Zeitschrift: Bündner Schulblatt = Bollettino scolastico grigione = Fegl scolastic grischun

Herausgeber: Lehrpersonen Graubünden

Band: 41 (1981-1982)

Heft: 5

Artikel: Das "Feld" als Veranschaulichungsmittel im Bruchrechnen

Autor: Arquint, Domenic

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-356688

Das «Feld» als Veranschaulichungsmittel im BRUCHRECHNEN

Domenic Arquint, St. Moritz

Untersuchungen verschiedener Institutionen weisen immer wieder nach, dass die Entlassschüler der Werk- und Sekundarschulen das Bruchrechnen nicht beherrschen. Dabei kann man mit einiger Sicherheit sagen, dass im 5. und 6. Schuljahr das Bruchrechnen und vor allem Operationsregeln mit Brüchen genügend geübt wurden. Diese Übung und Festigung wurde in den 7. Klassen noch eine Zeitlang fortgesetzt. Geübt wurde also genug.

Über die Gründe für dieses Missverhältnis von Aufwand und Ergebnis möchte ich in diesem Artikel nicht eingehen.

Folgende Vorbemerkungen sind zu beachten:

Von der Lernpsychologie und Fachdidaktik her wird zu Recht die Forderung erhoben, dass Brüche und mathematische Operationen auf möglichst vielfältige Weise veranschaulicht und an möglichst vielen Modellen verdeutlicht werden sollen. Dem tragen auch fast alle neueren Schulbücher Rechnung. In der Praxis erweist sich jedoch immer wieder, dass ein zu rascher Wechsel der Veranschaulichungsmittel in den ersten Phasen des Lernprozesses (Neueinführung und operative Durcharbeitung) besonders schwächer begabte Schüler allzuleicht verwirrt. Dies wird in den heute gebräuchlichen Schulbüchern zu wenig berücksichtigt. Damit sich der Schüler ganz auf das Neue konzentrieren kann, sollten in den genannten Phasen des Lernprozesses vertraute Veranschaulichungsmittel und -modelle zum Einsatz gelangen.

Dem Kind sind bereits von der Unterstufe her gegenständliche Bruchbezeichnungen wie «ein halber Apfel» und auch Operationen wie «die Hälfte von ...» bekannt. Trotzdem ist es jedoch noch notwendig, konkretes Teilen an Gegenständen vielerlei Art bei Einführung des Bruchrechnens wiederholend zum Aufbau verinnerlichter Handlungen durchführen zu lassen. Andererseits wird dies von vielen Schülern allzuleicht als Unterforderung und als kindisch empfunden. Der Abstraktionsschritt vom konkreten Operieren mit und an Gegenständen zur abstrakten zahlbegrifflichen Genetik von Brüchen ist wiederum zu gross. Unentbehrlich ist ein längeres Verweilen in einer Phase des Präfigurierens des Bruchbegriffs an Mengendarstellungen, die gekennzeichnet ist vom Experimentieren und Kreativität, also einer ausgiebigen operativen Durcharbeitung.

Aus dem Dargelegten ergeben sich folgende Anforderungen an ein Veranschaulichungsmodell für das Bruchrechnen:

— Es darf weder über- noch unterfordern und soll den Schülern kreatives Experimentieren sowie Freude am Umgang mit mathematischen Lerninhalten ermöglichen.

— Es soll den Erwerb mathematischer Fähigkeiten und Fertigkeiten fördern und möglichst eigenständiges Gewinnen von Erkenntnissen begünstigen.

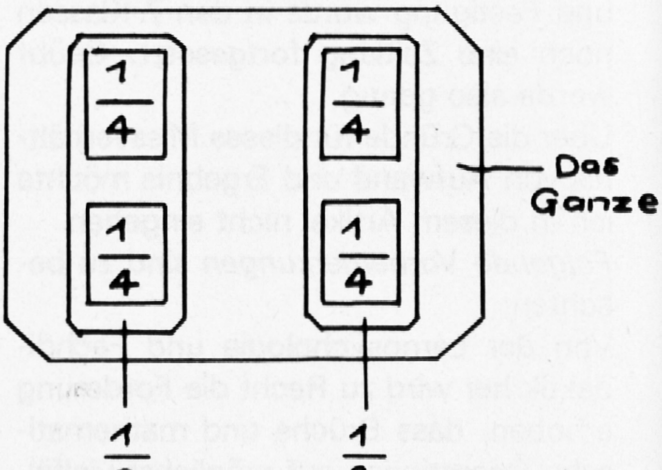
- Es muss zeitgemässe mathematische Denk- und Arbeitsweisen im Unterricht realisieren lassen und vernünftigen Forderungen der Fachdidaktik sowie der Fachwissenschaft gerecht werden.
- Man muss daran einen «statischen» Bruch (als Ergebnis einer Operation) ebenso veranschaulichen und darstellen können wie einen «dynamischen» (Bruch als Handlungsanweisung).
- Echte, unechte und gemischte Brüche sollen darstellbar sein.
- Es muss der Vergleich verschiedener Brüche sowohl mit gleichem als auch mit verschiedenem Nenner zulassen und die Erkenntnis ermöglichen, dass die Grösse eines Bruchteiles von seiner Einheit (Bezugsgrösse) abhängig ist.
- Alle vier Grundrechnungsarten von Brüchen mit ganzen Zahlen als auch mit Brüchen sollten dargestellt werden können, damit daraus mathematische Gesetzmässigkeiten und Gesetze abgeleitet werden können.
- Das Modell muss jederzeit leicht verfügbar und von den Schülern leicht zu gebrauchen sein.
- Es sollte leicht einzuführen und über einen möglichst langen Zeitraum hinweg verwendbar sein.

Diesen Anforderungen wird das sogenannte «FELD» nahezu in optimaler Weise gerecht. In keinem Schulbuch werden seine Möglichkeiten voll ausgenützt, weil man meist theoretischen Erwägungen den Vorrang vor praktischen Notwendigkeiten einräumt.

Die nachfolgende exemplarische Darlegung verschiedener Verwendungsmöglichkeiten des Feldes im Bruchrechnen bedeutet nicht, dass dieses ausschliesslich verwendet werden sollte. Aus Platzgründen kann meist nur jeweils ein Beispiel relativ kurz ausgeführt werden. Dies erfolgt in der Regel so, wie ein Arbeitsergebnis als Tafelanschrift oder Hefteintrag aussehen könnte. Bei der Übertragung auf andere Felder sind Lehrern und Schülern hinsichtlich ihrer Kreativität kaum Grenzen gesetzt.

1. Der konkrete Bruch (als Teil eines Ganzen)

Wir sehen hier ein Vierer-(Zwei-mal-zwei)Feld



2 Ringe sind die Hälfte des ganzen Feldes = ½ F

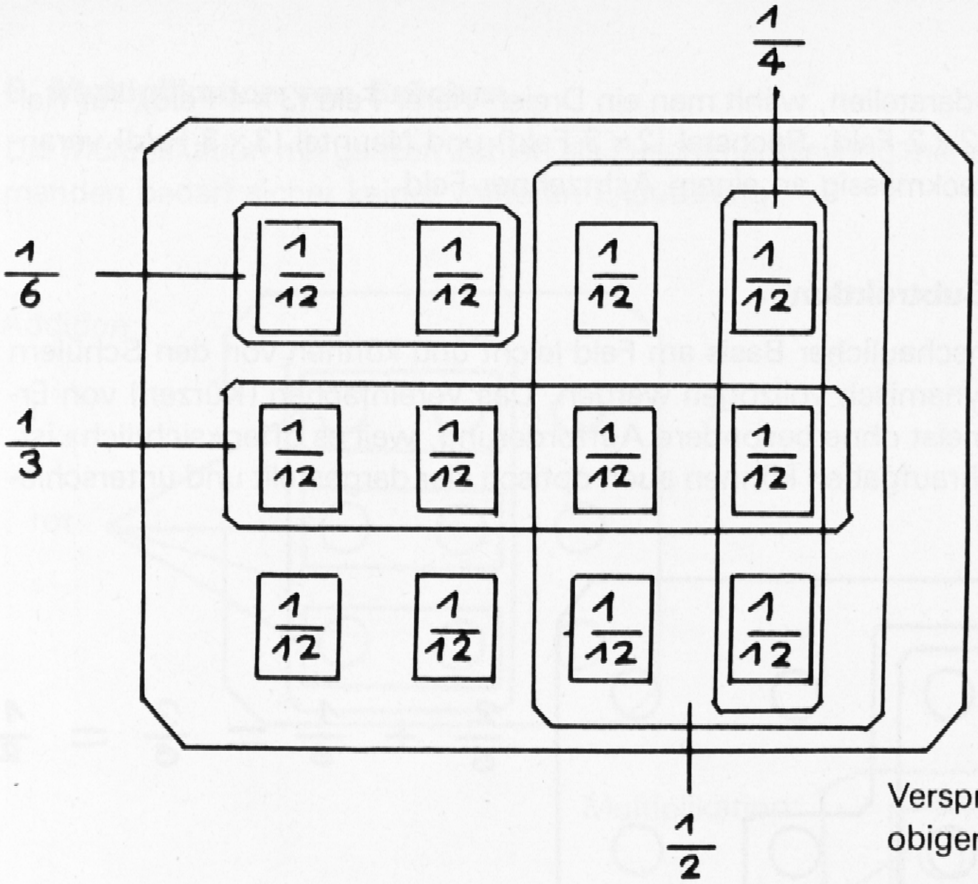
1 Ring ist der vierte Teil des ganzen Feldes = ¼ F

1 Ring = ¼ F

2 Ringe = ²⁄₄ F = ½ F

3 Ringe = ¾ F

Ein Achterfeld besteht aus zwei Viererfeldern (darstellen!), ein Viererfeld ist die Hälfte des Achterfeldes. Der Länge nach gesehen, ist es ein 2 mal 4-Feld, der Breite nach gesehen ein 4 mal 2-Feld. Als Beispiel exemplarisch noch im Zwölferfeld



Versprachlichung analog obigem Beispiel!

Angestrebte Erkenntnis:
- Ein Teil aus einem Viererfeld heisst ein Viertel. Ein Teil aus einem Achterfeld ein Achtel. EIn Teil aus einem Zwölferfeld heisst ein Zwölftel. Benennung also nach der Anzahl der Teile im Feld.
- Verschiedene Brüche können den gleichen Wert haben.

2. Vergleich konkreter Bruchteile an einem Bezugsganzen

Das Ordnen von Brüchen kann anschaulich am Zwölferfeld begonnen werden:

$\frac{1}{12} < \frac{2}{12} < \cdots < \frac{12}{12}$

$\frac{12}{12} > \frac{11}{12} > \frac{10}{12} \cdots > \frac{1}{12}$

Die eventuell hier schon gewonnene These «je grösser der Zähler, desto grösser der Wert des Bruchs; je kleiner der Zähler, desto kleiner der Wert des Bruchs» kann an einem beliebig gewählten anderen Feld verifiziert und als endgültige Erkenntnis formuliert werden.

3. Kürzen und Erweitern

Das Kürzen und Erweitern wird aus Punkt 1. deutlich und ergibt sich aus der anschaulichen Arbeit am Feld fast von selbst. Reiche Möglichkeiten dazu bietet ein 24er-Feld.

4. Das Gleichnamig-Machen

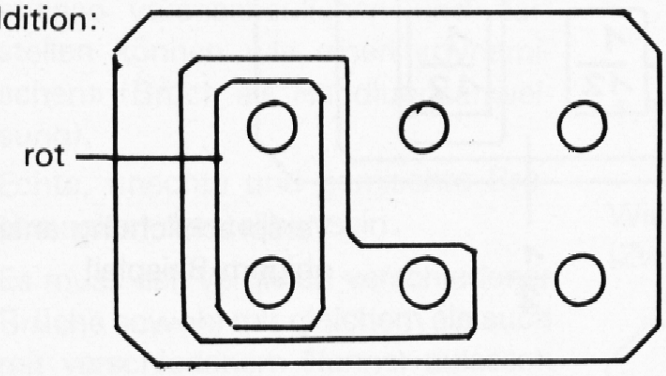
Aus Erfahrung weiss der Schüler bald, dass sich z. B. Drittel sehr gut am Dreier-, Viertel am Vierer- und Fünftel am Fünferfeld darstellen lassen. Will man Drittel und

Viertel gemeinsam darstellen, wählt man ein Dreier-Vierer-Feld (3 × 4-Feld), für Halbe und Viertel ein 2 × 2-Feld; Sechstel (2 × 3-Feld) und Neuntel (3 × 3-Feld) veranschaulicht man zweckmässig an einem Achtzehner-Feld.

5. Addition und Subtraktion

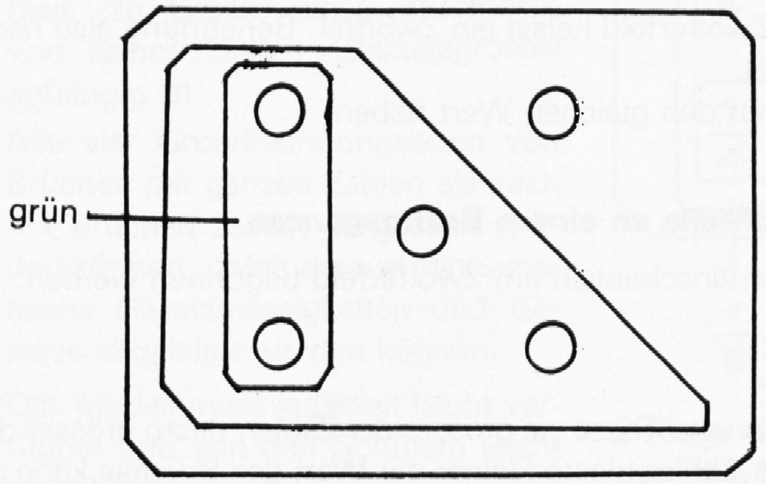
Sie gelingen auf anschaulicher Basis am Feld leicht und können von den Schülern durch Einkreisen dynamisch vollzogen werden. Das Vereinfachen (Kürzen) von Ergebnissen erfolgt meist ohne besondere Aufforderung, weil es offen«sichtlich» ist. Tausch- und Umkehraufgaben können auch optisch klar dargestellt und unterschieden werden.

Addition:



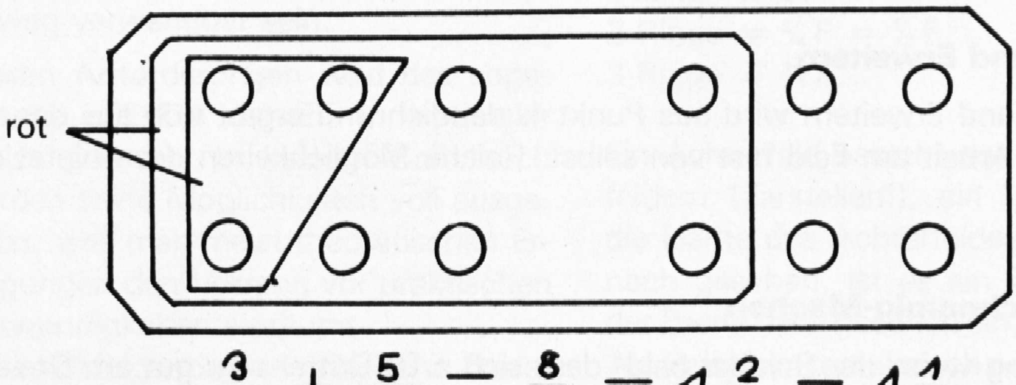
$$\frac{2}{6} + \frac{1}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

Subtraktion:



$$\frac{4}{5} - \frac{2}{5} = \frac{2}{5}$$

Auch ganze Felder können einbezogen werden, so dass sich ein Arbeiten mit «gemischten Zahlen» ergibt.

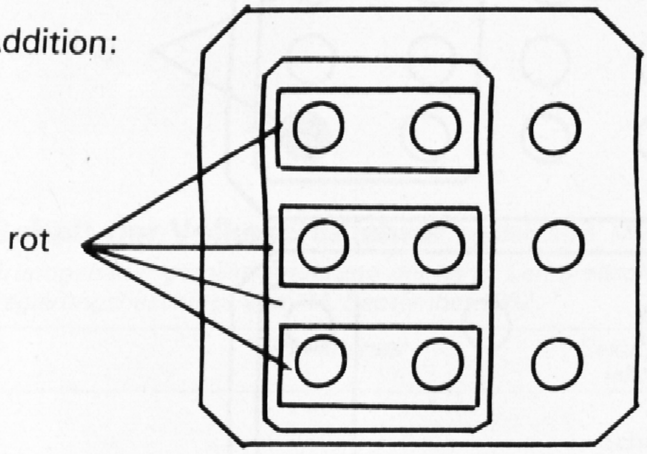


$$\frac{3}{6} + \frac{5}{6} = \frac{8}{6} = 1\frac{2}{6} = 1\frac{1}{3}$$

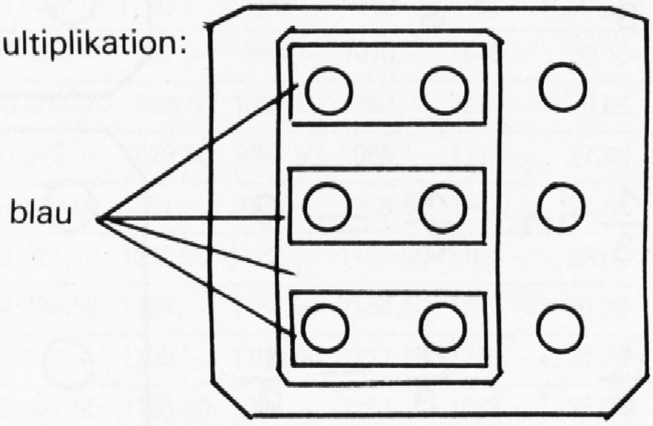
6. Multiplikation von Brüchen

Die Multiplikation mit ganzen Zahlen als Zusammenfassung mehrerer gleicher Summanden bedarf sicher keiner weiteren Erläuterung.

Addition:

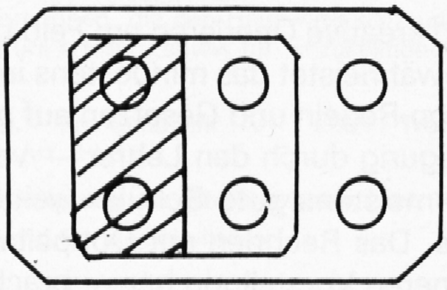


Multiplikation:



Multiplikation mit Brüchen:

$\frac{1}{2}$ von $\frac{2}{3} =$
(Die Hälfte von ...)

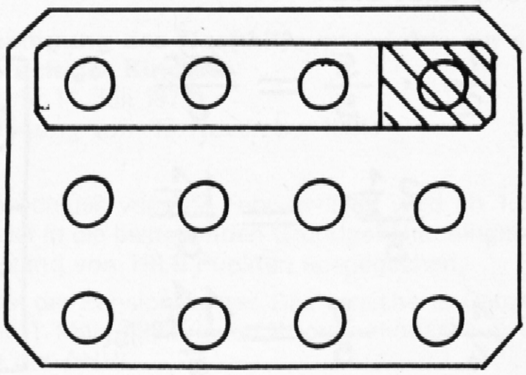


Wir lesen ab:

$\frac{1}{2}$ von $\frac{2}{3} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

$\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$

$\frac{1}{4}$ von $\frac{1}{3} =$



$\frac{1}{4}$ von $\frac{1}{3} = \frac{1}{12}$

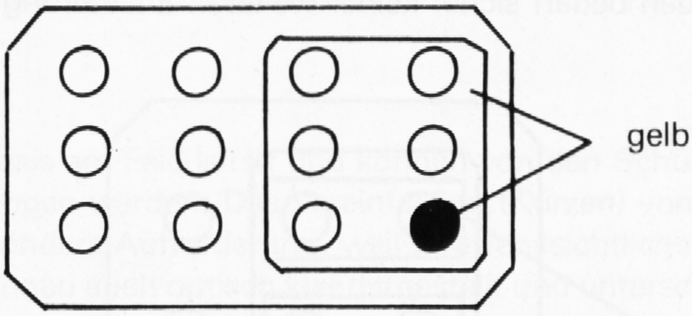
$\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{12}$

7. Division von Brüchen

Hier ist zunächst das Enthaltensein von der Sprache her leichter verständlich.

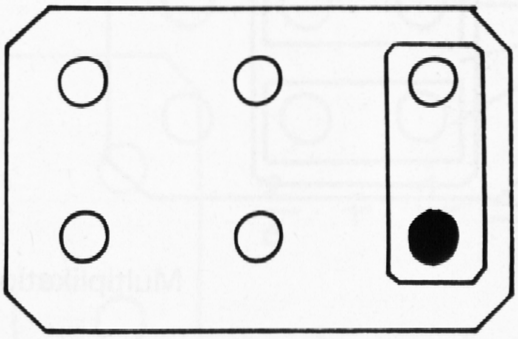
$\frac{1}{12}$ in $\frac{1}{2} = ?$

$\frac{1}{2} : \frac{1}{12} = 6$



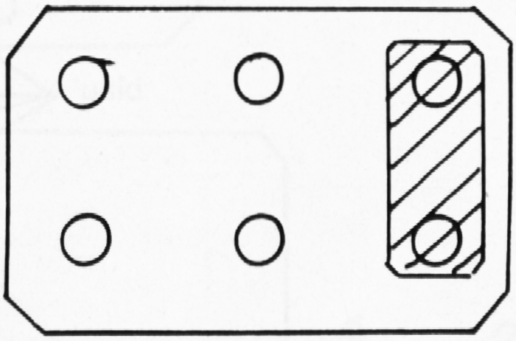
$\frac{1}{6}$ in $\frac{1}{3} = ?$

$\frac{1}{3} : \frac{1}{6} = 2$



$\frac{1}{3}$ in $\frac{1}{6} = ?$

$\frac{1}{6} : \frac{1}{3} = \frac{1}{2}$



8. Zusammenfassung und Ausblick

Das anschauliche, dynamische und kreative Operieren am Feld bereitet den Kindern nicht nur viel Erfolgsfreude und gewährleistet das mindestens im Volksschulbereich notwendige induktive Gewinnen von Regeln und Gesetzen auf anschaulicher Basis. Es führt – meist sogar ohne Anregung durch den Lehrer – vor allem im Rahmen von Differenzierungsmassnahmen meistens gute Schüler weit über geforderte Erkenntnisse und Fähigkeiten hinaus. Das Rechnen mit Doppelbrüchen – zunächst anschaulich, dann aber von der inneren Vorstellung her – brachte schon manchen Maturanden in Verlegenheit. So ist es für viele Kinder auf der Basis des Arbeitens mit dem Feld selbstverständlich, dass z. B.

die Hälfte von $\frac{1}{2} \cdot \frac{5}{5} = \frac{2\frac{1}{2}}{5}$

die Hälfte von $\frac{2\frac{1}{2}}{5} = \frac{1\frac{1}{4}}{5}$

also, die Hälfte der Hälfte = $\frac{1}{4} \cdot \frac{5}{5} = \frac{1\frac{1}{4}}{5}$ ist