mathfrak{l}_1 + \varrho\nu_2 \Gamma_2\mathfrak{l}_2 + \varrho\nu_3 \Gamma_3\mathfrak{l}_3 &= \varrho'\nu_1 \Gamma_1'\mathfrak{l}_1 + \varrho'\nu_2' \Gamma_2'\mathfrak{l}_2' + \varrho'\nu_3' \Gamma_3'\mathfrak{l}_3'
\end{aligned}$$

Les parallélogrammes-unités primitifs $\varrho\nu_i\mathfrak{l}_i$ sont en fonction des parallélogrammes-unité $\varrho'\nu_i'\mathfrak{l}_1'$:

$$\begin{aligned}
\mathrm{D}_0\varrho\nu_1\mathfrak{l}_1 &= \varrho'\nu_1'|\alpha_1\alpha_2'\alpha_3'|\mathfrak{l}_1' + \varrho'\nu_2'|\alpha_1'\alpha_1\alpha_3'|\mathfrak{l}_2' + \varrho'\nu_3'|\alpha_1'\alpha_2'\alpha_1|\mathfrak{l}_3' \\
\mathrm{D}_0\varrho\nu_2\mathfrak{l}_2 &= \varrho'\nu_1'|\alpha_2\alpha_2'\alpha_3'|\mathfrak{l}_1' + \varrho'\nu_2'|\alpha_1'\alpha_2\alpha_3'|\mathfrak{l}_2' + \varrho'\nu_3'|\alpha_1'\alpha_2'\alpha_2|\mathfrak{l}_3' \qquad (45) \\
\mathrm{D}_0\varrho\nu_3\mathfrak{l}_3 &= \varrho'\nu_1'|\alpha_3\alpha_2'\alpha_3'|\mathfrak{l}_1' + \varrho'\nu_2'|\alpha_1'\alpha_3\alpha_3'|\mathfrak{l}_2' + \varrho'\nu_3'|\alpha_1'\alpha_2'\alpha_3|\mathfrak{l}_3'
\end{aligned}$$

Si les 3 déterminants de chaque ligne sont divisibles par D_0, les nouvelles *composantes* des parallélogrammes $\varrho\nu_i\mathfrak{l}_i$ sont *entières;* leur surface est donc celle, dans le même plan, d'un parallélogramme du nouveau Gitter.

Les composantes u'_i du parallélogramme quelconque de composantes u_i :

$$\varrho\nu_1 u_1 \mathfrak{l}_1 + \varrho\nu_2 u_2 \mathfrak{l}_2 + \varrho\nu_3 u_3 \mathfrak{l}_3$$

sont les 3 déterminants divisés par D_0 :

$$\frac{\begin{vmatrix} u_1\alpha_1+u_2\alpha_2+u_3\alpha_3 & \alpha'_2 & \alpha'_3 \\ u_1\beta_1+u_2\beta_2+u_3\beta_3 & \beta'_2 & \beta'_3 \\ u_1\gamma_1+u_2\gamma_2+u_3\gamma_3 & \gamma'_2 & \gamma'_3 \end{vmatrix}}{D_0}, \quad \frac{\begin{vmatrix} \alpha'_1 & u_1\alpha_1+u_2\alpha_2+u_3\alpha_3 & \alpha'_3 \\ \beta'_1 & u_1\beta_1+u_2\beta_2+u_3\beta_3 & \beta'_3 \\ \gamma'_1 & u_1\gamma_1+u_2\gamma_2+u_3\gamma_3 & \gamma'_3 \end{vmatrix}}{D_0}, \quad \frac{\begin{vmatrix} \alpha'_1 & \alpha'_2 & u_1\alpha_1+u_2\alpha_2+u_3\alpha_3 \\ \beta'_1 & \beta'_2 & u_1\beta_1+u_2\beta_2+u_3\beta_3 \\ \gamma'_1 & \gamma'_2 & u_1\gamma_1+u_2\gamma_2+u_3\gamma_3 \end{vmatrix}}{D_0}$$

Si les composantes u_i données sont premières entre elles, le parallélogramme correspondant est un parallélogramme élémentaire du Gitter primitif ; pour que les nouvelles composantes u'_i déterminent dans le même plan le parallélogramme élémentaire du nouveau Gitter, il faut également qu'elles soient entières et premières entre elles. Si nous appelons A le produit des facteurs communs dans ces conditions aux 3 numérateurs, le nouveau parallélogramme élémentaire est donc le multiple *rationnel* $\frac{D_0}{A}$ du parallélogramme élémentaire primitif.

Les composantes des parallélogrammes-unités $\varrho'\nu'_i\mathfrak{l}'_i$, rapportés aux parallélogrammes primitif $\varrho\nu_i\mathfrak{l}_i$, sont de nouveau en fonction de Δ_0 et D_0 exactement ce que plus haut les composantes des $\varrho\nu_i\mathfrak{l}_i$ sont en fonction de D_0 et Δ_0 :

$$\begin{aligned} \Delta_0\varrho'\nu'_1\mathfrak{l}'_1 &= \varrho\nu_1|\alpha'_1\alpha_2\alpha_3|\mathfrak{l}_1 + \varrho\nu_1|\alpha_1\alpha'_1\alpha_3|\mathfrak{l}_2 + \varrho\nu_3|\alpha_1\alpha_2\alpha'_1|\mathfrak{l}_3 \\ \Delta_0\varrho'\nu'_2\mathfrak{l}'_2 &= \varrho\nu_1|\alpha'_2\alpha_2\alpha_3|\mathfrak{l}_1 + \varrho\nu_2|\alpha_1\alpha'_2\alpha_3|\mathfrak{l}_2 + \varrho\nu_3|\alpha_1\alpha_2\alpha'_2|\mathfrak{l}_3 \\ \Delta_0\varrho'\nu'_3\mathfrak{l}'_3 &= \varrho\nu_1|\alpha'_3\alpha_2\alpha_3|\mathfrak{l}_1 + \varrho\nu_3|\alpha_1\alpha'_3\alpha_3|\mathfrak{l}_2 + \varrho\nu_3|\alpha_1\alpha_2\alpha'_3|\mathfrak{l}_3 \end{aligned} \tag{46}$$

Les surfaces de ces parallélogrammes élémentaires sont les racines carrées des formes quadratiques correspondantes divisées par Δ_0 :

$$\varrho'\nu'_1 = \frac{1}{\Delta_0}\sqrt{\Omega(|\alpha'_1\alpha_2\alpha_3||\alpha_1\alpha'_1\alpha_3||\alpha_1\alpha_2\alpha'_1|)}$$

$$\varrho'\nu'_2 = \frac{1}{\Delta_0}\sqrt{\Omega(|\alpha'_2\alpha_2\alpha_3||\alpha_1\alpha'_2\alpha_3||\alpha_1\alpha_2\alpha'_2|)}$$

$$\varrho'\nu'_3 = \frac{1}{\Delta_0}\sqrt{\Omega(|\alpha'_3\alpha_2\alpha_3||\alpha_1\alpha'_3\alpha_3||\alpha_1\alpha_2\alpha'_3|)}$$

et si nous faisons le produit scalaire des 3 vecteurs que nous avons écrit, de la forme :

$$\varrho'^3\nu'_1\nu'_2\nu'_3\mathfrak{l}'_1\mathfrak{l}'_2\mathfrak{l}'_3$$

il nous donne le volume d'un nouveau parallélipipède construit sur les 3 vecteurs $\varrho'\nu'_i\mathfrak{l}'_i$ comme *arêtes*. En écrivant encore, comme au §

précédent, le déterminant des composantes, dont chaque terme est lui-même un déterminant de 3me ordre :

$$\frac{1}{\Delta_0^3}\begin{vmatrix} |\alpha'_1\alpha_2\alpha_3| & |\alpha_1\alpha'_1\alpha_3| & |\alpha_1\alpha_2\alpha'_1| \\ |\alpha'_2\alpha_2\alpha_3| & |\alpha_1\alpha'_2\alpha_3| & |\alpha_1\alpha_2\alpha'_2| \\ |\alpha'_3\alpha_2\alpha_3| & |\alpha_1\alpha'_3\alpha_3| & |\alpha_1\alpha_2\alpha'_3| \end{vmatrix}$$

on voit immédiatement qu'il se réduit de nouveau au produit des 2 déterminants :

$$\frac{1}{\Delta_0^3}\begin{vmatrix} \alpha'_1 & \beta'_1 & \gamma'_1 \\ \alpha'_2 & \beta'_2 & \gamma'_2 \\ \alpha'_3 & \beta'_3 & \gamma'_3 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & \Gamma_1 \\ A_2 & B_2 & \Gamma_2 \\ A_3 & B_3 & \Gamma_3 \end{vmatrix}$$

La valeur du second qui est le déterminant-adjoint de D_0 est D_0^2, et le produit scalaire cherché s'écrit :

$$\varrho^3\nu'_1\nu'_2\nu'_3\mathfrak{l}'_1\mathfrak{V}\mathfrak{l}'_2\mathfrak{l}'_3 = \varrho^3\nu_1\nu_2\nu_3\frac{D_0^2}{\Delta_0^2}\mathfrak{l}_1\mathfrak{V}\mathfrak{l}_2\mathfrak{l}_3$$

Le parallélipipède en question est donc le multiple *rationnel* $\left(\frac{D_0}{\Delta_0}\right)^2$ du parallélipipède du même type construit sur les 3 vecteurs $\varrho\nu_i\mathfrak{l}_i$ comme *arêtes.*

Bravais divise les arêtes $\varrho\nu_i\mathfrak{l}_i$ et $\varrho'\nu_i'\mathfrak{l}_i'$ de ces 2 derniers parallélipipèdes par la racine cubique du volume du parallélipipède élémentaire correspondant et appelle les 2 nouveaux Raumgitter dont ils sont dans ces conditions les parallélipipèdes générateurs, les Raumgitter *polaires* des Raumgitters $\mu_i\mathfrak{r}_i$ et $\mu_i'\mathfrak{r}_i'$.

La transformation de coordonnées traitée dans ces 2 derniers paragraphes est la transformation *générale*, effectuée d'un Raumgitter donné en un Raumgitter *rationnellement* commensurable par rapport au premier. Il n'y aurait aucune difficulté maintenant à chercher à quelles conditions doivent satisfaire les triples de coordonnées α_i, β_i, γ_i, et α'_i, β'_i, γ'_i données pour qu'elles déterminent les 2 changements spéciaux de coordonnées où le nouveau Raumgitter est *entièrement* commensurable par rapport au premier (§ 77). Il suffit pour cela que les relations entre les α_i, β_i, γ_i et α'_i, β'_i, γ'_i soient telles que les 9 déterminants coefficients des $\mu'_i\mathfrak{r}'_i$ dans les équations (42) soient chacun divisible par D_0, ou que les 9 déterminants coefficients des $\mu_i\mathfrak{r}_i$ dans les équations (43) soient chacun divisible par Δ_0. D'autre part, on obtient directement ce que deviennent dans ces 2 cas particuliers les résultats de la transformation générale en y substituant successivement aux α_i, β_i, γ_i. et aux α'_i, β'_i, γ'_i les valeurs particulières 100, 010, 001, (le second cas correspond à celui des § 51 et 55 du changement des indices); c'est-à-dire en prenant soit les 3 sommets quelconques α'_i, β'_i, γ'_i du nouveau Gitter comme som-

mets du parallélipipède élémentaire du Gitter primitif, soit les 3 sommets quelconques α_i, β_i, γ_i, de l'ancien Gitter, comme sommets du parallélipipède élémentaire du nouveau Gitter.

80. La démonstration donnée aux § 69 et 74 de l'égalité des parallélogrammes et des parallélipipèdes élémentaires, basée directement sur la structure du Gitter, et qui peut d'ailleurs être rendue rigoureuse au point de vue mathématique,* donne comme corollaire direct (§ 74) la valeur-unité du déterminant $|x'_1 x''_2 x'''_3|=1$ comme condition pour que le parallélipipède construit sur les arêtes $\mu'_i \mathfrak{r}'_i$ soit parallélipipède élémentaire du Gitter primitif. M. Daniëls me permet d'ajouter ici ce dernier paragraphe où *inversement* il montre que la même condition $|b_{11} b_{22} b_{33}|=1$ est *nécessaire* et *suffisante* pour que les 2 Raumgitters $\mu_i \mathfrak{r}_i$ et $\mu'_i \mathfrak{r}'_i$ soient équivalents (que le parallélipipède construit sur $\mu'_i \mathfrak{r}'_i$ soit parallélipipède élémentaire du premier Gitter et inversement), et déduit alors de là une preuve *rigoureuse* et *complète* de l'égalité des parallélipipèdes et des parallélogrammes élémentaires.

1) Pour que la figure (Raumgitter) construite sur les arêtes $\mu_i \mathfrak{r}_i$ soit équivalente à celle construite sur les arêtes $\mu'_i \mathfrak{r}'_i$, leurs relations — nécessairement à coefficients entiers b_{ik} et $\frac{B_{ik}}{B} \equiv \beta_{ik}$ — étant

$$\text{(I)}\quad \begin{aligned} \mu'_1\mathfrak{r}'_1 &= \mu_1 b_{11}\mathfrak{r}_1 + \mu_2 b_{12}\mathfrak{r}_2 + \mu_3 b_{13}\mathfrak{r}_3 \\ \mu'_2\mathfrak{r}'_2 &= \mu_1 b_{21}\mathfrak{r}_1 + \mu_2 b_{22}\mathfrak{r}_2 + \mu_3 b_{23}\mathfrak{r}_3 \\ \mu'_3\mathfrak{r}'_3 &= \mu_1 b_{31}\mathfrak{r}_1 + \mu_2 b_{32}\mathfrak{r}_2 + \mu_3 b_{33}\mathfrak{r}_3 \end{aligned} \quad \text{et} \quad \text{(II)}\quad \begin{aligned} \mu_1\mathfrak{r}_1 &= \mu'_1\frac{B_{11}}{B}\mathfrak{r}'_1 + \mu'_2\frac{B_{21}}{B}\mathfrak{r}'_2 + \mu'_3\frac{B_{31}}{B}\mathfrak{r}'_3 \\ \mu_2\mathfrak{r}_2 &= \mu'_1\frac{B_{12}}{B}\mathfrak{r}'_1 + \mu'_2\frac{B_{22}}{B}\mathfrak{r}'_2 + \mu'_3\frac{B_{32}}{B}\mathfrak{r}'_3 \\ \mu_3\mathfrak{r}_3 &= \mu'_1\frac{B_{13}}{B}\mathfrak{r}'_1 + \mu'_2\frac{B_{23}}{B}\mathfrak{r}'_2 + \mu'_3\frac{B_{33}}{B}\mathfrak{r}'_3 \end{aligned}$$

il suffit, que le déterminant B des neuf b_{ik} en valeur absolue soit égal à l'unité.

En effet $|b_{11} b_{22} b_{33}|=1=|B_{11} B_{22} B_{33}|$

nous apprend 1° que dans chacune des six équations les trois coefficients entiers sont premiers entre eux, et 2°, qu'à cause des relations (I—II)

$$\mu_1 x_1 \mathfrak{r}_1 + \mu_2 x_2 \mathfrak{r}_2 + \mu_3 x_3 \mathfrak{r}_3 = \mu'_1(B_{11}x_1 + B_{12}x_2 + B_{13}x_3)\mathfrak{r}'_1 + \mu'_2(-)\mathfrak{r}'_2 + \mu'_3(-)\mathfrak{r}'_3$$
$$\mu'_1 y_1 \mathfrak{r}'_1 + \mu'_2 y_2 \mathfrak{r}'_2 + \mu'_3 x_3 \mathfrak{r}'_2 = \mu_1(b_{11}y_1 + b_{21}y_2 + b_{31}y_3)\mathfrak{r}_1 + \mu_2(-)\mathfrak{r}_2 + \mu_3(-)\mathfrak{r}_3$$

---

*) Schönflies, Kristallsysteme und Krystallstructur, pag. 272. Brawais Mémoires sur les systèmes de points distribués régulièrement dans l'espace.

ce qui nous prouve *que tout point à coordonnées entières du premier système est encore un point à coordonnées entières du second et inversement* c. q. f. d.

2) La condition $B=1$ est encore *nécessaire.* En effet nous avons

$$B.b_{11}=B_{22}B_{33}-B_{23}B_{32}=B^2(\beta_{22}\beta_{33}-\beta_{23}\beta_{32}) \qquad \text{ou encore}$$

$$b_{11}=B.(\beta_{22}\beta_{33}-\beta_{23}\beta_{32}) \quad b_{12}=B.(\beta_{31}\beta_{23}-\beta_{21}\beta_{33}) \quad b_{13}=B.(\beta_{21}\beta_{32}-\beta_{31}\beta_{22})$$

Les trois nombres $b_{11}b_{12}b_{13}$ ne seraient pas premiers entre eux, si $|B|\neq 1$.

3) Corollaire. Multipliant les équations I, nous trouvons à cause de $B=\pm 1$

$$\mu'_1\mu'_2\mu'_3[\mathfrak{r}'_1\mathfrak{r}'_2\mathfrak{r}'_3]=\pm\mu_1\mu_2\mu_3[\mathfrak{r}_1\mathfrak{r}_2\mathfrak{r}_3]$$

c'est-à-dire que les volumes des parallélépipèdes équivalents sont égaux.

Nous trouvons absolument de la même manière, lorsqu'un plan ε contient les vecteurs-unités $\varrho_1, \varrho_2 ; \varrho'_1, \varrho'_2$, que les systèmes de parallélogrammes construits sur les côtés $\sigma_1\varrho_1, \sigma_2\varrho_2$ d'une part, et sur

$$\text{(III)} \begin{cases} \sigma'_1\varrho'_1 = \sigma_1 b_{11}\varrho_1 + \sigma_2 b_{12}\varrho_2 \\ \sigma'_2\varrho'_2 = \sigma_1 b_{21}\varrho_1 + \sigma_2 b_{22}\varrho_2 \end{cases}$$

d'autre part, ne sont équivalents que lorsque $B=|b_{11}b_{22}|=\pm 1$.

Corollaire. En formant le produit vectoriel des équations III, nous obtenons B étant 1 ,

$$\sigma'_1\sigma'_2|V\varrho'_1\varrho'_2|=\sigma_1\sigma_2(b_{11}b_{22}-b_{12}^2)|V\varrho_1\varrho_2|=\sigma_1\sigma_2|V\varrho_1\varrho_2|$$

c'est-à-dire que les surfaces des parallélogrammes élémentaires équivalents sont égales.

Or, les vecteurs $\sigma_1\varrho_1$ et $\sigma_2\varrho_2$ etant encore

$$\mu_1 x_1\mathfrak{r}_1 + \mu_2 x_2\mathfrak{r}_2 + \mu_3 x_3\mathfrak{r}_3 \quad \text{et} \quad \mu_1 y_1\mathfrak{r}_1 + \mu_2 y_2\mathfrak{r}_2 + \mu_3 y_3\mathfrak{r}_3$$

la surface du parallélogramme peut encore s'écrire

$$|V(\mu_1 x_1\mathfrak{r}_1 + \ldots)(\mu_1 y_1\mathfrak{r}_1 + \ldots)| = \frac{\mu_1\mu_2\mu_3}{M}\sqrt{\Omega(x_2y_3 - x_3y_2, \ldots\ldots)}.$$

CHAPITRE XII

81. Le Raumgitter, comme le complexe cristallin qu'il représente, ne dépend donc uniquement que des directions relatives dans l'espace des 4 arêtes (4 faces) quelconques prises pour son point de départ. Au même complexe correspond une infinité de Raumgitter différents, construits sur toutes les combinaisons possibles 4 à 4 de ses arêtes; par suite cette infinité de Raumgitter, impliqués chacun pour une certaine longueur de leur arête-unité dans le Raumgitter primitif et dont chacun représente le même complexe, constitue un *tout* absolument *indivis,* inhérent aux complexe donné, restant identique à lui-même quel que soit celui de ces Gitter pris comme primitif, c'est-à-dire quelles que soient les 4 arêtes du complexe choisies comme arêtes élémentaires.

Sur les 3 directions primitives $\mu_i \mathfrak{r}_i$, comme sur toute arête quelconque, d'un Raumgitter donné, on peut à volonté supprimer ou ajonter un nombre quelconque de sommets, sans que rien ne soit changé au complexe qu'il représente. En d'autres termes, tant que les longueurs μ_i des 3 axes-unités d'un Raumgitter ne varient sur leurs directions que dans des rapports simplement *rationnels,* le complexe représenté reste identique à lui-même; les Raumgitter obtenus sont tous compris dans l'infinité des Gitter représentant ce complexe, et on ne fait que changer le Raumgitter primitif par l'un des Raumgitter qu'il implique.

Enfin en introduisant encore une dernière notion, celle de Raumgitter *symétrique,* en donnant ici au mot: symétrie son sens plus exactement géométrique, que nous allons d'ailleurs préciser, il nous sera facile maintenant avec ces données de déterminer dans le complexe cristallin général étudié jusqu'ici, les différents *types* de complexes possibles qui seront exactement les complexes des 6 *systèmes* cristallins tels que la plupart des cristallographes les établissent en cristallographie (Baumhauer: Neuere Entwicklung des Kristall).

82. Nous dirons qu'un Raumgitter possède un degré plus ou moins grand de *symétrie,* s'il existe un ou plusieurs mouvements de ce Raumgitter autour du point O tels que le mouvement effectué, chacun de ses sommets ait repris exactement la place qu'occupait un autre sommet avant le mouvement. Puisque le point O reste fixe, en vertu du principe connu de mécanique, ces mouvements se ramènent dans tous les cas à une rotation autour d'un axe passant par le point O; nous appelons un tel axe un *axe* de rotation ou de *symétrie* du Raumgitter donné et son *angle* de *rotation,* le plus petit angle α dont il faut tourner le Raumgitter autour de cet axe pour que chacun de ses sommets ait repris le lien d'un sommet primitif.

Le point O est lui-même un *centre* de *symétrie* du Raumgitter, c'est-à-dire qu'à chaque point du Gitter correspond un autre point sur la demi-arête opposée à la même distance que le premier du point O; l'opération qui consiste à remplacer ainsi chaque point du Gitter par son point *inverse,* s'appelle l'*inversion.* Comme la rotation elle transforme également le Raumgitter en lui-même.

Enfin on démontrera plus loin très simplement (§ 93) que dès qu'un Raumgitter possède un axe de symétrie *binaire* ($\alpha = 180°$), il possède également par le fait de la présence du centre O de symétrie, un *plan* de *symétrie* normal, c'est-à-dire un plan partageant le Raumgitter en deux parties telles que l'une est la *réflexion* de l'autre dans le plan donné. Réciproquement ce plan de symétrie, combiné au centre de symétrie, exige l'axe binaire normal ou mieux : le plan de symétrie, le centre de symétrie et l'axe binaire normal sont 3 éléments tels que la présence de 2 d'entre eux nécessite toujours le troisième et qu'ils constituent un *groupe* (§ 89 et 93). De la sorte, il suffit de connaître les axes de symétrie d'un Raumgitter pour connaître également ses plans de symétrie et ainsi sa symétrie complète.

83. Un Raumgitter *symétrique* exige dans le complexe qu'il représente, une face avec une arête *normale.*

Soit en effet donné un axe de symétrie d'un Raumgitter passant par le point O; puisque les espaces séparant les sommets du Gitter sont de dimensions finies, pour amener une nouvelle coïncidence de ces sommets, son angle de rotation α ne saurait être en tout cas d'ordre infiniment petit.

Soit un sommet A de situation quelconque par rapport à l'axe. Ses positions successives coplanaires A′, A″, A‴, etc. (fig. 14), correspondant à chaque rotation d'angle α, sont donc elles-mêmes des sommets du Raumgitter ; et puisque chaque autre point du Gitter (§ 65) doit être dans une situation identique à celle des points A, A′, A″, etc., par le point O doivent passer les arêtes OB′, OB″, etc., telles que AA′ = OB′, AA″ = OB″, etc., et dont les rangées AA′, AA″, etc., sont des rangées parallèles. Le plan (OB′B″) comme le plan (AA′A″) est évidemment *normal* à l'axe de rotation ; les points du Raumgitter qu'il contient forment un réseau parallélogrammique, et l'ensemble des points du Raumgitter total se réduit au système (§ 68) de réseaux superposés parallèles et équidistants, de parallélogramme élémentaire identique et normaux à l'axe de symétrie donné.

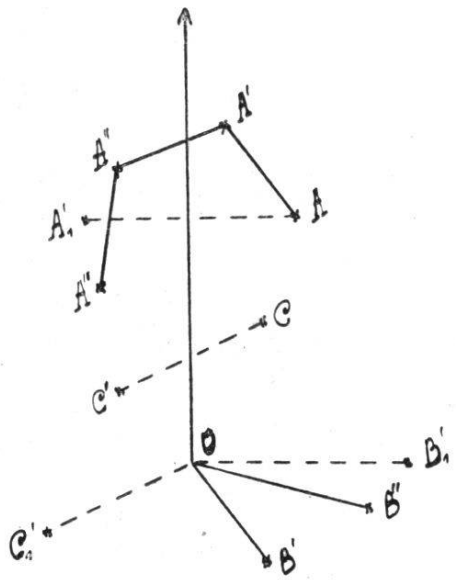


Fig. 14.

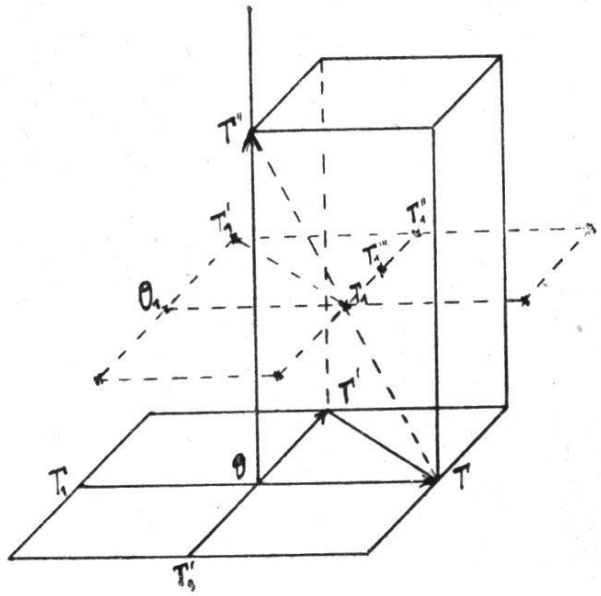


Fig. 15.

Au cas où $\alpha = 180^0$, la rotation du point A ne produit que son symétrique A'_1, et la rangée AA'_1 ou l'arête parallèle par le point O ne suffisent plus à déterminer le plan normal ; mais en prenant un 3me sommet C quelconque du Gitter, les points C et C′ exigent une seconde arête OC'_1 par le point O, et les points O, B'_1, C'_1, déterminent également le plan normal et ses réseaux parallèles.

L'axe de rotation est lui-même une *arête* du Raumgitter. En effet dans cette rotation, chacun de ces réseaux parallélogrammiques normaux à l'axe doit coïncider avec lui-même et cela n'est possible déjà pour le réseau limitrophe supérieur, que si cet axe le perce en un sommet (fig. 15 en traits continus), au centre ou sur le milieu d'un côté du parallélogramme élémentaire (fig. 15 en traits pointillés).

S'il le perce en un sommet, c'est une arête du complexe ; s'il le perce sur le milieu de l'un des côtés ou au centre du parallélogramme élémentaire, ou ce qui revient au même sur le milieu de l'un quelconque des 3 côtés O_1T_1 du triangle fondamental $(O_1T_1T_1')$, puisque dans ces conditions $TT_1 = T_1T''$, l'intersection T'' de la rangée TT_1 et de l'axe OT'' est un nouveau sommet du Gitter appartenant au second réseau parallèle, et l'axe de rotation, passant par un sommet, est encore une arête du complexe.

Exceptionnellement dans le cas où la maille du réseau est le losange à angle au sommet de 60° (§ 85 VI), l'axe normal peut percer le réseau limitrophe au centre du triangle *équilatéral* fondamental, c'est-à-dire au tiers de la grande diagonale du losange élémentaire. Dans ce seul cas l'axe de symétrie n'atteint qu'au 3me réseau parallèle l'un des sommets du Raumgitter, et est ainsi également une arête du complexe.

84. Le complexe cristallin qui ne possède aucune arête normale à l'une de ses faces, ne peut donc impliquer en lui-même aucun groupe de 4 arêtes (ou 4 faces) déterminant un Raumgitter symétrique. C'est le complexe du *système* cristallin *tricline ;* ses 3 arêtes fondamentales sont en effet, quelles qu'elles soient, inclinées chacune sur le plan des 2 autres. Le parallélipipède élémentaire de ses Gitter est un parallélipipède oblique quelconque ; leur seul élément de symétrie est constitué par la présence du centre O de symétrie : c'est exactement la symétrie des cristaux de la classe holoédrique du système (§ 92).

Inversement étant posée une face avec une arête *normale,* à chacun des *5 types essentiels* de complexes qui peuvent s'établir dans cette condition, correspond un Raumgitter primitif plus ou moins *symétrique.* Les 5 types de complexes sont ceux des 5 autres systèmes cristallins d'espèce symétrique, et la symétrie des Raumgitters primitifs correspondants est celle des classes holoédriques établies plus loin de chacun de ces systèmes (§ 92—98).

Soient en effet l'arête normale et 2 arêtes quelconques dans le plan donné prises comme arêtes fondamentales du complexe. En vertu de la seconde remarque faite en commençant (§ 81), pour obtenir des complexes différents, l'arête-unité ne peut déterminer (par la construction du parallélipipède élémentaire) sur ces 3 directions que des segments μ_1, μ_2, μ_3, qui sont entre eux *égaux* ou dans des rapports *irrationnels.* D'autre part la maille du réseau primitif que

déterminent les paramètres minimas μ_2 et μ_3, comme celle de tout réseau parallélogrammique d'ailleurs, ne peut être qu'un parallélogramme quelconque ou l'une des 4 modalités spéciales de plus en plus régulières du parallélogramme : le rectangle, le losange, le losange avec angle au sommet de 60° (sa petite diagonale est égale au côté) et le carré ; ou mieux encore le triangle fondamental (OTT′), fig. 15, ne peut être que l'un des 5 types différents : scalène, rectangle, isocèle, équilatéral, ou rectangle-isocèle. Le parallélipipède générateur du Raumgitter est le prisme *droit* (OTT′T″) à base parallélogrammique *correspondante ;* ses 3 arêtes $\mu_1\mathfrak{r}_1$, $\mu_2\mathfrak{r}_2$, $\mu_3\mathfrak{r}_3$, déterminent à elles seules la position de tous les points du Gitter, et autant de fois le trièdre qu'elles constituent peut se couvrir avec elles-mêmes, leurs prolongements ou des arêtes égales (complexe hexagonal § 85, IV), autant de fois le Raumgitter coïncide également tout entier avec lui-même. Les rotations possibles du trièdre fondamental déterminent donc exactement celles du Raumgitter lui-même et ainsi les éléments de sa symétrie complète.

85. I. Système cristallin ou *complexe monocline.* Raumgitter *binaire.*

Le parallélipipède élémentaire du Raumgitter est le prisme droit à base parallélogrammique *quelconque* (OTT′T″), fig. 15. Les 2 paramètres minimas OT et OT′ ne peuvent se couvrir qu'avec leurs prolongement OT_2 et OT'_2 ; l'arête normale OT″ est donc un axe *binaire* du Raumgitter total, et par suite le plan donné OTT′ un plan de symétrie. Ce sont les seuls éléments de symétrie du Raumgitter ; s'il existait en effet un autre axe de rotation, le paramètre OT″ qui est la distance même des réseaux parallèles, devrait se couvrir avec un segment du plan OTT′, et dans ce cas les 2 paramètres minimas du plan OT et OT′ ne pourrait atteindre ni l'un ni l'autre le réseau limitrophe. D'ailleurs les 3 axes-unités étant entre eux dans des rapports *irrationnels,* le plan fondamental OTT′ est la seule face du complexe possédant une arrête normale (§ 45).

On se rend compte sans peine (la fig. 15 en pointillé est faite pour le second cas) que en *centrant* par un nouveau sommet T_1''' le centre de figure du parallélipipède droit générateur ou par les nouveaux sommets T_1 et T_1'' 2 de ses faces latérales opposées, c'est-à-dire en intercalant entre chaque couple de réseaux successifs parallèles au plan OTT′ un nouveau réseau de nature identique disposé de

manière que l'axe normal perce son parallélogramme élémentaire en son centre ou sur le milieu de l'un des côtés, le Raumgitter obtenu de parallélipipède élémentaire ($OTT'T_1$) ou ($OTT'T_1'''$) possède également l'axe binaire OT'' et le plan de symétrie normal. Il est d'ailleurs, les nouveaux sommets étant intercalés à égale distance entre 2 sommets primitifs, un de l'infinité des Gitters représentant le même complexe que le premier.

II. Complexe (système cristallin) *rhombique.* Raumgitter *terbinaire.*

Le parallélipipède élémentaire du Raumgitter est le prisme droit à base *rectangulaire ;* les 3 axes-unités OT, OT', OT'' sont entre eux dans des rapports *irrationnels* et forment un trièdre trirectangle dont chaque arête se trouve dans les mêmes conditions par rapport à l'ensemble des points du Gitter : elles passent chacune par les sommets de réseaux parallèles successifs à maille rectangulaire. Ces *3 arêtes* fondamentales sont ainsi des axes *binaires* et par suite chaque plan fondamental est un plan de symétrie du Raumgitter total. Par le même raisonnement que pour le Gitter précédent, ce sont là les seuls éléments de symétrie du Raumgitter trouvé, et d'ailleurs, les 3 axes-unités étant entre eux dans des rapports irrationnels, seuls les 3 plans fondamentaux du complexe possèdent une arête normale (§ 45).

Si le parallélogramme élémentaire du réseau fondamental OTT' est *losange,* en centrant d'un nouveau sommet chacune de ses mailles, ce réseau fondamental devient rectangulaire, et les côtés du rectangle étant irrationnels, le complexe représenté est encore un complexe *rhombique.* Le Raumgitter correspondant possède d'ailleurs la même symétrie que le Raumgitter trouvé ; il revient en effet inversement à centrer les 2 bases rectangulaires du prisme droit générateur du Raumgitter terbinaire, et cela, on le voit aussitôt, n'influe en rien sur la présence des 3 axes binaires obtenus.

On peut donc centrer les 2 bases, c'est-à-dire 2 faces latérales opposées quelconques du prisme rectangulaire droit ($OTT'T''$) ; on peut également ou bien le centrer en son centre de figure, ou bien sur chacune de ses 6 faces rectangulaires. Dans chacun des 3 cas, on s'en rend compte facilement en projetant sur le plan du réseau OTT' le système de ses réseaux parallèles, le Raumgitter obtenu possède la symétrie terbinaire et naturellement représente le même complexe que le premier.

III. Complexe *quadratique.* Raumgitter *quaternaire.*

Le parallélipipède élémentaire du Raumgitter est le prisme droit à base *carrée ;* des 3 axes-unités irrationnels du complexe rhombique

2 quelconques OT et OT′ deviennent *égaux*. Par suite l'axe binaire normal OT″ devient un axe *quaternaire* ($\alpha = 90^o$) et dans leur plan les diagonales du carré élémentaire sont 2 nouveaux axes binaires du Raumgitter total. La symétrie complète se trouve ainsi constituée d'un axe quaternaire, 4 axes binaires dans le plan normal, formant entre eux des angles de 45°, et 5 plans de symétrie dont 4 passant par l'axe quaternaire et le 5me normal à cet axe. On voit d'ailleurs de nouveau immédiatement que ce sont là les seuls éléments de symétrie du Gitter, parce qu'ils représentent les seules manières possibles de faire se couvrir avec ses arêtes mêmes ou les arêtes inverses le trièdre trirectangle OTT′T″ dont 2 arêtes sont égales.

Si l'on centre le prisme droit obtenu en son centre de figure, chacun des axes de rotation trouvés subsiste, et le nouveau Gitter représentant le même complexe que le premier, possède également la symétrie quaternaire.

IV. Complexe *hexagonal*. Raumgitter *sénaire*.

Si l'on construit le réseau primitif OTT′ (fig. 16) lorsque sa maille est le losange à angle au sommet de 60° ou mieux son triangle fondamental, le triangle *équilatéral* OTT′, on voit immédiatement que l'axe normal OT″ est un axe *sénaire* ($\alpha = 60^o$) et que dans le plan du réseau les 6 directions des côtés et des hauteurs du triangle fondamental sont des axes binaires d'abord du réseau primitif lui-même, et par suite en construisant le Raumgitter de prisme droit élémentaire (OTT′T″), du Raumgitter total.

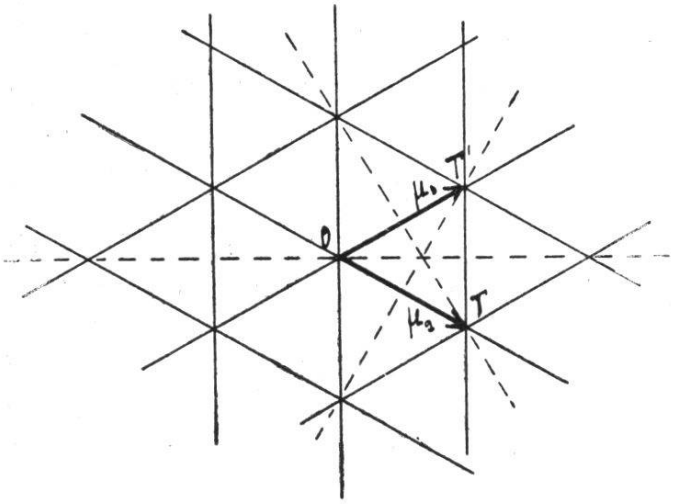


Fig. 16.

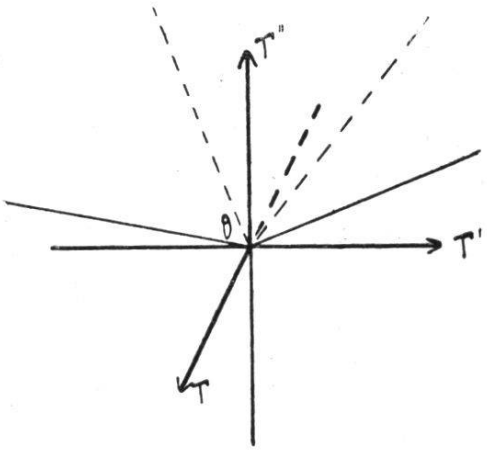


Fig. 17.

L'axe-unité OT″ étant *irrationnel* par rapport aux 2 axes égaux OT et OT′, (d'ailleurs il en sera de même également dans le cas

contraire, § suivant), ce sont là les seules rotations possibles qui fassent se couvrir le trièdre élémentaire OTT′T″ avec des arêtes égales, et la symétrie complète du Raumgitter sénaire est ainsi constituée d'un axe sénaire, 6 axes binaires dans le plan normal, formant entre eux des angles de 30° et 7 plans de symétrie.

En intercalant entre chaque couple de réseaux successifs parallèles au réseau hexagonal OTT′, 2 nouveaux réseaux de nature identique disposés de manière que l'axe sénaire les perce l'un au tiers et le second au $^2/_3$ de la grande diagonale du losange élémentaire (centres des 2 triangles équilatéraux opposés constituant le losange), ou ce qui revient au même : en ajoutant à distances égales 2 nouveaux sommets sur la diagonale principale passant par O du prisme droit à base rhombique générateur du Raumgitter sénaire, on se rend compte facilement, en effectuant les projections des réseaux parallèles sur le réseau fondamental OTT′, que pour le nouveau Gitter obtenu l'axe sénaire devient une axe *ternaire* ($\alpha = 120°$) avec 3 axes binaires (par suite 3 plans de symétrie) au lieu de 6 dans le plan des réseaux.

C'est le Raumgitter *ternaire,* dont la symétrie est un sous-groupe caractéristique de la symétrie sénaire (§ 98). Son parallélipipède élémentaire est un rhomboèdre quelconque, et en ajoutant maintenant à ce Gitter ternaire le Raumgitter terquaternaire du complexe cubique qui reste à trouver, on établit facilement en procédant un peu autrement (Bravais, Sohncke et d'autres), qu'il n'est pas d'autres types possibles de Raumgitters symétriques que les 6 ainsi obtenus : binaire, terbinaire, quaternaire, sénaire, ternaire, et terquaternaire.

V. Complexe *cubique.* Raumgitter *terquaternaire.*

Le parallélipipède générateur du Raumgitter est un *cube :* les 3 axes-unités irrationnels du complexe rhombique deviennent *égaux,* et se trouvent ainsi chacun dans des conditions identiques à celles de l'axe OT″ dans le Raumgitter quaternaire. Leurs 3 directions sont donc des axes quaternaires, et dans chaque plan fondamental les diagonales du carré élémentaire sont des axes binaires. En outre les grandes diagonales passant par le point O des 8 cubes qui y sont juxtaposés (fig. 17), en d'autres termes les 4 diagonales principales du cube générateur sont des axes *ternaires* ($\alpha = 120°$) du Raumgitter. Ce sont là en effet toutes les rotations possibles qui peuvent faire se couvrir avec lui-même ou les axes inverses le triple élémentaire trirectangle d'axes égaux (OTT′T″, et par suite faire coïncider avec lui-même le Raumgitter total. En y ajoutant les 3 plans de symétrie fondamentaux et les 6 plans de symétrie normaux aux axes binaires, passant 2 à 2 par chaque axe quaternaire, nous avons ainsi la symétrie complète du Raumgitter terquaternaire.

Il est facile de nouveau de voir que aucun de ces éléments de symétrie ne disparaît en centrant d'un nouveau sommet le centre de figure, ou d'un nouveau sommet chacune des 6 faces carrées du cube élémentaire ; les 2 Gitters obtenus sont les seuls de l'infinité des Gitters impliqués dans le complexe cubique qui possèdent la symétrie terquaternaire.

86. Les 5 complexes précédents étant établis, qui sont les complexes des 5 systèmes cristallins symétriques, il est encore en réalité, dans cette condition d'une face donnée avec une arête normale, 2 autres types de complexe que nous avons négligés : le complexe monocline dans le cas où l'axe-unité vertical μ_1 serait *égal* à l'un des 2 autres irrationnels μ_2 ou μ_3, et le complexe hexagonal dans lequel les 3 axes-unités seraient *égaux*. La différence essentielle qui fait que ces 2 derniers complexes, au point de vue cristal, ne doivent être que des cas particuliers des 2 complexes monocline et hexagonal, est que les Raumgitters primitifs des 2 complexes nommés à cette variation de leur premier paramètre μ_1 ne gagnent *aucune symétrie nouvelle*. Il serait inutile même de le montrer par une manière de raisonner analogue encore à celle employée déjà pour chacun des complexes au § précédent.

Complexe *monocline*. Si $\mu_1 = \mu_2$, dans une rotation le paramètre μ_1 peut coincider avec μ_2 ; dans ce cas ou bien le second paramètre μ_3 reste dans son plan et pour cela μ_2 et μ_3 devraient être perpendiculaires, ou bien μ_2 et μ_3 sortent de leur plan et atteignent des points du réseau limitrophe, mais alors μ_2 coincide avec μ_1 et les 2 positions avant et après la rotation de la fig. 18 montrent immédiatement qu'il devrait exister dans le réseau limitrophe et par suite dans le plan fondamental un segment TT′ ou OT_1' normal avec μ_2 et plus court que le paramètre minima μ_3.

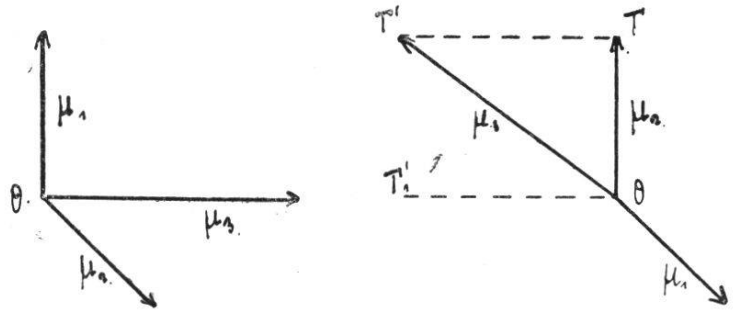


Fig. 18

Complexe *hexagonal*. Si $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3$, une nouvelle rotation, autre que celles du Raumgitter sénaire, n'est possible que dans l'une des 2 conditions suivantes : ou bien l'un des 2 axes-unités μ_2 ou μ_3 reste dans leur plan ; dans ce cas μ_1 doit lui rester normal (fig. 16)

et ne peut se couvrir avec un paramètre du plan $(\mu_2\mu_3)$; ou bien les 2 axes μ_2 et μ_3 sortent de leur plan ; l'un ne peut alors que coïncider avec μ_1 et l'autre ne peut évidemment pas atteindre le réseau supérieur.

Le fait que ces 2 variations des complexes monocline et hexagonal ne sont pas des complexes correspondants à des systèmes cristallins déterminés, comme les 5 premiers types trouvés, est donc connexe au fait que les Gitters correspondants ne gagnent à cette variation aucune symétrie. La répartition parallélipipèdique dans l'espace des sommets du Raumgitter est donc intimement liée à la nature de la substance cristalline, et si momentanément, pour une température donnée, le complexe d'un cristal monocline ou hexagonal peut posséder les propriétés qu'entraîne cette variation de son paramètre vertical, la nature de la substance du cristal ne change pas, pas plus que la symétrie du Gitter primitif correspondant.

87. Pour toute face d'un complexe à laquelle correspond une arête normale, chacun de l'infinité des Gitters qui peuvent se construire sur l'arête normale et 2 arêtes quelconques de la face comme arêtes fondamentales, a donc cette face comme plan de symétrie, et l'arête normale comme axe binaire, quaternaire ou sénaire, selon la nature du réseau primitif de la face. Si nous ne considérons plus les sommets de ces Gitters, mais simplement les arêtes du complexe qui les supportent, la face donnée est par suite également un plan de symétrie et son arête normale en tout cas un axe binaire du *complexe* lui-même.

De là, avec ce qui a été établi de la perpendicularité des faces et des arêtes (§ 43-45), découle immédiatement :

Chaque face du complexe *cubique* possède une arête normale ; chaque face du complexe cubique est donc un plan de symétrie du complexe total et par suite chaque arête est non seulement un axe binaire, mais en tant qu'axe zonal d'une infinité de plans de symétrie *, est un axe de rotation autour duquel le complexe peut se couvrir une infinité de fois sur lui-même.

Le complexe cubique possède donc la symétrie *sphérique ;* en d'autres termes la distribution dans l'espace autour du point O des

---

*) 2 plans de symétrie successifs faisant un angle α équivalent à une rotation d'angle 2 α autour de leur droite d'intersection.

arêtes et des faces du complexe est la même dans toutes les directions, comme l'est la répartition de la masse sphérique autour de son centre.

Pour les complexes *hexagonal* et *quadratique,* en plus des faces fondamentales $\mathfrak{f}_2$ et $\mathfrak{f}_3$, seules les faces de leur zone isotrope $\mathfrak{f}_1$ possèdent une arête normale ; seules donc ces faces sont plans de symétrie de ces complexes. Leurs arêtes normales coplanaires à la face $\mathfrak{f}_1$ en sont des axes binaires et seul l'axe $\mathfrak{r}_1 \equiv OT''$ de leur zone isotrope est un axe de rotation autour duquel ils peuvent se couvrir une infinité de fois sur eux-mêmes.

L'*ellipsoïde* de *révolution* représente donc la symétrie de ces 2 complexes et la répartition dans l'espace de leurs faces et arêtes autour du point O.

Seules les 3 faces fondamentales du complexe rhombique et la face fondamentale $\mathfrak{f}_1$ du complexe monocline possèdent encore une arête normale. La symétrie du complexe rhombique est donc celle de l'*ellipsoïde,* c'est-à-dire celle du Raumgitter lui-même correspondant ; celle des complexes monocline et tricline, comme celle des Gitters correspondants, se réduit à un plan de symétrie avec l'axe binaire normal ou à l'unique présence du centre O de symétrie.

Cette gradation de la symétrie *complexiale* des systèmes cristallins établis par Fedorow, est désignée par lui : *Syngonie Symetrisches Ellipsoïd-Gesetz.*

CHAPITRE XIII

88. Le Raumgitter, c'est-à-dire cette distribution parallélipipédique de sommets sur les arêtes du complexe cristallin, résultat direct de la construction zonale du complexe et donc des 2 lois expérimentales du cristal : constance des angles et loi des zones, traduites mathématiquement par celle de la rationnalité des indices, a donc été considéré et étudié jusqu'ici à un point de vue purement théorique. La notion, prise encore à ce même point de vue, de Raumgitter *symétrique* a établi dans le dernier chapitre une distinction essentielle entre le complexe cristallin n'impliquant aucune face avec arête normale et qui est le complexe du système cristallin tricline, et celui qui en possède. Par rapport toujours à la symétrie du Raumgitter primitif correspondant, les 7 types de complexes possibles dans la donnée d'une face avec arête normale, se réduisent essentiellement à 5 qui sont les complexes des 5 autres systèmes cristallins, c'est-à-dire des 5 catégories, telles que la plupart des cristallographes les établissent entre les cristaux d'espèce symétrique ; en d'autres termes leurs éléments (arêtes fondamentales et face-unité) représentent exactement les divers systèmes d'*axes cristallographiques* auxquels on rapporte d'ordinaire la position des faces et arêtes cristallines.

Mais il est maintenant surtout une 3me loi du cristal établie par l'expérience, celle de sa *symétrie expérimentale,* qui donne au rôle du Raumgitter dans l'étude du cristal toute sa valeur. Rapporté à la symétrie des Raumgitters primitifs trouvés de chacun des systèmes, en tenant compte de ce qui sera dit ensuite, elle s'énonce très clairement :

Si dans le cristal en formation apparaît une face de l'un des complexes établis, apparaissent simultanément toutes les faces avec lesquelles se couvre la première par le groupe entier des opérations de symétrie du Raumgitter correspondant, ou par l'un quelconque des

leurs sous-groupes. Mais ce n'est là que le caractère superficiel ; la symétrie de la *substance* même du cristal (reconnu entre autres par la méthode des figures de corrosion, présence des autres propriétés physiques, cohésion, dilatation, etc.) est celle du groupe complet ou d'un sous-groupe quelconque des opérations du Gitter.

89. Les seules *opérations* de *symétrie* qui effectivement font se superposer par un seul mouvement un Raumgitter symétrique avec lui-même, sont donc ses rotations autour de ses axes de symétrie ; on les appelle ses opérations de symétrie de *première espèce.* Mais le Raumgitter possède par sa nature même un centre de symétrie, c'est-à-dire une opération de symétrie d'un tout autre genre, l'inversion ; en remplaçant par une infinité de mouvements chaque sommet du Gitter par son sommet inverse le Raumgitter se retrouve en effet après cette opération, bien que chacun de ses sommets ait perdu sa place primitive, de nouveau identique à lui-même. Si donc nous faisons suivre de l'inversion chaque rotation d'un Raumgitter symétrique, le Gitter se retrouvera chaque fois après les 2 opérations successives encore identique à lui-même.

L'opération *unique* qui amènerait chaque sommet du Gitter à la place où il se trouve par ces 2 opérations successives, transforme donc également le Raumgitter en lui-même ; on l'appelle une opération de symétrie du Gitter de *seconde espèce* (réflexion ou réflexion combinée à une rotation : axe de symétrie de seconde espèce). En comptant l'*identité,* c'est-à-dire l'absence de mouvement, comme opération de symétrie de première espèce, par opposition à l'inversion, opération de symétrie de seconde espèce, la symétrie d'un Raumgitter (et ainsi celle des classes holoédriques correspondantes, § 94-100), est donc constituée d'un nombre *égal* d'opérations de symétrie de première espèce et d'opérations de symétrie de seconde espèce. Elles sont évidemment toutes les opérations et les seules qui transforment le Raumgitter en lui-même ; par le fait leur ensemble constitue un *groupe* et en possède la propriété caractéristique : l'opération unique équivalente à 2 opérations successives quelconques du groupe, est toujours une opération du groupe.

Naturellement, comme nous le verrons d'ailleurs, certaines de ces opérations du groupe, se nécessitant l'une l'autre, constituent à leur tour, dans le groupe lui-même, un *sous-groupe* indépendant,

possédant pour son propre compte la propriété qui vient d'être énoncée. Le problème qui se pose maintenaut est précisément de déterminer dans chaque symétrie de Raumgitter trouvée tous ces sous-groupes d'opérations possibles ; les cristaux dont ils représenteront la symétrie, constituent les différentes *classes* du système cristallin correspondant.

Bravais, Sohncke, Mallard et d'autres ont basé sur cette structure parallélipipèdique du Gitter l'explication de la nature intime de la substance cristalline ; Bravais place en chaque sommet du Raumgitter symétrique un polyèdre moléculaire dont la symétrie est celle du groupe complet ou des sous-groupes indépendants des opérations du Gitter. Comme qu'il en soit, les 3 lois expérimentales de la cristallographie établissent donc, surtout celle de la symétrie du cristal, une corrélation idéale entre la structure du Gitter et la symétrie du milieu cristallin. Jusqu'à quel point nous permet-elle de pénétrer dans la nature intime du cristal? Nous sommes trop peu autorisé pour le dire ici ; nous n'avons eu d'autre but dans ce travail que de montrer cette corrélation en établissant avec les différents types de complexes la symétrie des Gitters primitifs correspondants, pour y adapter ensuite la loi de symétrie et en déduire par une méthode nouvelle et intéressante les *32 classes* possibles de cristaux.

90. Si nous prenons 3 vecteurs-unités $\mathfrak{i}$, $\mathfrak{j}$, $\mathfrak{k}$, formant un système trirectangulaire d'axes et que par une opération de symétrie de première ou de seconde espèce autour du point O, ces 3 vecteurs coïncident avec le nouveau système trirectangulaire $\mathfrak{i}'$, $\mathfrak{j}'$, $\mathfrak{k}'$, la somme conventionnelle des 3 *dyades* *, formée chacune de la simple juxtaposition de ces 2 vecteurs :

$$\Phi \equiv \mathfrak{i}\mathfrak{i} + \mathfrak{j}\mathfrak{j} + \mathfrak{k}\mathfrak{k}$$

constitue un *dyadic* * représentant l'opération donnée.

En effet soit un vecteur quelconque $\mathfrak{R}$ déterminant le point P de l'espace et décomposé selon les directions des 3 vecteurs-unités $\mathfrak{i}$, $\mathfrak{j}$, $\mathfrak{k}$:

$$\mathfrak{R} \equiv x\mathfrak{i} + y\mathfrak{j} + z\mathfrak{k}$$

---

*) Vectoranalysis : Gibbs. Le mot anglais « dyadic » pourrait se traduire en français *dyadique* (féminin) comme le mot anglais « quadric » se traduit par le mot français *quadrique*. Comme pour le mot « dyade » j'ai gardé simplement le mot anglais plus court « dyadic » ; cela m'a paru sans aucune importance.

Faisons ce que Gibbs appelle le produit scalaire du vecteur $\mathfrak{R}$ par le dyadic Φ et qu'il écrit ainsi :

$$(x\mathfrak{i} + y\mathfrak{j} + z\mathfrak{k}) \cdot (\mathfrak{i}\mathfrak{i}' + \mathfrak{j}\mathfrak{j}' + \mathfrak{k}\mathfrak{k}')$$

c'est-à-dire multiplions scalairement chaque composante du vecteur $\mathfrak{R}$ par le vecteur antécédent de chaque terme du dyadic (voir la remarque). Nous obtenons le nouveau vecteur :

$$\mathfrak{R}' \equiv x\mathfrak{i}' + y\mathfrak{j}' + z\mathfrak{k}'$$

dont la position par rapport aux nouveaux axes $\mathfrak{i}'$, $\mathfrak{j}'$, $\mathfrak{k}'$ est identiquement celle du vecteur $\mathfrak{R}$ par rapport aux premiers. Le dyadic Φ employé comme *opérateur* sur le vecteur $\mathfrak{R}$ d'un point quelconque de l'espace, lui fait donc subir autour du point O la même opération qui a amené $\mathfrak{i}$, $\mathfrak{j}$, $\mathfrak{k}$ en $\mathfrak{i}'$, $\mathfrak{j}'$, $\mathfrak{k}'$. Il est ainsi l'expression algébrique de l'opération donnée et les positions extrêmes des vecteurs-unités $\mathfrak{i}$, $\mathfrak{j}$, $\mathfrak{k}$, déterminant l'opération en elle-même, déterminent également complètement le dyadic qui la représente.

Remarque. La juxtaposition des 2 vecteurs qui constituent la dyade est pour Gibbs une 3me sorte de produit qu'il appelle produit *indéfini* de 2 vecteurs. Le produit scalaire est une quantité pure et n'impose aux 2 vecteurs qui le forment qu'une condition : le produit de leurs tenseurs par le cos de leur angle. Le produit vectoriel est un vecteur et leur impose 3 conditions : le produit de leurs tenseurs par le sinus de leur angle, le plan dans lequel ils se trouvent et leur position réciproque. Le produit indéfini représente 2 vecteurs et leur impose 5 conditions : la direction et le sens de chacun et le produit de leurs tenseurs. La dyade possède en effet la propriété *associative ;* il suffit de le montrer pour les 2 sortes de produits, produits scalaires de dyades par vecteur et de dyades par dyades, qui nous sont nécessaires ici. Si d'une manière générale :

$\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$, sont 4 vecteurs-unités quelconques et $a = a'a''$, le produit scalaire de vecteur par dyade, c'est-à-dire le produit scalaire du vecteur par le vecteur antécédent de la dyade pris comme coefficient du vecteur conséquent :

$$\mathfrak{r} \cdot a\mathfrak{a}\mathfrak{b} = \mathfrak{r} \cdot a'\mathfrak{a}a''\mathfrak{b} = \mathfrak{r} \cdot a''\mathfrak{a}a'\mathfrak{b} = a'a''(\mathfrak{r} \cdot \mathfrak{a})\,\mathfrak{b}\,;$$

le produit scalaire de dyade par dyade, c'est-à-dire le produit scalaire des vecteurs moyens pris comme coefficient de la dyade formée des vecteurs extrêmes :

$$\mathfrak{c}\mathfrak{d} \cdot a\mathfrak{a}\mathfrak{b} = \mathfrak{c}\mathfrak{d} \cdot a'\mathfrak{a}a''\mathfrak{b} = \mathfrak{c}\mathfrak{d} \cdot a''\mathfrak{a}a'\mathfrak{b} = a'a''(\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{d})\,\mathfrak{c}\mathfrak{b}$$

$$\text{Donc :} \quad a\mathfrak{a}\mathfrak{b} = a'\mathfrak{a}a''\mathfrak{b} = a''\mathfrak{a}a'\mathfrak{b} = \mathfrak{a}\mathfrak{a}\mathfrak{b} \quad \text{etc.}$$

Pour cette raison si l'un des vecteurs est négatif, la dyade est négative ; si le coefficient de la dyade est nul, celui de chacun de ses vecteurs est également nul.

La dyade possède également la propriété *distributive,* mais on ne peut changer l'ordre des vecteurs qui se juxtaposent, c'est-à-dire :

$$\mathfrak{a}(\mathfrak{b}+\mathfrak{c}) = \mathfrak{a}\mathfrak{b} + \mathfrak{a}\mathfrak{c}$$

En effet: $\mathfrak{r}\cdot[\mathfrak{a}(\mathfrak{b}+\mathfrak{c})] = \mathfrak{r}\cdot(\mathfrak{a}\mathfrak{b}+\mathfrak{a}\mathfrak{c})$

parce que: $\mathfrak{r}\cdot\mathfrak{a}(\mathfrak{b}+\mathfrak{c}) = \mathfrak{r}\cdot\mathfrak{a}\mathfrak{b} + \mathfrak{r}\cdot\mathfrak{a}\mathfrak{c}$

On le démontrerait de même pour le produit scalaire de dyade par dyade.

91. Soient maintenant les 2 opérations successives :

$$\Phi_1 \equiv \mathfrak{i}\mathfrak{i}' + \mathfrak{j}\mathfrak{j}' + \mathfrak{k}\mathfrak{k}'$$
$$\Phi_2 \equiv \mathfrak{i}'\mathfrak{i}'' + \mathfrak{j}'\mathfrak{j}'' + \mathfrak{k}'\mathfrak{k}''$$

Si nous faisons le produit scalaire des 2 dyadics qui s'écrit:

$$(\mathfrak{i}\mathfrak{i}' + \mathfrak{j}\mathfrak{j}' + \mathfrak{k}\mathfrak{k}')\cdot(\mathfrak{i}'\mathfrak{i}'' + \mathfrak{j}'\mathfrak{j}'' + \mathfrak{k}'\mathfrak{k}'')$$

et qui naturellement consiste dans la multiplication scalaire de chaque dyade du premier par chaque dyade du second (remarque précédente), nous obtenons le nouveau dyadic:

$$\Phi_3 \equiv \mathfrak{i}\mathfrak{i}'' + \mathfrak{j}\mathfrak{j}'' + \mathfrak{k}\mathfrak{k}''$$

c'est-à-dire le dyadic qui représente l'opération unique équivalente aux 2 opérations successives données. Les combinaisons d'opérations de symétrie successives qui peuvent avoir lieu autour du point O s'expriment donc par les produits scalaires des dyadics équivalents, et si ces opérations sont telles qu'elles constituent un groupe, le groupe de leurs dyadics jouit de la propriété caractéristique : que le produit scalaire de deux d'entre eux est toujours un dyadic du groupe.

Remarque. Naturellement les vecteurs $\mathfrak{i}'$, $\mathfrak{j}'$, $\mathfrak{k}'$; $\mathfrak{i}''$, $\mathfrak{j}''$, $\mathfrak{k}''$ peuvent être rapportés très bien aux 3 axes trirectangulaires $\mathfrak{i}$, $\mathfrak{j}$, $\mathfrak{k}$ et le dyadic:

$$\Phi_1 \equiv \mathfrak{i}\mathfrak{i}' + \mathfrak{j}\mathfrak{j}' + \mathfrak{k}\mathfrak{k}'$$

s'écrit également:

$$\mathfrak{i}(x_1'\mathfrak{i} + y_1'\mathfrak{j} + z_1'\mathfrak{k}) + \mathfrak{j}(x_2'\mathfrak{i} + y_2'\mathfrak{j} + z_2'\mathfrak{k}) + \mathfrak{k}(x_3'\mathfrak{i} + y_3'\mathfrak{j} + z_3'\mathfrak{k})$$

Puisque la dyade possède la propriété distributive et associative, il se développe en *nonion Form* (Gibbs) représentant toujours le même dyadic:

$$\begin{aligned} & x_1'\mathfrak{i}\mathfrak{i} + y_1'\mathfrak{i}\mathfrak{j} + z_1'\mathfrak{i}\mathfrak{k} \\ + & x_2'\mathfrak{j}\mathfrak{i} + y_2'\mathfrak{j}\mathfrak{j} + z_2'\mathfrak{j}\mathfrak{k} \\ + & x_3'\mathfrak{k}\mathfrak{i} + y_3'\mathfrak{k}\mathfrak{j} + z_3'\mathfrak{k}\mathfrak{k} \end{aligned}$$

Le dyadic $\mathfrak{i}'\mathfrak{i}'' + \mathfrak{j}'\mathfrak{j}'' + \mathfrak{k}'\mathfrak{k}''$ rapporté aux axes $\mathfrak{i}$, $\mathfrak{j}$, $\mathfrak{k}$ se développerait de la même manière en nonion Form et inversement la nonion Form obtenue se réduirait à la somme des 3 dyades, représentant encore le dyadic donné:

$$\mathfrak{i}[(x_1'x_1'' + x_2'x_2'' + x_3'x_3'')\mathfrak{i} + (x_1'y_1'' + x_2'y_2'' + x_3'y_3'')\mathfrak{j} + (\ldots)\mathfrak{k}] + \mathfrak{j}[\ldots] + \mathfrak{k}[\ldots]$$

Les vecteurs des grandes parenthèses sont ainsi les nouvelles positions que prennent les vecteurs $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ par l'o ération donnée $\mathbf{i}'\mathbf{i}'' + \mathbf{j}'\mathbf{j}'' + \mathbf{k}'\mathbf{k}''$. Rapporter les positions successives $\mathbf{i}'$, $\mathbf{j}'$, $\mathbf{k}'$, $\mathbf{i}''$, $\mathbf{j}''$, $\mathbf{k}''$, etc., aux axes fondamentaux $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$, de position fixe dans l'espace, revient donc à rapporter tous les dyadics à ces axes, c'est-à-dire à donner à toutes les opérations équivalentes les positions primitives $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$, pour point de départ. C'est ce que nous ferons pour chacun des groupes de dyadics, représentant le groupe entier d'opérations du Gitter primitif correspondant à chaque complexe, que nous allons écrire. D'ailleurs, sauf pour le Gitter hexagonal dont les opérations d'ordre sénaire exigent des dyadics de forme un peu moins facile, tout y est bien plus simple que ce qui vient d'être dit d'une manière plutôt générale.

Si nous écrivons en effet par ordre de symétrie de leurs Gitters les 5 complexes ou systèmes cristallins : tricline, monocline, rhombique, quadratique et cubique, on se rend compte immédiatement que les groupes d'opérations correspondants : centre de symétrie, binaire, terbinaire, quaternaire, et terquaternaire, sont impliqués chacun dans celui du système supérieur. Puisque le groupe d'opérations de la symétrie terquaternaire se réduit en fait aux 48 manières possibles de couvrir 3 vecteurs-unités triperpendiculaires $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ avec eux-mêmes ou avec $-\mathbf{i}$, $-\mathbf{j}$, $-\mathbf{k}$, (les 3 arêtes du cube élémentaire ne peuvent se couvrir qu'avec elles-mêmes ou les arêtes inverses), les dyadics représentant les opérations de symétrie de ces 5 premiers systèmes se réduisent donc chacun à 3 dyades de coefficient 1 ou -1 et dont $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$, dans un ordre ou un autre, sont à la fois les vecteurs antécédents et les vecteurs conséquents. Le produit de 2 quelconques de ces dyadics revient donc uniquement à multiplier chaque dyade de l'un par la *seule* dyade de l'autre qui a pour vecteur antécédent le vecteur conséquent de la première, et les coefficients des nouvelles dyades sont également 1 ou -1 selon que les 2 dyades dont elles résultent sont de même signe ou de signe contraire.

Si nous appelons dyadics *pairs* ceux de ces dyadics qui ont un nombre pair (0 ou 2) de dyades négatives et dyadics *impairs* ceux qui en ont un nombre impair (1 ou 3) nous avons immédiatement cette propriété qui nous servira à préciser les sous-groupes de ces dyadics : Le produit de 2 dyadics pairs ou de 2 dyadics impairs est toujours un dyadic pair et le produit de 2 dyadics de parité différente est toujours un dyadic impair. C'est une conséquence directe du fait que les combinaisons de signes $++$ et $--$ donne le signe positif et les combinaisons $+-$ et $-+$ donnent le signe négatif, et cela se démontre très simplement. Le produit des 2 dyadics, ou plutôt en n'écrivant que les signes des dyades, des 2 rangées de signes :

$$\begin{matrix} + & + & + \\ + & + & + \end{matrix}$$

(en multipliant donc chaque signe de la première par un seul signe de la seconde) donne comme résultat 3 dyades c'est-à-dire 3 signes positifs. Dès que l'on introduit dans l'une des rangées un signe $-$ en place d'un signe $+$, le produit possède un signe $-$; si on en introduit un second dans la même ou dans l'autre rangée, ou bien il annule le premier ou bien donne un second signe $-$. Par le fait on en introduisant un 3me le résultat aura 1 ou 3 signes négatifs, et ainsi de suite. Si donc la somme des signes négatifs introduits dans les 2 rangées est paire, en d'autres termes si les 2 dyadics donnés sont de même parité, le résultat a un

nombre pair de signes négatifs ; si cette somme est impaire c'est-à-dire si les 2 dyadics sont de parité différente, le résultat a un nombre impair de signes négatifs, c. q. f. d.

Nous n'écrirons pour les 5 premiers systèmes chaque dyadic qu'une fois, c'est-à-dire que pour chaque système supérieur nous n'écrirons que les dyadics représentant les opérations nouvelles. La classe possédant la symétrie du groupe complet des opérations du Gitter est la classe *holoédrique* du système. Selon que le nombre des opérations ou des dyadics des sous-groupes obtenus est la demie, le quart ou même le huitième du nombre des dyadics du groupe entier de symétrie, la classe correspondante est une hémiédrie ou hémimorphie, une tétartoédrie, ou même une octaédrie de cette classe holoédrique. Les dénominations ajoutées entre parenthèses sont les dénominations maintenues aux classes par différents cristallographes et empruntées généralement au nom de la forme cristalline normale correspondante.

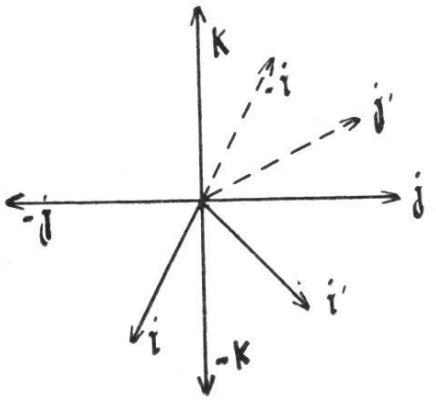
92. Système *tricline.* Son Raumgitter ne possède ni axe de symétrie et par le fait ni plan de symétrie ; les seules opérations qui le fassent coïncider avec lui-même sont l'identité et l'inversion autour du point O :

$$1. \quad \mathbf{ii} + \mathbf{jj} + \mathbf{kk}$$
$$2. \quad -\mathbf{ii} - \mathbf{jj} - \mathbf{kk}$$

L'identité est indépendante et détermine une classe ; l'inversion multipliée par elle-même exige l'identité. Nous avons ainsi les 2 classes :

I. Classe tricline-hémiédrique (asymétrique). 1.
II. Classe tricline-holoédrique (pinakoidale). 1. 2.

93. Système *monocline.* Son Raumgitter (et d'ailleurs le complexe lui-même) possède un axe binaire et par le fait un plan de symétrie normal. En effet si $\mathbf{i}$ et $\mathbf{j}$ sont 2 vecteurs-unités perpendiculaires dans le plan normal à l'axe binaire et $\mathbf{k}$ le vecteur-unité coïncidant avec cet axe, le dyadic 3, équivalent à l'axe binaire, multiplié par l'inversion donne le dyadic 4, qui est le plan de symétrie normal (fig. 19).



$$3. \quad -\mathbf{ii} - \mathbf{jj} + \mathbf{kk}$$
$$4. \quad \mathbf{ii} + \mathbf{jj} - \mathbf{kk}$$

Chacun de ces dyadics multiplié par lui-même donne l'identité et détermine une classe ; multipliés l'un par l'autre, ils exigent l'inversion et représentent la symétrie de la classe holoédrique du système :

III. Classe monocline-hémimorphe (sphénoidique).
IV. Classe monocline-hémiédrique (domatique).
V. Classe monocline-holoedrique (prismatique).

94. Système *rhombique.* Le Raumgitter possède avec l'axe binaire $\mathfrak{k}$ les 2 axes binaires perpendiculaires $\mathfrak{i}$ et $\mathfrak{j}$ dans le plan de symétrie normal ; les dyadics 5 et 6 équivalents, multipliés par l'inversion, donnent les 2 autres plans de symétrie 7 et 8 correspondants à ces axes :

$$\begin{array}{ll} 5. & \mathfrak{ii} - \mathfrak{jj} - \mathfrak{kk} \\ 6. & -\mathfrak{ii} + \mathfrak{jj} - \mathfrak{kk} \\ 7. & -\mathfrak{ii} + \mathfrak{jj} + \mathfrak{kk} \\ 8. & \mathfrak{ii} - \mathfrak{jj} + \mathfrak{kk} \end{array}$$

Les nouvelles classes sont immédiatement :

4 dyadics pairs	5. 6. 3. 1.
2 dyadics pairs et 2 impairs	7. 8. 3. 1.
Groupe holoédrique	5. 6. 7. 8. 4. 3. 2. 1.

Toute autre combinaison par eux-mêmes ou 2 à 2 de ces nouveaux dyadics détermine l'une des classes déjà obtenues au système précédent, sinon le groupe holoédrique des 8 dyadics donnés. Nous avons donc les 3 nouvelles classes :

VI. Classe rhombique-hémiédrique (bisphénoidique).
VII. Classe rhombique-hémimorphe (pyramidale).
VIII. Classe rhombique-holoédrique (bipyramidale).

Pour ces 3 premiers systèmes la forme des dyadics se réduit donc aux 8 variations que peuvent fournir les 3 signes des dyades de la forme générale :

$$\mathfrak{ii} + \mathfrak{jj} + \mathfrak{kk}$$

L'identité est donc en quelque sorte le dyadic *type* de leurs opérations et si nous multiplions par l'une d'elles l'un des dyadics quelconque des 5 autres types qu'impliqueront les opérations des 2 systèmes suivants (ce qui fait pour le système cubique 6 types à 8 variations chacun = 48 dyadics), cette multiplication ne peut que changer les signes du dyadic donné et le produit sera ainsi un dyadic du même type.

95. Système *quadratique* ou *tétragonal*. L'axe binaire $\mathfrak{k}$ devient un axe quaternaire, et dans le plan normal aux 2 axes binaires $\mathfrak{i}$ et $\mathfrak{j}$ s'ajoutent les 2 axes binaires diagonaux (fig. 19) $\mathfrak{i}'$ et $\mathfrak{j}'$. Les diadics 9. 10. 11. et 12. représentent les nouvelles rotations et multipliés par l'inversion, exigent l'axe quaternaire de 2me espèce 13. et 14. (axe quaternaire de 1re espèce combiné à une réflexion dans le plan normal) et les 2 plans de symétrie normaux aux axes binaires 15 et 16 :

9.	$\mathfrak{ij} - \mathfrak{ji} + \mathfrak{kk}$	1er mouv.	axe quat.
10.	$-\mathfrak{ij} + \mathfrak{ji} + \mathfrak{kk}$	3e mouv.	axe quat.
11.	$\mathfrak{ij} + \mathfrak{ji} - \mathfrak{kk}$	axes binaires $\mathfrak{i}'$ et $\mathfrak{j}'$	
12.	$-\mathfrak{ij} - \mathfrak{ji} - \mathfrak{kk}$		
13.	$-\mathfrak{ij} + \mathfrak{ji} - \mathfrak{kk}$	3me mouv.	axe quat. 2e espèce
14.	$\mathfrak{ij} - \mathfrak{ji} - \mathfrak{kk}$	1er mouv.	2e espèce
15.	$-\mathfrak{ij} - \mathfrak{ji} + \mathfrak{kk}$	plans de symétrie normaux aux axes $\mathfrak{i}'$ et $\mathfrak{j}'$.	
16.	$\mathfrak{ij} + \mathfrak{ji} + \mathfrak{kk}$		

Le dyadic-type : $\mathfrak{ij} + \mathfrak{ji} + \mathfrak{kk}$ multiplié par lui-même donne l'identité :

$$(\mathfrak{ij} + \mathfrak{ji} + \mathfrak{kk})^2 = \mathfrak{ii} + \mathfrak{jj} + \mathfrak{kk},$$

tandis que multiplié par l'un des 8 dyadics précédents, il donne (remarque précédente) l'une de ses 8 variations que nous venons d'écrire. Les 2 dyadics impairs 9 et 10, comme les 2 dyadics pairs 13 et 14, exigent donc les 2 variations paires de l'identité dont la dyade $\mathfrak{kk}$ est positive :

9.	10.	3.	1.	puissances du dyadic 9.
13.	14.	3.	1.	puissances du dyadic 13.

Les 2 groupes réunis exigent en outre les 2 variations impaires de l'identité dont la dyade $\mathfrak{kk}$ est négative :

9. 10. 13. 14. 4, 3. 2. 1.

Remarquons d'abord que le groupe suivant des 4 dyadics 11. 12. 15. et 16. représente de nouveau dans le système quadratique la symétrie du système précédent, et qu'il est donc inutile de le prendre à part pour retrouver les classes déjà obtenues. En introduisant 11. ou 15. dans le 1er groupe trouvé, il faut y introduire 12. ou 16. par le fait de la présence de 3. ; nous obtenons ainsi soit les 4 variations impaires du nouveau type exigeant les 4 variations paires de l'identité, soit les 4 variations du nouveau type dont la dyade $\mathfrak{kk}$ est positive exigeant les 4 variations de l'identité dont $\mathfrak{kk}$ est également positif :

9. 10. 11. 12. 5. 6. 3. 1.
9. 10. 15. 16. 7. 8. 3. 1.

En introduisant 11. ou 15. dans le 2me groupe trouvé, il faut y introduire encore 12. ou 16. par le fait toujours de la présence de 3.; nous obtenons soit les 4 nouvelles variations dont kk est négatif exigeant les 4 variations de l'identité dont kk est positif, soit le groupe des 8 dyadics pairs compris dans les 16 dyadics donnés :

13. 14. 11. 12. 7. 8. 3. 1.
13. 14. 15. 16. 5. 6. 3. 1.

Mais on voit immédiatement que ces 2 derniers groupes représentent la même symétrie : l'axe quaternaire de 2e espèce, 2 plans de symétrie perpendiculaires passant par cet axe alternant avec 2 axes binaires perpendiculaires dans le plan normal.

Dès que l'on introduit maintenant dans l'un des groupes à 8 dyadics, l'un quelconque des dyadics donnés qu'il ne contient pas encore, on obtient le groupe entier des 16 dyadics donnés, représentant la symétrie du Gitter quaternaire et celle de la classe holoédrique du système. Nous avons donc :

IX. Classe tetragon.-hémiédrique-hémimorphe (pyramidale).
X. Classe tetragon.-sphénoidique-tetartoédrique (bisphénoidique).
XI. Classe tétragon.-pyramidale-hémiédrique (bipyramidale).
XII. Classe tétragon.-trapézoédrique-hémiédrique (trapézoédrique).
XIII. Classe tétragon.-holoédrique-hémimorphe (ditetr. pyramidale).
XIV. Classe tétragon.-sphénoidique-hémiédrique (scalénoédrique).
XV. Classe tetragon.-holoédrique (ditétrag. bipyramidale).

96. Système *cubique* ou *régulier*. Les axes i et j sont également quaternaires. A l'un et l'autre est donc attaché le système de dyadics représentant la symétrie quaternaire correspondante, et ces 2 systèmes s'écrivent immédiatement en donnant successivement à i et à j le rôle de k dans les dyadics du § précédent :

Axe quaternaire i et axes binaires diagonaux dans le plan (jk)	Axe quaternaire j et axes binaires diagonaux dans le plan (ik)
17. $ii + jk - kj$	25. $-ik + jj + ki$
18. $ii - jk + kj$	26. $ik + jj - ki$
19. $-ii + jk + kj$	27. $ik - jj + ki$
20. $-ii - jk - kj$	28. $-ik - jj - ki$

Multipliés par l'inversion :

Axe quaternaire $\mathfrak{i}$ de 2me espèce et plans de symétrie diagonaux pas. par l'axe.		Axe quaternaire $\mathfrak{j}$ de 2me espèce et plans de symétrie diagonaux pas. par l'axe.	
21.	$-\mathfrak{ii}-\mathfrak{jk}+\mathfrak{kj}$	29.	$\mathfrak{ik}-\mathfrak{jj}-\mathfrak{ki}$
22.	$-\mathfrak{ii}+\mathfrak{jk}-\mathfrak{kj}$	30.	$-\mathfrak{ik}-\mathfrak{jj}+\mathfrak{ki}$
23.	$\mathfrak{ii}-\mathfrak{jk}-\mathfrak{kj}$	31.	$-\mathfrak{ik}+\mathfrak{jj}-\mathfrak{ki}$
24.	$\mathfrak{ii}+\mathfrak{jk}+\mathfrak{kj}$	32.	$\mathfrak{ik}+\mathfrak{jj}+\mathfrak{ki}$

Les directions des 4 diagonales principales du cube élémentaire sont en outre des axes ternaires (fig. 17), dont les 2 mouvements qui ne sont pas l'identité s'écrivent immédiatement (fig. 19); multipliés par l'inversion ils deviennent les 2 dyadics de 2me espèce qui sont les 1er et 5me mouvement d'axes sénaires de 2me espèce (axes sénaires de 1re espèce combinés à une réflexion dans le plan normal, leur 3me mouvement est l'inversion) coïncidant avec les axes ternaires.

1re axe (en sens inverse des aiguilles d'une montre)		2me axe (en remplaçant dans le 1er $\mathfrak{i}$ par $\mathfrak{j}$ et $\mathfrak{j}$ par $-\mathfrak{i}$)	
33.	$\mathfrak{ij}+\mathfrak{jk}+\mathfrak{ki}$	37.	$-\mathfrak{ik}-\mathfrak{ji}+\mathfrak{kj}$
34.	$\mathfrak{ik}+\mathfrak{ji}+\mathfrak{kj}$	38.	$-\mathfrak{ij}+\mathfrak{jk}-\mathfrak{ki}$
35.	$-\mathfrak{ij}-\mathfrak{jk}-\mathfrak{ki}$	39.	$\mathfrak{ik}+\mathfrak{ji}-\mathfrak{kj}$
36.	$-\mathfrak{ik}-\mathfrak{ji}-\mathfrak{kj}$	40.	$\mathfrak{ij}-\mathfrak{jk}+\mathfrak{ki}$

3me axe (en remplaçant dans le 1er $\mathfrak{i}$ p. $-\mathfrak{i}$ et $\mathfrak{j}$ par $-\mathfrak{j}$)		4me axe (en remplaçant dans le 1er $\mathfrak{i}$ p. $-\mathfrak{j}$ et $\mathfrak{j}$ par $-\mathfrak{i}$)	
41.	$\mathfrak{ij}-\mathfrak{jk}-\mathfrak{ki}$	45.	$\mathfrak{ik}-\mathfrak{ji}-\mathfrak{kj}$
42.	$-\mathfrak{ik}+\mathfrak{ji}-\mathfrak{kj}$	46.	$-\mathfrak{ij}-\mathfrak{jk}+\mathfrak{ki}$
43.	$-\mathfrak{ij}+\mathfrak{jk}+\mathfrak{ki}$	47.	$-\mathfrak{ik}+\mathfrak{ji}+\mathfrak{kj}$
44.	$\mathfrak{ik}-\mathfrak{ji}+\mathfrak{kj}$	48.	$\mathfrak{ij}+\mathfrak{jk}-\mathfrak{ki}$

Il est inutile d'abord de chercher de nouveaux groupes de dyadics pris exclusivement dans l'une seule des symétries quaternaires : ils ont été déjà trouvés au système précédent ; comme aussi des groupes impliquant un seul axe ternaire ou un seul axe sénaire de 2me espèce : il se retrouveront plus simplement et à plus juste titre dans les dyadics du système suivant.

Les 4 axes ternaires sont tous des dyadics pairs dont les 2 formes types, multipliées chacune par elle-même, exige la seconde, et multipliées l'une par l'autre, exigent l'identité :

$$(\mathrm{ij} + \mathrm{jk} + \mathrm{ki})^2 = \mathrm{ik} + \mathrm{ji} + \mathrm{kj}$$
$$(\mathrm{ik} + \mathrm{ji} + \mathrm{kj})^2 = \mathrm{ij} + \mathrm{jk} + \mathrm{ki}$$
$$(\mathrm{ij} + \mathrm{jk} + \mathrm{ki}) \cdot (\mathrm{ik} + \mathrm{ji} + \mathrm{kj}) = \mathrm{ii} + \mathrm{jj} + \mathrm{kk}.$$

La présence de 2 quelconques de ces axes entraîne donc celle des 2 autres, et par le fait les 4 variations paires de l'identité :

33. 34. 37. 38. 41. 42. 45. 46.
5. 6. 3. 1.

Les 4 axes sénaires de 2me espèce sont les variations impaires des 2 types ; la présence de 2 d'entre eux exige celle des 2 axes ternaires correspondants et par suite le groupe complet des dyadics des 2 types avec les variations paires et impaires de l'identité :

33 à 48
1 à 8.

Deux quelconques des 3 types quaternaires donne comme produit un axe ternaire ; et si l'on accouple un type quaternaire à l'un ou l'autre des types ternaires, ils exigent les 2 autres types quaternaires :

$$(\mathrm{ii} + \mathrm{jk} + \mathrm{kj}) \cdot (\mathrm{ik} + \mathrm{jj} + \mathrm{ki}) = \mathrm{ij} + \mathrm{jk} + \mathrm{ki}$$
$$(\mathrm{ik} + \mathrm{jj} + \mathrm{ki}) \cdot (\mathrm{ii} + \mathrm{jk} + \mathrm{kj}) = \mathrm{ik} + \mathrm{ji} + \mathrm{kj}$$

$$(\mathrm{ik} + \mathrm{jj} + \mathrm{ki}) \cdot (\mathrm{ij} + \mathrm{jk} + \mathrm{ki}) = \mathrm{ii} + \mathrm{jk} + \mathrm{kj}$$
$$(\mathrm{ik} + \mathrm{jj} + \mathrm{ki}) \cdot (\mathrm{ik} + \mathrm{ji} + \mathrm{kj}) = \mathrm{ij} + \mathrm{ji} + \mathrm{kk}$$

Il n'existe donc pas de combinaisons de 2 types quaternaires sans dyadics ternaires et on obtiendra les sous-groupes qui restent à trouver en introduisant les dyadics quaternaires dans les 2 groupes de types ternaires obtenus.

Si l'on introduit dans le groupe des 4 axes ternaires un dyadic quaternaire *impair*, ses combinaisons avec les dyadics pairs des axes ternaires fournissent les dyadics impairs des 3 types quaternaires, et les produits de ces derniers sont soit à nouveau les dyadics pairs des axes ternaires (combinaisons de 2 types), soit les 4 variations paires de l'identité (combinaisons d'un même type) :

9. 10. 11. 12. 17. 18. 19. 20. 25. 26. 27. 28.
1. 3. 5. 6. 33. 34. 37. 38. 41. 42. 45. 46.

Si l'on introduit dans ce groupe des 4 axes ternaires un dyadic quaternaire *pair*, ses produits avec les dyadics pairs des axes ter-

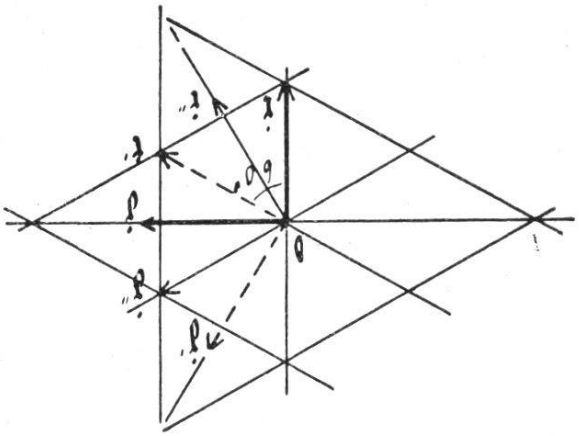
naires sont les dyadics pairs des 3 types quaternaires, et les combinaisons de ceux-ci fournissent encore soit à nouveau les dyadics pairs des axes ternaires, soit les 4 variations paires de l'identité :

13.	14.	15.	16.	21.	22.	23.	24.	29.	30.	31.	32.
1.	3.	5.	6.	33.	34.	37.	38.	41.	42.	45.	46.

Par contre dès que l'on introduit dans le groupe des 4 axes sénaires de 2me espèce un dyadic quaternaire *quelconque,* ses combinaisons avec toutes les variations paires et impaires des 2 types ternaires sont les dyadics pairs et impairs des 3 types quaternaires, et les produits de ces derniers comme ceux des types ternaires entre eux, exigent les variations paires et impaires de l'identité. Nous obtenons ainsi le groupe entier des 48 dyadics donnés, représentant les 48 opérations possibles couvrant les 3 vecteurs-unités triperpendiculaires $\mathfrak{i}$, $\mathfrak{j}$, $\mathfrak{k}$ avec eux-mêmes ou $-\mathfrak{i}$, $-\mathfrak{j}$, $-\mathfrak{k}$, c'est-à-dire le groupe de symétrie de la classe holoédrique du système cubique. Les 5 nouvelles classes sont dans l'ordre trouvé :

XVI. Classe régulière-tétartoédrique (tétraédr. pentagondodécaédrique).
XVII. Classe pentagonale-hémiédrique (dyakisdodecaédrique).
XVIII. Classe gyroédrique-hémiédrique (pentagon.-icositetraédr.).
XIX. Classe tétraédrique-hémiédrique (hexakistetraédrique).
XX. Classe régulière-holoédrique (hexakisoctaédrique).

97. Système *hexagonal.* Soient $\mathfrak{i}$ et $\mathfrak{j}$ 2 vecteurs-unités perpendiculaires pris sur 2 axes binaires du réseau fondamental et $\mathfrak{k}$ le vecteur-unité normal au plan de la fig. 20 et coïncidant avec l'axe sénaire du Raumgitter. L'unité étant le côté du triangle équilatéral élémentaire, les nouvelles positions $\mathfrak{i}'$, $\mathfrak{j}'$, $\mathfrak{k}'$ que prennent les vecteurs $\mathfrak{i}$, $\mathfrak{j}$, $\mathfrak{k}$ par le 1er mouvement de l'axe sénaire sont immédiatement :



$$\mathfrak{i}' = \frac{1}{2}\mathfrak{i} + \frac{\sqrt{3}}{2}\mathfrak{j} \qquad \mathfrak{j}' = -\frac{\sqrt{3}}{2}\mathfrak{i} + \frac{1}{2}\mathfrak{j} \qquad \mathfrak{k}' = \mathfrak{k}$$

et le dyadic représentant le mouvement s'écrit :

$$\mathbf{i}\left(\frac{1}{2}\mathbf{i}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{j}\right)+\mathbf{j}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{i}+\frac{1}{2}\mathbf{j}\right)+\mathbf{kk}$$

Le second mouvement (rotation de 120°) change $\mathbf{i}$ et $\mathbf{j}$ en $\mathbf{j}''$ et $-\mathbf{i}''$; son dyadic s'écrit pareillement :

$$\mathbf{i}\left(-\frac{1}{2}\mathbf{i}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{j}\right)+\mathbf{j}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{i}-\frac{1}{2}\mathbf{j}\right)+\mathbf{kk}$$

Le 3me mouvement est celui de l'axe binaire impliqué dans l'axe sénaire ; son dyadic est le dyadic 3 (§ 93). De là, pour les 2 autres mouvements qui restent avant l'identité, les positions des vecteurs $\mathbf{i}$ et $\mathbf{j}$ sont exactement les valeurs négatives de leurs positions après le 1er et le 2me mouvement ; il suffit donc de changer les signes des 2 premiers termes des dyadics trouvés pour obtenir leurs dyadics équivalents.

Le premier axe binaire $\mathbf{i}''$ change les vecteurs $\mathbf{i}$ et $\mathbf{j}$ en $\mathbf{i}'$ et $-\mathbf{j}'$ et $\mathbf{k}$ en $-\mathbf{k}$; son dyadic correspondant est donc :

$$\mathbf{i}\left(\frac{1}{2}\mathbf{i}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{j}\right)+\mathbf{j}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{i}-\frac{1}{2}\mathbf{j}\right)-\mathbf{kk}$$

Le second axe binaire $\mathbf{i}'$ change inversement $\mathbf{i}$ en $\mathbf{j}''$ et $\mathbf{j}$ en $\mathbf{i}''$, son dyadic s'écrit :

$$\mathbf{i}\left(-\frac{1}{2}\mathbf{i}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{j}\right)+\mathbf{j}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{i}+\frac{1}{2}\mathbf{j}\right)-\mathbf{kk}$$

L'axe binaire $\mathbf{j}$ comme l'axe binaire $\mathbf{i}$ sont les 2 axes binaires du complexe rhombique impliqués dans la symétrie du Gitter hexagonal et représentés par les dyadics 5 et 6 (§ 94). Enfin les 2 autres axes binaires $\mathbf{j}''$ et $\mathbf{j}'$, par le fait qu'ils sont normaux aux 2 premiers axes binaires $\mathbf{i}''$ et $\mathbf{i}'$, donnent par leur mouvement à $\mathbf{i}$ et à $\mathbf{j}$ les directions inverses de celles que leur donnent les axes $\mathbf{i}''$ et $\mathbf{i}'$, leurs dyadics sont donc de nouveau les 2 dyadics trouvés avec leurs 2 premiers termes pris en signe contraire.

Dans chaque dyadic obtenu, nous faisons les produits indéfinis, c'est-à-dire nous formons les dyades comme il a été fait dans la remarque du § 91 ; nous appelons pour simplifier les dyadics à 2 termes (dyadics planaires) :

$$\varphi_1 \equiv \mathbf{ii}+\mathbf{jj} \qquad \varphi_3 \equiv \mathbf{ij}+\mathbf{ji} \qquad \varepsilon_1 \equiv \frac{1}{2}$$

$$\varphi_2 \equiv \mathbf{ii}-\mathbf{jj} \qquad \varphi_4 \equiv \mathbf{ij}-\mathbf{ji} \qquad \varepsilon_2 \equiv \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Nous multiplions par l'inversion ces opérations de 1re espèce pour obtenir celles de seconde espèce en changeant simplement les signes des dyadics, et nous avons ainsi réuni en 24 dyadics le groupe complet des opérations représentant la symétrie du Raumgitter hexagonal et de la classe holoédrique correspondante :

Les 6 mouvements de l'axe sénaire.		Les 6 axes binaires $\mathbf{i}''$, $\mathbf{i}'$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{j}''$, $\mathbf{j}'$, $\mathbf{i}$.	
1′	$\varepsilon_1\varphi_1 + \varepsilon_2\varphi_4 + \mathbf{kk}$	13′	$\varepsilon_1\varphi_2 + \varepsilon_2\varphi_3 - \mathbf{kk}$
2′	$-\varepsilon_1\varphi_1 + \varepsilon_2\varphi_4 + \mathbf{kk}$	14′	$-\varepsilon_1\varphi_2 + \varepsilon_2\varphi_3 - \mathbf{kk}$
3′	$-\varphi_1 + \mathbf{kk}$	15′	$-\varphi^2 - \mathbf{kk}$
4′	$-\varepsilon_1\varphi_1 - \varepsilon_2\varphi_4 + \mathbf{kk}$	16′	$-\varepsilon_1\varphi_2 - \varepsilon_2\varphi_3 - \mathbf{kk}$
5′	$\varepsilon_1\varphi_1 - \varepsilon_2\varphi_4 + \mathbf{kk}$	17′	$\varepsilon_1\varphi_2 - \varepsilon_2\varphi_2 - \mathbf{kk}$
6′	$\varphi_1 + \mathbf{kk}$	18′	$\varphi_2 - \mathbf{kk}$

Multipliés par l'inversion :

(mais en partant de 4′ et 16′ pour plus d'homogénité).

Les 6 mouvements de l'axe sénaire combinés chacun avec une réflexion dans le plan normal.		Les 6 plans de symétrie normaux aux axes $\mathbf{j}''$, $\mathbf{j}'$, $\mathbf{i}'$, $\mathbf{i}''$, $\mathbf{i}'$, $\mathbf{j}$ et dont les traces sur le réseau fondam. sont donc $\mathbf{i}''$, $\mathbf{i}'$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{j}''$, $\mathbf{j}'$, $\mathbf{i}$.	
7′	$\varepsilon_1\varphi_1 + \varepsilon_2\varphi_4 - \mathbf{kk}$	19′	$\varepsilon_1\varphi_2 + \varepsilon_2\varphi_3 + \mathbf{kk}$
8′	$-\varepsilon_1\varphi_1 + \varepsilon_2\varphi_4 - \mathbf{kk}$	20′	$-\varepsilon_1\varphi_2 + \varepsilon_2\varphi_3 + \mathbf{kk}$
9′	$-\varphi_1 - \mathbf{kk}$	21′	$-\varphi_2 + \mathbf{kk}$
10′	$-\varepsilon_1\varphi_1 - \varepsilon_2\varphi_4 - \mathbf{kk}$	22′	$-\varepsilon_1\varphi_2 - \varepsilon_2\varphi_3 + \mathbf{kk}$
11′	$\varepsilon_1\varphi_1 - \varepsilon_2\varphi_4 - \mathbf{kk}$	23′	$\varepsilon_1\varphi_2 - \varepsilon_2\varphi_3 + \mathbf{kk}$
12′	$\varphi_1 - \mathbf{kk}$	24′	$\varphi_2 + \mathbf{kk}$

98. Nous appelons dyadics *sénaires* les dyadics numérotés d'un chiffre impair et dyadics *ternaires* les dyadics numérotés d'un chiffre pair. Les différentes formes des dyadics sénaires, abstraction faite de leur dernière dyade $\mathbf{kk}$ indépendante des 2 premiers termes dont les dyadics ne renferment que les vecteurs $\mathbf{i}$ et $\mathbf{j}$, sont uniquement :

$$\begin{array}{cc} \varepsilon_1\varphi_1 + \varepsilon_2\varphi_4 & \varepsilon_1\varphi_2 + \varepsilon_2\varphi_3 \\ \varepsilon_1\varphi_1 - \varepsilon_2\varphi_4 & \varepsilon_1\varphi_2 - \varepsilon_2\varphi_3 \\ -\varphi_1 & -\varphi_2 \end{array}$$

En multipliant chacune des 4 premières de ces formes par elle-même et chacune des 3 autres, nous obtenons les 16 produits que voici, dont les seconds membres sont uniquement chacune des 6 formes correspondantes des dyadics ternaires :

$(\varepsilon_1\varphi_1 + \varepsilon_2\varphi_4)^2 = -\varepsilon_1\varphi_1 + \varepsilon_2\varphi_4$ $\qquad$ $(\varepsilon_1\varphi_2 + \varepsilon_2\varphi_3)^2 = \varphi_1$

$(\varepsilon_1\varphi_1 - \varepsilon_2\varphi_4)^2 = -\varepsilon_1\varphi_1 - \varepsilon_2\varphi_4$ $\qquad$ $(\varepsilon_1\varphi_2 - \varepsilon_2\varphi_3)^2 = \varphi_1$

$(\varepsilon_1\varphi_1 + \varepsilon_2\varphi_4).(\varepsilon_1\varphi_1 - \varepsilon_2\varphi_4) = \varphi_1$ $\qquad$ $(\varepsilon_1\varphi_2 + \varepsilon_2\varphi_3)(\varepsilon_1\varphi_2 - \varepsilon_2\varphi_3) = -\varepsilon_1\varphi_1 + \varepsilon_2\varphi_4$

$(\varepsilon_1\varphi_1 - \varepsilon_2\varphi_4).(\varepsilon_1\varphi_1 + \varepsilon_2\varphi_4) = \varphi_1$ $\qquad$ $(\varepsilon_1\varphi_2 - \varepsilon_2\varphi_3)(\varepsilon_1\varphi_2 + \varepsilon_2\varphi_3) = -\varepsilon_1\varphi_1 - \varepsilon_2\varphi_4$

$(\varepsilon_1\varphi_1 + \varepsilon_2\varphi_4)(\varepsilon_1\varphi_2 + \varepsilon_2\varphi_3) = -\varepsilon_1\varphi_2 + \varepsilon_2\varphi_3$ $\qquad$ $(\varepsilon_1\varphi_1 - \varepsilon_2\varphi_4)(\varepsilon_1\varphi_2 + \varepsilon_2\varphi_3) = \varphi_2$

$(\varepsilon_1\varphi_2 + \varepsilon_2\varphi_3)(\varepsilon_1\varphi_1 + \varepsilon_2\varphi_4) = \varphi_2$ $\qquad$ $(\varepsilon_1\varphi_2 + \varepsilon_2\varphi_3).(\varepsilon_1\varphi_1 - \varepsilon_2\varphi_4) = -\varepsilon_1\varphi_2 + \varepsilon_2\varphi_3$

$(\varepsilon_1\varphi_1 + \varepsilon_2\varphi_4)(\varepsilon_1\varphi_2 - \varepsilon_2\varphi_3) = \varphi_2$ $\qquad$ $(\varepsilon_1\varphi_1 - \varepsilon_2\varphi_4).(\varepsilon_1\varphi_2 - \varepsilon_2\varphi_3) = -\varepsilon_1\varphi_2 - \varepsilon_2\varphi_3$

$(\varepsilon_1\varphi_2 - \varepsilon_2\varphi_3)(\varepsilon_1\varphi_1 + \varepsilon_2\varphi_4) = -\varepsilon_1\varphi_2 - \varepsilon_2\varphi_3$ $\qquad$ $(\varepsilon_1\varphi_2 - \varepsilon_2\varphi_3)(\varepsilon_1\varphi_1 - \varepsilon_2\varphi_4) = \varphi_2$

Ces produits s'effectuent très simplement : les combinaisons scalaires $\varphi_i\varphi_k$ étant trouvées une fois pour toutes (les combinaisons $\varphi_1\varphi_k = \varphi_k$, car φ_1 est l'identité planaire (i j)), chaque produit se fait comme le produit de 2 binômes algébriques.

Ainsi : $(\varepsilon_1\varphi_1 + \varepsilon_2\varphi_4)^2 = \varepsilon_1^2\varphi_1^2 + 2\,\varepsilon_1\varepsilon_2\varphi_1\varphi_4 + \varepsilon_2^2\varphi_4^2 = (\varepsilon_1^2 - \varepsilon_2^2)\,\varphi_1 + \varepsilon_2\varphi_4 = -\varepsilon_1\varphi_1 + \varepsilon_2\varphi_4$. D'ailleurs les résultats des 6 premiers produits peuvent être donnés à priori : les puissances du 1er mouvement de l'axe sénaire sont évidemment les 5 autres rotations différentes qu'il implique, celles du dyadic 2′, les dyadics 4′ et 6′ qui sont les 2 autres mouvements de l'axe ternaire, et la seconde puissance d'un axe binaire doit donner l'identité. Les résultats trouvés ne sont qu'une confirmation par le calcul en dyadics de ce qui se déduit déjà dans ce cas-ci plus simplement par le raisonnement seul. D'ailleurs à vrai dire, à condition d'établir d'abord les dépendances qui existent entre les éléments de symétrie : centre, axes et plans de symétrie, toute cette déduction par les dyadics de la symétrie des 32 classes cristallines de celle des 6 classes holoédriques se fait bien plus simplement au moins pour certaines classes par le seul raisonnement en supprimant successivement les éléments de symétrie dans chaque classe holoédrique. Les dyadics ont l'avantage d'être l'expression même algébrique des opérations de symétrie, d'en impliquer par le fait en eux-mêmes les dépendances mutuelles et de fournir ainsi directement, par leurs combinaisons réciproques, les combinaisons mêmes de ces opérations sans en laisser échapper aucune.

Naturellement si l'un des dyadics facteurs des 1ers membres change de signe, chaque terme ou chaque dyade du produit change de signe et le second membre doit être pris en signe contraire ; par suite si les 2 dyadics facteurs changent de signe à la fois, le résultat ne change pas comme pour un produit ordinaire.

D'autre part, le dyadic $-\varphi_1$ ne fait que changer le signe du dyadic *planaire* (i j) qu'il multiplie (celui dont les dyades ne renferment que les vecteurs-unités i et j et dont l'opération équivalente a lieu ainsi dans le plan de ces vecteurs) ; le dyadic $-\varphi_2$ change φ_1 en $-\varphi_2$, φ_4 en $\pm\varphi_3$ (c'est-à-dire $\varphi_2\varphi_4 = \varphi_3$ et $\varphi_4\varphi_2 = -\varphi_3$), et inversement change φ_2 en $-\varphi_1$, φ_3 en $\pm\varphi_4$. On se rend donc compte sans peine que toute combinaison de l'une quelconque des 6 formes sénaires écrites, avec elle-même ou chacune des 5 autres, est toujours

l'une des 6 formes ternaires correspondantes. Mais puisque les formes des dyadics ternaires sont précisément celles des dyadics sénaires prises en signe contraire, en vertu de ce qui vient d'être dit du changement de signe, et en considérant encore une fois les résultats des produits effectués, les combinaisons des 6 formes sénaires et les signes de la dernière dyade kk, nous obtenons immédiatement les 2 principes suivants dans le groupement des 24 dyadics donnés, qui nous fournissent aussitôt les 11 sous-groupes indépendants d'opérations de la symétrie sénaire.

Le produit de 2 dyadics ternaires ou de 2 dyadics sénaires est toujours un dyadic ternaire, tandis que le produit d'un dyadic ternaire et d'un dyadic sénaire est toujours un dyadic sénaire.

Le produit de 2 dyadics d'une même colonne, 1′ à 12′ ou 13′ à 24′, (d'une même rangée, 1′ à 6′ avec 13′ à 18′ ou 7′ à 12′ avec 19′ à 24′) est toujours un dyadic de la première colonne (rangée), tandis que le produit de 2 dyadics pris un dans chaque colonne (rangée) est toujours un dyadic de la seconde.

En effet dans ces conditions, chacun des groupes de dyadics qui suivent est tel que le produit de 2 quelconques de ses dyadics ne peut être que l'un des dyadics du groupe :

1′ à 6′ 7′ à 12′	13′ à 18′ 19′ à 24′	groupe holoèdrique des 24 dyadics sénaires et ternaires.
1′ à 6′	7′ à 12′	le produit de 2 dyadics de la 1re colonne est toujours un dyadic de cette colonne : axe sénaire et plan de symétrie normal.
1′ à 6′	13′ à 18′	le produit de 2 dyadics de la 1re rangée ne peut être qu'un dyadic de cette rangée : axe sénaire et 6 axes binaires.
1′ à 6′	19′ à 24′	les 2 principes simultanément : axe sénaire et 6 plans de symétrie.
1′ à 6′		axe sénaire ; puissances du dyadic 1′.
2′ 4′ 6′ 8′ 10′ 12′	14′ 16′ 18′ 20′ 22′ 24′	groupe complet des 12 dyadics ternaires.
2′ 4′ 6′ 7′ 9′ 11′	14′ 16′ 18′ 19′ 21′ 23′	variation du groupe précédent : les dyadics sénaires 7′, 9′, etc., exigent également les dyadics ternaires 2′, 4′, etc., et inversement leurs produits avec ces derniers les reproduisent eux-mêmes.
		Cette autre variation remplit aussi les mêmes conditions : 2′ 4′ 6′ 13′ 15′ 17′ / 7′ 9′ 11′ 20′ 22′ 24′ mais représente à première vue la même symétrie que la précédente.

2′ 4′ 6′ 8′ 10′ 12′	dyadics ternaires de la 1re colonne : axe ternaire et plan de symétrie normal.
2′ 4′ 6′ 7′ 9′ 11′	axe sénaire de seconde espèce.
2′ 4′ 6′ 14′ 16′ 18′	variations de ces 2 groupes représentant encore à première vue les mêmes symétries :
2′ 4′ 6′ 20′ 22′ 24′	2′ 4′ 6′ 13′ 15′ 17′ et 2′ 4′ 6′ 19′ 21′ 23′
2′ 4′ 6′	axe ternaire ; puissances de 2′.

Ce sont donc là *12 groupes* indépendants d'opérations de la symétrie sénaire, en négligeant naturellement les groupes de symétrie binaire et terbinaire inclus dans la symétrie sénaire et fournis par exemple par chaque dyadic de la 2me colonne multiplié par lui-même ou chaque couple de ces dyadics dont les formes planaires (i j) sont de signe contraire. Si inversement on établit d'abord, comme il a été plutôt fait pour les systèmes précédents, les 5 classes inférieures qui se laissent immédiatement déterminer dans les 12 dyadics de la 1re colonne et introduit ensuite successivement dans les groupes trouvés les dyadics de la seconde colonne qui exigent nécessairement ceux de la 1re, de manière à ne laisser de côté aucune classe, on se rend compte de suite que, à part ces groupes de symétrie binaire et terbinaire, il n'est pas d'autre groupe indépendant possible que les 12 établis, et qui représentant la symétrie des 12 classes suivantes dans l'ordre trouvé :

XXI. Classe hexagonal-holoédrique (dihexagonal-bipyram.)
XXII. Classe hexag. pyramidale-hémiédrique (hexagon.-bipyram.).
XXIII. Classe hexag. trapezoédrique-hémiédrique (hexag.-trapezoéd.).
XXIV. Classe hexag. holoédrique-hémimorphe (dihexag.-pyram.).
XXV. Classe hexag. pyram.-hémiédr.-hémimorphe (hexag.-pyram.).
XXVI. Classe trigonale-hémiédrique (ditrigonale-bipyram.).
XXVII. Classe rhomboédrique-hémiédr. (ditrigonale-scalénoédrique).
XXVIII. Classe trigonale-tetartoédrique (trigonale-bipyramidale).
XXIX. Classe rhomboédrique-tétartoédrique (rhomboédrique).
XXX. Classe trapezoédrique-tétartoédrique (trigon.-trapezoédrique).
XXXI. Classe rhomboédrique-hémimorphe (ditrig.-pyramidale).
XXXII. Classe hexagon.-octaédrique (trig.-pyramidale).

L'ordre des classes dans les systèmes étant en réalité sans aucune importance. nous nous sommes permis de dénommer ces classes directement dans l'ordre où nous les avons trouvées.