I. Teil.

A. Rechtwinklige Körper.

I. Die Merkmale rechtwinkliger Körper.

1. Der Balken.

a) Wir besichtigen ein im Bau stehendes Haus. Vor uns liegen die Balken, welche für einen Zimmerboden bestimmt sind. *Wir wollen die Form eines dieser Balken genau betrachten.*

Welchen Zweck hat zunächst ein solcher Balken? Wie geht der Bau des Hauses vor sich? (Ankauf des Bauplatzes, Bauplan, Materialbeschaffung, Ausgraben des Fundaments, Hauptmauern mit Thüren und Fensterstöcken, Zwischenmauern, Balken u. s. w.)

b) Miss die Länge, die Breite und die Höhe eines solchen Balkens. Welche Kanten geben uns die Länge, welche die Breite, welche die Höhe an? Die 4 Längskanten sind gleich lang (5,9 m). — Auch die 4 Breitenkanten haben untereinander die gleiche Länge (25 cm), desgleichen die 4 Höhenkanten (30 cm). Ausdehnungen.

Dieser Balken hat demnach drei Ausdehnungen (Dimensionen), Länge, Breite und Höhe.

Vergleichet die Ausdehnungen der Balken, die für den gleichen Boden bestimmt sind. Sie haben alle die gleichen Ausdehnungen.

Wie gross ist die Zahl der Flächen, der Kanten und der Ecken des Balkens?

Nun wollen wir auch auf die *Beschaffenheit* der Kanten und Flächen achten. Prüfet die Kanten mit eurem Auge und mit einer gespannten Schnur. Sie sind *gerade.* Seht auch über die Balkenflächen hinweg und bewegt die gespannte Schnur darüber; es zeigen sich weder Erhebungen, noch Vertiefungen, Gerade. Eben.

wenn der Balken genau zugeschnitten ist; die Balkenflächen sind *eben.*

c) Fasst nun die gegenseitige Lage der Flächen und Kanten ins Auge.

Leget wie die Arbeiter den „Winkel“ an, und verschiebt ihn längs sämtlicher Kanten. Er liegt ganz auf, und da sagen die Arbeiter: die Flächen stehen *im Winkel.*

Je zwei zusammenstossende Flächen des Balkens stehen im Winkel.

Zusammenstossende Flächen und Kanten.

Legen wir den „Winkel“ in einer Ecke flach auf, so sehen wir, dass die zwei Kanten des Balkens mit den Kanten des „Winkels“ laufen. Bei den andern Ecken findet das Gleiche statt.

Je zwei zusammenstossende Kanten stehen im Winkel.

Wagerechte Flächen u. Kanten.

Wir geben nun dem Balken die Lage von eingemauerten Balken und benutzen dazu die Wasserwage (Setzwage). Die Luftblase der Wasserwage, die wir auf den Balken legen, steht immer in der Mitte, auch wenn wir die Wasserwage herumdrehen. Wir sagen, der Balken liegt *wagerecht,* oder genauer, die obere Balkenfläche hat eine wagerechte Lage.

Welche Balkenfläche hat dieselbe Lage? Welche Kanten sind wagerecht? Man nennt die untere Balkenfläche *Grundfläche* des Balkens, die obere *Deckfläche;* die Kanten der Grundfläche heissen *Grundkanten,* die der Deckfläche *Deckkanten.* Wir können daher zusammenfassend sagen: *die Grund- und die Deckfläche, die Grund- und die Deckkanten des eingemauerten Balkens sind wagerecht.*

d) Welche Flächen und welche Kanten haben eine andere Lage? Die 4 übrigen Flächen nennt man *Seitenflächen* und die 4 übrigen Kanten *Seitenkanten.* Prüfet ihre Lage mit dem „Senkel“. Diese Flächen und Kanten sind nach dem Senkel gerichtet. Man sagt: *die Seitenflächen und die Seitenkanten des eingemauerten Balkens haben eine senkrechte Lage.*

Senkrechte Flächen u. Kanten.

Es ist üblich zu sagen: die Seitenflächen des Balkens stehen auf der Grundfläche und auf der Deckfläche senkrecht, ferner auch: die Seitenkanten des Balkens stehen auf Grund- und Deckfläche senkrecht.

Betrachten wir eine Seitenkante und eine Grundkante, die sich an einer Ecke treffen, so ist die eine wagerecht, die andere senkrecht. Man sagt: die Seitenkante steht auf der Grundkante senkrecht. Fassen wir aber 2 Kanten der Deckfläche ins Auge, welche in einer Ecke zusammenstossen, so sehen wir, dass sie beide wagerecht sind. Würden wir aber den Balken auf eine Seitenfläche legen, so wäre die eine Kante senkrecht, die andere wagerecht; sie haben also die gleiche gegenseitige Lage wie eine Grund- und eine Seitenkante. Dasselbe sehen wir bei den andern Paaren von Deck- und Grundkanten. Man sagt darum auch von 2 zusammenstossenden Grund- oder Deckkanten, dass sie aufeinander senkrecht stehen.

Erweiterung der Bedeutung von „senkrecht".

Wir haben bei der Prüfung mit dem Winkel gesehen, dass je zwei zusammenstossende Kanten im Winkel liegen. Die Ausdrücke „im Winkel" und „senkrecht" bezeichnen daher die gleiche Lage. Es empfiehlt sich, in Zukunft den bei Arbeitern gebräuchlichen Ausdruck „im Winkel" durch einen genauern zu ersetzen. Wir wollen sagen: *zwei zusammenstossende Kanten des Balkens schneiden sich rechtwinklig oder bilden einen rechten Winkel.* —

Senkrecht = rechtwinklig.

Wie bezeichnen wir die Lage der zusammenstossenden Flächen des Balkens?

Je zwei zusammenstossende Flächen des Balkens stehen senkrecht zu einander; sie schneiden sich rechtwinklig, oder sie bilden einen rechten Winkel.

e) Sucht Paare von Balkenkanten, die nicht zusammenstossen. Wir wollen die 2 obern Längskanten näher betrachten, an welchen wir die Länge des Balkens gemessen haben. Sie erscheinen durch 2 Breitenkanten, die sie rechtwinklig schneiden, miteinander verbunden. Wir haben gesehen, dass diese zwei Breitenkanten ganz gleich sind. Wie wäre es, wenn man die Breite in der Mitte messen würde oder an irgend einer andern Stelle? Versucht es! Es ist gleichgültig, an welcher Stelle man sie misst; nur muss man die Breite immer recktwinklig zur Länge nehmen wie an den Enden. Die Breite gibt uns den Abstand der beiden Längskanten. Was folgt? Die beiden Längskanten haben überall den gleichen Abstand. Man sagt auch: sie laufen *in gleicher Richtung,* oder: sie sind *parallel.*

Parallele Kanten und Flächen.

Wiederhole dieselbe Betrachtung für 2 andere Längskanten, für die Breiten- und Höhenkanten. Was zeigt sich?

Je 2 Längskanten, je 2 Breitenkanten, je 2 Höhenkanten sind parallel.

Sucht Flächenpaare, welche überall gleichen Abstand haben.

Grund- und Deckfläche sind durch die 4 Höhenkanten verbunden, die wir gleich lang gefunden haben. Miss die Höhe auch an andern Stellen.

Grund- und Deckfläche haben überall gleichen Abstand: sie sind parallel.

Die beiden seitlichen Längsflächen sind auch parallel zu einander, desgleichen die 2 seitlichen Breitenflächen.

Sucht auch Kanten am Balken, die sich nicht rechtwinklig schneiden und nicht parallel sind! Zeige solche Kantenpaare! Z. B. Eine Grundkante rechts und eine Höhenkante links. Sie liegen nicht in der gleichen Fläche. Man sagt: diese 2 Kanten *kreuzen sich*, oder *sie sind windschief*.

Windschiefe Kanten.

f) Fasst nun die einzelnen Flächen des Balkens ins Auge. Beschreibt z. B. die Deckfläche! Sie ist begrenzt von 4 Kanten, die sich in 4 Ecken und zwar rechtwinklig schneiden. Je zwei gegenüberliegende Kanten sind gleich lang und parallel. Wir geben dieser Fläche den Namen „Rechteck". Die Kanten wollen wir „*Seiten*" des Rechtecks nennen; die Längskante heisst Länge, die Breitenkante Breite des Rechtecks.

Das Rechteck.

Gib die Merkmale einer Seitenfläche an! Sie ist auch von 4 Seiten begrenzt, die miteinander rechte Winkel bilden und paarweise gleich und parallel sind; sie kann deshalb auch mit dem Namen Rechteck bezeichnet werden. Die Grundkante des Balkens heisst die Grundlinie und die Höhenkante die Höhe dieses Rechtecks. Denkt man sich den Balken einmal umgelegt, so wird die Deckfläche zur Seitenfläche; die Länge des Rechtecks wird seine Grundlinie, die Breite seine Höhe. Statt Länge und Breite dürfen wir also auch Grundlinie und Höhe sagen.

g) Wo wird der Balken zugeschnitten? Wir wollen der Säge einen Besuch abstatten und zusehen, wie dort Baumstämme zu Balken gesägt werden.

Säge.

Wie sieht das Sägeblatt aus? Welche Lage hat es, welche Lage hat die Fläche, auf welche der Baumstamm gelegt wird? Wie ist dafür gesorgt, dass rechte Winkel entstehen?

Sieh auch den Zimmerleuten zu, wenn sie aus Baumstämmen Balken schneiden. Achte darauf, dass sie den Stamm auf eine wagerechte Unterlage legen und das Senkblei und eine geschwärzte Schnur gebrauchen, um senkrechte Flächen und Kanten zu markieren.

h) Besprechung in der Klasse. Nehmet ein genau gearbeitetes Lineal, seht es für einen kleinen Balken an und prägt euch neuerdings die Eigenschaften des Balkens ein.

2. Beschreibung des Schulzimmers.

a) Nun wollen wir sehen, wie der Boden, die Wände, die Decke unseres Zimmers beschaffen sind. — Der Zimmerboden besteht aus Brettern, die ganz genau aneinander passen. Beschreibe ein Brett, das vorne und hinten gleich breit ist. Worin unterscheidet sich die Form des Brettes von der des Balkens? Die Höhe ist im Vergleich zur Länge kleiner. Ferner müssen besonders die Deckfläche und 2 Seitenflächen viel genauer gearbeitet sein. Diese Flächen sind genau eben und die Kanten genau gerade. Wie prüft dies der Zimmermann? Mit seinem geübten Auge sieht er über eine Kante hinweg, die ihm wie ein Punkt erscheint, wenn sich keine Krümmungen zeigen. Mit der straff gespannten Schnur findet er die kleinsten Unebenheiten. Die genau gehobelte Fläche muss seinem Auge nur als Linie erscheinen, wenn er das Brett auf die Höhe der Kante stellt. Ein genaueres Prüfungsmittel ist ihm ein ganz gerader Stab. Stellt er diesen nach allen Richtungen auf, so muss er immer ganz aufliegen. Legt man solche genau bearbeitete Bretter sorgfältig so aneinander, dass alle gleich hoch liegen und genau wagerecht sind, so erhält man einen ebenen wagerechten Boden. Prüfe den Schulzimmerboden mit der Wasserwage und mit einem ganz geraden Stabe, sowie mit dem Winkel. Untersuche, ob er ein Rechteck ist!

Die Bretter.

Prüfung der Kanten und Flächen.

Der Zimmerboden.

Der Zimmerboden ist ein Rechteck. Er ist eben und hat eine wagerechte Lage.

b) Vergleiche mit dem Zimmerboden die Diele (Deckfläche). Sie haben gleiche Form und gleiche Grösse.

Prüfe die Wände mit dem Senkblei, mit dem Winkel und mit dem Massstabe. Sie stehen senkrecht und sind genaue Rechtecke. Man nennt sie auch Seitenflächen.

Alle 6 Flächen des Zimmers sind Rechtecke. Grundfläche und Deckfläche haben eine wagerechte, die Wände eine senkrechte Lage.

Beschreibe die gegenseitige Lage der 6 Flächen und der 12 Kanten des Zimmers, und bezeichne sie wie beim Balken.

Vergleiche die Grösse von einander gegenüber liegenden Flächen und von gegenüber liegenden Kanten.

Dimensionen beim Zimmer, Balken, Brett.

c) In welcher Beziehung stehen die Dimensionen beim Zimmer zu einander? Der Unterschied zwischen Länge, Breite und Höhe ist hier nicht so gross wie beim Balken und beim Brett.

Hohlraum.

Die Flächen des Balkens begrenzen einen festen Körper; die Flächen des Zimmers begrenzen einen leeren Raum, den Zimmerraum. Auf die Form hat es keinen Einfluss, ob der Raum gefüllt oder leer ist. Mit Luft ist das Zimmer ja auch gefüllt. Wir wollen den begrenzten Zimmerraum auch Zimmerkörper nennen. Beschreibe nochmals die Begrenzung dieses Körpers.

Oberfläche.

Die sechs Flächen des Körpers bilden seine Oberfläche. Diese gibt ihm die Form.

Verallgemeinerung. Wir wollen vorläufig folgende gemeinsame Merkmale der Zimmerform und der Balkenform hervorheben. Die Grund- und die Deckfläche haben beim eingemauerten Balken und beim Zimmerboden eine wagerechte Lage, desgleichen die Grundkanten und die Deckkanten. Wir haben diese Lage mit der Wasserwage geprüft. Die Luftblase der Wasserwage stand in der Mitte, wenn wir sie auf die Deckfläche des Balkens oder auf den Zimmerboden legten und beliebig drehten.

Die Seitenkanten haben sowohl beim Balken, als auch beim Zimmer die Richtung des Senkbleis, eine senkrechte Lage, desgleichen die Seitenflächen.

Sämtliche Kanten beider Körper sind gerade, sämtliche Flächen eben.

Satz 1. Eine ebene Fläche (Kante) hat eine wagerechte Lage, wenn die Luftblase der Wasserwage, die auf die Fläche (Kante) gelegt wird, genau in der Mitte steht. Eine ebene Fläche (Kante) hat eine senkrechte (vertikale) Lage, wenn sie überall die Richtung des Senkbleis hat.

3. Das Zeichnen des Netzes.

a) Bevor wir die übrigen Merkmale des Balkens und des Zimmers vergleichen, wollen wir versuchen, diese Körper in Karton nachzubilden.

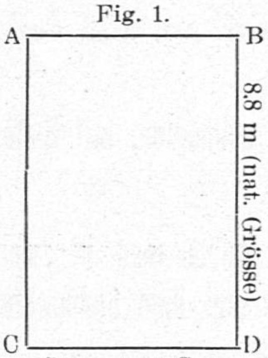
Wir beginnen mit dem Zimmer.

Unser Zimmer ist 8 m lang, 5,5 m breit und 3,2 m hoch. Zeichne den Zimmerboden.

Das Zeichnen des Zimmerbodens.

Wir zeichnen zuerst die vordere Breitenkante, stellen aber 1 m durch 1 cm dar: wir zeichnen $^1/_{100}$ natürlicher Grösse oder im Massstabe 1 : 100. So erhält die Kante eine Länge von 5,5 cm. Mit Hülfe des Winkels zeichnen wir die beiden Längskanten rechtwinklig zur Breitenkante und machen sie 8 cm lang. (Fig. 1.) Verbinden wir die Endpunkte, so erhalten wir den Boden in verkleinertem Massstabe.

Fig. 1.



5,5 m (nat. Gr.)

Massstab 1 : 250.

Vergleiche die Länge von D C mit derjenigen von A B; prüfe mit dem „Winkel", ob D C zu den Längskanten senkrecht steht. Diese Figur ist begrenzt von vier geraden Linien, die den Umfang der Figur bilden. Je zwei einander gegenüberliegende Linien sind gleich lang und laufen parallel. Je zwei anstossende Linien schneiden sich rechtwinklig oder stehen zu einander senkrecht.

Die Figur heisst Rechteck und die vier Linien heissen Seiten des Rechtecks, die vier Schnittpunkte seine Eckpunkte. Es ist üblich, die Eckpunkte mit grossen Buchstaben A, B, C, D zu bezeichnen. Die Längsseiten heissen dann A C und B D, die Breitenseiten A B und C D.

A C und B D sind ein Paar Gegenseiten.

A B und C D sind ein zweites Paar Gegenseiten.

Wir wollen aus der Konstruktion dieses Rechtecks lernen, wie man senkrechte und parallele Linien zieht.

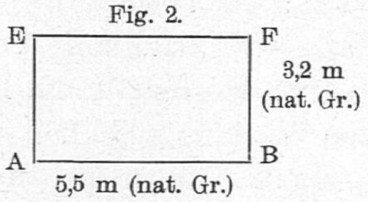
Wie ist das Rechteck A B C D gezeichnet worden? Wie hat man zu C D die Senkrechten A C und B D gezogen? Auf welche Weise hat man die Parallele A B zu C D gezogen? Wie messen wir den Abstand von A B und C D? Von welcher Stelle aus können wir ihn noch messen? Der senkrechte Abstand der beiden parallelen A B und C D ist überall der gleiche. Wie verhält es sich mit A C und B D? Man nennt C D auch die Grundlinie des Rechtecks A B C D und A C oder B D die Höhe.

Zeichnung einer Wandfläche.

b) Nun wollen wir auch die vordere Wandfläche zeichnen, indem wir Seite A B = 5,5 cm lang machen und rechtwinklig zu ihr in A und in B 3,2 cm abtragen. (Fig. 2.) Miss E F, prüfe ihre Lage zu A E und B F, und weise die Merkmale des

Rechtecks nach. Zeige auch, wie du hier senkrechte und parallele Seiten gezogen hast, und dass die parallelen Seiten überall gleichen Abstand haben.

Fig. 2.



5,5 m (nat. Gr.)
Massstab: 1 : 250.

Verallgemeinerung. Gib das Gemeinsame in der Darstellung der beiden Figuren A B C D und A B E F an, und vergleiche ihre Merkmale.

Satz 2. Man zeichnet zwei Seiten, die sich rechtwinklig schneiden, mit Hülfe eines Winkels.

Satz 3. Man zeichnet zu einer Seite eine Parallele, indem man in zwei Punkten je eine Senkrechte errichtet, diese gleich lang macht und ihre Endpunkte verbindet. Parallele Seiten haben überall den gleichen Abstand.

Stelle die gemeinsamen Merkmale der behandelten Rechtecke zusammen.

Satz 4. Ein Rechteck ist eine Figur, die von 4 sich rechtwinkling schneidenden Seiten begrenzt wird. Je zwei Gegenseiten sind einander gleich und laufen parallel.

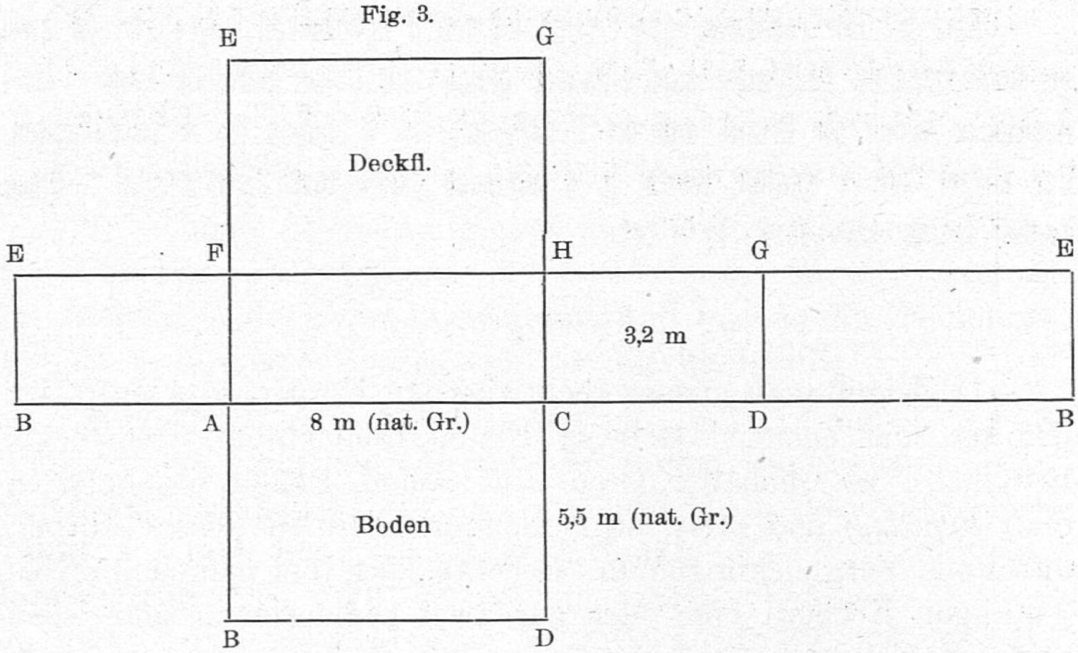
c) Nun könnten wir auf gleiche Weise wie den Boden und die vordere Wandfläche auch die übrigen Zimmerflächen zeichnen. Um das Kartonzimmer zu konstruieren, müssten wir jede Fläche herausschneiden und sie dann zusammenlegen.

Das Netz des Zimmers.

Es empfiehlt sich, die 6 Zimmerflächen aneinander zu zeichnen. (Fig. 3.) (Weise ein Netz vor.) Bezeichnet alle Endpunkte! Skizziere in jeder Fläche die Gegenstände, die sich daran befinden. (Wandtafel, Bilder.) Wo befindet sich im Zimmer z. B. die Kante D C und wo A F etc.? Welche Seiten müssen zusammengeklebt werden? Welche werden geritzt? An welchen lässt man mit Vorteil einen schmalen Rand zum bequemen Zusammenkleben?

Diese zusammenhängenden 6 Flächen bilden das Netz des Kartonzimmers.

Fig. 3.



Massstab: 1 : 250.

Zeichnet das Netz auf Karton im Massstabe 1 : 100; schneidet es aus, und klebt die anstossenden Flächen zusammen.

Stellt das Kartonmodell richtig auf, so dass es die gleiche Stellung wie das Zimmer hat, und beschreibt es genau. Gebt von jeder Fläche, Kante und Ecke des Kartonkörpers an, wo sie sich am Zimmer befinden. Prägt euch neuerdings die Begriffe senkrecht, parallel ein. Gebt dem Kartonkörper auch andere Lagen, und weiset darauf hin, dass die gegenseitige Lage der Flächen und Kanten sich dadurch nicht ändert. Das Kartonzimmer.

Zeichnet auch das Netz des Balkens. Welche Verkleinerung wird am besten passen? Was für Flächen begrenzen den Balken?

Verallgemeinerung. Wir haben den Balken, das Lineal, den Zimmerkörper und das Kartonzimmer betrachtet. Welche gemeinsame Merkmale haben diese Körper? Jeder von ihnen ist von 6 Rechtecken begrenzt und hat 12 Kanten und 8 Ecken. Alle Kanten schneiden sich rechtwinklig; je 4 sind gleich und parallel. Wir wollen solche Körper rechtwinklige Körper oder rechtwinklige Prismen nennen.

Vergleiche bei jedem dieser Körper je zwei gegenüberliegende Rechtecke der Form, Grösse und Lage nach. Welche Namen führen die einzelnen Rechtecke?

Das rechtwinklige Prisma.

Satz 5. Ein rechtwinkliges Prisma ist von 6 Rechtecken begrenzt. Je zwei gegenüberliegende Rechtecke sind einander gleich und haben parallele Lage. Zwei Rechtecke bilden die Grund- und die Deckfläche, die 4 andern die 4 Seitenflächen. Der Körper hat 12 Kanten, wovon je 4 einander gleich und parallel sind. Diese Kanten treffen sich bezw. in 8 Ecken.

Übungen.

1) Zeiget auch andere rechtwinklige Körper, und prüft sie. (Häuser mit ebenen Dächern, Kisten, Schachteln, Heustöcke, Brunnen, Wasserbehälter, Öfen, Stützsäulen, Pfeiler, Tischplatten etc.) *Schätze,* und *miss* die Dimensionen einiger dieser Körper, und stelle Vergleichungen an. Beachte, dass bei manchen rechtwinkligen Körpern eine oder gar zwei Dimensionen sehr klein sind. Zähle solche auf.

2) Der Lehrer zeige in der Klasse auch ein ganz genau gearbeitetes Modell aus Holz oder aus Eisen. Mit einem Vergrösserungsglas würden wir noch manche Unebenheit entdecken. Man kann sich noch genauere Körper denken.

Einen ganz genauen rechtwinkligen Körper wollen wir einen mathematischen rechtwinkligen Körper nennen.

3) Miss die drei Ausdehnungen der Schulhausmauer, und zeichne das Netz des Schulhauses (ohne Dach).

4) Vergleiche Querbalken und Stützsäulen. Bei Querbalken ist die Höhe meistens grösser als die Breite, nie kleiner, weil sonst die Tragkraft kleiner wäre. Schneide einen kleinen Balken aus Holz, und bestätige dies durch den Versuch.

5) Wie sehen Stützsäulen gewöhnlich aus? Vergleiche ihre Breite mit ihrer Dicke. Sie sind einander (meistens) gleich. Zeichne die Grundfläche einer solchen Säule. Breite = 30 cm = Dicke. Dieses Rechteck hat 4 gleich lange Seiten. Wir nennen es ein *Quadrat.* (Fig. 4.) Die Stützsäule heisst eine quadratische Säule.

Fig. 4.  Massstab 1 : 100.

6) Zeichne ein Stück einer Strasse im verkleinerten Massstabe. Schätze ihre Breite und die Länge eines bestimmten Stückes, und prüfe deine Schätzung mit dem Massstabe.

7) Stecke auf dem Turnplatze deinen Zimmerboden ab.

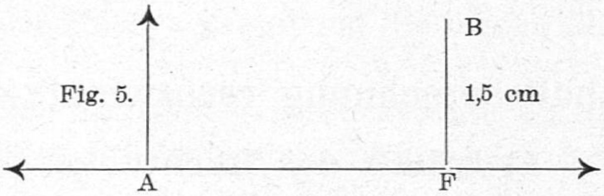
1. Ohne Hilfsmittel, d. h. durch einfaches Abschreiten.
2. Mit Hilfe von Kreuzscheibe und Messlatte.

Miss eine Fläche ab, auf welcher dein Wohnhaus Platz hätte.

8) Zeichne die Richtung einer geraden Eisenbahnlinie, dann die Richtung einer Strasse, die rechtwinklig abzweigt, ferner ein alleinstehendes Haus (als Punkt), und miss in der Zeichnung den Abstand dieses Hauses von der Eisenbahnlinie.

9) Zeichne eine beliebige gerade Linie; nimm 1. darauf einen Punkt A an, und errichte in diesem Punkte eine Senkrechte zur geraden Linie; nimm 2. ausserhalb der Linie einen Punkt an, und ziehe von diesem Punkte aus die Senkrechte darauf. (Fig. 5.)

Fig. 5.



Die Linie A F (Fig. 5) denken wir uns auf beiden Seiten unbegrenzt. A F mag uns eine Strasse vorstellen, die sich geradlinig noch weiter erstreckt, als wir zu überblicken vermögen. Wir wollen sie kurzweg eine *Gerade* nennen. Die Senkrechte von A aus denken wir uns nach oben unbegrenzt und nennen sie einen *Strahl,* der von A ausgeht. (Denke an die Sonnenstrahlen.) Die Linie B F denken wir uns durch die Punkte B und F begrenzt und nennen sie eine *Strecke.* Miss die Länge der Strecke B F (= 1,5 cm). Man nennt die Strecke B F den Abstand des Punktes B von der Geraden A F und sagt: der Punkt B ist von der Geraden A F um 1,5 cm entfernt.

Wie steht es mit der Länge der unbegrenzten Geraden und derjenigen des Strahls? Wo haben wir in der Zeichnung zu Übung 8 eine Gerade, einen Strahl, eine Strecke? Gib ihre Merkmale an.

Verallgemeinerung. **Satz 6. Es gibt 3 Arten von geraden Linien: unbegrenzte, einseitig begrenzte oder Strahlen und beidseitig begrenzte oder Strecken.**

Welche Art von Linien kam bei unseren Körpern vor?

Zeichne Strecken, Strahlen und unbegrenzte Gerade.

10) Zeichne die Richtung einer Strasse, und zeichne durch einen ausserhalb gelegenen Punkt eine parallele Richtung. (Denke an die Konstruktion des Rechteckes. (Fig. 6.)

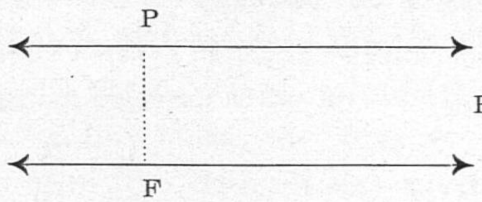


Fig. 6.

Wir errichten die Senkrechte (das Perpendikel) P F von P auf die Strassenrichtung und ziehen zu P F eine Senkrechte in P. Dann läuft diese parallel zur gegebenen Richtung. Miss den Abstand der beiden Geraden an verschiedenen Stellen, und vergleiche die Resultate.

11) Zeichne zu einer gegebenen Geraden eine Parallele im Abstande 4 cm.

II. Die Inhaltsberechnung rechtwinkliger Körper.

1) Inhalt des Rechtecks.

a) Aufgabe 1. *Was kosten die Bretter des Schulzimmerbodens, der 8 m lang und 5,5 m breit ist, wenn pro Quadratmeter 4 Fr. bezahlt werden?*

Berechnung des Schulzimmerbodens.

Erste Erklärung.

1) Ein Quadratmeter (1 m²) ist ein Rechteck von 1 m Länge und 1 m Breite. Wir werden nachzusehen haben, wie viele Quadratmeter unser Boden enthält. Zeichne mit der Kreide in einer Ecke des Bodens 1 m². Schliesse ihm der Längskante nach einen zweiten an; man wird längs dieser Kante 8 m² zeichnen können, da sie 8 m lang ist. So erhalten wir eine Reihe von 8 m². Ihr können wir eine zweite, eine dritte, eine vierte und eine fünfte Reihe anschliessen. Der Streifen, der übrig bleibt, ist $^1/_2$ m breit und 8 m lang, enthält also 8 halbe Quadratmeter oder 4 ganze. Die ganze Fläche des Zimmerbodens enthält daher 5 Reihen zu je 8 m², mehr 4 m² $=$ 44 m² $=$ 8 . 5,5 m².

Der Preis der Bretter ist $=$ 44 . 4 Fr. $=$ 176 Fr.

2) Wir können durch folgende Überlegung zu demselben Resultat gelangen.

Zweite Erklärung.

Unser Zimmerboden kann nicht in lauter ganze Quadratmeter zerlegt werden. Wir wollen ihn mit einem Quadratdecimeter (1 dm²), d. h. mit einem Rechteck von 1 dm Länge und

1 dm Breite vergleichen. Die Längskante misst 8 m = 80 dm, die Breitenkante 5,5 m = 55 dm. Zeige, dass der Boden 55 Reihen von je 80 dm^2, oder 80 Reihen von je 55 dm^2, somit 80 . 55 = 4400 dm^2 enthält. Wie viele m^2 sind das? Zeichne an der Wandtafel 1 m^2, und teile ihn in dm^2 ein; er enthält 10 Reihen zu je 10 dm^2, somit 10 . 10 = 100 dm^2. Somit: 4400 dm^2 = 44 m^2.

Man sagt, der Inhalt des Bodens sei = 4400 dm^2 = 44 m^2. Welche einfache Regel ergibt sich für die Bestimmung des Inhalts des Bodens? Wir messen die Länge und die Breite mit dem dm und multiplizieren die beiden Masszahlen. Das Produkt gibt uns die Zahl der dm^2, die der Boden enthält. Teilen wir diese Zahl durch 100, so erhalten wir die Zahl der m^2.

Aus der ersten Erklärung sehen wir, dass wir direkt die Zahl der m^2 erhalten, wenn wir die Länge und die Breite des Bodens mit dem Meter messen und die beiden Masszahlen multiplizieren.

Es ist folgende kurze Ausdrucksweise üblich:

Inhalt des Bodens = Länge mal Breite.

b) Es wird auch Rechtecke geben, die sich nicht in eine ganze Zahl von dm^2 zerlegen lassen. Wie können solche genau ausgemessen werden? Wir messen Länge und Breite auf cm oder mm genau und bestimmen die Zahl der cm^2 oder der mm^2. Was wird 1 cm^2 bedeuten, was ein mm^2? Zeige und merke dir genau folgendes:

Die Flächeneinheiten.

1 m^2 = 10 . 10 dm^2 = 100 dm^2.
1 dm^2 = 10 . 10 cm^2 = 100 cm^2.
1 cm^2 = 10 . 10 mm^2 = 100 mm^2.
1 m^2 = ? dm^2 = ? cm^2 = ? mm^2.
1 dm^2 = 0,01 m^2; 1 cm^2 = 0,0001 m^2 = 0,01 dm^2.

Zeichne auf deinem Blatte 1 dm^2, und teile ihn in cm^2 ein; teile einen cm^2 in mm^2 ein.

Verallgemeinerung. Welche Merkmale haben der m^2, der dm^2, der cm^2 und der mm^2 gemein? Sie sind Rechtecke von gleicher Länge und Breite, die wir Quadrate nennen.

Das Quadrat.

Satz 7. Ein Quadrat hat 4 gleich lange Seiten, die sich rechtwinklig schneiden.

c) Aufgabe 2. *Wie hoch kam das Getäfel der vordern Wand zu stehen, wenn pro m^2 $3^1/_2$ Fr. gerechnet wurden?*

Berechnung der Wandfläche.

Die Grundlinie dieses Rechtecks, d. i. die Zimmerbreite, misst 5,5 m = 55 dm, seine Höhe, d. i. die Zimmerhöhe, 3,2 m = 32 dm. Wie könnte man die Wandfläche zerlegen? In 32 Reihen von je 55 dm^2. Die Wandfläche enthält somit 55 . 32 = 1760 dm^2 = 17,6 m^2.

Wie erhält man demnach ganz einfach die Zahl der dm^2 der Wandfläche? Wie die Zahl der m^2?

Wie erhält man letztere noch einfacher?

Inhalt = 5,5 . 3,2 = 17,6 m^2. Es ist also nicht nötig, die Grundlinie und die Höhe in dm auszudrücken. Man kann einfach die gebrochenen Meterzahlen multiplizieren.

Verallgemeinerung. Vergleiche die Inhaltsbestimmung der Bodenfläche mit derjenigen der Wandfläche.

Inhalt des Rechtecks.

Satz 8. Man findet den Inhalt eines Rechtecks, indem man seine Länge und seine Breite (oder seine Grundlinie und seine Höhe) misst und die Masszahlen multipliziert.

Kurz:

Inhalt des Rechtecks = Länge × Breite = Grundlinie × Höhe = (g. h.)

Wie muss man beim Quadrat verfahren?

Inhalt des Quadrats = Seite × Seite.

2. Inhalt des rechtwinkligen Körpers.

a) Aufgabe 1. *Wie viele Liter hält ein Wasserbehälter von der Grösse unseres Schulzimmers?*

1) Welchen Raum füllt ein Liter Wasser? Giesse das Wasser in einen Kubikdecimeter aus Blech. Das Wasser dieses Liters füllt genau diesen Blechkörper. Miss die Dimensionen dieses letztern; er ist 1 dm lang, 1 dm breit und 1 dm hoch. Wir nennen ihn einen Würfel von 1 dm Kantenlänge oder einen Kubikdecimeter (dm^3).

Von was für Flächen ist der dm^3 begrenzt?

Wir wollen ihn genauer betrachten.

Die Körpereinheiten.

Zeichnet sein Netz, und verfertigt einen solchen Körper in Karton.

Leget eure Kartonkörper an- und aufeinander, und konstruiert einen Würfel von 2 dm, 3 dm, 4 dm u. s. f. Kantenlänge. Wie viele dm^3 braucht man in jedem Falle. Wie viele dm^3

müsste man haben, um einen Kubikmeter (m^3), d. h. einen Würfel, der 1 m lang, 1 m breit, 1 m hoch ist, zu konstruieren?

Die erste Schicht enthält 10 Reihen von je 10 dm^3 = 100 dm^3. Solcher Schichten enthält 1 m^3 zehn, somit: 1 m^3 = 10 . 10 . 10 dm^3 = 1000 m^3.

Wir wollen auch die Untereinheiten eines dm^3 kennen lernen. Zeichnet das Netz eines Würfels von 1 cm Kantenlänge, eines Kubikcentimeters (1 cm^3); konstruiert ihn aus Karton, und beschreibt ihn. Legt dann die cm^3 zu einem dm^3 zusammen. Wie viele sollte man haben?

$$1\ dm^3 = 10\ .\ 10\ .\ 10\ cm^3 = 1000\ cm^3.$$
$$1\ m^3 = 100\ .\ 100\ .\ 100\ cm^3 = 1000000\ cm^3.$$

Was wird 1 mm^3 bedeuten? Zeige, dass 1 cm^3 = 1000 mm^3.

Zusammenstellung:

$$1\ m^3 = 10\ .\ 10\ .\ 10\ dm^3 = 1000\ dm^3;$$
$$1\ dm^3 = 10\ .\ 10\ .\ 10\ cm^3 = 1000\ cm^3.$$
$$1\ cm^3 = 10\ .\ 10\ .\ 10\ mm^3 = 1000\ mm^3.$$
$$1\ dm^3 = 0{,}001\ m^3;\ 1\ cm^3 = 0{,}001\ dm^3 = 0{,}000001\ m^3.$$

Verallgemeinerung. Welche gemeinsame Merkmale haben der m^3, der dm^3, der cm^3 etc.? Es sind rechtwinklige Körper, welche bezw. gleich lange Kanten haben und von 6 gleichen Quadraten begrenzt sind. Wir nennen solche Körper Würfel. Der Würfel.

Satz 9. Ein Würfel (Cubus) ist von sechs gleichen Quadraten begrenzt.

2) Nachdem wir die Körpereinheiten genau kennen gelernt haben, wollen wir zur Lösung unserer Aufgabe übergehen. Wir werden nachzusehen haben, wie viele dm^3 in unserem Zimmer Platz haben. Länge = 8 m = 80 dm; Breite = 5,5 m = 55 dm; Höhe = 3,2 m = 32 dm. Berechnung des Inhalts des Schulzimmers.

Lege zuerst die dm^3 aus Karton der Längskante nach aneinander. Wie viele gehen in diese Reihe hinein? 80, denn die Länge misst 80 dm. Lege an diese Reihe eine zweite, eine dritte u. s. f. Auf dem ganzen Boden würden 55 solcher Reihen Platz haben, welche 55 . 80 = 4400 dm^3 enthalten.

Diese Reihen bilden eine Schicht von 1 dm Höhe. Wie viele solcher Schichten würden das Zimmer ausfüllen? 32 Schichten; denn die Höhe misst 32 dm.

32 Schichten à 4400 dm^3 enthalten 4400 . 32 dm^3 = 140800 dm^3 = 140,8 m^3. Da 1 dm^3 = 1 Liter ist, hält das Schulzimmer 140800 Liter = 1408 hl.

Man sagt, der Inhalt des Schulzimmers ist = 140800 dm^3 = 140,8 m^3.

Fassen wir die Berechnung ins Auge, so sehen wir, dass man die Zahl der dm^3 des Zimmers erhält, indem man mit dem dm die Länge, die Breite und die Höhe misst und die 3 Masszahlen multipliziert. Teilen wir die Zahl der dm^3 durch 1000, so erhalten wir die Zahl der m^3.

Wie erhält man 140,8 m^3, ohne die Länge, die Breite und die Höhe in dm auszudrücken?

$8 \,.\, 5{,}5 \,.\, 3{,}2\ m^3 = 140{,}8\ m^3$.

Drückt man also die 3 Ausdehnungen des Zimmers durch den Meter aus, so erhält man die Zahl der m^3, die das Zimmer enthält, indem man die Masszahlen der 3 Ausdehnungen multipliziert und zwar auch, wenn diese Masszahlen Dezimalbrüche sind.

b) Aufgabe 2. *Berechne den Preis des Balkens, den wir zuerst betrachtet haben, wenn pro m^3 60 Fr. bezahlt werden.*

Länge: l. = 5,9 m; Breite: b. = 25 cm; Höhe: h. = 30 cm.

Berechnung des Balkens.

Mit welchem Einheitskörper können wir den Balken genau ausmessen? Mit dem cm^3.

Wir könnten zuerst der Länge nach 590 cm^3 ausschneiden, weil der Balken 590 cm lang ist. Wie viele solcher Reihen erhalten wir der Breite nach? 25, weil die Breite 25 cm misst. Die Schicht, die auf diese Art herausgeschnitten worden wäre, enthält 590 . 25 cm^3 und ist 1 cm hoch. Wie viele solcher Schichten enthält der Balken? 30 Schichten, weil die Höhe 30 cm misst.

Der Balken setzt sich demnach aus 30 Schichten von je 25 Reihen zu 590 cm^3 zusammen. Er enthält:

$$590 \,.\, 25 \,.\, 30\ cm^3 = 442500\ cm^3.$$

Wie viele m^3 sind das? $1000000\ cm^3 = 1\ m^3$.

$$442500\ cm^3 = 0{,}4425\ m^3.$$

$$\text{Preis} = 0{,}4425 \,.\, 60\ \text{Fr.} = 26{,}55\ \text{Fr.}$$

Wie haben wir den Inhalt des Balkens erhalten? Wir haben seine 3 Ausdehnungen gemessen und die drei Masszahlen miteinander multipliziert. Dadurch erhielten wir die Zahl der cm^3 des Balkens. Durch eine Division mit einer Million ergab sich die Zahl der m^3. Wie kann man zu der letzteren Zahl einfacher gelangen? $5{,}9 \,.\, 0{,}25 \,.\, 0{,}3\ m^3 = 0{,}4425\ m^3$. Wir erhalten demnach auch das richtige Resultat, indem wir l., b. und h. in

Bruchteilen des Meters ausdrücken und die 3 Zahlen multiplizieren.

Somit: *Inhalt des Balkens = Länge × Breite × Höhe = l. b. h.*

Dabei ist es gleichgiltig, welches Längenmass man nimmt.

Verallgemeinerung. Vergleiche die Berechnung des Zimmerkörpers und des Balkens. Was für Körper sind das Zimmer und der Balken?

Satz 10. Man findet den Inhalt eines rechtwinkligen Körpers, indem man seine drei Ausdehnungen misst und die Masszahlen multipliziert. Inhalt des rechtwinkligen Prismas.

Kurz: **Inhalt eines rechtwinkligen Körpers = Länge × Breite × Höhe** oder, weil Länge × Breite = Grundfläche,

Inhalt J = Grundfläche × Höhe = G. h.

Wie gestaltet sich die Berechnung für den Würfel? Inhalt des Würfels.

Inhalt des Würfels = Kante × Kante × Kante.

Übungen.

a)

1) Bauet mit euren Kubikdecimetern aus Karton Würfel von 2 dm, 3 dm, 4 dm u. s. w. Kantenlänge. Wie viele dm^2 misst in jedem Fall eine Würfelfläche, wie viele dm^3 der Würfelkörper? Es ergibt sich:

Ein Quadrat mit der Seite	2 dm	enthält	$2 . 2 = 4$ dm^2
„ „ „ „ „	3 „	„	$3 . 3 = 9$ „
„ „ „ „ „	4 „	„	$4 . 4 = 16$ „
„ „ „ „ „	5 „	„	$5 . 5 = 25$ „
Ein Würfel von der Kantenlänge	2 dm	enthält	$2 . 2 . 2 = 8$ dm^3
„ „ „ „ „	3 „	„	$3 . 3 . 3 = 27$ „
„ „ „ „ „	4 „	„	$4 . 4 . 4 = 64$ „
„ „ „ „ „	5 „	„	$5 . 5 . 5 = 125$ „

Die Zahlen 4, 9, 16, 25 . . . heissen Quadratzahlen (warum?).

Die Zahlen 8, 27, 64, 125 . . . heissen Kubikzahlen (Würfelzahlen) (warum?).

2) Baue mit den Kubikdecimetern aus Karton beliebige rechtwinklige Körper auf. Nimm z. B. der Länge nach 3, der Breite nach je 2 dm^3, und lege eine zweite Schicht auf die erste. Beschreibe den Körper. Wie viele dm^2 messen seine Flächen, wie viele dm^3 enthält der Körper?

3) Berechne die Thüre und die Fenster des Schulzimmers. Berechne die 4 Wandflächen ohne Fenster und Thüre. Zeige an der Figur des Netzes des Schulzimmers, wie man die 4 Wände als ein einziges Rechteck auffassen und berechnen kann.

4) Was kostet der dreimalige Anstrich der Wandtafel, wenn der Anstrich eines m^2 95 Rp. kostet. Was kostet der zweimalige Anstrich der Schulzimmerwände à 70 Rp. pro m^2?

5) Wie teuer ist der Bauplatz des Schulhauses oder eines im Bau stehenden Hauses gekommen, wenn pro m^2 . . . bezahlt worden ist? Wie verhält es sich mit dem Preise von Bauplätzen an verschiedenen Orten?

6) Wieviel kostet die Erstellung einer $^1/_2$ m dicken Ackermauer von 60 m Länge und 1,50 m Höhe? Wie wird die Maurerarbeit bezahlt? Gewöhnlich nach der Zahl der Kubikmeter der erstellten Mauer. Der Unternehmer verlange 12 Fr. pro 1 m^3.

7) Berechne die Kosten für den Erdaushub für die Kellerräumlichkeiten deines Wohnhauses à 1 Fr. pro m^3 (Abfuhr $1^1/_2$ Fr. pro m^3).

8) Berechne die Erstellungskosten der Fundamentmauern des Schulhauses à 11 Fr. pro m^3; desgleichen die Kosten der übrigen Hauptmauern à 11 Fr. pro m^3. Berechne auch die Erstellungskosten einiger Backsteinmauern (9—10 Fr. pro m^2 bei 25 cm Dicke, 5 Fr. pro m^2 bei 12 cm Dicke).

9) Wieviel Liter hält der rechtwinklige Dorfbrunnen? l. = $2^1/_2$ m, b. = $1^1/_2$, Tiefe 40 cm. Welches Gewicht hat dieses Wasser? Für die Erstellung eines Cementbrunnens von 1 m^3 Hohlraum zahlt man ungefähr 75 Fr. Wie teuer käme ein Brunnen von gleicher Grösse wie dieser Dorfbrunnen? Wie teuer ein Brunnen, der 20 cm kürzer, aber dafür 20 cm breiter werden soll?

10) Was kostet ein Balken von 5 m Länge, 20 cm Breite und 30 cm Höhe, wenn der Kubikfuss 1 Fr. kostet?

Was ist ein Kubikfuss?

1 Fuss = 3 dm.

1 Kubikfuss = 3 . 3 . 3 dm^3 = 27 dm^3 = 0,027 m^3.

Inhalt des Balkens = 50 . 2 . 3 dm^3 = 300 dm^3 = $^{300}/_{27}$ Kubikfuss = . . . Preis = . . . Wieviel kostet der Festmeter von diesem Holz?

11) Ein Klafter Lärchenholz kostet durchschnittlich 30 Fr. Wie teuer kommt 1 m^3?

12) Welchen Wert hat ein Heustock von 8,4 m l., 7 m b. und 4,3 m h., wenn ein Klafter (Würfel von 6 Fuss Seitenlänge) zu 16 Fr. berechnet wird?

13) Ein Sandwagen wird eben voll mit Sand gefüllt. Der Kasten ist rechtwinklig und misst in der Länge 1 m 10 cm, in der Breite 80 cm, in der Höhe 50 cm. Wieviel kg Sand hält er, wenn das spezifische Gewicht = 1,5 ist?

14) Welche Dimensionen kann ein Zimmer von 60 m^3 Inhalt haben? welche Dimensionen ein rechtwinkliger Stein von $^1/_2$ m^3 Inhalt?

b) *Das rechtwinklige Grundstück.*

Wir wollen sehen, wie man ein rechtwinkliges Grundstück (Acker, Weinberg etc.) ausmisst und berechnet.

Grundstücke, die gekauft oder verkauft werden, müssen zuerst genau ausgemessen werden. Nach unserer kantonalen Vorschrift muss im Kaufvertrag die Grösse des Grundstücks in Ar und m^2 ausgedrückt sein. Ein Ar ist ein Quadrat, dessen Seite 10 m misst; es enthält also 10 . 10 = 100 m^2. Warum ist es vorteilhaft, eine grössere Einheit einzuführen? Die Grösse von sehr ausgedehnten Grundstücken drückt man in Juchart (1 Juchart = 36 Ar) oder in Hektar aus. Es sind vielfach noch alte Masse in Gebrauch. In Chur hat man noch das Klaftermass. Ein altes Churerklafter ist ein Quadrat von 7 Fuss Seitenlänge, also = 2,1 . 2,1 = 4,41 m^2. Für ein Klafter Weinbergboden bezahlt man durchschnittlich ungefähr 5 Fr. Für Bauplätze zahlt man das 2-, 3-, 4fache. Erkundige dich nach den mittleren Einheitspreisen von Bauplätzen, von Wiesboden, von Ackerboden etc. in deiner Gemeinde.

Schreite auf einer Wiese ein Ar ab, stecke es mit Hilfe der Messlatte und der Kreuzscheibe genau ab. Miss 2, 3, 4, 5 Ar ab u. s. w., bis dein Auge sich diese Grösse eingeprägt hat. Gib auch jeweilen den vermutlichen Wert an.

Was für Grundstücke könnt ihr ausmessen? Solche, die Rechteckform haben. Miss einen solchen Acker aus, und berechne seinen Wert. Zeichne ihn im verkleinerten Masse. Prüfe mit Massstöcken, ob die Seiten genau gerade sind. Zeige, wie man eine gerade Linie absteckt. Prüfe mit der *Kreuzscheibe,* ob die Winkel genau rechte sind. Welche Handänderungsgebühr muss der Käufer bezahlen, wenn diese 1 % der Kaufsumme beträgt.

Aufgabe 1. Ein rechtwinkliger Weinberg ist 70,4 m lang und 25,3 m breit.

1. Wieviel ist er wert, wenn ein Churerklafter 5 Fr. gilt?
2. Was zahlt man für die Bearbeitung des Weinbergs, wenn man pro Mal (250 Kl.) 70 Fr. zahlen muss?
3. Für Dünger wurden 60 Fr., für Stickel 22,5 Fr., für Verschiedenes 25 Fr. ausgegeben. Man erhielt 620 Liter Wein, den man zu 50 Rp. per Liter verkaufen konnte. Welchen Gewinn hat man gehabt? Wieviel % vom Kapital sind das?

2) Wie viele Reben kann man in einem Weinberg pflanzen, der 70,7 m lang und 21 m breit ist, wenn der Abstand aufeinanderfolgender Reben 70 cm betragen soll. Denke dir den ganzen Weinberg in Quadrate von 70 cm Seite eingeteilt und jede Rebe in den Mittelpunkt eines solchen Quadrates gesetzt.

Wieviel Liter Wein darf man von diesem Weinberg in einem mittleren Jahr erwarten, angenommen 1 Ar Weinberg sollte durchschnittlich 40 Liter liefern?

3) Eine rechteckige Wiese ist 61,2 m lang und 32,4 m breit. Auf wieviel Stunden hat sie das Wasserrecht, wenn man für 1 Ar Wiese das Wasser 15 Minuten lang beanspruchen darf?

4) Ein Kartoffelacker ist 35,3 m lang und 22 m breit. Wieviel kg Kartoffeln muss man legen, wenn man pro Ar 25 kg rechnet? Welche Ernte darf man erwarten, wenn durchschnittlich das 8fache herauskommt?

Wieviel Kartoffeln sollen 20 Stauden liefern, wenn der Abstand von einer Staude zur andern 1 Fuss (30 cm) und der Abstand von einer Reihe zur andern 2 Fuss (60 cm) beträgt?

III. Die Achsensymmetrie.

1) *Wir wollen sehen, wie man eine Wand geschmackvoll ausstattet.*

a) Wie sind die Bilder der Schulwand gruppiert? Links und rechts von der Mitte befinden sich in gleicher Höhe und in gleicher Entfernung von der Mitte der Wand entsprechende Bilder. Man sagt, die Bilder sind symmetrisch aufgestellt. Würde man das eine Bild tiefer oder näher der Mitte aufhängen, so würde diese Aufstellung deinem Auge nicht gefallen. Gib 2 entsprechenden Portraits eine andere Lage. Wie müssen die zwei

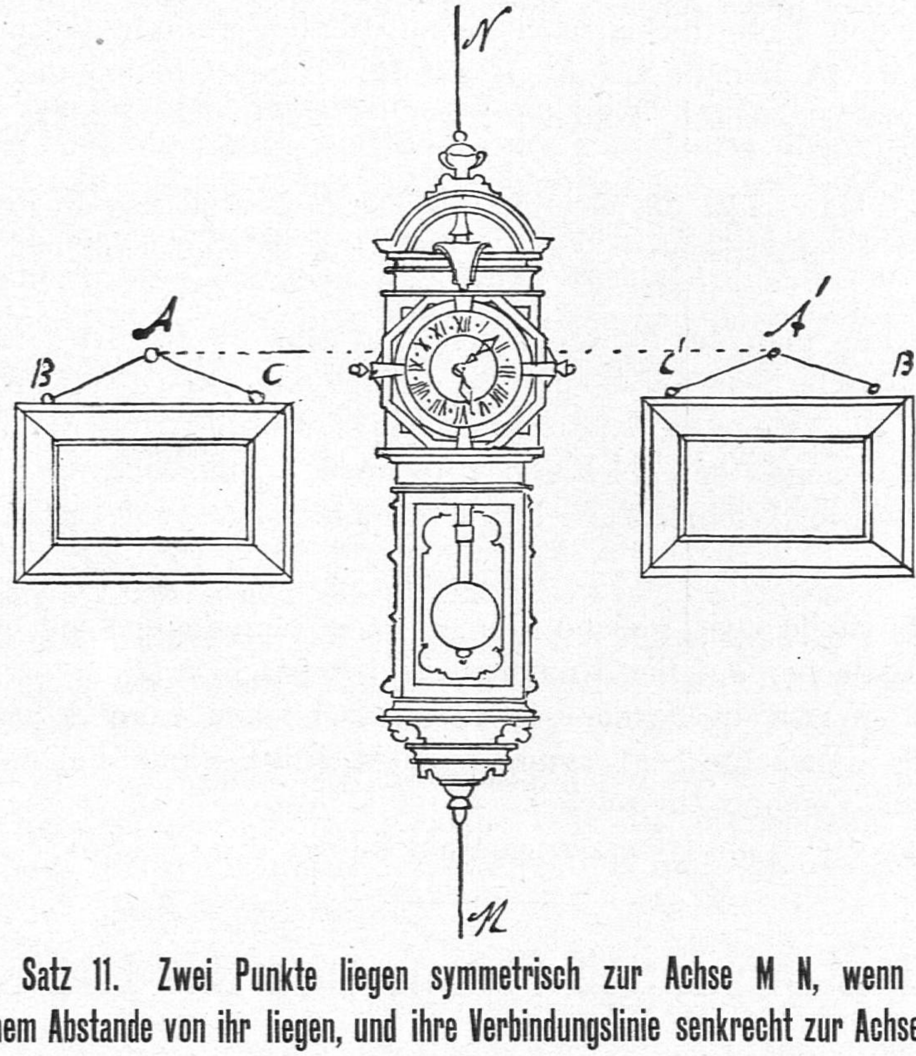
Symmetrische Punkte.

neuen Aufhängepunkte genau liegen? Wir bezeichnen die Linie, welche die Mitte der Längsseiten der Wand verbindet; sie heisst *Symmetrieachse.* Nachdem die Lage des einen Aufhängepunktes gewählt ist, konstruieren wir eine Senkrechte zur Symmetrieachse und tragen den Abstand des ersten Aufhängepunkts von ihr auf ihrer Fortsetzung ab.

b) Zeichne die Wand in verkleinertem Massstabe, und konstruiere die Symmetrieachse, sowie Punkte, die symmetrisch liegen.

Man sagt, A liegt symmetrisch zu A′ in Bezug auf die Symmetrieachse M N, ebenso B symmetrisch zu B′ u. s. f. (Fig. 7.)

Fig. 7.



Satz 11. Zwei Punkte liegen symmetrisch zur Achse M N, wenn sie in gleichem Abstande von ihr liegen, und ihre Verbindungslinie senkrecht zur Achse steht.

c) Denken wir uns M N als einen Spiegel und unser Auge nach A verlegt, so wäre A′ sein Spiegebild; es wäre B das Spiegelbild von B′ u. s. f.

Stelle dich vor einem Spiegel auf, und achte auf die Stellung des Spiegelbildes. Nähert man sich dem Spiegel, so nähert sich ihm auch das Spiegelbild. Im Augenblicke, wo z. B. die Nasenspitze den Spiegel berührt, trifft sie mit ihrem Bilde zusammen. Entfernen wir uns vom Spiegel, so entfernt sich dahinter Spiegelbilder.

in gleichem Masse das Spiegelbild immer so, dass z. B. das rechte Auge und sein Bild sich auf derselben Senkrechten zum Spiegel befinden und zwar in gleichem Abstande davon. Wie liegen stets die rechte Hand und ihr Bild? etc. . . .

Satz 12. Ein Punkt und sein Spiegelbild liegen in gleichem Abstande vom Spiegel auf einer Senkrechten zu diesem.

Umklappen. d) Führe einen Schnitt durch das Bild der Wandfläche längs der Symmetrieachse und klappe die beiden Teile zusammen. Die beiden Teile decken sich genau. Welche Punkte fallen zusammen? A kommt auf A', B auf B'. Durch Umklappung um die Symmetrieachse kommen zwei symmetrische Punkte zur Deckung.

e) Man sagt, die Symmetrieachse M N teilt das Rechteck in zwei symmetrische Teile; das Rechteck ist eine symmetrische Figur.

Kann man das Rechteck noch auf eine zweite Art in zwei symmetrische Teile zerlegen? Hat es noch eine zweite Symmetrieache? Die zweite Symmetrieachse verbindet die Mitte der zwei andern Gegenseiten. Zeichne das Rechteck nochmals; konstruiere diese zweite Symmetrieachse und symmetrische Punktpaare.

Übungen.

1) Stelle zwei gleiche Blumenvasen, eine Lampe und zwei gleiche Becher auf der Kommode symmetrisch auf.

2) Weise die Symmetrie des menschlichen Körpers nach.

3) Betrachte ein symmetrisches Blatt einer bekannten Pflanze. Zeichne ein solches.

4) Wie viele Symmetrieachsen besitzt das Quadrat?

B. Das dreiseitige Prisma und das Dreieck.

I. Der Estrichraum mit rechtwinkligen Giebeln.

1) Die meisten Räumlichkeiten unseres Hauses sind rechtwinklige Körper. Sie unterscheiden sich im wesentlichen nur in den Ausdehnungen.

Eine ganz andere Form hat der Estrichraum. Wir wollen diesen besichtigen. Die Dachflächen sind nicht senkrecht wie die Zimmerwände; sie sind geneigt und laufen in der Firstkante zusammen. Warum gibt man ihm diese Lage? Welche Vorteile bieten schräge Dächer gegenüber ebenen Holzcementdächern? Wozu verwendet man den Estrichraum?

Wir wollen diese Raumform genau studieren. Um uns dieses Studium zu erleichtern, wollen wir zuerst einen Dachraum mit einer einzigen schrägen Dachfläche betrachten. (Pultdach.) Wo habt ihr einen solchen gesehen? (Beim Anbau vieler Häuser, bei Holzschöpfen, bei Waschhäusern, bei Hütten etc.)

2) *Wir wollen einen solchen Pultdachraum, der eine ähnliche Verwendung findet wie der Estrichraum, besichtigen, beschreiben und nachbilden.*

Beschreibung des Pultdachs.

a) Die Grundfläche ist ein Rechteck, dessen Länge und Breite mit der Länge und Breite des Unterbaues übereinstimmt. Die schräge rechteckige Dachfläche ruht auf zwei senkrechten Giebelflächen und auf einer senkrechten rechteckigen Wandfläche. Die beiden Giebelflächen sind keine Rechtecke; jede von ihnen hat nur drei Kanten und nur drei Ecken und heisst ein Dreieck. Diese Raumform ist begrenzt von 5 Flächen, von 3 Rechtecken und 2 Dreiecken. Sie hat 9 Kanten, 5 wagerechte, 2 senkrechte und 2 schräge Kanten. Diese Kanten treffen sich in 6 Ecken.

Konstruktion aus Stäbchen.

b) Versucht, den Dachstuhl mit Stäben nachzubilden. Wir messen die Länge, die Breite und die Höhe (l. = 6 m, b. = 3 m, h. = 2 m) und stellen zuerst mit 4 Stäben den Boden A B C D dar. Zwei Stäbchen, deren Länge der Höhe entspricht, stellen wir in A und C auf (Fig. 9) und können dann leicht das Dach legen.

c) Nun wollen wir die Giebelfläche, deren Form uns neu ist, genauer betrachten. Zeichne eine der dreieckigen Giebelflächen, indem du zuerst die Breite A B und senkrecht zu ihr die Höhe A E hinzeichnest.

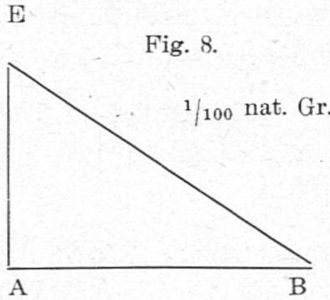


Fig. 8.
1/100 nat. Gr.

Die Figur A B E hat 3 Seiten und drei Eckpunkte und heisst ein *Dreieck*. Weil die Seite A B rechtwinklig zur Seite A E steht, heisst sie genauer ein *rechtwinkliges Dreieck*.

Das rechtwinklige Dreieck.

Die beiden Seiten A B und A E, welche einen rechten Winkel bilden, heissen Katheten des rechtwinkligen Dreiecks A B E. Die dritte Seite B E, die dem rechten Winkel gegenüberliegt, heisst Hypotenuse. Sie ist gegen A B geneigt. Man sagt, sie bildet mit A B einen spitzen Winkel; desgleichen sagt man, sie bilde mit A E einen spitzen Winkel.

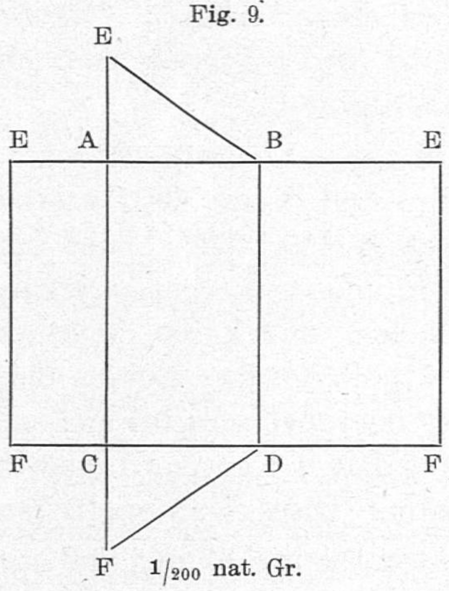
Miss die Länge der Hypotenuse in der Zeichnung und am Dache, und vergleiche die Masszahlen.

d) Versuche nun, diesen Dachkörper in Karton nachzubilden. Zeichne zuerst das Netz.

Wie erhält man die Länge von B E und D F?

Das Netz.

Fig. 9.



$1/_{200}$ nat. Gr.

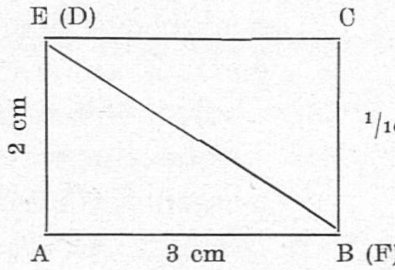
Vergleiche die beiden Giebelflächen A B E und C D F. Wir können sie aufeinanderlegen, dass sie sich decken. Wir sagen darum, sie sind kongruent (sich deckend).

3) *Berechnung der Oberfläche des Dachraums.*

Aufgabe 1. *Wieviel m^2 Bretter braucht man zur Konstruktion dieser Räumlichkeit? Wieviel kosten diese Bretter à $3^1/_2$ Fr. pro m^2?*

a) Die 3 rechteckigen Flächen können wir berechnen. Wie bestimmen wir die Anzahl m^2, welche die Giebelflächen enthalten? Wir schneiden das Dreieck C F D aus und legen es so

Fig. 10



$1/_{100}$ nat. Gr.

an A B E, dass D auf E und F auf B zu stehen kommt. Dann bilden sie das Rechteck A B C E, dessen Grundlinie A B = 3 cm, dessen Höhe A E = 2 cm misst. Dieses enthält also 3 . 2 cm² = 6 cm².

Wie gross ist der Inhalt einer Giebelfläche? Inhalt des rechtw. Dreiecks.

Inhalt von A B E = ½ Inhalt des Rechtecks A B C E = $\frac{3 \,.\, 2\ \text{cm}^2}{2} = 3\ \text{cm}^2$.

Wir erhalten den Inhalt des rechtwinkligen Dreiecks A B E, indem wir seine 2 Katheten messen, die Masszahlen multiplizieren und das Produkt durch 2 dividieren.

Nun können wir die gesamte Oberfläche berechnen.

Inhalt des Bodens	A B C D	= 6 . 3 cm²	= 18 cm²;	in der Natur 18 m²
„ der Wandfläche	A C F E	= 6 . 2 „	= 12 „	„ „ „ 12 „
„ „ Dachfläche	B D F E	= 6 . 3,6 „	= 21,6 „	„ „ „ 21,6 „
„ „ beiden Giebelflächen		= 3 . 2 „	= 6 „	„ „ „ 6 „
	Ganze Oberfläche	=	57,6 cm²;	in d. Natur 57,6 m²

Fasse 2) die drei rechtwinkligen Flächen als ein einziges Rechteck auf.

Preis der Bretter = 57,6 . 3½ Fr. = 201,6 Fr.

b) Wieviel m² Bretter braucht man, 1) wenn die Wandfläche A C E F durch die Hausmauer gebildet würde, 2) wenn die Giebelfläche C D F frei wäre? Berücksichtige auch, dass die Dachfläche über den besprochenen Raum hinausragt.

4. *Berechnung des Inhalts des Dachraums.*

Womit kann man diesen Dachraum ausfüllen? Mit Holz, mit Getreide, mit Heu etc.

Aufgabe 1. *Wieviel m³ Holz hält dieser Dachraum?*

a) Leget 2 eurer Dachräume aus Karton so aneinander, dass die Dachflächen sich decken, und je 2 zusammenstossende Giebelflächen sich zu einem Rechteck ergänzen. Was für einen Körper bilden dann die beiden gleichen Dachkörper? Einen rechtwinkligen Körper. Wie könnte man den wirklichen Dachkörper zu einem rechtwinkligen Dachkörper ausbauen? Inhalt des Dachraums

$$\left.\begin{array}{r}\text{Der Rauminhalt des rechtw. Körpers}\\ \text{oder des doppelten Dachkörpers}\end{array}\right\} = \text{l. b. h.} = \text{Boden} \times \text{Höhe}$$

$$= 6 \,.\, 3 \,.\, 2\ \text{m}^3 = 36\ \text{m}^3.$$

Somit Inhalt des einfachen Körpers

$$= \frac{\text{l. b. h.}}{2} = \frac{\text{Boden} \times \text{Höhe}}{2} = 18\ \text{m}^3.$$

b) Wir wollen den Kartonkörper auf eine Giebelfläche legen. Dann ist seine Grundfläche ein rechtwinkliges Dreieck; desgleichen seine Deckfläche; seine Seitenflächen sind Rechtecke. Die 3 Seitenkanten stehen zur Grundfläche senkrecht; deshalb wollen wir den Körper ein senkrechtes dreiseitiges Prisma nennen. Legen wir daran auf gleiche Weise wie vorher einen gleichen Kartonkörper, so entsteht das rechtwinklige Prisma, dessen Inhalt = Grundlinie $\times$ Höhe ist.

Zweites Verfahren.

Inhalt des Dachkörpers = $^1/_2$. Grundfläche des rechtwinkligen Prismas $\times$ Höhe. Nun ist aber die halbe Grundfläche des Doppelkörpers nichts anderes als die Grundfläche des senkrecht gestellten Dachkörpers.

Somit Inhalt unseres dreiseitigen Prismas

$$= \text{Seine Grundfläche} \times \text{seine Höhe}$$

$$= \frac{3 \,.\, 2}{2} \,.\, 6 \text{ m}^3 = 18 \text{ m}^3.$$

Dieses senkrechte dreiseitige Prisma wird daher berechnet, indem man die Anzahl m^2 seiner Grundfläche bestimmt und diese Zahl mit der Zahl m der Höhe multipliziert.

Der Inhalt unseres Dachkörpers ist also auch gleich Giebelfläche $\times$ Firstkante.

5) Besichtige einen zweiten Estrichraum mit Pultdach; zeichne das Netz, und wiederhole die gleichen Betrachtungen und Berechnungen.

6) Betrachte auch ein zerlegbares Säulenmodell, oder durchschneide ein rechtwinkliges Prisma aus Schnee oder aus Lehm, so dass 2 dreiseitige Prismen entstehen. Ein solcher Schnitt heisst Diagonalschnitt. Zeichne die Grundfläche eines dieser rechtwinkligen Prismen, sowie die Schnittlinie. Sie heisst eine Diagonale dieses Rechtecks; sie teilt es in 2 kongruente Dreiecke, die durch Drehung zur Deckung gebracht werden können.

Verallgemeinerung. Vergleiche vorläufig die Merkmale und die Berechnungsart der betrachteten Giebelflächen. Die Merkmale und die Berechnungsart der Prismen wollen wir später verallgemeinern.

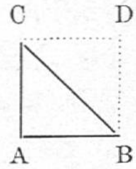
Satz 13. Bei einem rechtwinkligen Dreiecke schneiden sich zwei Seiten rechtwinklig. Sie heissen Katheten. Die dritte Seite heisst Hypotenuse.

Satz 14. Der Inhalt eines rechtwinkligen Dreiecks wird gefunden, indem man die Katheten misst, die Masszahlen multipliziert und das Produkt durch 2 dividiert.

Übungen.

1) Beschreibe die 2 Körper, in welche ein Kubikdecimeter durch einen Diagonalschnitt zerlegt würde. Zeichne das Netz eines solchen Körpers, und berechne seine Oberfläche und seinen Inhalt.

Betrachte eines der Dreiecke, in welche die Grundfläche des dm³ zerlegt wird. Seine Katheten sind einander gleich. Wir nennen es ein *gleichschenkliges rechtwinkliges Dreieck.*



Masstab 1 : 100
Fig. 11.

Schneide das zweite Dreieck B D C aus. Auf welche Art kann es auf A B C gelegt werden?

1) Durch Drehung und 2) durch Umlegung.

2) Beschreibe das Dreieck aus Holz, das wir gebrauchen, um Linien zu zeichnen, die sich rechtwinklig schneiden, und das wir bisher kurzweg „Winkel" nannten. Seine Katheten sind gleich. Es ist ein gleichschenkliges rechtwinkliges Dreieck. Ergänze es zum Quadrat.

II. Der Estrichraum mit gleichschenkligen Giebeln.

1) *Nun wollen wir den Estrichraum unseres Hauses beschreiben und versuchen, ihn nachzubilden.*

a) Wie viele und was für Flächen begrenzen den Estrich? Beschreibung.
Der Boden, zwei gleiche Giebelflächen und zwei gleiche Dachflächen. Der Boden ist ein Rechteck, das so lang und so breit wie das Haus ist. Die Dachflächen sind Rechtecke, deren Grundlinien gleich der Längskante des Hauses sind; sie haben die Firstkante gemein, die sich in der Mitte des Hauses zu befinden scheint. Darum erscheinen die Dachflächen gleich breit und gleich geneigt.

Jede Giebelfläche hat drei Kanten, wovon die eine, die Grundlinie, mit der Breitenkante des Hauses zusammenfällt. Die beiden andern sind augenscheinlich gleich geneigt und gleich lang. Diese Giebelflächen nennt man *gleichschenklige Dreiecke.*

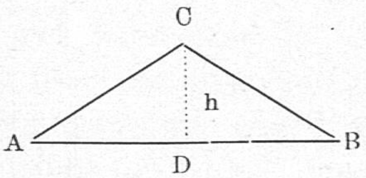
Die 5 Flächen des Estrichkörpers schneiden sich in 9 Kanten, wovon 5 wagerecht laufen, während 4 geneigt sind. Diese Kanten treffen sich in 6 Ecken.

Konstruktion aus Stäbchen.

b) Wie könnte man mit Holzstäbchen ein Modell des Dachstuhls herstellen? Welche Masse müssen wir zuerst nehmen? Die Länge und die Breite des Estrichbodens kennen wir schon: l. = 20 m, b. = 12 m. Die Firstkante ruht auf beiden Seiten auf einer vertikalen Stützsäule. Von ihrem Fusspunkt bis zu den Dachflächen sind es je 6 m; die Stützsäule halbiert die Grundkante des Giebels und die Giebelfläche selbst. Ihre Höhe misst 4 m. Stellen wir nun mit 4 Stäbchen den Estrichboden dar, und stellen wir in der Mitte der Breitenkanten die Stäbchen auf, die den Stützsäulen entsprechen, so lässt sich die Firstkante legen, auf welche sich die Dachflächen stützen.

c) Es soll das Netz des Estrichkörpers (im Massstabe 1 : 400) gezeichnet werden. Wir wollen zuerst eine Giebelfläche einzeln zeichnen, weil sie eine neue Form zeigt. Wir zeichnen zuerst die Grundkante A B = 3 cm und dann in ihrer Mitte senkrecht zu ihr die Stützsäule D C = 1 cm. Die Giebelfläche A B C setzt sich aus den zwei kongruenten rechtwinkligen Dreiecken, A D C und D B C, zusammen, die durch Umklappung zur Deckung kommen. Daraus sehen wir, dass die Seite C B = der Seite C A ist, und dass sie gegen A B gleich geneigt sind, was man auch ausdrückt, indem man sagt: C B und C A bilden mit A B gleiche Winkel.

Fig. 12.



Massstab: 1 : 400.

Die gleichschenklige Giebelfläche.

Die Figur A B C heisst gleichschenkliges Dreieck. A B heisst Grundlinie; die gleichen Seiten C A und C B heissen Schenkel des gleichschenkligen Dreiecks; C D heisst Höhe desselben. Sie halbiert die Grundlinie und teilt das Dreieck A B C in 2 kongruente rechtwinklige Dreiecke. D heisst Fusspunkt der Höhe. Achte auf die Neigung der Seiten A C und C B. Wenn wir unsern „Winkel“ in die Ecke C hineinlegen, sehen wir, dass die beiden Schenkel A C und B C stärker gegeneinander geneigt sind oder einen grösseren Winkel bilden als zwei Linien, die sich rechtwinklig schneiden, während C B und C A gegen die Grundlinie eine kleinere Neigung haben als zwei sich rechtwinklig schneidende Linien. Man sagt, die Seite A C und B C schneiden sich unter stumpfem Winkel, oder sie bilden einen stumpfen Winkel, während die Schenkel mit der Grundlinie spitze Winkel bilden. Die Giebelfläche A B C heisst eine stumpfwinklige Giebelfläche, weil die Dachflächen einen stumpfen Winkel bilden.

Spitzer und stumpfer Winkel.

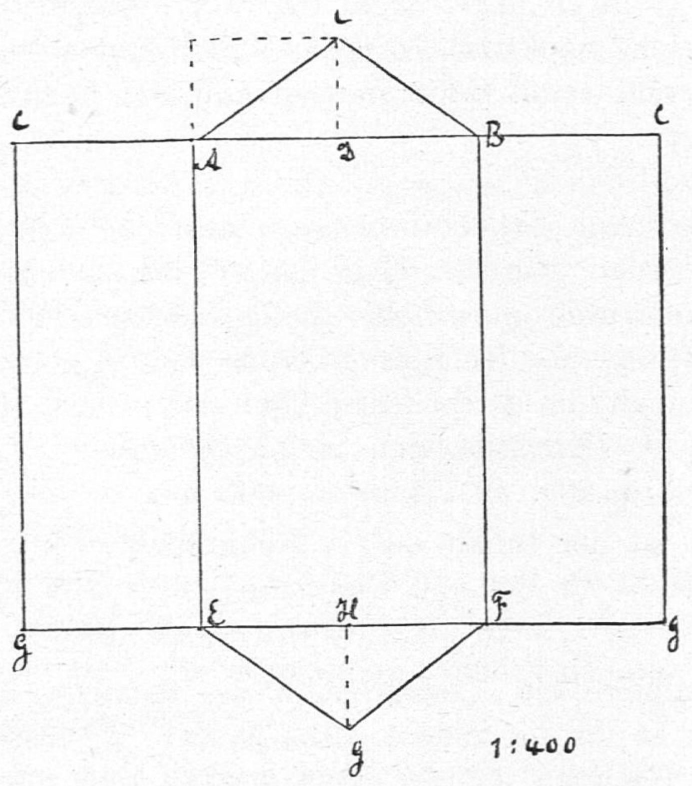
Miss die Schenkel A C und C B. A C = 1,8 cm = C B. In der Natur ist A C = 7,2 m = C B. Wir brauchen diese Kanten also nicht am Dache selbst zu messen.

Netz.

Zeichne nun das ganze Netz im Massstabe 1 : 100 (in Fig. 13, M. = 1 : 400). Beginne mit dem Boden A B E F, und zeichne in D und H die Stützsäulen. Die Seite C A gibt dann die Breite einer Dachfläche an.

d) Konstruiere das Estrichmodell im Massstab 1 : 50.

Fig. 13.



2) *Wieviel m² Bretter braucht man zur Konstruktion der einzelnen Flächen, wieviel für die gesamte Oberfläche? Was kostet die ganze Konstruktion à 4 Fr. pro m²?*

a) Solche Giebelflächen haben wir bisher nicht berechnet. Aber jede Giebelfläche setzt sich aus 2 rechtwinkligen Dreiecken zusammen, die wir berechnen können.

Flächeninhalt von A D C $= \frac{6\ .\ 4}{2}$ m² (natürliche Grösse)

$$A\,B\,C = \frac{2\ .\ 6\ .\ 4}{2}\ m^2 = 6\ .\ 4\ m^2 = 24\ m^2 =$$

[halbe Grundlinie mal Höhe]

$$E\,G\,F = \frac{2\ .\ 6\ .\ 4}{2}\ m^2 = 6\ .\ 4\ m^2 = 24\ m^2.$$

Berechnung der Oberfläche.

Beide Giebelflächen $= \quad 2 \,.\, 24 \text{ m}^2 = \quad 48 \text{ m}^2$
„ Dachflächen $= 2 \,.\, 20 \,.\, 72$ „ $= 288$ „
Bodenfläche $= \quad 20 \,.\, 12$ „ $= 240$ „
Gesamte Oberfläche $= 576 \text{ m}^2$.

Zweite Erklärung.

b) Die Regel für die Berechnung des Giebels A B C können wir noch auf eine anschaulichere Art zeigen.

Schneide das Dreieck D B C aus, klappe es um, und lege es an A C an; dann bildet es mit A D C ein Rechteck. Der Inhalt der beiden Dreiecke ist dann gleich dem Inhalt des Rechtecks = A D . D C = 6 . 4. Wir erhalten daher den Inhalt des gleichschenkligen Dreiecks A B C, indem wir seine halbe Grundlinie und seine Höhe messen und die beiden Masszahlen multiplizieren.

Inhalt des Estrichraums.

3) *Berechne das Volumen des Estrichs.*

a) Würden wir die Hausmauern bis zur Firsthöhe verlängern, so würde ein rechtwinkliger Körper entstehen, der doppelt so gross als der Estrichkörper wäre.

Der Inhalt dieses rechtwinkligen Körpers wäre

$= \text{Estrischboden} \times \text{Firsthöhe}$
$= 20 \,.\, 12 \,.\, 4 \text{ m}^3 = 960 \text{ m}^3.$

Somit ist der Inhalt des Estrichkörpers

$= \tfrac{1}{2} \text{ Boden} \,.\, \text{Firsthöhe}$
$= \tfrac{1}{2} \,.\, 20 \,.\, 12 \,.\, 4 \text{ m}^3 = 480 \text{ m}^3.$

Zweite Erklärung.

b) Halbiere ein Kartonmodell des Estrichs, und lege die eine Hälfte so an die andere, dass je zwei anstossende Giebelflächen ein Rechteck bilden. In dieser Zusammenstellung bilden die beiden Estrichhälften ein rechtwinkliges Prisma. Wir wollen es senkrecht auf die Giebelfläche stellen; dann hat seine Grundfläche gleichen Inhalt wie die Giebelfläche, und seine Höhe ist die Firstkante. Sein Inhalt ist = Grundfläche $\times$ Höhe, somit

$$= \text{Giebelfläche} \times \text{Höhe}$$
$$= \frac{12 \,.\, 4}{2} \,.\, 20 \text{ m}^3 = 480 \text{ m}^3.$$

Der Estrichkörper kann also auch berechnet werden, indem man seine Giebelfläche und die Länge der Firstkante misst und die Masszahlen multipliziert.

Beschreibe das Kartonmodell in senkrechter Lage. Grund- und Deckfläche sind kongruente Dreiecke. Die Seitenflächen sind Rechtecke; die Seitenkanten stehen zur Grundfläche senkrecht. Wir nennen ihn deshalb wie den frühern Dachkörper ein senkrechtes dreiseitiges Prisma.

Sein Inhalt = Grundfläche × Höhe.

4) *Der Estrichraum werde vom Giebel weg in einer Länge von 4 m mit Getreide gefüllt. Wieviel m^3 können hineingelegt werden?* Denken wir uns diesen Teil des Estrichs auf den Giebel senkrecht aufgestellt, so ist er ein senkrechtes Prisma mit dem Giebel als Grundfläche und mit der Höhe von 4 m.

Inhalt = 6 . 4 . 4 m^3 = 96 m^3.

5) *Miss eine gleichschenklige Giebelmauer aus, beschreibe die Giebelfläche, und berechne ihr Volumen, sowie die Erstellungskosten à 15 Fr. per m^2.* Zweites Beispiel.

Grundkante = 12 m, Firsthöhe = 4 m, Mauerdicke = 40 cm.

Man denke sich wieder die Giebelmauer umgelegt, so dass die Giebelfläche wagerecht zu liegen kommt; dann kann man wieder die 2 Hälften so aneinander legen, dass sie ein rechtwinkliges Prisma bilden, dessen Grundfläche = der Giebelfläche, dessen Höhe = der Mauerdicke ist.

Somit Volumen der Mauer = Giebelfläche × Dicke,
= 6 . 4 . 0,4 m^3 = 9,6 m^3.

Erstellungskosten = 144 Fr.

Verallgemeinerung. Vergleiche die Merkmale und die Berechnungsart der Giebelflächen, die wir gezeichnet haben. Die Merkmale und die Berechnung der Prismen wollen wir später verallgemeinern.

Satz 15. Ein gleichschenkliges Dreieck hat zwei gleich lange Seiten, welche Schenkel heissen. Die dritte Seite heisst Grundlinie, die ihr gegenüberliegende Ecke Spitze und der senkrechte Abstand der Spitze von der Grundlinie Höhe des Dreiecks.

Satz 16. Für die Berechnung des gleichschenkligen Dreiecks gilt die Regel:

$$\textbf{Inhalt} = \textbf{halbe Grundlinie} \times \textbf{Höhe} = \frac{\textbf{Grundlinie} \times \textbf{Höhe}}{2} = \frac{\textbf{g. h.}}{2}$$

Übung.

Betrachte die Giebelmauer einer Kirche. Alle Kanten schneiden sich unter spitzen Winkeln. Diese Giebelfläche heisst spitzwinklig. Miss die Breite, und schätze die Höhe. Zeichne die Giebelfläche, und berechne sie. Wieviel m^3 Mauerwerk enthält der Giebel, wenn die Dicke der Mauer 50 cm beträgt?

III. Der Estrichraum mit ungleichseitigen Giebeln.

Es gibt auch Häuser, deren zwei Dachflächen nicht gleich breit sind und deshalb verschiedene Neigung haben.

1) *Besichtige den Estrich eines solchen Hauses, und bilde ihn nach.*

Beschreibung.

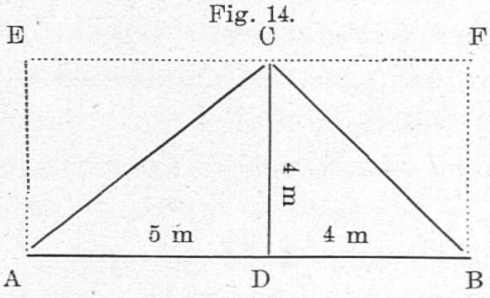
Wie liegt hier die Firstkante? Wie teilt die Stützsäule der Firstkante (oder eine Stange, die wir vertikal darunter halten) die Giebelfläche? Wie steht es mit der Länge und der Neigung der schrägen Kanten der Giebelfläche? Diese Giebelfläche heisst ein ungleichseitiges Dreieck.

Welche Masse musst du nehmen, um diese Giebelfläche A B C im verkleinerten Massstab zeichnen zu können?

Zeichnung der Giebelfläche.

Wir messen die Abschnitte A D und D B, welche die Stützsäule auf der Grundkante des Giebels macht, sowie die Länge der Stützsäule. A D = 5 m, D B = 4 m, Firsthöhe = 4 m.

Fig. 14.



1 : 200

Die Figur A B C heisst ein *ungleichseitiges Dreieck.* A B ist seine Grundlinie, C D seine Höhe, C seine Spitze; D heisst der Fusspunkt der Höhe. Die kürzere von den schrägen Seiten, B C, ist gegen die Grundlinie stärker geneigt als die längere. Beide bilden mit A B spitze Winkel. Die beiden Kanten A C und C B bilden einen stumpfen Winkel. Die Giebelfläche A B C heisst deshalb eine stumpfwinklige Giebelfläche.

2) *Wieviel m² misst die Giebelfläche, wieviel cm² das Dreieck A B C?*

Wir denken uns das Dreieck A B C zum Rechteck A B F E ergänzt, indem wir links ein gleiches Dreieck wie A D C, rechts ein gleiches wie D B C anlegen.

Inhalt der Giebelfläche.

Das Dreieck A B C ist die Hälfte dieses Rechtecks.

Inhalt des Rechtecks $= A\,B \,.\, C\,D = 4^1/_2 \,.\, 2 \text{ cm}^2$

„ „ Dreiecks $A\,B\,C = \frac{1}{2} A\,B \,.\, C\,D = \frac{1}{2} \,.\, 4^1/_2 \,.\, 2 \text{ cm}^2 =$

$$4^1/_2 \text{ cm}^2 = \frac{\textit{Grundlinie} \times \textit{Höhe}}{2}$$

Inhalt der Giebelfläche $= \frac{1}{2} \cdot 9 \cdot 4\ m^2 = 18\ m^2$.

Man berechnet den Inhalt des Dreiecks A B C, indem man seine Grundlinie und ihren Abstand von der Spitze, die Höhe, misst, die 2 Masszahlen multipliziert und das Produkt durch 2 dividiert.

3) *Berechne den Inhalt des Estrichkörpers.* (Länge = 12 m).

Inhalt des Estrichkörpers.

a) Wir denken uns wieder die Mauer bis zur Firsthöhe fortgesetzt und ein wagerechtes Dach gelegt; dann wäre der Inhalt dieses Körpers = Boden $\times$ Firsthöhe $= 9 \cdot 12 \cdot 4\ m^3 = 432\ m^3$. Dieser Raum würde auch ausgefüllt, wenn man zu den beiden Estrichteilen links und rechts von der Stützsäule zwei ihnen gleiche Körper anlegen würde. Der Inhalt des Estrichraums ist daher die Hälfte vom Inhalt des genannten rechtwinkligen Prismas, somit Inhalt des Estrichraums

$$= \frac{\text{Boden} \times \text{Firsthöhe}}{2} = \frac{9 \cdot 12 \cdot 4}{2} = 216\ m^3.$$

Zweite Erklärung.

b) Wir wollen uns auch diesen Körper aufrecht gestellt denken, so dass die Giebelfläche seine Grundfläche, die Firstkante seine Höhe wird. Seine 3 Seitenflächen sind Rechtecke, seine Seitenkanten stehen zur Grundfläche senkrecht und geben uns den Abstand von Grund- und Deckfläche an. In dieser Stellung heisst der Körper dreiseitiges senkrechtes Prima.

Wir denken uns diesen Körper zum rechtwinkligen Prisma von doppeltem Inhalt ergänzt. Dann ist der Inhalt des rechtwinkligen Prismas = doppelte Giebelfläche $\times$ Firstkante.

Inhalt des dreiseitigen Prismas

$= \text{Giebelfläche} \times \text{Firstkante} = 18 \cdot 12 = 216\ m^3$

$=$ *Grundfläche* $\times$ *Höhe.*

Auch dieser Körper soll in Karton nachgebildet werden.

4) *Miss eine ungleichseitige Giebelmauer aus, zeichne sie, und berechne sie.*

Verallgemeinerung. 1) Wie wurde das ungleichseitige Dreieck in diesen Fällen berechnet? Wir konnten es als die Hälfte eines Rechtecks über der gleichen Grundlinie von gleicher Höhe auffassen. Um es zu berechnen, haben wir seine Grundlinie und seine Höhe (d. i. der Abstand der Grundlinie von der Spitze) gemessen, diese Masszahlen multipliziert und das Produkt durch 2 dividiert. Ebenso sind wir bei gleichschenkligen und rechtwinkligen Dreiecken verfahren.

Satz 17. Für die Berechnung eines Dreiecks haben wir daher die Regel:

$$\textbf{Inhalt} = \frac{\textbf{Grundlinie} \times \textbf{Höhe}}{2}$$

2) Vergleiche die Modelle der 3 Dachkörper, die wir berechnet haben, in aufrechter Stellung. Sie haben ein Dreieck als Grundfläche und ein kongruentes Dreieck als Deckfläche, ferner drei Rechtecke als Seitenflächen; ihre Seitenkanten stehen zur Grundfläche senkrecht und geben die Höhe an; wir haben diese Körper senkrechte dreiseitige Prismen genannt. Jeder dieser Körper konnte nach der Regel: Inhalt = Grundfläche $\times$ Höhe berechnet werden.

Satz 18. Ein senkrechtes dreiseitiges Prisma ist begrenzt von 2 kongruenten Dreiecken als Grund- und Deckfläche, von 3 Rechtecken als Seitenflächen. Seine Seitenkanten stehen zur Grundfläche senkrecht und geben seine Höhe an.

Für die Berechnung seines Inhalts gilt die Regel: Inhalt = Grundfläche $\times$ Höhe.

Übungen.

1) Beschreibe einen Holz- oder Eisenkeil. Stelle ihn so, dass ein Dreieck seine Grundfläche ist. Was für ein Körper ist der Keil? Mit welchen Dachkörpern hat er gleiche Form? Miss seine Ausdehnungen, und bestimme sein Volumen, sowie mit einer Wage sein Gewicht. Berechne sein spezifisches Gewicht.

Z. B. Der Keilkopf sei ein Quadrat von 10 cm Seite; eine Dreieckshöhe messe 25 cm.

Dreiseitige Grundfläche $= \frac{10 \,.\, 25}{2}$ cm² = 125 cm².

Abstand der beiden Dreiecke = 10 cm.

Volumen = 1,25 dm³.

Das Gewicht beträgt = 8,75 kg.

1,25 dm³ = 8,75 kg.

1 dm³ = 8,75 kg : 1,25 = 7 kg.

Spezifisches Gewicht = 7.

2) Betrachte eine Rampe von der Form eines senkrechten dreiseitigen Prismas, die sich etwa vor einem Heustall befindet. Beschreibe sie, miss ihre Ausdehnungen, und berechne die Anzahl m³ Mauerwerk, die sie enthält, sowie die Erstellungskosten à 10 Fr. pro m³.

Z. B. Wagerechte Kathete eines rechtwinkligen Dreiecks = 3 m 60 cm, senkrechte Kathete = 1 m 10 cm.

Breite der Rampe = 3 m 80 cm. Zeichne auch das Netz.

3) Viele Schubkarren haben die Form eines umgelegten Giebeldaches. Der Trog eines solchen Karrens sei 60 cm lang, 40 cm breit und 27 cm tief.

Zeichne sein Netz. Wieviel dm^3 hält er, wenn er eben voll gemacht wird? Mit einem solchen Karren werde die Erde des Fundaments eines Kellers, der 4 m lang, 3,2 m breit und 2,2 m tief ist, weggeführt. Wie oft muss man fahren, wenn der Trog immer eben voll gemacht wird?

C. Das vierseitige senkrechte Prisma mit schiefwinkliger Grundfläche.

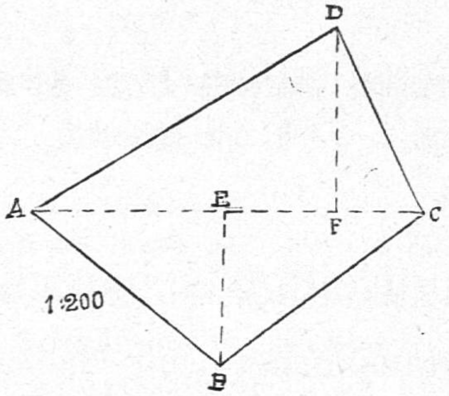
Das schiefwinklige Zimmer.

1) In alten Häusern trifft man vielfach Zimmer an, die nicht rechtwinklig sind.

a) Besichtige ein schiefwinkliges Zimmer. Wir nennen diese Bodenfläche ein schiefwinkliges Viereck. *Wie könnte man diesen Boden zeichnen und berechnen?* Wir spannen eine Schnur von einer Ecke zur gegenüberliegenden; diese zerlegt den Boden in zwei Dreiecke, für welche sie die gemeinschaftliche Grundlinie ist. Die Höhen der beiden Dreiecke lassen sich durch zwei Messlatten markieren und messen. Miss auch die Abschnitte, die jede Höhe auf der Grundlinie macht. **Der Boden des schiefwinkligen Zimmers.**

A C = 8 m, A E = 4 m, E F = 2,2 m, F C = 1,8 m, B E = 3,2 m, D F = 3,9 m.

Fig. 15.



Wir zeichnen zuerst die Grundlinie A C, messen auf ihr die Strecken A E und E F ab und ziehen von diesen 2 Fusspunkten aus die Höhen.

Die Verbindungslinie A C heisst eine Diagonale des Vierecks.

Inhalt des Zimmerbodens.

b) *Berechne den Flächeninhalt dieses Zimmerbodens.*

$$
\begin{array}{lll}
ABC = \frac{1}{2}\,AC\,.\,BE = \frac{1}{2}\,.\,8\,.\,3{,}2\ m^2 & = 12{,}8\ m^2 \\
ACD = \frac{1}{2}\,AC\,.\,FD = \frac{1}{2}\,.\,8\,.\,3{,}9\ \ " & = 15{,}6\ \ " \\
\hline
\qquad\qquad\text{Boden} & = 28{,}4\ m^2.
\end{array}
$$

c) *Beschreibe den Zimmerkörper.* Wir nennen ihn ein vierseitiges senkrechtes Prisma mit schiefwinkliger Grundfläche. *Berechne den Rauminhalt des Zimmers,* wenn dessen Höhe 3 m misst. Über dem Dreieck A B C als Grundfläche steht ein dreiseitiges Prisma, dessen Höhe die Zimmerhöhe ist, das gleiche über A C D.

Inhalt des Zimmerkörpers.

$$
\begin{array}{ll}
\text{Prisma über } ABC = \text{Grundfläche} \times \text{Höhe} & \\
\qquad = \triangle\,ABC\,.\,h. = 12{,}8\,.\,3\ m^3 & = 38{,}4\ m^3. \\
\quad "\quad "\quad ACD = \text{Grundfläche} \times \text{Höhe} & \\
\qquad = \triangle\,ADC\,.\,h. = 15{,}6\,.\,3\ \ " & = 46{,}8\ \ " \\
\hline
\qquad\text{Zimmerkörper} & = 85{,}2\ \ "
\end{array}
$$

Wie könnte man die Rechnung bequemer gestalten?

Statt die Dreiecke A B C und A D C einzeln mit der Höhe zu multiplizieren und die Produkte zu addieren, kann man auch zuerst die Inhalte der Dreiecke zusammenzählen, was den Inhalt der ganzen Grundfläche gibt, und dann diese mit der Masszahl der Höhe multiplizieren.

$$
\begin{aligned}
\text{Zimmmerkörper} = \text{Grundfläche} \times \text{Höhe} &= 28{,}4\,.\,3\ m^3 \\
&= 85{,}2\ m^3.
\end{aligned}
$$

2) Behandle noch ein zweites Beispiel, und stelle das Gemeinsame fest.

Verallgemeinerung. **Satz 19. Ein schiefwinkliges Viereck kann berechnet werden, indem man es durch eine Diagonale in zwei Dreiecke zerlegt, diese ausmisst und ihren Inhalt addiert.**

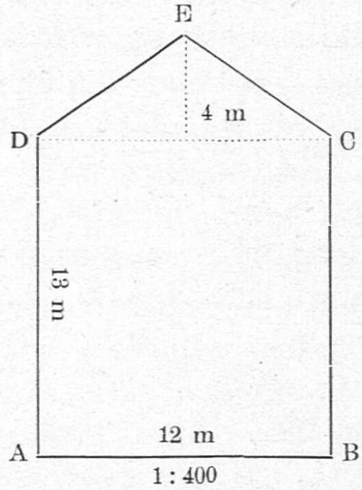
Satz 20. Ein vierseitiges senkrechtes Prisma mit schiefwinkliger Grundfläche wird auch nach der Regel J. = G. . H. berechnet.

D. Das fünfseitige senkrechte Prisma.

Der Hauskörper (mit Giebeldach).

1) Bei Steinhäusern bilden die vordere Hausmauer und die Giebelmauer gewöhnlich eine einzige ununterbrochene Fläche. *Beschreibe und zeichne eine solche Hausfassade.* Sie hat 5 Seiten und 5 Ecken; wir nennen diese Figur ein Fünfeck. Zeichne es aus der Breite des Hauses (12 m), aus der Höhe der rechteckigen Mauer (13 m) und aus der Giebelhöhe (4 m). (Fig. 16.)

Fig. 16.



Das Fünfeck A B C E D setzt sich aus dem Rechteck A B C D und aus dem Dreieck D C E zusammen.

Rechteck A B C D $= 12 \,.\, 13$ m² $= 156$ m² Berechnung der vordern Fassade.

Dreieck D C E $= \dfrac{12 \,.\, 4}{2}$ „ $= 24$ „

Fünfeck $= 180$ m².

Kosten für den Anstrich $= 180 \,.\, 90$ Rp. $= 162$ Fr.

2) *Zeichne das Netz des ganzen Hauses, und berechne es auf die einfachste Art. Verfertige das Modell.* Netz.

3) *Berechne das Volumen des ganzen Hauskörpers und die Baukosten à 20 Fr. pro m³.*

a) Erste Art: Hauskörper ohne Estrich $= 20 \,.\, 12 \,.\, 13$ m³ $= 3120$ m³. Volumen des Hauskörpers.

Estrich $= \dfrac{20 \,.\, 12 \,.\, 4}{2}$ „ $= 480$ „

Ganzer Hauskörper $= 3600$ m³.

Baukosten $= 3600 \,.\, 20$ Fr. $= 72000$ Fr.

b) Zweite Art: wir denken uns das Haus auf die vordere Fläche gestellt. Stelle das Modell so. Beschreibe es in dieser Stellung. Es hat als Grund- und Deckfläche zwei kongruente Fünfecke und ist ferner begrenzt von 5 Rechtecken als Seitenflächen, die sich in 5 Kanten schneiden, welche senkrecht auf der Grundfläche stehen. Wir können diesen Körper ein senkrechtes fünfseitiges

Prisma nennen. Er setzt sich aus einem rechtwinkligen und aus einem dreiseitigen Prisma zusammen, welche gleich hoch sind.

Wie berechnen wir das Volumen? Multiplizieren wir die Höhe mit dem rechtwinkligen Teil der Grundfläche, so erhalten wir den Inhalt des rechtwinkligen Prismas, und multiplizieren wir die Höhe mit dem dreiseitigen Teil der Grundfläche, so erhalten wir den Inhalt des dreiseitigen Prismas.

$$\begin{aligned} &\text{Rechtw. Prisma} &&= 12 \;.\; 13 \;.\; 20 \text{ m}^3 &&= 3120 \text{ m}^3 \\ &\text{Dreiseitiges Prisma} &&= \frac{12 \;.\; 4}{2} \;.\; 20 \;\text{„} &&= \underline{\;480 \;\text{„}\;} \\ & && && \;\;\; 3600 \text{ m}^3. \end{aligned}$$

Indem wir die Höhe mit der ganzen Grundfläche (180 m²) multiplizieren, werden wir den Inhalt des fünfseitigen Prismas erhalten.

$$G. \;.\; H. = 180 \;.\; 20 \; m^3 = 3600 \; m^3.$$

Dieses senkrechte fünfseitige Prisma kann daher nach der gleichen Regel (J. = G. . H.) berechnet werden wie die bisher behandelten Prismen.

Führe noch ein zweites Beispiel durch, und vergleiche es mit Beispiel 1.

Satz 21. Ein fünfseitiges senkrechtes Prisma ist begrenzt von 2 kongruenten Fünfecken als Grund- und Deckfläche und von 5 Rechtecken als Seitenflächen. Es wird wie das drei- und vierseitige Prisma nach der Regel J. = G. . H. berechnet.

E. Der Cylinder (die Walze). Der Kreis.

I. Beschreibung und Konstruktion des Cylinders.

1) Bei einer Durchmusterung unseres Hauses treffen wir zahlreiche Gegenstände an, die eine runde Form haben. Wir wollen von diesen Formen diejenige betrachten, die uns als die einfachste erscheint.

Als erstes Beispiel wählen wir die vorliegende cylinderförmige Schachtel. Welche Verwendung findet sie?

2) *Wir wollen lernen, wie eine solche Schachtel zu verfertigen ist.*

a) Zunächst sollt ihr eine Beschreibung davon geben. Grund- und Deckfläche sind 2 runde Figuren, die keine Ecken zeigen. Ihre Umfänge sind krumme Linien, die ganz regelmässig

Der Kreis.

Peripherie.

verlaufen und in sich selbst zurückkehren. Diese Flächen wollen wir Kreisflächen oder kurzweg Kreise nennen. Den Umfang eines dieser Kreise nennen wir seine *Peripherie.*

Wir wollen die Merkmale dieser Fläche genauer kennen lernen.

Lege die Schachtel auf den Tisch, und miss mit einem Massstabe die grösste Ausdehnung des Kreises in der Längsrichtung des Zimmers, und markiere diese Linie mit Bleistift. Miss auch die grösste Ausdehnung in der Breitenrichtung des Zimmers, und markiere auch diese Linie. Wie sind diese Ausdehnungen? Fasse den Schnittpunkt der 2 Linien ins Auge; ziehe durch ihn alle möglichen Linien bis zur Peripherie, und miss diese. Alle sind gleich lang (= 1 dm) und haben in diesem Punkte ihre Mitte. Dieser Punkt heisst der *Mittelpunkt* oder das Zentrum des Kreises, und jene Linien heissen *Durchmesser* oder *Diameter.* Die halben Durchmesser, d. h. die Strecken vom Mittelpunkt bis zur Peripherie, heissen *Halbmesser* oder *Radien.* Miss einige Radien. Alle Radien haben gleiche Länge (= 5 cm).

Mittelpunkt.

Durchmesser.

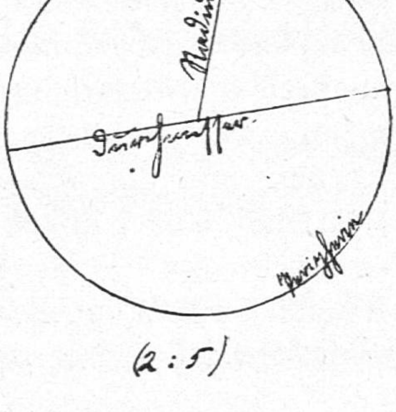
Radius.

Konstruktion des Kreises.

b) Wie könnten wir an der Wandtafel diesen Kreis zeichnen? Wir nehmen eine Schnur von der Länge des Radius, halten einen Endpunkt fest und die Schnur gespannt und drehen sie herum; dann wird eine am andern Endpunkt befestigte Kreide die Kreislinie zeichnen. Markiere die anfängliche Lage der Schnur durch eine Strecke, und gib an, wie durch Drehung dieser Strecke der Kreis entsteht.

Wegen der Wichtigkeit der Kreislinie hat man ein Instrument verfertigt, um sie zu konstruieren, den Zirkel. Während ein Eisenstift fest bleibt, dreht sich ein Bleistift oder eine Kreide so, dass die Entfernung vom Eisenstift immer dieselbe bleibt.

Fig. 17.



(2:5)

Satz 22. Dreht sich eine Strecke O A so, dass ein Endpunkt O fest bleibt, so beschreibt der andere einen Kreis. Jeder Punkt der Kreislinie ist vom Mittelpunkte gleich weit entfernt.

c) Die Seitenfläche unserer Cylinderschachtel nennen wir ihre Mantelfläche. Sie ist aus unzählig vielen geraden Seitenlinien zusammengesetzt, welche die Grundfläche mit der Deckfläche verbinden. Diese Mantelfläche ist eine runde Fläche. Wie unterscheidet sie sich von einer ebenen Fläche des Prismas, z. B. von einer Wandfläche unseres Zimmers? Auf dieser ebenen Wandfläche kann man einen geraden Stab nach allen Richtungen auflegen, ohne dass Lücken entstehen. Die Wandfläche ist nach allen Richtungen gerade. An die Mantelfläche der Cylinderschachtel lässt sich der Stab nur anlegen, wenn man ihn senkrecht zur Grundfläche hält. Diese Mantelfläche ist nur in senkrechter Richtung gerade.

Beschreibung der Mantelfläche.

Die geraden Linien der Mantelfläche heissen Seitenlinien; sie sind alle gleich, was zur Folge hat, dass Grund- und Deckfläche parallel sind; jede gibt den Abstand von Grund- und Deckfläche an, welchen man die Höhe der Schachtel nennt.

d) Nach dieser Beschreibung wollen wir zur Hauptaufgabe übergehen, zur Besprechung der Konstruktion dieser Schachtel.

Grund- und Deckfläche sind leicht zu zeichnen und auszuschneiden. Wie konstruiert man die Mantelfläche?

Die Abwicklung des Mantels.

Da wollen wir daran denken, dass jeder von uns oft Flächen gebildet hat, die annähernd die Form eines solchen Cylindermantels hatten, nämlich beim Aufrollen eines rechteckigen Kartons, Papiers, Tuchs, einer Tapete, des Tischtuchs etc. — Rollet euer Heft zusammen, und ihr bekommt einen solchen Cylindermantel. Wenn ihr umgekehrt ein aufgerolltes Heft wieder abrollt, so erhält ihr wieder ein Rechteck.

Schneiden wir unseren Schachtelmantel nach einer Seitenlinie auf und wickeln ihn ab, so bekommen wir ein Rechteck. Der Umfang des Grundkreises wird zur Grundlinie, die Seitenlinie des Mantels zur Höhe des Rechtecks.

Nun können wir das Netz der Schachtel zeichnen. Wir messen mit einem Messband den Umfang des Cylinders und haben die Länge des Rechtecks. Seine Höhe ist gleich der Cylinderhöhe. Der Radius misst 5 cm, der Durchmesser 1 dm, der Umfang 31,4 cm, die Schachtelhöhe = 2 dm.

Untersuche, wie oft der Durchmesser der Grundfläche im abgewickelten Umfang enthalten ist? 3,14 mal. Wie oft der Radius? 6,28 mal.

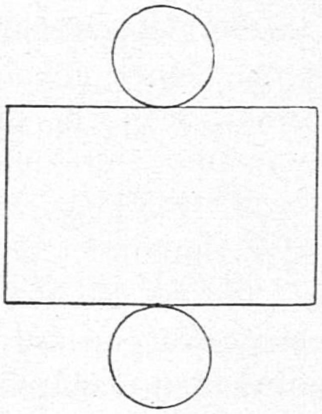


Fig. 18. Massstab 1 : 10.

Schneiden wir aus Karton ein Rechteck von 31,4 cm Länge und 2 dm Höhe aus und rollen es auf, so erhalten wir den Mantel der Schachtel, die wir mit 2 Kreisen zuschliessen können, deren Durchmesser 1 dm messen. Jeder Durchmesser ist der 3,14. Teil von der Länge des Rechtecks.

3) Als zweites Beispiel wollen wir eine runde Zündhölzchenschachtel wählen. Prüfe, ob Grund- und Deckfläche genaue Kreise sind. Trenne Grund- und Deckfläche ab, schneide die Schachtel nach einer Seitenlinie auf, und wickle die Mantelfläche ab. Der Umfang der Schachtel misst 15,7 cm, ihr Durchmesser 5 cm. Der Durchmesser ist also 15,7 : 5 = 3,14 mal im Umfange enthalten. Mit einem Kartonrechteck von 15,7 cm Länge können wir einen Cylinder von 5 cm Durchmesser bilden.

Verallgemeinerung. Stelle die gemeinsamen Merkmale dieser beiden Cylinder zusammen, und vergleiche ihre Konstruktion! Es ergibt sich:

Satz 23. Ein Cylinder ist begrenzt von 2 gleichen parallelen Kreisen als Grund- und Deckfläche und von einem runden Mantel als Seitenfläche, welcher die beiden Kreise in senkrechter Richtung verbindet. Der Abstand von Grund- und Deckfläche heisst Höhe des Cylinders.

Satz 24. Wickelt man den Mantel eines Cylinders ab, so erhält man ein Rechteck, dessen Grundlinie gleich dem Umfang des Cylinders, dessen Höhe gleich der Cylinderhöhe ist.

Mit einem Rechteck können wir den Mantel eines Cylinders von gleicher Höhe bilden, dessen Durchmesser der 3,14. Teil der Grundlinie des Rechtecks ist.

Satz 25. Der Umfang eines Kreises ist ungefähr 3,14 ($3^1/_7$) mal so lang wie sein Durchmesser. Der Durchmesser eines Kreises ist der 3,14. Teil vom Umfang.

Bemerkung. Es gibt Cylinderkörper, die viel genauer gearbeitet sind als die beiden Schachteln, die wir betrachtet und gemessen haben. Misst man einen genauen Cylinderkörper von 1 m Durchmesser, so erhält man für die Länge des Umfangs 3,141 m. Ein Cylinder von 10 m Durchmesser hat einen Umfang von 31,416 m u. s. f.; sein Durchmesser ist also im Umfange 3,1416 mal enthalten, oder Umfang : Durchmesser = 3,1416. Je grösser der Cylinder ist, um so leichter ist es, das Verhältnis des Umfangs zum Durchmesser genau zu bekommen. Man bezeichnet diese Zahl mit dem (griechischen) Buchstaben π und sagt: der Umfang sei = π mal den Durchmesser. π wäre also ungefähr 3,14, oder $3^1/_7$, genauer 3,1416. Der Durchmesser wird mit d. und der Radius mit r., der Umfang mit u. bezeichnet. Die Bezeichnung: Kreisumfang = Kreisdurchmesser . 3,14 wird kurz geschrieben: u. = dπ = 2 rπ (weil d. = 2 r.)

Der genauere Wert von π.

Beim Kreis der ersten Schachtel wäre

u. = dπ = 10 . 3,14 = 31,4 cm,

genauer u. = dπ = 10 . 3,1416 = 31,416 cm.

Beim Kreis der zweiten Schachtel

u. = dπ = 5 . 3,14 = 15,7 cm,

genauer u. = dπ = 5 . 3,1416 = 15,708 cm.

Übungen.

1) Ein Rechteck aus Blech, dessen Grundlinie 50 cm und dessen Höhe 30 cm misst, soll zu einem Cylinder zusammengerollt werden. Wie gross ist der Radius der Grundfläche zu wählen, damit der Mantel genau passe?

Die Grundlinie des Rechtecks wird zum Umfang der Grundfläche, hat also die 3,14(π)fache Länge des Durchmessers.

Umgekehrt ist der Durchmesser 50 cm : 3,14 = 15,9 cm

und der Radius ist = 7,9 cm.

Bemerkung. Die Beziehung: Durchmesser = Umfang : 3,1416, wird kurz geschrieben: d. = u. : π

Wie hoch wird der Cylinder?

2) Welchen Cylinder könnte man mit einem rechteckigen Lederstück einschliessen, dessen Länge = 2,2 m und dessen Höhe 1,2 m misst.

$\pi = 3^1/_7$ d. = u. : π = 22 dm : $3^1/_7$ = 7 dm

r. = d. : 2 = 35 cm.

3) Miss die Umfänge und die Durchmesser von cylindrischen Gefässen und Gegenständen, und berechne die Verhältniszahl.

4) Man soll einen Reif von 1 m Durchmesser herstellen. Wie lang muss der Eisenstreifen gewählt werden?

5) Welchen Radius bekommt ein Reif, der mit einem Blechstreifen von 3 m Länge gebildet wird?

6) Welche Dimensionen hätte ein Cylinder, dessen Mantelfläche 1) gleich der Tischfläche, 2) gleich der Zimmer-Bodenfläche, 3) gleich der Wandfläche, 4) gleich den vier Wandflächen ist?

7) Ein Wagenrad hat einen Radius von 40 cm. Welchen Weg legt der Wagen zurück, während sich das Rad 10 mal herumdreht?

8) Zeichne im verkleinerten Massstab den Kreis, den ein Äquatorbewohner bei einer Umdrehung beschreibt. Ihr wisst, dass 1 m der 40000000ste Teil dieses Umfangs ist; wieviel km misst daher der Erdradius? Berechne den Weg in 1 Stunde.

9) Der Mond ist 50000 Meilen (à $7^1/_2$ km) von der Erde entfernt und umkreist sie in $27^1/_4$ Tagen. Wie gross ist seine Bahn? Berechne den Weg in 1 Stunde.

10) Die Erde ist um 20000000 Meilen von der Sonne entfernt und dreht sich in $365^1/_4$ Tagen um sie. Welchen Weg legt die Erde in 1 Stunde zurück?

11) Vergleiche die Geschwindigkeiten des Äquatorbewohners, des Mondes, der Erde mit derjenigen eines Fussgängers, der Post, eines Schnellzuges.

II. Die Kreisteilung.

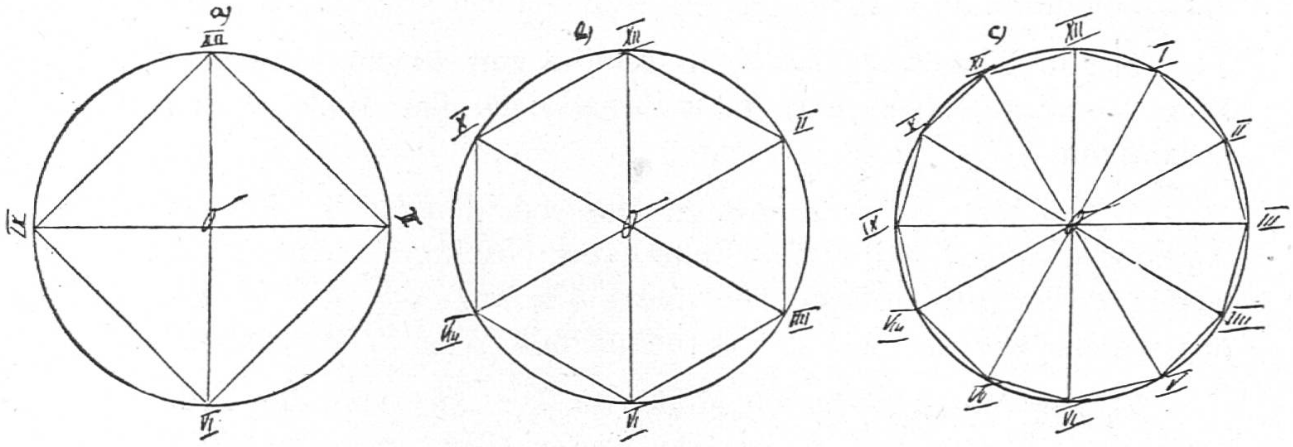
1) Das Zifferblatt der Uhr.

Beschreibe und zeichne das Zifferblatt.

Wir zeichnen den äussersten Kreis des Zifferblatts und bezeichnen den obersten Punkt mit XII. VI ist dann ihm gegenüber. XII und VI liegen auf einem Durchmesser. III und IX liegen auf dem Durchmesser, der zu diesen senkrecht steht. Diese 2 Durchmesser teilen die Kreisfläche und die Kreislinie in 4 gleiche Teile ein. Vergleiche auf dem Zifferblatt den Abstand der Punkte XII und II mit dem Kreisradius; er ist ihm gleich. Das Zifferblatt.

Somit erhalten wir die Punkte II, IV, VIII, X, in dem wir von XII aus mit Hilfe des Zirkels den Radius in die Kreislinie eintragen. Wir sehen, dass der Radius sich 6 mal eintragen lässt. Indem wir den Radius von III aus 6 mal eintragen, bekommen wir die Teilpunkte V, VII, IX, XI, I. In wieviel gleiche Teile ist der Kreis auf diese Art eingeteilt worden? Wie ist er in 4 gleiche Teile, wie in 6, wie in 12 gleiche Teile eingeteilt worden?

Fig. 19.



Teile nun durch Probieren jedes Intervall in 5 gleiche Teile ein; dann ist der ganze Kreis in 60 gleiche Teile eingeteilt.

2) a) Zeichne den Kreis des Zifferblattes 3 mal neben- Die Sehne. einander. Teile den 1. in 4, den 2. in 6, den 3. in 12 gleiche Teile ein, und verbinde die benachbarten, sowie je zwei gegenüberliegende Teilpunkte. Dann entsteht im ersten Kreis ein Quadrat, das dem Kreise eingeschrieben heisst, im 2. ein regelmässiges Sechseck, im 3. ein regelmässiges Zwölfeck, die auch dem Kreise eingeschrieben heissen. Eine Seite einer dieser Figuren heisst *Sehne* des Kreises; sie verbindet 2 Peripherie- Das Segment. punkte des Kreises und schneidet von ihm ein Stück ab, das *Kreisabschnitt* oder *Kreissegment* heisst. Es ist begrenzt von der Sehne und vom zugehörigen Kreisbogen. In welchem Kreis sind die Segmente am grössten?

b) Wie werden das Quadrat, das Sechseck, das Zwölfeck durch die Durchmesser eingeteilt? Das Quadrat in 4 gleichschenklige rechtwinklige Dreiecke, das Sechseck in 6 gleichseitige, das Zwölfeck in 6 gleichschenklige Dreiecke. Schneide in jedem Kreis ein solches Dreieck aus, und bringe es mit den andern zur Deckung 1) durch Drehung, 2) durch Umlegen.

c) *Wie werden die Kreisflächen durch diese Durchmesser eingeteilt?* Würden wir längs dieser Durchmesser Schnitte führen, so würde die erste Kreisfläche in 4, die zweite in 6, die dritte in 12 gleiche Teile zerlegt. Ein solcher Teil heisst *Kreisausschnitt* oder *Kreissektor.* Wovon wird ein solcher Sektor begrenzt? Von 2 Radien und einem Bogen; wie setzt sich ein solcher Sektor zusammen? Aus dem gleichschenkligen Dreieck und aus dem Segment. Der Sektor.

3) Zeichne den Kreis eines grössern oder kleinern Zifferblattes dreimal nebeneinander; teile ihn auf gleiche Weise in 4, 6, 12 gleiche Teile ein; zeichne das eingeschriebene Quadrat, das Sechseck und das Zwölfeck. Beschreibe die Segmente und Sektoren. Zweites Beispiel.

Verallgemeinerung. Wie konnten in beiden Fällen die Kreise eingeteilt werden? Was für Linien hat man Sehnen, was für Flächen Segmente, Sektoren genannt?

Satz 26. Zwei senkrechte Durchmesser teilen einen Kreis in 4 gleiche Teile ein. Der Radius lässt sich genau 6 mal als Sehne in die Peripherie eintragen. Um einen Kreis in 12 gleiche Teile einzuteilen, zieht man 2 senkrechte Durchmesser, und trägt mit dem Zirkel von allen 4 Endpunkten nach beiden Seiten den Radius ein.

Satz 27. Die Verbindungslinie zweier Kreispunkte heisst Sehne. Das Kreisstück, das von einer Sehne abgeschnitten wird, heisst Kreisabschnitt oder Segment. Es ist begrenzt von der Sehne und dem Bogen. Das Kreisstück, das von 2 Radien herausgeschnitten wird, heisst Kreisausschnitt oder Kreissektor. Dieser ist von 2 Radien und einem Bogen begrenzt.

Satz 28. Verbindet man die Teilpunkte eines in 4 gleiche Teile geteilten Kreises, so entsteht ein Quadrat, das dem Kreise eingeschrieben heisst. Es wird durch die Verbindungslinien gegenüberliegender Endpunkte in 4 kongruente rechtwinklige, gleichschenklige Dreiecke zerlegt.

Verbindet man die Teilpunkte eines in 6 gleiche Teile geteilten Kreises, so entsteht ein regelmässiges Sechseck, das dem Kreise eingeschrieben heisst. Es wird durch die Verbindungslinie je zweier einander gegenüberliegenden Eckpunkte in 6 kongruente gleichseitige Dreiecke zerlegt u. s. f.

III. Berechnung des Inhalts des regelmässigen Sechsecks, der sechsseitigen Säule, des Kreises und des Cylinders.

1. Berechnung des regelmässigen Sechsecks und des sechsseitigen Prismas.

Aufgabe 1. *Wieviel Liter Wasser hält ein Brunnen* (St. Martinsbrunnen in Chur), *dessen Umfang ein regelmässiges Sechseck von 2,3 m Länge ist, und dessen Höhe 0,9 m misst?*

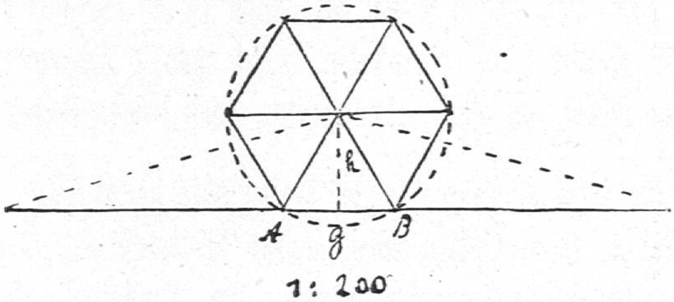
Beschreibe den Brunnen. Der Form nach heisst er eine *gerade sechsseitige Säule.*

a) Wir wollen zunächst die Grundfläche zeichnen und berechnen. Die 6 Eckpunkte liegen auf einem Kreis, dessen Radius gleich der Seite des Sechsecks ist. In diesen Kreis haben wir den Radius sechsmal als Sehne einzutragen.

Wie kann man dieses Sechseck berechnen?

Berechnung der Grundfläche.

Fig. 20.



Berechnung des Sechsecks.

Bezeichnen wir die Grundlinie eines Dreiecks mit g, seine Höhe mit h (2 m), so ist sein Inhalt

$$= \frac{g \cdot h}{2} = \frac{2{,}3 \cdot 2}{2} \text{ m}^2$$

Inhalts des Sechsecks

$$= 6 \cdot \frac{g \cdot h}{2} = \frac{6 \cdot g \cdot h}{2} = \frac{6 \cdot 2{,}3 \cdot 2}{2} = 13{,}8 \text{ m}^2.$$

Wir können das ausrechnen, indem wir zuerst sechsmal die Grundlinie nehmen, das Ergebnis mit der Höhe multiplizieren und durch 2 dividieren. 6 . g. ist aber der Umfang des Sechsecks, somit:

$$\text{Inhalt des Sechsecks} = \frac{\text{Umfang} \times \text{Dreieckshöhe}}{2} = \frac{u \cdot h}{2}$$

Einen solchen Inhalt hat aber auch ein Dreieck, dessen Grundlinie so lang ist wie der Umfang des Sechsecks, und dessen Höhe gleich der Dreieckshöhe h ist.

Zeichne dieses Dreieck (Fig. 20).

$$\text{Inhalt} = \frac{6\ g\ .\ h}{2} = \frac{13{,}8\ .\ 2}{2}\ m^2 = 13{,}8\ m^2.$$

Dieses Dreieck ist gleich einem Rechtek von gleicher Höhe und halber Grundlinie.

Unser Sechseck ist also inhaltsgleich einem Dreiecke, dessen Grundlinie gleich dem Umfang des Sechsecks, dessen Höhe gleich der Höhe eines seiner Dreiecke ist. Es ist auch inhaltsgleich einem Rechtecke, dessen Grundlinie gleich dem halben Umfange des Sechsecks, dessen Höhe gleich der Höhe eines seiner Dreiecke ist.

b) Der Brunnenkörper ist zusammengesetzt aus 6 dreiseitigen Prismen. Inhalt des Brunnens.

Der Inhalt des Prismas über A B O ist = $\triangle$ A B O . Höhe $= \frac{2{,}3\ .\ 2}{2}\ .\ 0{,}9\ m^3$.

Der Inhalt des Brunnens = 6 . $\triangle$ A B O . Höhe = Sechseck $\times$ Höhe des Brunnens = $13{,}8\ .\ 0{,}9\ m^3 = 12{,}42\ m^3$.

Der Brunnen hält also 12420 Liter Wasser.

Zeichne das Netz des Brunnens, und konstruiere ihn aus Karton.

Aufgabe 2. *Miss eine sechsseitige Säule aus, zeichne und berechne sie.*

Wie sind die beiden Sechsecke und die 2 sechsseitigen Prismen berechnet worden? Gib die allgemeine Regel an.

2. Berechnung des Kreises.

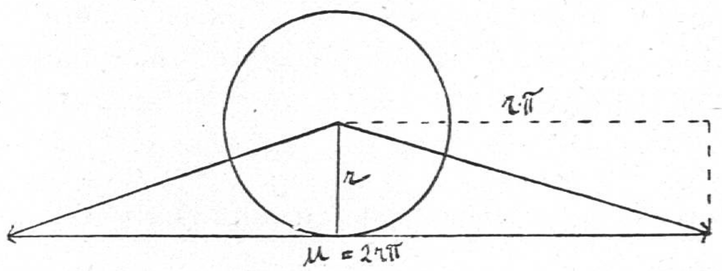
Nun wollen wir zeigen, wie der dem Brunnen umbeschriebene Kreis berechnet wird. Inhalt des Kreises.

Zeichne den Kreis, in welchen die Grundfläche des Brunnens eingezeichnet wurde, nochmals; teile ihn in 12 gleiche Teile ein; berechne auf gleiche Weise wie das Sechseck auch das Zwölfeck, und zeige, dass es gleichen Inhalt hat wie ein Dreieck, dessen Grundlinie gleich dem Umfange des Zwölfecks, dessen Höhe gleich der Höhe eines Dreiecks des Zwölfecks ist.

Wie würde ein 24-Eck, ein 48-Eck u. s. w. berechnet? Wie der Kreis? Wir können uns den Kreis in unzählig viele gleiche Teile eingeteilt denken, die als Höhe den Radius haben, und deren Grundlinien zusammen den Umfang ausmachen. Unser Kreis wird mit einem Dreiecke inhaltsgleich sein, dessen Grundlinie der Kreisumfang und dessen Höhe der Radius ist, oder er ist gleich einem Rechtecke, dessen Grundlinie gleich dem halben Umfang, dessen Höhe gleich dem Radius ist.

Zeichne dieses Dreieck und dieses Rechteck:

Fig. 21.



1 : 200

$$\text{Peripherie} = 2\,r\,.\,\pi.$$

Grundlinie des Dreiecks $= 2\,.\,r\,.\,\pi$. Sein Inhalt $= \dfrac{u\;.\;r.}{2}$

„ „ Rechtecks $= r\,.\,\pi$

Höhe „ „ $= r.$

Inhalt des Kreises = Inhalt des Rechtecks

$$= \underline{r\,.\,\pi\,.\,r = r\,.\,r\,.\,\pi} = \frac{u\;.\;r.}{2}$$

$$= 2{,}3\;.\;2{,}3\;.\;3{,}14\ m^2 = 16{,}61\ m^2.$$

3. Berechnung des Cylinders.

a) *Berechnung der Cylinderschachtel, die zuerst betrachtet wurde.*

Zeichne nochmals die Grundfläche dieser Schachtel (r. = 5 cm). Zeige, wie man den Inhalt des ihr eingeschriebenen Sechsecks und Zwölfecks bestimmen kann, und mache den Übergang zum Kreis. Zeichne das Dreieck und das Rechteck, die mit dem Kreise inhaltsgleich sind.

Oberfläche der Schachtel.

Inhalt dieses Kreises $= r\,.\,r\,.\,\pi = 5\,.\,5\,.\,3{,}14\ cm^2 = 78{,}5\ cm^2$.

Zeichne nochmals das Netz, und berechne die ganze Oberfläche.

Mantel $= 2 . r . \pi . H = 10 . 3{,}14 . 20\ cm^2 = 628\ cm^2.$
Grund- u. Deckfläche $= 2 . r^2 . \pi = 2 . 5^2 . 3{,}14\ cm^2 = 157\ cm^2.$
Ganze Oberfläche $= \qquad = 785\ cm^2.$

Welches Volumen hat diese Schachtel?

Konstruiere aus Karton das rechtwinklige Prisma, welches das dem Kreise inhaltsgleiche Rechteck zur Grundfläche hat und gleich hoch wie unsere Cylinderschachtel ist, und vergleiche dieses Prisma mit der Schachtel. Wie verhält es sich mit ihren Inhalten? Sie sind gleich; denn wir können uns den Cylinder in dieses Prisma verwandelt denken. Fülle beide Körper mit Sand, und zeige, dass sie gleich viel halten. Inhalt der Schachtel.

Inhalt des Prismas = Grundfläche $\times$ Höhe $= r . r . \pi . H = 5 . 5 . 3{,}14 . 20\ cm^3 =$ folglich:

Inhalt der Cylinderschachtel = Grundfläche $\times$ Höhe $= r . r . \pi . h = 78{,}50 . 20 = 1570\ cm^3.$

Für die Berechnung des Inhalts dieser Cylinderschachtel gilt demnach die Regel:

$$J. = \text{Grundfläche} . \text{Höhe} = r . r . \pi . H.$$

b) Erkläre die Berechnung der Zündhölzchenschachtel auf gleiche Weise. d. = 5 cm, h. = 6 cm. Kurze Darstellung:

Grundfläche $= r . r . \pi = 2^1/_2 . 2^1/_2 . 3{,}14\ cm^2 = 19{,}625\ m^2$
Deckfläche $= 19{,}625\ m^2$
Mantel $= 2 . r . \pi . H = 2 . 2^1/_2 . 3{,}14 . 6\ cm^2 = 94{,}2\ cm^2.$
Ganze Oberfläche $= \qquad 133{,}45\ cm^2.$

$$\text{Inhalt} = G . H = r . r . \pi . H = \frac{5}{2} . \frac{5}{2} . 3{,}14 . 6\ cm^3 = 117{,}75\ cm^3.$$

Verallgemeinerung. Wie haben wir in all diesen Fällen die Kreisfläche, wie das Cylinder-Volumen berechnet? Daraus folgt:

Satz 29.

a) Flächeninhalt des Kreises f. $= r . r . \pi = \dfrac{u . r.}{2}$

b) Flächeninhalt des Cylindermantels f. $= 2 . r . \pi . H.$

c) Rauminhalt des Cylinderkörpers J. $= r . r . \pi . H = G . H.$

Übungen.

1) Miss verschiedene Cylinderkörper, und berechne sie.

2) Berechne die Grundfläche und das Volumen der Cylinderkörper von Übung 1, 2, 6 des vorhergehenden Abschnitts.

3) Was kostet der dreimalige Anstrich einer runden Stützsäule von 4 m Höhe und 1,88 m Umfang à 1 Fr. 30 pro m²?

4) Ein Milcheimer hat einen Durchmesser und eine Höhe (innerhalb gemessen) von 24 cm. Wieviel Liter hält er?

5) Das Wasserreservoir einer Gemeinde hat Cylinderform und ist 4 m breit und 4 m hoch. Wieviel Wasser hält es? In welcher Zeit wird es durch 4 Hydranten geleert, durch welche pro Minute je 125 Liter fliessen?

6) Ein Hydrantenschlauch hat eine Länge von 20 m und innen einen Durchmesser von 3 cm. Wieviel Wasser hält er? Wieviel Stoff hat man zu seiner Herstellung verwendet?

7) Was kosten folgende Baumstämme à 30 Fr. pro m³:

a) Mittlerer Durchmesser = 42 cm, Länge = 4,8 m.
b) „ „ = 54 cm, „ = 5,4 „

Man berechnet den mittleren Querschnitt und multipliziert seine Masszahl mit der Länge.

8) Wieviel wiegt eine runde Quecksilbersäule von 1 cm Durchmesser und 76 cm Höhe, wenn das spezifische Gewicht des Quecksilbers 13,6 beträgt?

9) Wieviel wiegt eine Maschinenwelle von 4,5 m Länge und 6 cm Dicke, wenn ihr spezifisches Gewicht 7,4 beträgt?

10) Wieviel wiegt ein aufgerollter Kupferdraht von 3 mm Dicke und 1000 m Länge, wenn das spezifische Gewicht des Kupferdrahts 8,8 beträgt?

F. Der Winkelbegriff.

I. Beschreibung und Messung des Winkels.

1) Bei der Beschreibung des Balkens haben wir den Begriff „Rechter Winkel“ erklärt und gesehen, dass je 2 zusammenstossende Flächen und 2 zusammenstossende Kanten einen rechten Winkel bilden.

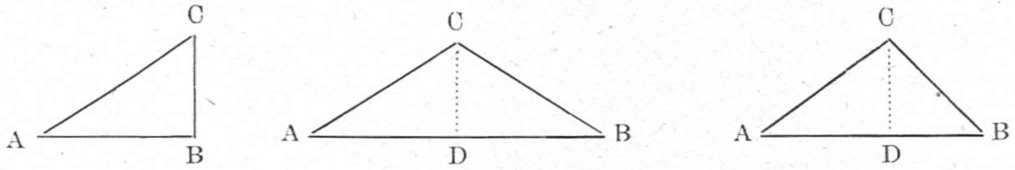
Die verschiedenen Neigungen von Dachflächen.

Beim Estrichraum hatten die Flächen und Kanten eine andere gegenseitige Lage. Bei der Vergleichung verschiedener Dächer zeigte es sich, dass die Dachfläche des einen Daches nicht gleich geneigt ist wie die eines anderen. Bei welchen Dächern ist die Neigung gross, bei welchen klein? Kirchendächer sind meist sehr stark geneigt oder steil, Cementdächer weniger geneigt oder flach. Welche Vorteile bietet ein steiles Dach? Welche Nachteile?

2) *Das Merkmal der Neigung wollen wir nun schärfer ins Auge fassen.*

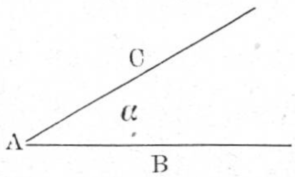
Die Neigung der Dachflächen erkennen wir schon an den Giebelflächen. Zeichne solche hier.

Fig. 22 a) Rechtwinkl. Giebel — b) Gleichsch. Giebel — c) Ungleichseitiger Giebel



Man sagt: die Dachfläche bildet mit dem Estrichboden einen Winkel, und ebenso: die Giebelkante A C bildet mit der Bodenkante A B bei A einen Winkel. Man nennt A den Scheitel, A B und A C die Schenkel dieses Winkels, und die zwischen den Schenkeln liegende Fläche die Winkelfläche. Die Schenkel denkt man sich nach der einen Seite unbegrenzt. Dieser Winkel wird durch 3 Buchstaben bezeichnet, von denen einer am Scheitel und zwei an den Schenkeln stehen. Man setzt den Buchstaben des Scheitels in die Mitte. Die Strahlen A B und A C (Fig. 22 d) bilden demnach den Winkel B A C oder C A B.

Fig. 22 d)



Es ist auch üblich, den Winkel mit einem kleinen (griechischen) Buchstaben zu bezeichnen, den man zwischen die Schenkel in die Nähe des Scheitels setzt. Bezeichnung des Winkels.

So redet man vom Winkel B A C oder vom Winkel α. Bezeichne und lies auch die übrigen Giebelwinkel.

3) *Das Messen der Winkel.*

a) Wir können schon mit Augenmass entscheiden, bei welchem von zwei Dächern die Dachfläche den grösseren Winkel bildet. *Nun möchten wir aber die verschiedenen Winkel genau vergleichen oder genau messen.*

b) Dazu benutzen wir den Transporteur. Beschreibt ihn. Der Transporteur. In wieviel Teile ist der Halbkreis eingeteilt? Diese Teilchen nennt man Bogengrade.

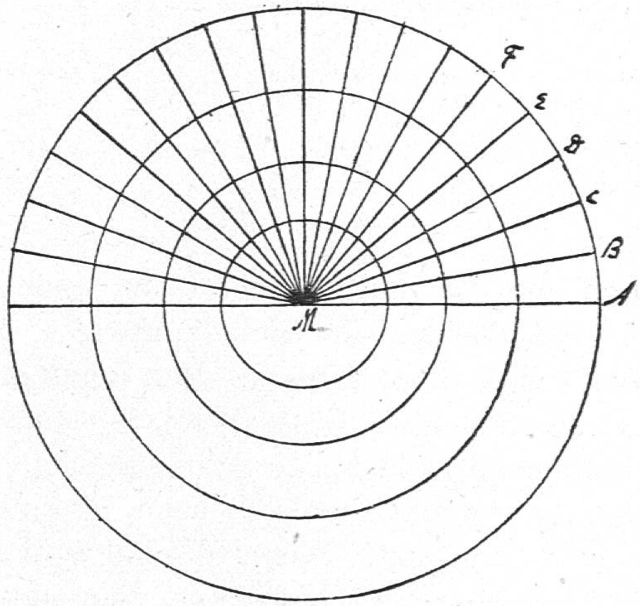
Wir wollen zuerst einen einfachen Gebrauch des Transporteurs kennen lernen.

c) *Vorübung.* Zeichne mehrere konzentrische Kreise, und teile sie mit Hülfe des Transporteurs in 36 gleiche Teile ein.

Einteilung konzentrischer Radien.

Durch die Radien, welche die 18 Teilpunkte des Transporteurs mit dem Mittelpunkt verbinden, werden alle Halbkreise in 18 gleiche Teile eingeteilt. Die Verlängerungen der Radien teilen auch die 2. Hälfte in 18 gleiche Teile ein.

Fig. 23.



Mache dieselbe Einteilung auch mit einem grösseren oder mit einem kleineren Transporteur. Wir bekommen dieselbe Einteilung. Auf die Grösse des Transporteurs kommt es also nicht an.

d) Wir wollen die gezeichnete Figur benutzen, um eine zweite Auffassung des Winkels, sowie seine Messung zu erklären.

Winkel gleich Richtungsunterschied.

Alle Kreispunkte auf dem Radius M A erscheinen, von M aus gesehen, in gleicher Richtung. Denken wir uns an die Stelle dieser Punkte Sterne, so würden die hinteren durch die vorderen verdeckt. Das Gleiche gilt von den Punkten auf den anderen Radien.

Die Punkte A und B erscheinen von M aus gesehen in verschiedener Richtung. Die zwei Radien M A und M B haben verschiedene Richtung oder haben einen Richtungsunterschied; sie bilden einen Winkel. Man sagt, der Richtungsunterschied von M A und M B oder der Winkel von M A und M B misst 10 Grade, weil diese zwei Radien 10 Bogengrade eines jeden der konzentrischen Kreise einschliessen. Gib die Gradzahl der Winkel B M C, C M D u. s. f., A M C, A M D u. s. f. an.

e) Wie werden wir nun die Gradzahl unseres Giebelwinkels B A C finden? Wir legen den Transporteur an den Schenkel A B an, so dass der Mittelpunkt auf den Scheitel A fällt, und lesen ab, wieviel Bogengrade zwischen den Schenkeln liegen. Hier sind es 33 Grade (33 °); darum sagt man, der Winkel messe 33 °. Das Messen des Giebelwinkels.

Miss auch die übrigen Winkel der drei Giebelflächen.

Miss diese Winkel auch mit einem grösseren oder kleineren Transporteur, und prüfe, ob die Grösse des Transporteurs auf die Gradzahl Einfluss hat. Verlängere die Schenkel des Winkels, miss ihn dann wieder, und zeige, dass die Gradzahl nicht von der Länge der Schenkel abhängt.

Verallgemeinerung. Vergleiche die Entstehung, die Bezeichnung und die Messung der einzelnen Winkel, die betrachtet wurden. Dann ergibt sich folgendes:

Satz 30. a) Zwei Strahlen, die sich schneiden, bilden einen Winkel. Die beiden Strahlen heissen Schenkel des Winkels; ihr Schnittpunkt heisst Scheitel des Winkels. Die zwischen den Schenkeln liegende Fläche heisst Winkelfläche. Letztere, sowie die Schenkel denkt man sich unbegrenzt.

b) Ein Winkel wird durch drei Buchstaben bezeichnet, von denen einer am Scheitel und zwei an den Schenkeln stehen. Ein Winkel wird auch durch einen kleinen Buchstaben bezeichnet, den man zwischen die Schenkel in die Nähe des Scheitels setzt.

c) Um einen Winkel zu messen, legt man um seinen Scheitel als Mittelpunkt einen Kreis (Transporteur) und sieht nach, wieviel 360stel dieses Kreises (Bogengrade) zwischen den Schenkeln liegen. So erhält man die Gradzahl des Winkels.

d) Diese Gradzahl misst auch den Richtungsunterschied der beiden Schenkel.

Bemerkung: Bei genauen Messungen gibt man auch die Bruchteile des Grades an. Den 60. Teil eines Bogengrades nennt man eine Bogenminute (1'), den 60. Teil einer Bogenminute eine Bogensekunde (1").

1 Grad = 60 Minuten = 3600 Sekunden: $1^0 = 60' = 3600''$.

Übungen.

1) Miss die Winkel der Grundfläche des sechsseitigen Brunnens, der besprochen worden ist.

2) Zeichne eine Strasse mit einer Neigung von 5°, 10°, 20°, 40°.

3) Die Sonnenstrahlen haben in Chur am 21. März und am 23. September mittags eine Neigung von ungefähr 43°, am 21. Juni eine solche von $66^1/_2$° und am 21. Dezember eine solche von $19^1/_2$°. Zeichne an der Wandtafel eine Wagerechte und den Sonnenstrahl für jeden der bezeichneten Tage.

4) Eine Rampe ist 3 m lang und 2 m hoch. Welche Neigung hat sie? (Zeichne das Dreieck.)

II. Die Einteilung der Winkel.

Wir wollen nachsehen, welche Winkel der Zeiger der Uhr zu verschiedenen Zeiten bildet.

Die Winkel der Uhrzeiger.

Richte die Zeiger auf 12 Uhr; dann fallen sie zusammen und bilden keinen Winkel oder einen sogenannten *Nullwinkel.*

Um 1 Uhr bilden sie einen Winkel von 30°, um 2 Uhr einen solchen von 60°, um 3 Uhr einen solchen von 90° oder einen rechten Winkel; dann stehen die Schenkel senkrecht zu einander und schneiden einen Viertelskreis heraus. Die beiden Winkel von 30° und von 60° heissen *spitze* Winkel. Sie sind kleiner als ein rechter Winkel. Um 4 Uhr ist der Winkel der Zeiger gleich 120°, um 5 Uhr 150°, um 6 Uhr 180°; dann haben die beiden Zeiger (oder die Schenkel des Winkels) gerade die entgegengesetzte Richtung; sie halbieren das Zifferblatt. Man sagt auch, sie bilden einen *gestreckten* Winkel. Die beiden Winkel von 120° und 150° heissen *stumpfe* Winkel; sie sind grösser als ein rechter, aber kleiner als ein gestreckter Winkel. Der Winkel der Zeiger misst um 7 Uhr 210°, um 8 Uhr 240° u. s. f., um 12 Uhr 360° oder 0°. Dieser Winkel von 360° heisst ein *voller* Winkel. Die Winkel von 210°, 240°, 270°, 300°, 330° heissen *erhabene* oder *convexe* Winkel; sie sind grösser als ein gestreckter Winkel. Die vorhin betrachteten spitzen und stumpfen Winkel tragen im Gegensatz hiezu den Namen *hohle oder concave* Winkel.

Verallgemeinerung. **Satz 31. a) Fallen zwei Strahlen zusammen, so bilden sie einen Nullwinkel; laufen sie nach entgegengesetzter Richtung, so bilden sie einen gestreckten Winkel. Schneiden zwei Strahlen den vierten Teil eines**

Kreises heraus, welcher ihren Schnittpunkt zum Mittelpunkt hat, so bilden sie einen rechten Winkel oder stehen senkrecht zu einander.

b) Winkel, welche weniger als 90 ° messen, heissen spitze Winkel, solche die mehr als 90 °, aber weniger als 180 ° messen, heissen stumpfe WInkel. Spitze und stumpfe Winkel heissen hohle oder concave Winkel.

Winkel, die mehr als 180 ° messen, heissen erhabene oder convexe Winkel.

Übungen.

1) Zeichne die Stellung der Uhrzeiger zu den verschiedensten Zeiten, und benenne ihren Winkel.

2) Prüfe, was für Winkel in den frühern Abschnitten vorgekommen sind.

III. Das Messen der Drehung und der doppelte Drehungssinn.

1. Das Messen der Drehung.

a) *Wir wollen die Bewegungen der Uhrzeiger beschreiben und messen.*

Wie nennt man die Bewegung der Zeiger? Drehung. Was für Drehungen kommen sonst oft vor? Viertelsdrehungen, halbe Drehungen, $^3/_4$ Drehungen, ganze Drehungen. Drehungen links um und Drehungen rechts um.

Wie könnte man die Grösse der Drehung genauer ausdrücken? Am Zifferblatt sehen wir leicht, wie die Drehung eines Zeigers genau ausgedrückt werden kann. Ausdrücken der Drehung in Graden.

Was wird man unter einer Drehung des grossen Zeigers um 90^0, 180^0, 270^0, 360^0 verstehen? Was unter einer solchen von 10^0, 20^0, 35^0 u. s. f.

b) Führe mit deinem Zirkel mit Benutzung des Transporteurs bestimmte Drehungen aus.

c) Wiederhole das Gleiche mit deinem Stock an der Wandtafel.

d) Durch welche Bewegung führt man den einen Schenkel des Winkels B A C auf den andern? Die Gradzahl dieses Winkels ist auch das Mass für diese Drehung.

2. Der doppelte Drehungssinn.

a) Nun wollen wir auch auf die Art der Drehung achten. Drehe den grossen Zeiger um 30 ^{0} vorwärts oder rechts um, dann um 30 ^{0} rückwärts oder links um. Welche Arten von Drehungssinn unterscheiden wir?

Drehung links und Drehung rechts.

Der grosse Zeiger zeige auf 12 Uhr. Um wieviel Grad muss man ihn rechts um, um wieviel links um drehen, bis er auf 5 Uhr oder bis er auf 8 Uhr zeigt?

Zeichne diese 2 Stellungen des grossen Zeigers.

Auf wieviel Arten kann man den einen Schenkel eines Winkels auf den andern führen? Wie gross ist die Summe der beiden Drehungen? Wie viele Winkel bilden eigentlich die beiden Schenkel? Der eine Winkel ist ein hohler, der andere ein erhabener.

Bei allen Figuren, die uns bisher vorgekommen sind, kam nur der hohle Winkel in Betracht.

Verallgemeinerung. Wie wurde die Grösse der Drehung 1) des Uhrzeigers, 2) des einen Schenkels eines Winkels gemessen? Was haben wir dabei bezüglich der Art der Drehung gesagt?

Satz 32. a) Die Drehung, die man mit dem einen von 2 sich schneidenden Strahlen ausführen müsste, um ihn auf den andern zu bringen, wird mit Hülfe des Transporteurs gemessen und also in Graden ausgedrückt.

b) Man unterscheidet einen doppelten Drehungssinn, eine Drehung im Sinne des Uhrzeigers oder eine solche rechts um und eine Drehung im umgekehrten Sinne oder links um.

c) Zwei Strahlen bilden eigentlich zwei Winkel, einen hohlen und einen erhabenen. Reden wir kurzweg vom Winkel zweier Strahlen, so meinen wir den hohlen Winkel.

Übungen zum letzten Abschnitt.

1) Zählet Drehungen im Sinne rechts, solche im Sinne links auf.

Zum Beispiel: beim Zuschrauben muss man die Schraube rechts umdrehen, beim Losschrauben links um. Bei der Wagensperre muss man wann rechts, wann links drehen?

2) Zähle die Dörfer am Zürichsee auf, durch welche ein Velocipedist fährt, 1) wenn er rechts um den See fährt, 2) wenn er links um den See fährt. Welche Körperseite kehrt er in jedem Falle dem See zu? Ein Schiff fährt von Rorschach über Konstanz nach Meersburg, Ludwigshafen, Bregenz. Welche Körperseite kehrt ein Mitfahrender dem See zu, wenn er vorwärts sieht? Wie dreht sich das Schiff?

3) Betrachte die Bewegung der Himmelskörper. Die Sonne, der Mond und die Sterne drehen sich scheinbar täglich einmal um die Erde. In Wirklichkeit dreht sich die Erde links um ihre Achse. Die Erde dreht sich in einem Jahre links um die Sonne und der Mond links um die Erde.

4) Umkreise deinen Tisch links um, dann rechts um. Wie dreht sich dabei der Körper um eine gedachte Körperachse?

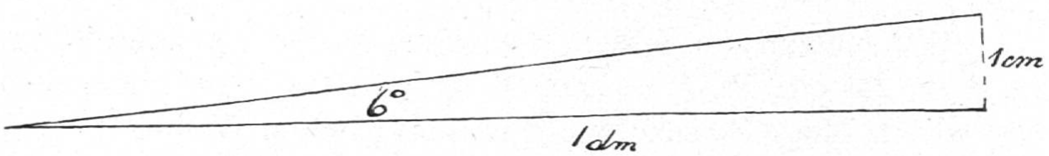
5) Zeichne Kreise auf dem Zeichnungsblatt und an der Wandtafel, indem du den Zirkel bald links um, bald rechts um drehst.

6) Führe mit deinem Arm in der Luft Links- und Rechtsdrehungen aus.

Übungen zum ganzen Kapitel.

1) Laut kantonaler Vorschrift sollte eine Bergstrasse nicht mehr als 10% Steigung haben; d. h. auf je 100 m wagerechten Weg darf die Steigung höchstens 10 m betragen. Zeichne eine solche Strasse, und miss ihre Steigung. Steigung.

Fig. 24.

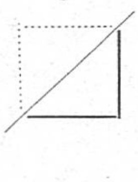


2) Die Rigibahn hat an ihrer steilsten Stelle 25% Steigung. Wieviel Grad Neigung sind das?

3) Welche Steigung hat eine Strasse von 20° Neigung?

4) Welche Neigung hat eine Halde von 100% Steigung? Die Quadratdiagonale halbiert den rechten Winkel. Die Neigung ist daher 45 Grad.

Fig. 25.

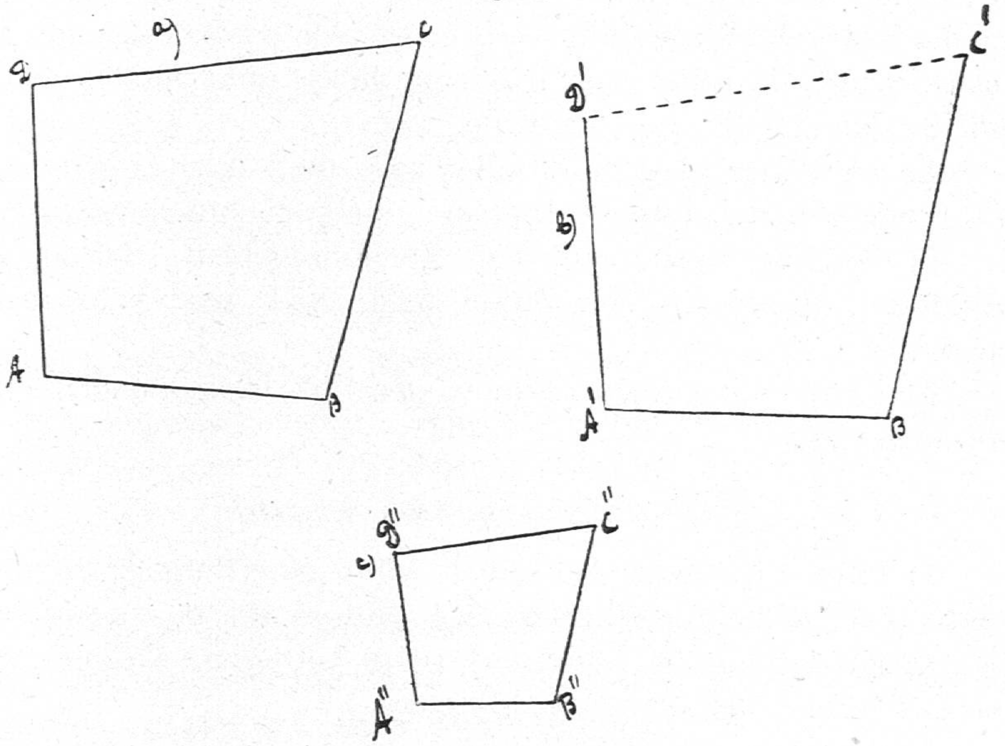


5) Die Bauarbeiter benutzen Rampen (schiefe Ebenen), um das Material in höhere Stockwerke hinauf zu schaffen.

Zeichne eine Rampe mit einer Neigung von 18° und einer Länge von 6 m.

6) Zeichne ein unregelmässiges Viereck, das etwa eine Wiese darstellen mag. Konstruiere mit Benutzung des Transporteurs und eines Massstabs ein kongruentes Viereck.

Fig. 26.



Wir messen die Seite A B und die an ihr liegenden Winkel, (A B = 2,9 cm, W A = 97°, W B = 102°), zeichnen rechts eine gleich lange Strecke wie A B und machen W. bei A′ = W. bei A (= 97°), W. bei B′ = W. bei B (= 102°). Indem wir noch die Seiten A D und B C abtragen, erhalten wir die Punkte C′ und D′. Wie viele Stücke mussten wir messen und abtragen? Wie viele Stücke (Seiten und Winkel) hat das Viereck im ganzen? 3 Stücke, eine Seite und zwei Winkel, brauchten wir nicht zu messen; es muss die Probe stimmen, dass diese in der Figur rechts gleich gross werden wie links.

7) Zeichne das Viereck im Massstab 1 : 2. Wir tragen die halben Seiten von A B C D ab, nehmen aber die gleichen Winkel, damit die Form dieselbe bleibe. (Fig. 26 c).

8) Wie würde man den Plan eines Grundstückes zeichnen? Man misst mit der Messlatte alle Seiten und mit einem grossen Holztransporteur die Winkel. Dann kann man das Grundstück in verkleinertem Massstab zeichnen, gleich wie das Viereck A B C D.

Eine 5seitige Wiese A B C D E habe folgende Dimensionen:

A B = 63 m, B C = 56 m, C D = 57 m, W. a = 100°, W. b = 107°, W. c = 105°.

Zeichne sie im Massstabe 1 : 1000.

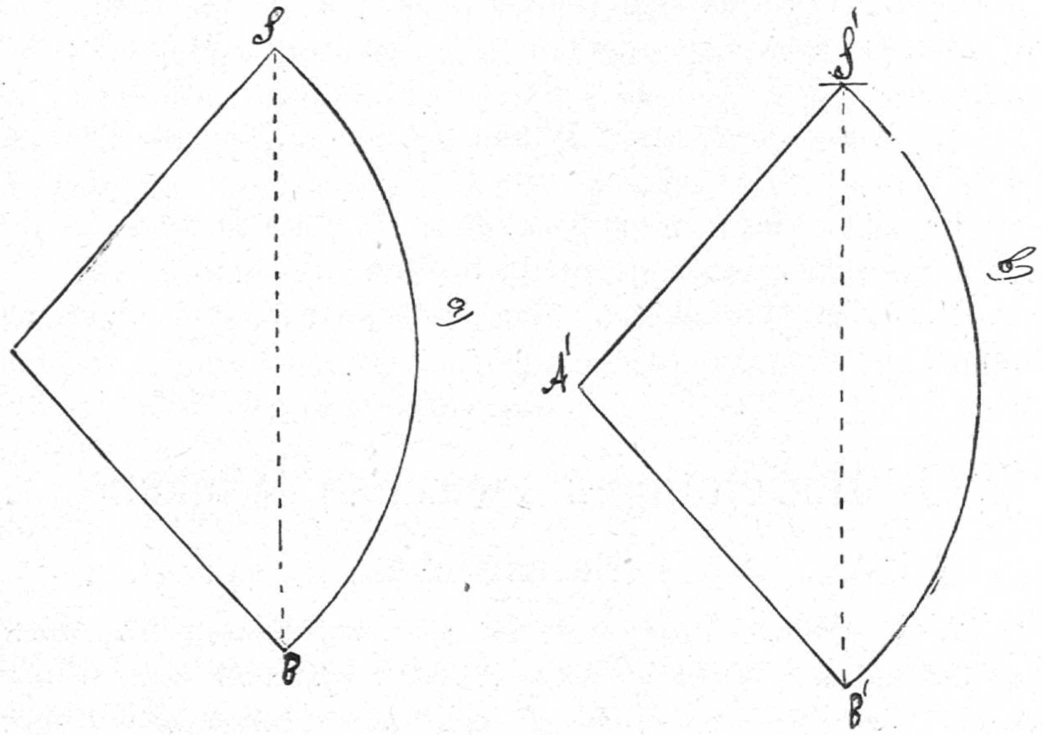
Wie viele Stücke genügen, um das Fünfeck zeichnen zu können? Die Messung von wieviel Stücken kann man sich ersparen?

9) Bei den besprochenen Konstruktionen war die Aufgabe zu lösen, einen Winkel von einer Figur auf eine andere zu übertragen.

Wie könnte man diese Aufgabe mit Benutzung des Zirkels, statt des Transporteurs lösen?

Wiederhole die Konstruktion für den Winkel A, und zeichne den Transporteurbogen ein. (Fig. 27).

Fig. 27.

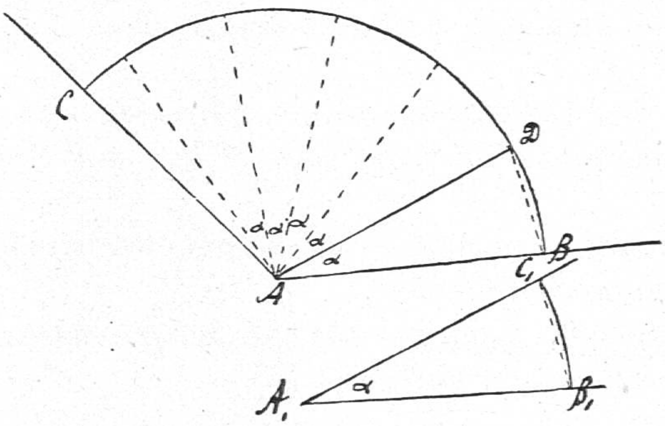


Wir haben eigentlich einen Kreisausschnitt der Winkelfläche von W. A in den Transporteur gefasst und an A′ B′ gezeichnet. Nun können wir auch statt mit dem Transporteur mit dem Zirkel einen Bogen vom gleichen Radius bei A und A' beschreiben, die Sehne B S in den Zirkel nehmen und sie bei Figur b) vom Schnittpunkte des 2. Bogens mit A' B' aus abtragen.

10) Zeichne mit Hilfe des Zirkels einen Winkel, der doppelt, dreimal so gross wie ein gegebener Winkel ist.

11) Vergleiche zwei Winkel mit Hilfe des Zirkels; sieh 1) nach, um wieviel ein grösserer Winkel grösser ist als ein kleinerer, und 2) wie oft der kleine im grossen enthalten ist.

Fig. 28.



W. B A C ist um den Winkel D A C grösser als W. B_1 A_1 C_1. W. B_1 A_1 C_1 lässt sich ungefähr $5^1/_3$ mal in den Winkel B A C hineinlegen.

12) Konstruiere einen Winkel, welcher gleich der Summe der 3 Winkel eines Dreiecks ist.

Es zeigt sich: die 3 Winkel α, β, γ des Dreiecks A B C bilden zusammen einen gestreckten Winkel.

Miss den Winkel mit dem Transporteur, und bilde ihre Summe.

G. Beziehungen zwischen Winkeln.

I. Nebenwinkel.

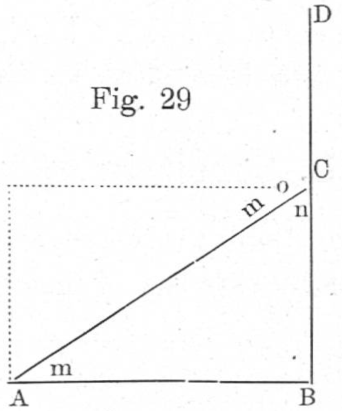
1) Aufgabe. *Man befindet sich auf einem Pultdache und möchte mit einem grossen Holztransporteur den Winkel messen, den die Dachfläche 1) mit der rechteckigen Wandfläche, 2) mit der Bodenfläche bildet.*

Es sollen also W. m und W. n (Fig. 29) gemessen werden. Sie lassen sich nicht direkt messen. Wir können aber leicht den

Winkel D C A (o) messen, den A C mit der Verlängerung der vertikalen Giebelkante B C bildet. C D können wir durch eine Latte markieren. Wir finden hier W. D C A oder W. o = 123°. Wie erhalten wir nun W. n? W. o + W. n = 180°, denn sie bilden einen gestreckten Winkel, folglich W. n = 180° — W. o = 180° — 123° = 57°.

Indirekte Messung der Giebelwinkel.

Fig. 29



Man nennt W. o den *Nebenwinkel* des Winkels n. Er hat mit ihm einen Schenkel (A C) und den Scheitel gemeinsam; die beiden andern Schenkel, C B und C D, laufen nach entgegengesetzter Richtung.

Nebenwinkel.

Wie erhalten wir nun W. m?

Wir überlegen folgendes: ergänzen wir das Dreieck A B C zu einem Rechteck, indem wir das Dreieck A B C drehen und an A C anlegen, so erscheint W. m bei W. n und ergänzt ihn zu einem rechten Winkel. Somit:

W. m = 90° — W. n = 90° — 57° = 33°.

Die beiden Winkel an der Hypotenuse A C des rechtwinkligen Dreiecks A B C ergänzen sich zu 90°. Man nennt deshalb W. m und W. n auch *Komplementswinkel.* W. n und W. o heissen auch *Supplementswinkel.*

2) Zeichne eine zweite rechtwinklige (dreiseitige) Giebelfläche, und wiederhole die gleichen Betrachtungen.

Zweites Beispiel.

3) Zeichne einen beliebigen Winkel, und konstruiere seinen Nebenwinkel. Auf welche Arten kann das geschehen? Die beiden Nebenwinkel des gegebenen Winkels sind einander gleich; denn beide ergänzen diesen zu 180°. Zeichne auch bei den Giebeldreiecken den zweiten Nebenwinkel von W. n.

Verallgemeinerung. Wie erhielten wir in diesen Fällen den Nebenwinkel? Was konnten wir über ihn aussagen?

Satz 33. a) Man erhält den Nebenwinkel eines gegebenen Winkels, indem man den einen seiner Schenkel über den Scheitelpunkt hinaus verlängert. Zwei Nebenwinkel haben daher einen Schenkel und den Scheitel gemeinsam; die beiden andern Schenkel laufen nach entgegengesetzter Richtung.

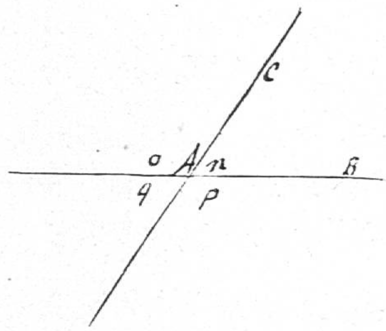
b) Zwei Nebenwinkel ergänzen einander zu 180° und heissen deshalb auch Supplementwinkel.

c) Jeder Winkel hat zwei Nebenwinkel, die einander gleich sind.

II. Scheitelwinkel.

Scheitelwinkel. Wir wollen die beiden Nebenwinkel eines gegebenen Winkels C A B oder n betrachten (Fig. 30).

Fig. 30.



$$\left.\begin{array}{l} W.\,o = 180^0 - W.\,n \\ W.\,p = 180^0 - W.\,n \end{array}\right\} \text{folglich } W.\,o = W.\,p.\ (= 123^0)$$

W. p heisst der Scheitelwinkel des Winkels o. Er entsteht, indem man die Schenkel des W. o verlängert.

Welches ist der Scheitelwinkel von W. n? Das ist q. W. n. = W. q Warum? Wie entsteht W. q. aus W. n? Zeichne einen beliebigen Winkel und seinen Scheitelwinkel.

Verallgemeinerung. **Satz 34. Man zeichnet zu einem gegebenen Winkel seinen Scheitelwinkel, indem man seine Schenkel über den Scheitelpunkt hinaus verlängert. Zwei Scheitelwinkel sind einander gleich.**

Übungen.

1) Berechne und konstruiere den Scheitelwinkel und den Nebenwinkel 1) eines W. von 47⁰, 2) von 122⁰.

2) Der Sonnenstrahl bildet an einem Ort Graubündens am 21. Juni mittags 12 Uhr mit der Südrichtung einen Winkel n von 66⁰ 32′ 30″. Welchen Winkel bildet dieser Strahl 1) mit der Vertikalen 2) mit der Nordrichtung?

W. n = $66^0\ 32'\ 30''$

W. m = $89^0\ 59'\ 60''$ $\qquad 189^0\ 59'\ 60''$

$-\ 66^0\ 32'\ 30'' \qquad -\ 66^0\ 32'\ 30''$

W. m = $23^0\ 27'\ 30''$ W. o = $113^0\ 27'\ 30''$ = W (NB Sonne)

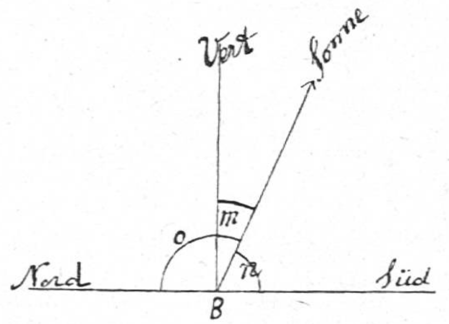


Fig. 32.

Am 21. März ist W. n um $23^0\ 27'\ 30''$ kleiner. Berechne für diesen Tag die Winkel m und o.

III. Die Beziehung zwischen den Winkeln des rechtwinkligen Dreiecks.

Bei der Lösung der ersten Aufgabe haben wir gesehen, dass W. m + W. n = 90^0 (Fig. 29). Zeichne ein beliebiges rechtwinkliges Dreieck, und beweise, dass die Winkel an der Hypotenuse Komplementwinkel sind. Die Summe aller drei Winkel beträgt demnach bei jedem der betrachteten rechtwinkligen Dreiecke 180^0. Die Winkel des rechtwinkligen Dreiecks.

Verallgemeinerung. **Satz 35. Die beiden Winkel an der Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks ergänzen sich zu 90 ° und heissen deshalb auch Komplementswinkel.**

Die Summe der drei Winkel eines rechtwinkligen Dreiecks beträgt 180 °.

Übungen.

1) Eine schräge Giebelkante bilde mit der vertikalen Stützsäule einen Winkel von 59^0; welchen Winkel bildet sie mit der wagerechten Giebelkante?

2) Ein Sonnenstrahl bilde, wenn die Sonne am höchsten steht, mit der wagerechten Südrichtung einen Winkel von 42^0 $36'\ 14''$. Welchen Winkel bildet er mit einem vertikalen Stab?

3) Welchen Winkel bildet eine Quadratdiagonale mit den Seiten?

IV. Beziehung zwischen den Winkeln eines jeden Dreiecks.

1) Aufgabe. *Miss von der Firstkante eines ungleichseitigen Giebeldaches aus die Dachwinkel.*

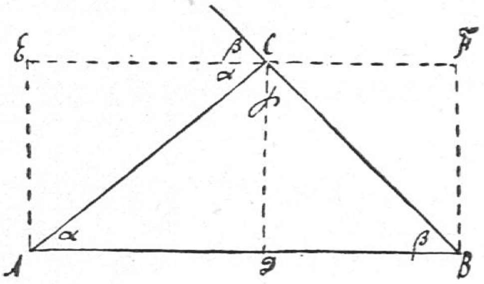


Fig. 32

Indirekte Messung der Giebelwinkel.

Wir wiederholen hier die gleiche Überlegung wie beim rechtwinkligen dreiseitigen Giebel.

Das Dreieck A B C kann zu einem Rechteck ergänzt werden, indem man $\triangle$ A D C links und $\triangle$ B D C rechts hinaufdreht. Dann erscheinen W. α und W. β bei C und bilden mit γ einen gestreckten Winkel.

Winkelsumme im Dreieck.

$$W.\,\alpha + W.\,\beta + W.\,\gamma = 180^0.$$

Halten wir also eine Latte genau wagerecht und rechtwinklig zur Firstkante, so bildet sie mit der Giebelkante A C den Winkel α und mit B C den Winkel β, welche wir mit dem Transporteur messen können. Wir finden hier W. $\alpha = 39^0$, W. $\beta = 45^0$.

Welchen Winkel bilden die beiden Dachflächen miteinander?

$$W.\,\gamma + 39^0 + 45^0 = 180^0$$
$$W.\,\gamma = 180^0 - 84^0 = 96^0.$$

Wie haben wir hier den Dreieckswinkel γ erhalten? Indem wir die zwei andern von 180^0 abgezogen haben.

Zweiter Beweis.

2) *Wir wollen auch mit Hilfe eines Stocks zeigen, dass die drei Winkel von $\triangle$ A B C zusammen 180^0 betragen.*

Lege den Stock an die Tafel, und markiere die Richtung des Griffs. Drehe ihn dann um 180^0; dann sieht der Griff nach der entgegengesetzten Richtung. Lege alsdann den Stock auf AB; achte auf die Richtung des Griffs; halte ihn bei A fest, und drehe ihn im Sinne links um α^0 (39^0) so, dass er auf die Richtung von A C fällt; halte ihn dann bei C fest, und drehe ihn im gleichen Sinne um γ ($= 96^0$); dann fällt er auf C B. Halte endlich den

Stock bei B fest, und drehe ihn im Sinne links um β ($= 45^0$); so kommt er auf A B zu liegen, und der Griff sieht nach der entgegengesetzten Richtung. Man hat daher den Stock um 180^0 linksum gedreht. Folglich $\alpha^0 + \beta^0 + \gamma^0 = 180^0$.

3) Den Winkel β könnten wir auch auf der linken Dachfläche messen, indem wir die Kante B C durch eine Latte C G verlängern und den Winkel messen, den diese mit der wagerechten Latte C E bildet. Dieser Winkel ist ja Scheitelwinkel von β.

Möchten wir nur den Winkel γ kennen, so würden wir seinen Nebenwinkel A C G messen. Dieser heisst *Aussenwinkel* des Dreiecks A B C; er wird von der Seite A C und von der Verlängerung von B C gebildet und setzt sich aus α und β zusammen, d. h. aus den beiden inneren Dreieckswinkeln, die ihm gegenüber liegen. Aussenwinkel.

Zeichne auch den zweiten Aussenwinkel bei C, indem du A C statt B C verlängerst. Er ist der Scheitelwinkel zum ersten.

Zeichne auch den Aussenwinkel an der Ecke A. Er ist $= 180^0 - \alpha = \beta + \gamma = 141^0$. Was gilt vom Aussenwinkel bei B? Wie gross ist die Summe der 3 Aussenwinkel?

Aufgabe. Zeichne auch einen Giebel bei dem die Dachflächen sich an der Firstkante unter spitzem Winkel treffen, und wiederhole dieselben Betrachtungen.

Verallgemeinerung. Was haben wir in beiden Fällen bezüglich der Winkelsumme des Dreiecks und bezüglich des Aussenwinkels gezeigt? Es gilt allgemein:

Satz 36. Die Summe der drei Winkel eines jeden Dreiecks beträgt 180 °. Sind zwei Dreieckswinkel bekannt, so erhält man daher den dritten, indem man die beiden andern addiert und ihre Summe von 180 ° abzieht.

Satz 37. Ein Aussenwinkel eines Dreiecks wird von einer Dreiecksseite und der Verlängerung einer zweiten Seite gebildet. Er misst so viel wie die beiden ihm gegenüber liegenden innern Dreieckswinkel.

Übungen.

1) Welche Neigung haben die schrägen Kanten eines gleichschenkligen Giebels A B C, wenn sie miteinander einen Winkel von 114^0 bilden?

Die beiden Winkel an der Grundlinie A B sind einander gleich, weil die Höhe das gleichschenklige Dreieck in zwei kongruente Dreiecke teilt.

Somit $2\,\alpha = 180^0 - \gamma = 180^0 - 114^0 = 66^0$

$$\alpha = \frac{66^0}{2} = 33^0$$

Wie erhält man daher einen Winkel an der Grundlinie eines gleichschenkligen Dreiecks, wenn der Winkel an der Spitze gegeben ist?

2) Berechne α, 1) wenn $\gamma = 86^0\ 47'\ 44''$, 2) wenn $\gamma = 90^0$.

3) Die Dachflächen eines gleichschenkligen Daches haben je eine Neigung von 30^0. Welchen Winkel bilden sie miteinander?

Die beiden Winkel an der Grundlinie betragen zusammen $= 60^0 = 2\,\alpha$. γ ist hiezu das Supplement $= 180^0 - 60^0 = 120^0$.

Wie gross ist der Aussenwinkel bei C?

Wie berechnet man aus dem Winkel an der Grundlinie eines gleichschenkligen Dreiecks den Winkel an der Spitze?

4) Berechne γ, 1) wenn $\alpha = 60^0$, 2) wenn $\alpha = 24^0\ 17'$.

V. Einteilung der Dreiecke bezüglich der Winkel.

Wir wollen aus der Beziehung $\alpha + \beta + \gamma = 180^0$ noch einige Folgerungen ziehen.

a) Zeichne ein Dreieck A B C, in welchem $\alpha = 120^0$ ist.

Was gilt von β und γ?

Wieviel stumpfe Winkel kann ein Dreieck haben?

Stumpfwinkliges Dreieck.

Besitzt ein Dreieck einen stumpfen Winkel, so heisst es ein stumpfwinkliges Dreieck.

b) Zeichne A B C so, dass $\alpha = 90^0$ ist. Was gilt von β und γ? Kann das Dreieck noch einen zweiten rechten Winkel haben?

Rechtwinkliges Dreieck.

Ein Dreieck, das einen rechten Winkel besitzt, heisst ein rechtwinkliges Dreieck. Wie heissen seine Seiten?

Spitzwinkliges Dreieck.

c) Zeichne ein Dreieck, das nur spitze Winkel besitzt. Wie gross ist jeder Winkel, wenn alle gleich sind?

Ein Dreieck, das nur spitze Winkel hat, heisst spitzwinkliges Dreieck.

Man teilt die Dreiecke in spitzwinklige, rechtwinklige und stumpfwinklige Dreiecke ein.

H. Konstruktion von Dreiecken aus gegebenen Stücken.

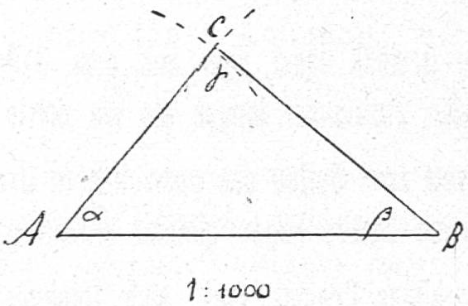
I. Gegeben alle drei Seiten.

1) *Es soll der Plan einer dreiseitigen Wiese gezeichnet werden.*

Wir messen ihre Seiten mit Hilfe zweier Messlatten oder eines Messbandes. Es sei gemessen worden A B = 40 m, B C = 30 m, H C = 25 m. Wir stellen 1 m in der Natur durch 1 mm in der Zeichnung dar, so dass in der Zeichnung A B = 4 cm, A C = 2,5 cm, B C = 3 cm wird. Konstruktion aus drei Seiten.

Trage zuerst A B = 4 cm auf, und beschreibe um A als Mittelpunkt einen Kreisbogen mit einem Radius von 2,5 cm (= A C), um B einen solchen mit Radius 3 cm (= B C). Der Schnittpunkt der beiden Bogen ist der dritte Eckpunkt des Dreiecks. Zeige, dass es die vorgeschriebenen Seiten hat.

Fig. 33.



Hätte man die Kreisbogen auch nach unten gezeichnet, so wäre ein zu A B C symmetrisches Dreieck entstanden.

Miss die Winkel des Dreiecks. Alle Schüler bekommen dieselben Winkel. Welches ist der grösste Winkel? Welcher Seite liegt er gegenüber? der grössten. Der kleinste Winkel β liegt der kleinsten Seite gegenüber.

Bezeichnung.

Bemerkung. Wir haben bisher die Ecken des Dreiecks mit den grossen lateinischen Buchstaben A, B, C bezeichnet und die entsprechenden Winkel mit α, β, γ. Nun ist es noch üblich, die Dreiecksseiten mit den kleinen lateinischen Buchstaben a, b, c zu bezeichnen und zwar mit a die Seite, die der Ecke A, oder dem Winkel α gegenüberliegt u. s. f. Bei diesem Beispiel war a = 30 m, b = 2,5 m, c = 40 m.

2) Die Grundlinie eines Giebels misst 8 m; die schrägen Kanten messsen bezw. 5 und 4 m. Zeichne ihn im Massstab 1 : 100. Miss die Winkel.

3) Zeichne den gleichschenkligen Giebel, dessen Basis 15 m, dessen schräge Kanten je 9 m messen. Weise durch Messung nach, dass den beiden gleichen Dreiecksseiten gleiche Winkel gegenüber liegen.

4) Zeichne das Dreieck, für welches a = b = c = 5 cm ist. Was ist das für ein Dreieck? Wieviel misst jeder Winkel?

5) Versuche, folgendes Dreieck zu zeichnen: a = 8 cm, b = 4 cm, c = 2 m. Die Konstruktion ist unmöglich. Die Summe von b und c ist hier kleiner als a. Wie verhielt es sich damit in den früheren Fällen?

Zwei Seiten müssen zusammen länger sein als die dritte Seite, damit die Konstruktion möglich sei.

Verallgemeinerung. Bringe die verschiedenen Fälle in Beziehung.

Dann ergibt sich:

Satz 38. a) Ein Dreieck lässt sich aus drei Seiten konstruieren. Dabei müssen immer zwei Seiten zusammen länger als die dritte Seite sein.

b) Der grössern von zwei Seiten des gezeichneten Dreiecks liegt der grössere Winkel gegenüber. Gleichen Seiten liegen gleiche Winkel gegenüber.

c) Ein gleichschenkliges Dreieck lässt sich zeichnen, wenn man die Länge seiner Grundlinie und eines Schenkels kennt.

d) Ein gleichseitiges Dreieck ist durch die Länge seiner Seite bestimmt.

Übungen.

Zeichne ein beliebiges Dreieck, und konstruiere ein kongruentes.

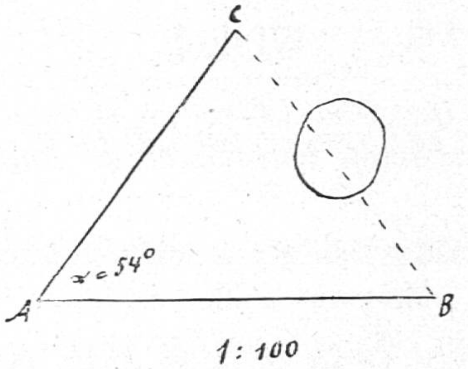
II. Gegeben zwei Seiten und der eingeschlossene Winkel.

1) *Zeichne den Plan eines dreiseitigen Grundstücks A B C, dessen eine Seite nicht direkt gemessen werden kann, weil ein Teich sich zwischen ihren Endpunkten befindet.*

Wir messen zwei Seiten, A C = 35 m und A B = 41 m, sowie den Winkel, den sie bilden mit Hilfe eines Transporteurs (oder mit einem genauen Winkelmessinstrument) $\alpha = 54^0$. Dann lässt sich das Grundstück A B C wie folgt im verkleinerten Massstab (z. B. 1 : 1000) zeichnen: Indirekte Messung von B C.

Wir zeichnen zuerst den Winkel $\alpha = 54^0$, messen auf dem einen Schenkels vom Scheitel A aus A B = 4,1 cm ab und auf dem andern A C = 3,5 cm. Dann erhalten wir die Eckpunkte B und C.

Fig. 34



Das Dreieck A B C ist aus 2 Seiten und dem von ihnen eingeschlossenen Winkel gezeichnet worden.

Miss die Seite B C, sowie W. β und W. γ. Alle Schüler müssen das gleiche Resultat bekommen, wenn sie genau gezeichnet haben. B C misst in der Zeichnung 3,49 cm, in der Natur also 34,9 m.

2) *Es soll die Entfernung zweier Marksteine A und B bestimmt werden, deren Verbindungsstrecke nicht direkt gemessen werden kann, weil sich dazwischen ein Hügel befindet.*

Wir stellen uns in einem Punkte C auf, von dem aus wir nach A und nach B messen können. Wir bestimmen die Länge von A C und B C, sowie die Grösse des eingeschlossenen Winkels γ und zeichnen das Dreieck A B C aus diesen 3 Stücken wie vorhin im verkleinerten Massstab (1 : 1000). Dann entnehmen wir A B der Zeichnung. Sie misst in der Natur so viele Meter wie Millimeter in der Zeichnung. (Es sei z. B. a = 60 m, b = 50 m, $\gamma = 88^0$.) Indirekte Messung der Entfernung zweier Marksteine.

3) Früher haben wir rechtwinklige Dreiecke aus den beiden Katheten gezeichnet, somit auch aus 2 Seiten und dem eingeschlossenen Winkel.

Verallgemeinerung. **Satz 39. Ein Dreieck lässt sich konstruieren aus zwei Seiten und dem eingeschlossenen Winkel.**

Übungen:

Zeichne das Dreieck A B C nach folgenden Angaben:

1) a = 6 cm, b = 4 cm, W. γ = 130°
2) a = 6 cm, b = 6 cm, W. γ = 90°
3) a = 6 cm, b = 6 cm, W. γ = 60°

Wie heisst ein jedes dieser Dreiecke? Miss alle Stücke.

III. Gegeben eine Seite und die beiden anliegenden Winkel.

1) *Zeichne eine Giebelfläche A B C, deren Basis 12 m misst, und deren schräge Kanten bezw. eine Neigung von 35° und 38° haben.*

Wir zeichnen zuerst die Basis A B und dann in A W. $\alpha = 35°$ in B W. $\beta = 38°$. Miss die beiden Seiten A C und B C, sowie W. γ. Aus welchen Stücken ist das Dreieck A B C gezeichnet worden?

2) *Zwischen zwei Punkten A und B auf dem Felde fliesst ein Fluss. Es soll die Entfernung von A und B indirekt bestimmt werden.*

Indirekte Messung von A B.

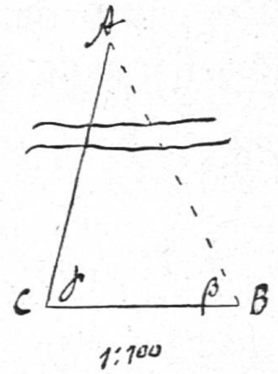
Wir messen von B aus eine beliebige Strecke B C (= 200 m), sowie ihre Winkel mit den Richtungen B A und C A, β und γ. ($\beta = 65°$, $\gamma = 75°$.)

Auf unserm Blatte zeichnen wir zuerst B C etwa im Massstabe 1 : 1000 , machen also a = 20 cm und tragen in B W. β und in C W. γ ab. Dann messen wir A B in der Zeichnung (30 cm). In der Natur misst sie so viele Meter wie in der Zeichnung Millimeter, also 300 m. Je grösser wir unsere Zeichnung machen, desto genauer wird das Resultat.

Aus wieviel und was für Stücken ist A B C gezeichnet worden? Miss auch A C. A C ist kleiner als A B. Dem kleinern Winkel β liegt die kleinere Seite gegenüber.

3) Konstruiere das Dreieck A B C, für welches a = 6 cm, W. β = W. γ = 70°. Miss die Seiten b und c. Sie sind einander gleich. Den zwei gleichen Winkeln liegen zwei gleiche Seiten gegenüber.

Fig. 35.



Verallgemeinerung. Aus was für Stücken haben wir in diesen drei Fällen das Dreieck konstruiert? Welches war der Zusammenhang zwischen den beiden gegebenen Winkeln und den ihnen gegenüberliegenden Seiten?

Satz 40. a) Ein Dreieck lässt sich aus einer Seite und den an ihr liegenden Winkeln konstruieren.

b) Sind diese Winkel ungleich, so liegt dem grösseren Winkel die grössere Seite gegenüber.

c) Sind die beiden Winkel gleich, so werden auch die Gegenseiten gleich.

Übungen:

1) Zeichne das Dreieck A B C, für welches
1) a = 6 cm, $\beta = 20^0$, $\gamma = 40^0$
2) a = 6 cm, $\beta = \gamma = 60^0$.

2) a) Wie hoch steigt man auf einer Strasse, die eine Neigung von 10° hat, wenn man 100 m zurücklegt? (Zeichne das rechtwinklige Dreieck aus der Hypotenuse und einem anliegenden Winkel im Massstab 1 : 100.)

b) Welchen Weg muss man auf dieser Strasse zurücklegen, um 20 m zu steigen? (Berechne zuerst den dritten Winkel des rechtwinkligen Dreiecks).

c) Welchen Weg hat man auf der Strasse zurückgelegt, wenn man in wagerechter Richtung um 100 m weiter gelangt ist?

Aus welchen Stücken hat man in diesen drei Fällen das rechtwinklige Dreieck gezeichnet?

Wie viele Winkel muss man beim rechtwinkligen Dreieck ausser einer Seite noch geben?

Sprich unsern Satz 40 für das rechtwinklige Dreieck aus.

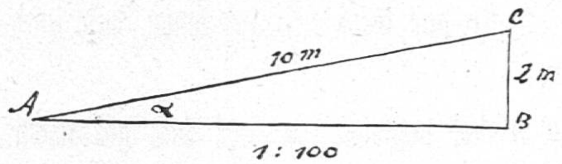
IV. Gegeben zwei Seiten und der der grössern Seite gegenüberliegende Winkel.

Indirekte Bestimmung der Neigung einer Rampe.

1) *Eine Rampe, mit der man eine Höhe von 2 m überwindet, hat eine Länge von 10 m. Welches ist ihre Neigung?*

Wir zeichnen ein seitliches Dreieck der Rampe im verkleinerten Massstab, indem wir zuerst einen rechten Winkel zeichnen, auf dem aufrechten Schenkel die Höhe (2 m) auftragen und vom Endpunkt aus mit einer Zirkelöffnung von der Rampenlänge einen Bogen schlagen, der den andern Schenkel schneidet. Dann können wir den Neigungswinkel messen. Wir finden $\alpha = 11^1/_2{}^0$.

Fig. 36.



Das Dreieck A B C ist aus den beiden Seiten B C und A C und aus dem der grössern von diesen beiden Seiten gegenüberliegenden Winkel A B C konstruiert worden.

Konstruktion eines Dreiecks.

2) Zeichne das Dreieck A B C nach folgenden Angaben:

A C = 6 cm, B C = 5 cm, W. β = 70^0.

Zeichne zuerst W. β, mache einen Schenkel = 5 cm, und beschreibe um den Endpunkt einen Bogen mit dem Radius 6 cm.

Verallgemeinerung. Aus was für Stücken haben wir in diesen 2 Fällen das Dreieck konstruiert?

Satz 41. a) Ein Dreieck lässt sich aus zwei Seiten und dem der grössern von diesen 2 Seiten gegenüberliegenden Winkel konstruieren.

b) Ein rechtwinkliges Dreieck lässt sich aus der Hypotenuse und einer Kathete konstruieren.

Übungen.

1) Welche Neigung hat eine Strasse, auf der man durchschnittlich 10 m steigt, wenn man 100 m zurücklegt?

2) Zeichne das Dreieck A B C aus $b = 8$ cm, $a = 5$ cm und $\beta = 40^0$.

J. Das schiefwinklige Parallelogramm.

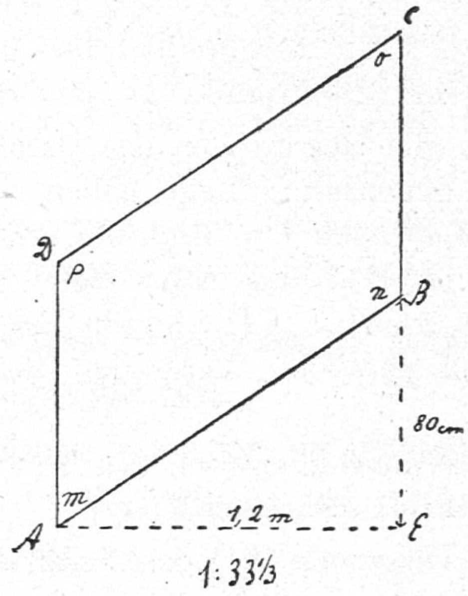
I. Eigenschaften und Konstruktion des schiefwinkligen Parallelogramms.

1) Wir befinden uns vor einer einfachen Steintreppe mit Eisengeländer am Eingange eines Hauses. Besprich den Zweck der Treppe etc. Beschreibung des Eisengeländers.

Aufgabe. *Es soll das Eisengeländer gezeichnet werden.*

a) Welche Masse müssen wir nehmen? Wir messen A E = 1,2 m, A D = B C = 90 cm, B E = 80 cm (Fig. 37 a). Dann können wir leicht die Figur A E B C D zeichnen.

Fig. 37 a.



Wir wollen nun die Geländerfläche A B C D genauer betrachten.

Die beiden Stäbe A D und B C sind beide vertikal, also parallel und auch gleich lang. Die Stangen A B und C D messen je 144 cm und haben gleiche Neigung (nämlich 33⁰), sind also auch parallel.

Wir nennen die Fläche A B C D ein *Parallelogramm.*

Je zwei Gegenseiten sind gleich und parallel.

Miss auch die Winkel. Die Winkel m und o heissen Gegenwinkel, ebenso die Winkel n und p, W. m = 57⁰ = W. o, W. n = 123⁰ = W. p.

Je zwei Gegenwinkel sind einander gleich. Das eine Paar ist spitz, das andere stumpf.

Erste Konstruktion des Parallelogramms.

b) Wir wollen nun das Parallelogramm A B C D herauszeichnen und ihm eine beliebige Lage geben. Wie geschieht das?

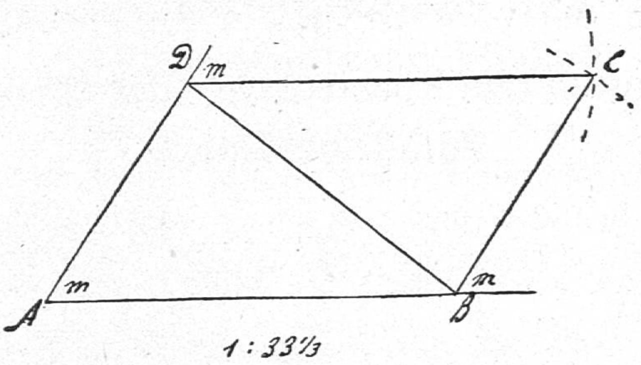


Fig. 37 b.

Wir tragen zuerst A B ab, dann den Winkel m und machen seinen zweiten Schenkel gleich A D. Ziehen wir die Verbindungslinie D B, welche *Diagonale* des Parallelogramms heisst, so brauchen wir bloss noch das Dreieck D B C aus seinen drei Seiten zu zeichnen. Wir beschreiben also um D einen Bogen mit Radius D C. Ihr Schnittpunkt ist der vierte Eckpunkt C.

So haben wir die Gegenseiten des Parallelogramms gleich gemacht. Welche gegenseitige Lage haben sie erhalten? Prüfe ihre Abstände. Miss auch den Richtungsunterschied von A D und A B, sowie von B C und A B. Beide Unterschiede sind 57°, also einander gleich. A D und B C haben daher dieselbe Richtung oder sind parallel. Weise das Gleiche von A B und D C nach.

Indem wir also die Gegenseiten von A B C D gleich gemacht haben, erhielten sie auch parallele Lage.

Wie teilt die Diagonale B D das Parallelogramm?

Zweite Konstruktion.

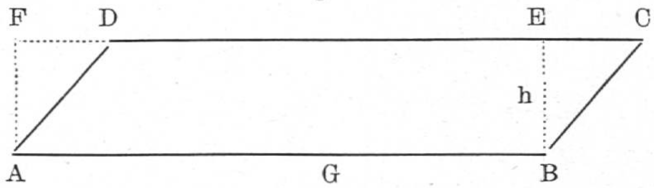
c) 2. Konstruktion. Wir zeichnen wieder zuerst A B, dann W. m und A D. Nachher tragen wir W. m = 57° bei B und D ab. Vergleiche dann die Länge der Gegenseiten. Wie gross ist die Summe aller vier Winkel des Parallelogramms? Sie machen die Winkel der beiden Dreiecke A B D und B C D aus; *folglich ist* ihre Summe = 360°. Zwei anstossende W. ergänzen sich daher zu 180°.

2) *Betrachte eine Treppe vor einem Hause mit Mauergeländer. Es soll die Seitenansicht dieser Geländermauer gezeichnet werden.*

Miss diese Seitenansicht aus. Sie ist von vier Seiten begrenzt. Das vertikale Paar von Gegenseiten misst je 80 cm. Die beiden schrägen Seiten messen je 2 m 70 cm und sind parallel. Diese Fläche ist auch ein Parallelogramm. Um es zeichnen zu können, messen wir noch die Diagonale D B = 2,25 m und zeichnen dann die beiden Dreiecke A B D und B C D aus ihren drei Seiten.

Die beiden Dreiecke A B D und B C D sind kongruent. Warum?

Fig. 38.



1 : 50.

Miss auch die Winkel dieses Parallelogramms, und weise nach, dass auch hier dieselben Beziehungen bestehen wie beim Parallelogramm, das wir zuerst gezeichnet haben.

Auf welche Arten könnte man dieses Parallelogramm noch zeichnen? Welche Diagonale könnte man noch ziehen?

Verallgemeinerung. Gib die gemeinsamen Merkmale der beiden gezeichneten Vierecke an. Wie haben wir sie konstruiert?

Satz 42. a) In einem Parallelogramm sind je zwei Gegenseiten gleich und parallel und je zwei Gegenwinkel gleich.

b) Ein Parallelogramm zeichnet man aus zwei anstossenden Seiten und dem von ihnen eingeschlossenen Winkel oder aus zwei anstossenden Seiten und aus der Diagonale, die sie verbindet.

c) Eine Diagonale teilt das Parallelogramm in zwei kongruente Dreiecke.

d) Die Summe der vier Winkel eines Parallelogramms beträgt vier Rechte. Je zwei anstossende Winkel ergänzen sich zu zwei Rechten.

II. Inhalt des schiefwinkligen Parallelogramms.

1) Aufgabe. *Berechne die Erstellungskosten der vorhin besprochenen Geländermauer à 15 Fr. pro m^3.*

a) Wir werden zuerst das Volumen der Mauer zu berechnen haben. Denken wir uns die Mauer so umgelegt, dass ein Parallelo- Berechnung der Geländermauer.

gramm auf den Boden kommt, so sehen wir, dass sie als vierseitiges senkrechtes Prisma aufgefasst werden kann, dessen Grundfläche das Parallelogramm, dessen Höhe die Mauerdicke ist (= 40 cm). Ein solches Prisma wird aber nach der Regel $J = G \times H$ berechnet. Daher müssen wir zuerst das Parallelogramm berechnen.

b) Wir denken uns über A B das Rechteck A B E F gezeichnet. Dieses kann man aus dem Parallelogramm A B C D hervorgehen lassen, indem man rechts das Dreieck B C E abschneidet und es links anlegt. Dadurch geht das Parallelogramm A B C D in das inhaltsgleiche Rechteck A B E F über, dessen Inhalt gefunden wird, indem man die Grundlinie A B und die Höhe B E (h) misst und ihre Masszahlen multipliziert. Dieses Produkt liefert uns auch den Inhalt des Parallelogramms. Bezeichnen wir die Grundlinie A B mit g und den senkrechten Abstand derselben von der Gegenseite D C, welchen man Höhe des Parallelogramms nennt, mit h, so gilt für letzteres die Regel:

Flächeninhalt $f = g \times h = 27 \times 6$ dm²; denn h misst 60 cm.

c) Nun ist: Inhalt der Geländermauer $= 27 \times 6 \times 4$ dm³ $=$ 648 dm³ $=$ 0,648 m³. Demnach werden die Erstellungskosten $0{,}648 \times 15$ Fr. $= 9{,}72$ Fr. betragen haben.

2) Bestimme auch den Flächeninhalt des Parallelogramms, das wir zuerst besprochen hatten.

Verallgemeinerung. Wir haben unsere beiden Parallelogramme mit Rechtecken verglichen. Bei den Rechtecken sind die Gegenseiten auch parallel und gleich. Sie sind daher auch Parallelogramme. Bei den Rechtecken stehen die anstossenden Seiten auf einander senkrecht; sie sind also *rechtwinklige Parallelogramme.* Bei den beiden Treppengeländern stehen die anstossenden Seiten schief zu einander. Man nennt deshalb diese zwei Parallelogramme *schiefwinklige Parallelogramme* oder *Rhomboide.*

Satz 43. Sind in einem Viereck die Gegenseiten parallel und gleich und stehen je zwei anstossende Seiten schief zu einander, so heisst es schiefwinkliges Parallelogramm oder Rhomboid; stehen je zwei anstossende Seiten rechtwinklig zu einander, so heisst es rechtwinkliges Parallelogramm oder Rechteck.

Was haben wir bezüglich der Inhaltsbestimmung unserer beiden schiefw. Parallelogramme gezeigt?

Satz 44. Ein schiefwinkliges Parallelogramm ist inhaltsgleich einem Rechteck von gleicher Grundlinie und gleicher Höhe. Es wird also berechnet, indem man seine Grundlinie und seine Höhe misst und die beiden Masszahlen multipliziert. Die Höhe ist der senkrechte Abstand der Grundlinie von der Gegenseite.

Übungen.

1) Miss die sichtbaren Wandflächen in einem Treppenhause aus, und berechne den Anstrich à 80 Cts. pro m² (wenn sie Parallelogramme sind). Die Grundkante des Parallelogramms misst z. B. 3,6 m, seine Höhe 1,7 m. Was müsste gemessen werden, um diese Flächen genau im verkleinerten Massstab zeichnen zu können? Ein kleiner Streifen hat gewöhnlich einen besonderen Anstrich. Berechne ihn.

2) Beschreibe einen Balken, der zu einem Treppenhause verwendet wird. Zwei seiner Seitenflächen sind Parallelogramme. Miss seine Ausdehnungen, und berechne sein Volumen. Als was für einen Körper können wir ihn auffassen, wenn wir ihn auf eins seiner Parallelogramme legen?

Z. B. Seine Länge messe 3,6 m, seine Breite 20 cm, seine Höhe 25 cm. Zeichne ein solches Parallelogramm im verkleinerten Massstabe.

3) Zeichne das Parallelogramm A B C D, wenn A B = 7 cm, A D = 5 cm, W. B A D = 60° misst. Gib sofort die Grösse der übrigen Winkel an.

4) Ein Parallelogramm besitze einen rechten Winkel. Wie gross sind die übrigen Winkel?

III. Das verschiebbare Rechteck.

1) Wir wollen schiefwinklige Parallelogramme noch auf eine neue Art entstehen lassen.

Konstruiere mit vier Stäbchen, wovon je zwei gleich lang sind, ein verschiebbares Rechteck. Drücke es dann zusammen. Was für eine Figur entsteht? Zeichne die Stellung, in der zwei anstossende Seiten einen Winkel von 60° bilden. Drücke noch mehr zusammen. Was lässt sich über den Inhalt der Fläche aussagen, welche die Stäbchen einschliessen? Das verschobene Rechteck.

Man nennt das Rhomboid mitunter auch *verschobenes Rechteck.*

Das verschobene Quadrat.

2) Nimm nun 4 gleich lange Stäbchen, und lege sie zu einem Quadrat zusammen. Was für Parallelogramme entstehen beim Zusammendrücken? Es entstehen schiefwinklige, aber gleichseitige Parallelogramme. Die früher behandelten schiefwinkligen Parallelogramme kann man im Gegensatz hiezu ungleichseitig nennen. Zeichne das verschobene Quadrat in verschiedenen Stellungen. Wir nennen eine solche Figur ein *schiefwinkliges, gleichseitiges Parallelogramm* oder einen *Rhombus* (eine Raute), mitunter auch verschobenes Quadrat.

Weise Mineralien vor, deren Flächen Rhomben sind. (Krystallform des Granats).

IV. Einteilung der Parallelogramme bezüglich der Seiten und Winkel.

Vergleiche nochmals die Merkmale der verschiedenen Parallelogramme, die wir behandelt haben.

Bezüglich der Seiten und Winkel kann man folgende Arten von Parallelogrammen unterscheiden:

1) Das schiefwinklige und ungleichseitige Parallelogramm oder das Rhomboid;
2) Das rechtwinklige und ungleichseitige Parallelogramm oder das Rechteck;
3) Das schiefwinklige und gleichseitige Parallelogramm oder den Rhombus;
4) Das rechtwinklige und gleichseitige Parallelogramm oder das Quadrat.

K. Das Trapez.

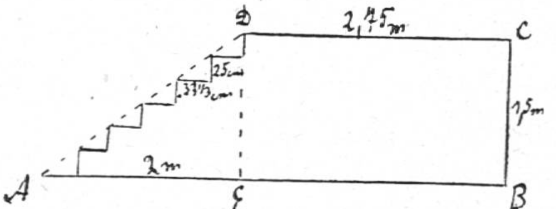
I. Das rechtwinklige Trapez.

1) Aufgabe. *Es soll die Seitenansicht des Mauerwerks der Treppe, deren Geländer besprochen wurde, gezeichnet und der Rauminhalt des Mauerwerks berechnet werden.*

Ansicht des Mauerwerks.

a) Betrachte also die Fläche der Treppe, die mit der Hausmauer parallel läuft. Wir denken uns die Geländerstange A D hinzu und fassen die Figur A B C D ins Auge. Diese können wir uns zusammengesetzt denken aus dem rechtwinkligen Dreieck A E D und dem Rechteck E B C D. Um sie zeichnen zu können, müssen wir die Länge von A E, E B und B C kennen. A E = 2 m, E B = 2,75 m, B C = 1,5 m.

Fig. 39.



Die Figur A B C D hat ein Paar parallele Gegenseiten, A B und D C, die jedoch ungleich lang sind. Das andere Seitenpaar A D und B C ist zu einander schief. Wir nennen diese Figur ein *Trapez.* Ihre Konstruktion ergibt sich unmittelbar.

Berechnung des Mauerwerks.

b) Wieviel m^3 Material enthält nun das Treppenmauerwerk? Wir denken uns für einen Augenblick die Stufen bis zur Linie A D ausgefüllt und das ganze Mauerwerk auf die Fläche A B C D gelegt; dann hat es die Form eines vierseitigen senkrechten Prismas, dessen Grundfläche das Trapez A B C D und dessen Höhe die Breite der Treppe ist, welche 1,2 m beträgt; sein Inhalt ist $G \times H$.

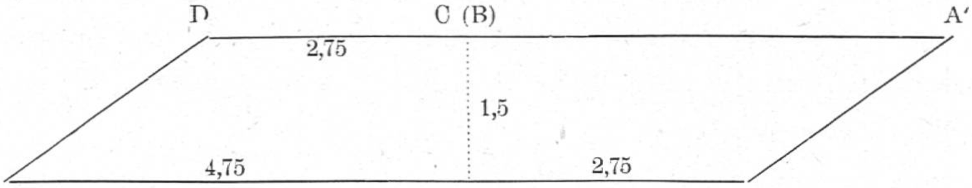
Demnach müssen wir zuerst das Trapez A B C D berechnen.

Erste Art. $ABCD = AED + EBCD = \frac{2 \times 1{,}5}{2}\ m^2 + 2{,}75 \times 1{,}5\ m^2 = 5{,}625\ m^2$.

Zweite Berechnung des Trapezes.

Zweite Art. Wir drehen das Trapez und legen es an B C; dann entsteht das Parallelogramm A D' A' D, dessen Grundlinie so

Fig. 40.



lang wie die beiden parallelen Trapezseiten, dessen Höhe gleich ihrem senkrechten Abstande ist, welcher auch Höhe des Trapezes heisst. Das Trapez A B C D ist die Hälfte dieses Parallelogramms, somit:

Flächeninhalt des Trapezes A B C D $= \frac{1}{2}$ (A B + D C) $\times$ B C $= \frac{1}{2}$ (4,75 + 2,75) $\times$ 1,5 m² = 5,625 m².

Wir erhalten daher den Inhalt des Trapezes A B C D, indem wir seine Höhe und die beiden parallelen Seiten messen und die halbe Summe dieser beiden letzteren mit der Höhe multiplizieren. Nun ist der Inhalt des senkrechten Prismas = Trapez $\times$ Treppenbreite = 5,625 $\times$ 1,2 m³ = 6,75 m³.

Inhalt des Prismas mit trap. Grundfläche.

Um den Inhalt des Mauerwerks zu erhalten, müssen wir noch die 6 dreieckigen Prismen abziehen, mit welchen wir uns die Treppenstufen ausgefüllt dachten.

Eine Stufe ist $\frac{2\text{ m}}{6} = 33^1/_3$ cm breit und $\frac{1{,}5\text{ m}}{6} = 25$ cm hoch. Die Grundfläche eines solchen dreiseitigen Prismas misst daher: $\frac{3^1/_3 \times 2^1/_2}{2}$ dm².

Sein Inhalt ist daher $= G \times H = \frac{3^1/_3 \times 2^1/_2}{2} \times 12$ dm³ = 50 dm³.

Inhalt dieser 6 Prismen = 6 . 50 dm³ = 300 dm³ = 0,3 m³.
Inhalt des Mauerwerks = 6,75 m³ — 0,3 m³ = 6,45 m³.

II. Das gleichschenklige Trapez.

2) Aufgabe. *Betrachte eine Doppeltreppe mit Holzgeländer, die auf beiden Seiten gleich lang ist und auf wagerechtem Boden steht. Zeichne die Seitenansicht der Treppe mit Geländer, und berechne den Rauminhalt des Mauerwerks.*

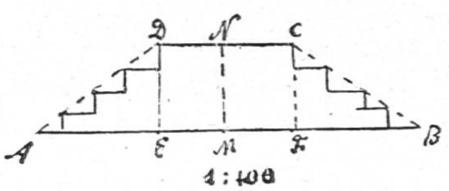
Die Doppeltreppe.

a) Beschreibe die Treppe. Wir gehen von der Symmetrieachse M N der Treppenfläche aus, welche zur Hausmauer parallel läuft (der Seitenansicht der Treppe), und können uns dann die Doppeltreppe aus 2 gleichen einfachen Treppen zusammengesetzt denken, wovon die eine links von der Symmetrieachse die andere rechts davon liegt.

Nimm die notwendigen Masse.

M A = M B = 2 m, N D = N C = 70 cm, M N = 90 cm, Geländerhöhe = 90 cm, Treppenbreite = 1,4 m. Die schrägen Geländerflächen sind zwei gleiche Parallelogramme. Solche haben wir zu zeichnen und zu berechnen gelernt.

Fig. 41.



Um die Figur A B C D (Ansicht des Treppenhauses) zu konstruieren, zeichnen wir zuerst die Symmetrieachse M N und tragen dann senkrecht zu ihr M A und M B, ferner N D und N C ab. Dadurch entstehen die beiden kongruenten Trapeze M N D A und M N C B, die wir durch Umklappen um M N zur Deckung bringen könnten. Daraus folgt, dass A D = B C ist, dass W. M A D = W. M B C und dass W. N D A = W. N C B ist. Die ganze Figur A B C D hat ein Paar Gegenseiten parallel und ungleich, das andere Paar schief zu einander und gleich; sie heisst *gleichschenkliges Trapez.* (Denken wir uns A D und B C verlängert, so würden sich diese in der Verlängerung der Symmetrieachse M N treffen, und es entstünde ein gleichschenkliges Dreieck.) Es heisst auch *symmetrisches* Trapez, weil es eine Symmetrieachse besitzt.

Konstruktion des Trapezes.

Das Trapez der einfachen Treppe und die beiden Trapeze A M N D und M B C N, bei welchen eine der nicht parallelen Seiten zu den parallelen senkrecht steht, heissen dann *rechtwinklige Trapeze.*

b) Nun wollen wir das Mauerwerk berechnen.

Berechnung des Trapezes und des Mauerwerks.

Die Überlegung, die wir bei Berechnung der einfachen Treppe machten, zeigt uns, dass der Inhalt des Mauerwerks gleich Trapez $\times$ Treppenbreite — 8 kleine dreiseitige Prismen ist. Wir berechnen zuerst das gleichschenklige Trapez A B C D.

Erste Art. $ABCD = 2\,(AMND) = 2\,\frac{(AM + DN)\,.\,MN}{2} = (2 + 0{,}7)\,.\,0{,}9 = 2{,}43\ m^2.$

Zweite Art. Drehe A B C D um, und lege es an B C (wie früher das rechtw. Trapez); dann folgt $ABCD = \frac{1}{2}\,(AB + DC) \times MN = \frac{1}{2}\,(4 + 1{,}4)\,.\,0{,}9\ m^2 = 2{,}43\ m^2.$

Das gleichschenklige Trapez A B C D wird also berechnet, indem man seine Höhe (d. h. den Abstand seiner parallelen Seiten) und seine parallelen Seiten misst und die halbe Summe der Masszahlen dieser letzteren mit der Masszahl der Höhe multipliziert.

Nun ist der Inhalt des Mauerwerks mit ausgefüllten Stufen $= 2{,}43\,.\,1{,}4\ m^3 = 3{,}402\ m^3$.

Hievon müssen wir noch die 8 kleinen dreiseitigen Prismen in Abzug bringen.

Die Grundfläche eines solchen Prismas ist ein rechtwinkliges Dreieck, dessen Katheten $\frac{1,3}{4}$ m $=$ 0,325 m und $\frac{0,9}{4}$ m $=$ 0,225 m messen, dessen Inhalt also $= \frac{0,325 \,.\, 0,225}{2}$ m² ist.

Inhalt eines dreiseitigen Prismas

$$= \frac{0,325 \,.\, 0,225}{2} \,.\, 1,4 \text{ m}^3.$$

Inhalt der 8 dreiseitigen Prismen

$$= \frac{0,325 \,.\, 0,225 \,.\, 1,4}{2} \,.\, 8 \text{ m}^3 = 0,409 \text{ m}^3.$$

Inhalt des Mauerwerks

$$= 3,402 \text{ m}^3 - 0,409 \text{ m}^3 = 2,993 \text{ m}^3, \text{ ung. } 3 \text{ m}^3.$$

III. Das Trapez mit ungleich langen schrägen Seiten.

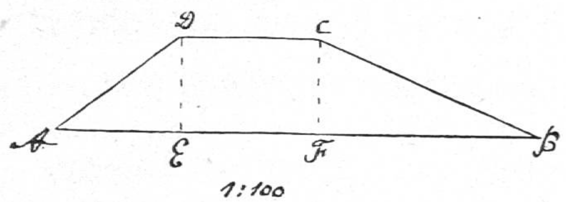
Es gibt auch Doppeltreppen, bei welchen die beiden Treppen ungleich lang und ungleich geneigt sind.

3) Aufgabe. *Zeichne auch die Seitenansicht eines solchen Trapezes.*

Berechnung des ungleichseitigen Trapezes.

Die Gegenseiten A D und B C sind hier ungleich lang; die längere B C ist weniger geneigt als die kürzere A D. Die Abstände D E und C F sind beide $=$ 1 m; folglich sind A B und D C parallel.

Fig. 42.



Die Figur A B C D heisst auch Trapez. Um sie zeichnen zu können, haben wir gemessen: A E $=$ 1,3 m, D C $=$ E F $=$ 1,4 m, F B $=$ 2,3 m und D E $=$ C F $=$ 1 m. Hier sind die Dreiecke A D E und B F C nicht gleich.

Zeige, dass der Inhalt dieses Trapezes auf gleiche Weise berechnet wird wie der Inhalt des rechtwinkligen und gleichschenkligen Trapezes.

Inhalt von A B C D $= \frac{1}{2}$ (A B $+$ D C) . D E $= \frac{1}{2} \,.\, (5 + 1,4) \,.\, 1$ m² $=$ 3,2 m².

Verallgemeinerung. Welche Merkmale haben die behandelten Trapeze gemein?

Satz 45. a) Beim Trapez sind 2 Gegenseiten parallel und ungleich, die beiden andern schief zu einander.

b) Sind die beiden letztern gleich lang, so heisst das Trapez gleichschenklig oder symmetrisch.

c) Steht eine der nicht parallelen Seiten zu den parallelen Seiten senkrecht, so heisst das Trapez rechtwinklig.

Satz 46. Der Inhalt des Trapezes wird gefunden, indem man die halbe Summe der parallelen Seiten mit ihrem Abstande (Höhe des Trapezes) multipliziert.

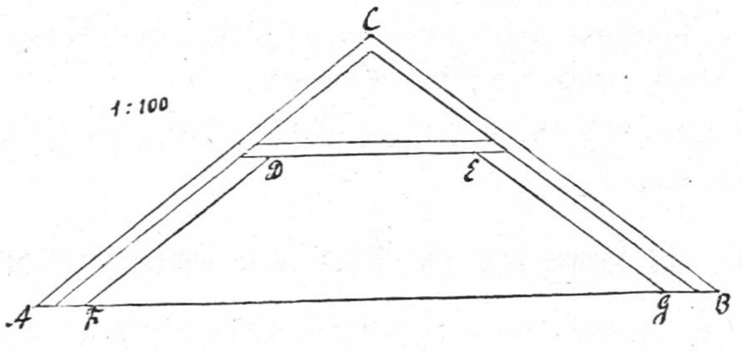
Übungen.

1) Zur Aufbewahrung von Tannenzapfen hat man einen Schopf mit Pultdach konstruiert, welcher folgende Dimensionen hat: Länge 4,5 m, Breite 3,2 m, vordere Höhe = 2,7 m, hintere Höhe = 1 m. Wieviel m^3 Tannenzapfen hält dieser Schopf? Zeichne sein Netz, und beschreibe ihn genau. Als was für einen Körper kann man ihn auffassen, wenn man ihn auf eines seiner Trapeze gelegt denkt? Was für Trapeze sind zwei seiner Seitenflächen?

Berechne auch den Preis der Bretter à 2 Fr. pro m^2.

2) Betrachte auf dem Estrich eine Dachstuhlkonstruktion. Wo kommt bei derselben die Form eines Parallelogramms und des Trapezes vor? Was kosten diese Balken, wenn A C und B C 13 cm hoch und 15 cm breit, D E 18 cm hoch und 15 cm breit, F D und G E 20 cm breit und 20 cm hoch sind? Entnimm die Länge der Balken aus der Zeichnung. (Fig. 43.)

Fig. 43.



3) Der Trog eines Mistwagens ist 95 cm lang und oben 95 cm breit, unten 77 cm breit und 27 cm hoch; zeichne sein Netz, und berechne, wieviel er hält.

4) Der Trog eines andern Mist-, Erd- oder Sandwagens ist 1,8 m lang, oben 72 cm, unten 46 cm breit und 27 cm hoch. Wieviel hält er, wenn er eben voll gemacht wird?

5) Zeichne das Fenstergesims, und berechne die Wandmauer abzüglich die Fenster.

6) Berechne den Flächeninhalt folgender Bretter:

1)	Länge 5,45 m,	obere Breite 47 cm,	untere Breite 38 cm.
2)	„ 6,12 m,	„ „ 53 cm,	„ „ 41 cm.
3)	„ 4,78 m,	„ „ 32 cm,	„ „ 27 cm.

L. Allgemeines über Vierecke. Das Vieleck.

I. Einteilung und allgemeine Eigenschaften der Vierecke.

1) Welche Figuren heissen Vierecke?

2) *Einteilung der Vierecke.*

Der Boden des schiefwinkligen Zimmers, den wir in Kapitel C besprochen haben, ist ein Viereck, in welchem keine Seiten parallel laufen. Man nennt ein solches Viereck ein Trapezoid. Vierecke mit einem Paar paralleler Gegenseiten haben wir Trapeze, und Vierecke, bei welchen beide Gegenseitenpaare parallel sind, haben wir Parallelogramme genannt.

Bezüglich der gegenseitigen Lage der Seiten teilt man also die Vierecke in *Trapezoide, Trapeze* und *Parallelogramme* ein.

3) Was versteht man unter einer Diagonale eines Vierecks? Wie viele Diagonalen hat das Viereck?

4) Welche Eigenschaft bezüglich der Winkel ist allen Vierecken gemeinsam?

Satz 47. Die Summe aller vier Winkel eines Vierecks beträgt 360°.

Gib den Beweis dafür. (Durch Zerlegung in 2 Dreiecke.)

II. Das Ausmessen vierseitiger Grundstücke.

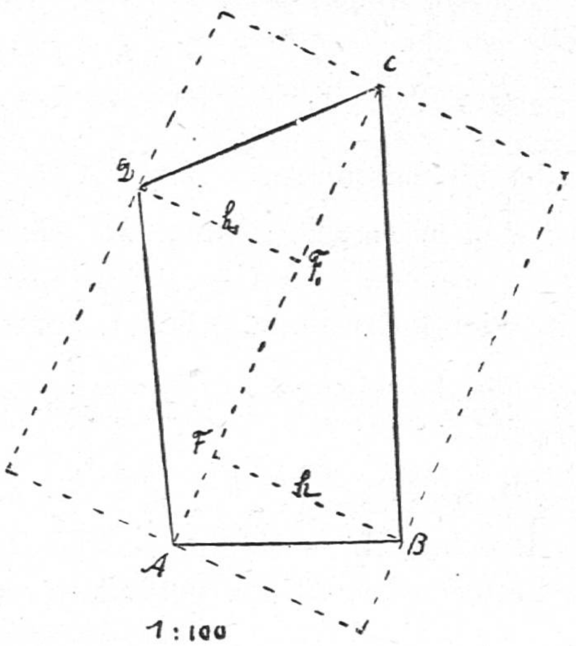
1) Wir haben früher Grundstücke ausgemessen, welche die Form eines Rechtecks hatten. Nun wollen wir zeigen, wie man beliebige vierseitige Grundstücke aussmisst.

Das Ausmessen eines vierseitigen Ackers.

Aufgabe. *Wir befinden uns auf einem vierseitigen Acker A B C D. Es soll sein Wert à 1 Fr. 25 Rp. pro m² berechnet werden.*

a) Bei den Marksteinen A, B, C und D stecken wir Stöcke ein (man bezeichnet diese 4 Punkte). Dann zerlegen wir das Vierek A B C D durch die Diagonale A C in zwei Dreiecke A B C und A C D. Um die Diagonale auf dem Acker zu bezeichnen, stecken wir zwischen A und C noch einige Stöcke ein, achten aber genau darauf, dass alle Stöcke in gerader Linie liegen. Um zunächst das Dreieck A B C zu berechnen, müssen wir die Grundlinie A C und die zugehörige Höhe F B messen. Die Höhe muss zunächst bezeichnet werden; wir müssen ihren Fusspunkt F bestimmen. Stelle dich zu diesem Zwecke mit seitwärts ausgestreckten Armen in der Richtung von A C auf, und bewege dich in dieser Richtung hin und her, bis dein Gesicht nach B sieht. Dann befindest du dich auf F. Um F genau zu bestimmen, bedient man sich dor Kreuzscheibe (Winkelkreuz). Hat man F gefunden, so steckt man nach Bedarf zwischen F und B noch einen oder mehrere Punkte ab und misst die Höhe F B (h). Es sei A C = 51,2 m, F B = h. = 22,4 m.

Fig. 44.



Dann ist der Inhalt von Dreieck A B C

$$= \frac{g \,.\, h}{2} = \frac{51{,}2 \,.\, 22{,}4}{2} \text{ m}^2 = 573{,}44 \text{ m}^2.$$

Dann bestimmen wir auf gleiche Weise den Fusspunkt F_1 der Höhe von D auf A C und messen D F_1 = h_1 = 17,6 m.

Der Inhalt des Dreiecks

$$\text{A C D} = \frac{g \,.\, h_1}{2} = \frac{51{,}2 \,.\, 17{,}6}{2} \text{ m}^2 = 450{,}56 \text{ m}^2.$$

Inhalt des Vierecks

$$\text{A B C D} = \frac{g \,.\, h}{2} + \frac{g \,.\, h_1}{2} = 1024 \text{ m}^2 = 10{,}24 \text{ Ar.}$$

b) Wir können diese Rechnung etwas vereinfachen. Statt die halbe Grundlinie $\left(\frac{51{,}2}{2}\right)$ zuerst mit h, dann mit h_1 zu multiplizieren und dann die Produkte zu addieren, können wir $\frac{g}{2}$ mit der Summe der beiden Höhen (h + h_1) multiplizieren.

$$\text{f.} = \frac{g}{2}\,(h + h_1) = \frac{51{,}2}{2}\,(22{,}4 + 17{,}6) \text{ m}^2 = 25{,}6 \,.\, 40 \text{ m}^2$$
$$= 1024 \text{ m}^2.$$

Die Richtigkeit dieser Berechnung lässt sich auch geometrisch leicht beweisen. Zeichne zu A B C und zu A C D das Rechteck von gleicher Grundlinie (A C) und gleicher Höhe. Beide Rechtecke zusammen haben doppelt so viel Inhalt wie die beiden Dreiecke oder wie das Viereck; sie bilden zusammen ein Rechteck, dessen Grundlinie gleich g, dessen Höhe gleich der Summe der beiden Höhen h und h_1 ist. Der Inhalt dieses grossen Rechtecks ist also = g (h + h_1); der Inhalt des Vierecks A B C D somit $= \frac{g \,.\, (h + h_1)}{2}$

Kaufpreis des Grundstücks = 1024 . 1,25 Fr. = 1280 Fr.

c) Was müssten wir noch messen, um den Plan der Wiese genau zeichnen zu können? A F = 10 m und C F_1 = 20 m (siehe Kapitel C), oder auch die sämtlichen Seiten des Vierecks.

2) Miss verschiedene vierseitige und dreiseitige Grundstücke aus, und berechne sie.

3) Bei einer Wiese messe A C = 87,2 m, h = 37,5 m und h_1. = 43,6 m. Berechne ihren Kaufpreis à 80 Rp. pro m². Wie gross wäre ihr Kaufpreis zu 2,5 Fr. per Klafter (1,8 m Seite)?

4) a) Ein Bauplatz A B C D wird à 12 Fr. pro m^2 gekauft. Seine Diagonale B D misst 24,5 m, die Höhe von A aus 14,2 m, diejenige von C aus 13 m. Der erste Fusspunkt ist von B um 11 m, der zweite von D um 9 m entfernt. Zeichne den Plan, und berechne den Kaufpreis.

b) Ein Weinberg hat die Form eines rechtwinkligen Trapezes. Seine parallelen Seiten messen bezw. 54 m und 47,8 m; seine Höhe misst 29,2 m. Welchen Wert hat er à 3,25 Fr. per m^2? Wieviel zahlt man jährlich für die Bearbeitung dieses Weinbergs, wenn man durchschnittlich 70 Fr. für 250 Klafter (à 2,1 m Seite) zahlt?

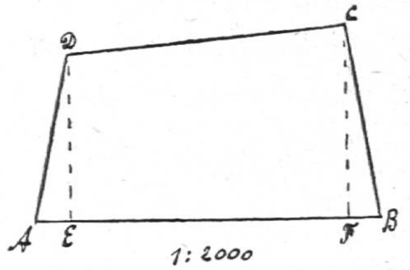
Ausmessung durch Zerlegung in Trapeze und Dreiecke.

5) Ein Weinberg von der Form von Fig. 45 soll ausgemessen werden. Die Rebstickelreihen mögen annähernd senkrecht zu A B stehen.

Die Diagonale A C wäre nicht leicht zu messen; deshalb zerlegt man das Viereck A B C D in das Trapez E F C D und in die beiden Dreiecke A E D und F B C. Man sucht mit Hilfe der Kreuzscheibe die Fusspunkte E und F und misst die Strecken: A E, E F, F B, D E und C F.

A E = 7,9 m, E F = 56,3 m, F B = 5,8 m, D E = 34,2 m, C F = 40,3 m.

Fig. 45.



Wieviel Ar misst dieser Weinberg?

Er ist für 2850 Fr. gekauft worden. Wieviel hat man per m^2 bezahlt?

Was kostet das zweimalige Bespritzen dieser Reben à 60 Rp. pro Ar?

6) Miss mehrere solcher Grundstücke aus.

III. Das Ausmessen von Grundstücken, die mehr als vier Ecken besitzen. Das Vieleck.

1) Es soll eine fünfeckige Wiese ausgemessen werden. Wir zerlegen sie durch Diagonalen in Dreiecke und messen jedes einzelne Dreieck aus.

2) Skizziere eine sechs- und eine siebeneckige Wiese, und gib an, wie diese zu berechnen sind.

Verallgemeinerung. Grundstücke können Drei-, Vier-, Fünf-, Sechsecke u. s. f. sein. Man bezeichnet diese Figuren mit dem gemeinsamen Namen *Vieleck* oder *Polygon.* Zählt die verschiedenen Arten von Vielecken auf, die behandelt worden sind. Durch welche Zerlegung konnten wir diese Vielecke berechnen?

Satz 48. Ein Vieleck kann berechnet werden, indem man es durch Diagonalen in Dreiecke zerlegt und letztere einzeln berechnet.

M. Konstruktion der Symmetrieachse und Anwendungen.

1) Welche der bisher behandelten Figuren zeigen Symmetrie? (Das Quadrat, das Rechteck, das gleichschenklige Dreieck, der Kreis, das regelmässige Sechseck, der Rhombus und das gleichschenklige Trapez.) Zeichnet solche Figuren an die Wandtafel, und konstruiert ihre Symmetrieachsen.

Wie viele Symmetrieachsen hat jede dieser Flächen?

Wie haben wir die Symmetrieachsen gezeichnet?

In jedem Fall kam diese Konstruktion darauf hinaus, eine Strecke zu halbieren und in ihrer Mitte die Senkrechte zu errichten.

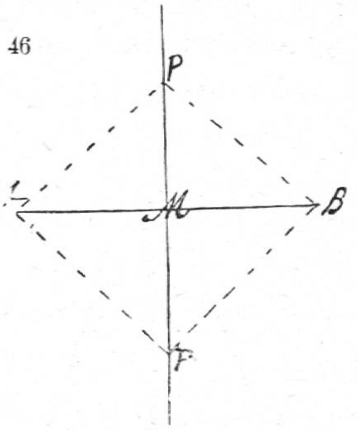
2) *Wir wollen nun zeigen, wie man eine Strecke halbiert oder die Senkrechte in ihrer Mitte, d. h. die Symmetrieachse der Strecke zeichnet, ohne den Massstab zu gebrauchen.*

Eigenschaften der Punkte auf der Symmetrieachse einer Strecke.

a) Zunächst wollen wir nochmals die Symmetrieachse der Strecke A B zeichnen, indem wir sie messen und im Mittelpunkt mit Benutzung des rechtwinkligen Dreiecks die Senkrechte errichten. Welche Eigenschaft haben ihre Punkte?

Verbinden wir irgend einen davon, etwa P, mit den Endpunkten A und B der Strecke, so entstehen zwei kongruente rechtwinklige Dreiecke, die durch Umklappung um die Symmetrieachse zur Deckung kommen, weil M A = M B und W. A M P = W. B M P = 90° ist. Folglich ist *A P = B P.* P hat also gleichen Abstand von A wie von B. Zeige dasselbe für andere Punkte der Symmetrieachse.

Fig. 46



Satz 49. Jeder Punkt der Symmetrieachse der Strecke A B hat gleichen Abstand vom Endpunkt A wie vom Endpunkt B.

Was gilt von den Punkten rechts, was von den Punkten links von der Symmetrieachse? Die Punkte rechts sind näher an B, die Punkte links näher an A.

Konstruktion der Symmetrieachse einer Strecke.

b) Wir werden also die Symmetrieachse erhalten, wenn wir zwei Punkte konstruieren, die von A wie von B gleichen Abstand haben. Zu diesem Zwecke beschreiben wir mit einer Zirkelöffnung, die grösser als die Hälfte von A B ist, einen Kreisbogen um A und einen solchen um B. Diese Bogen schneiden sich in zwei Punkten, die von A wie von B gleichen Abstand haben. Ihre Verbindungslinie ist die Symmetrieachse der Strecke A B; sie geht durch die Mitte von A B und steht auf ihr senkrecht.

3) Konstruiere auf gleiche Weise die Symmetrieachse eines Rechtecks und eines gleichschenkligen Trapezes.

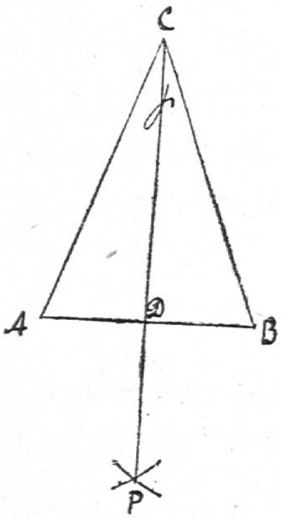
4) Konstruiere die Symmetrieachse des gleichschenkligen Dreiecks A B C (Fig. 47). Sie geht durch C und ist Symmetrieachse der Grundlinie A B. Wir brauchen hier nur noch einen Punkt zu konstruieren, der von A wie von B gleich weit entfernt ist.

Die Symmetrieachse C D halbiert auch den Winkel an der Spitze und heisst auch Symmetrieachse oder Halbierende des Winkels γ.

5) Aus Figur 47 ergibt sich unmittelbar die Konstruktion für die Halbierende eines Winkels γ.

Wir tragen auf den Schenkeln zwei gleiche Stücke C A und C B ab, beschreiben um A und B mit gleicher Zirkelöffnung zwei Bogen; nach ihrem Schnittpunkte geht die Winkelhalbierende. Zeichne einen Winkel, und halbiere ihn.

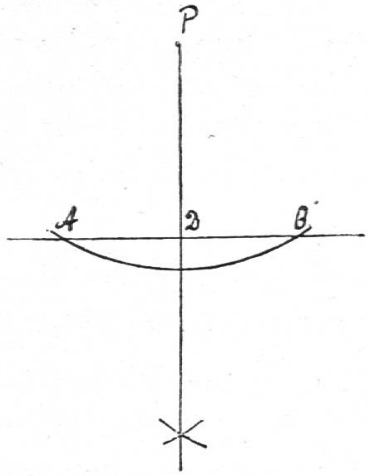
Fig. 47



6) Konstruiere die Symmetrieachsen der drei Winkel eines Dreiecks.

7) Von einem Punkte P ausserhalb einer Geraden eine Normale auf diese zu fällen und zwar ohne Benutzung des Dreiecks.

Fig. 48



Beschreibe um P einen Kreisbogen, der die Grade schneidet, und konstruiere die Symmetrieachse der Strecke zwischen diesen beiden Schnittpunkten.

8) In einem Punkte D einer Geraden die Normale zu ihr zu errichten. Wir machen D A = D B und konstruieren die Symmetrieachse.

Anwendung auf den Kreis.

9) Einen Kreis in 8, 16, 32 u. s. f., ferner in 12, 24, 48 . . gleiche Teile einzuteilen.

Durch zwei zu einander senkrechte Durchmesser wird der Kreis in vier gleiche Teile eingeteilt. Um ihn in 8 gleiche Teile einzuteilen, konstruieren wir zu jeder Sehne die Symmetrieachse. Welcher Punkt ist den Symmetrieachsen aller Sehnen gemeinsam? Wie erhält man nun 16 gleiche Teile?

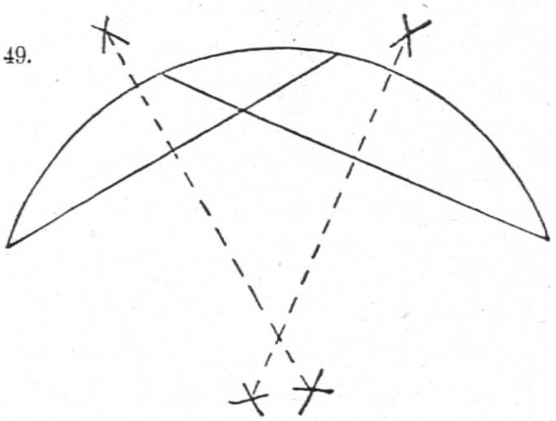
Auf gleiche Weise geht man von der Sechsteilung zur Zwölfteilung über u. s. f.

10) a) Zwei senkrechte Säulen sollen durch einen Bogen verbunden werden. Wo liegen die Mittelpunkte aller Bogen, welche die Endpunkte A und B der Säulen verbinden? (Auf der Symmetrieachse von A B.)

b) Wie findet man den Mittelpunkt des Kreisbogens eines Portals oder einer Brücke?

Es liege der Kreisbogen A B gezeichnet vor. Um den Mittelpunkt des Kreises zu konstruieren, zu dem er gehört, zeichnen wir zwei zu einander schräge Sehnen und konstruieren ihre Symmetrieachsen; diese schneiden sich im Mittelpunkt des Kreises.

Fig. 49.



11) Suche auf der Schweizerkarte Orte, welche von Chur und Bern gleichen Abstand haben.

Ziehe die Verbindungslinie Chur - Bern, und konstruiere deren Symmetrieachse.

12) Suche den Ort, der von Chur, Bern und Schaffhausen gleiche Entfernung hat.

Dieser Ort ist der Mittelpunkt des Kreises, der durch Chur, Bern und Schaffhausen geht. Die Verbindungslinien dieser Städte sind Sehnen dieses Kreises. Ziehe diese, und konstruiere ihre Symmetrieachsen; sie schneiden sich im Mittelpunkt des Kreises.

Fig. 50.