Zeitschrift: Jahresbericht des Bündnerischen Lehrervereins

Herausgeber: Bündnerischer Lehrerverein

Band: 17 (1899)

Heft: : Der Geometrie-Unterricht in der I. und II. Klasse der Kantonsschule und in Realschulen

Artikel: Der Kegelstumpf

Autor: Pünchera, J.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-145642

Wieviel erhält der Weger für die Erstellung des Haufens à 3 Fr. pro m^3?

Inwiefern hat der Haufen nicht genau die Form eines Pyramidenstumpfs?

Wie gross müsste seine obere Breite sein, damit er diese Form hätte? $4 : 2{,}5 = 3 : x$; $x = 7{,}5 : 4 = 1{,}875$ m.

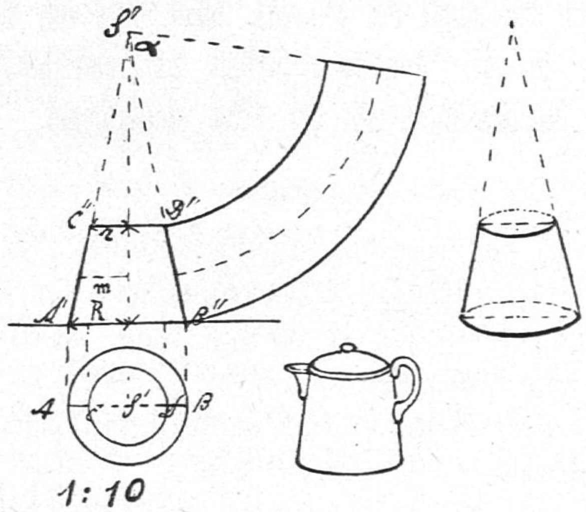
3) Zeichne den Grund- und den Aufriss des Daches eines Gartenhäuschens, dessen Grundfläche ein regelmässiges Sechseck von 1 m Seite, dessen Deckfläche ein solches von 40 cm Seite ist, während der Abstand von Grund- und Deckfläche 2 m beträgt. Berechne, wieviel m^2 Bretter es enthält.

Entnimm die Höhe einer Seitenfläche der Zeichnung.

K. Der Kegelstumpf.

1) *Ein Milchhafen ist unten 12 cm, oben 8 cm breit und 10 cm hoch. Stelle ihn dar; berechne seine Wandung und seinen Inhalt, und verfertige ein Kartonmodell.*

Fig. 63 Fig. 64 (a u. b)



Beschreibung und Zeichnung.

a) Diese Körperform heisst *Kegelstumpf.* Sie wird begrenzt von zwei ungleichen parallelen Kreisen als Grund- und Deckfläche und von einem Mantel. A C heisst eine Seitenlinie des Stumpfs. Die Verbindungslinie der Kreismittelpunkte heisst seine Achse; sie gibt die Höhe an.

Zeichnet den Grund- und den Aufriss.

Ergänzet in der Zeichnung (Fig. 63) den Kegelstumpf zum Kegel. Der Kegel C D S, der den Stumpf zum Kegel A B S ergänzt, heisst Ergänzungskegel.

b) Wie könnte man das Kartonmodell konstruieren? Das Netz.

Wir zeichnen die Abwicklung des Mantels des Kegels A B S und des Kegels C D S und sehen, dass die Abwicklung des Mantels des Kegelstumpfs ein Ringausschnitt ist. Um ihn genau zu zeichnen, haben wir den Centriwinkel α bei S zu berechnen.

$$\alpha = 360^0 \cdot \frac{R}{B\ S} = 360^0 \cdot \frac{6}{30,5} = 71^0 \text{ (siehe Kapitel H.)}$$

(Die Länge von B S gibt uns der Aufriss.)

c) Berechnung des Mantels. Denken wir uns die beiden Sektoren durch Seitenlinien, die von S ausgehen, in unzählig viele Dreiecke zerlegt, so sehen wir, dass dieser Ringausschnitt als Summe von unzählig vielen Trapezen aufgefasst werden kann, die alle als Höhe die Seitenlinie s des Kegelstumpfs haben, und deren Mittellinien zusammen den Umfang des mittleren Durchschnitts bilden, der gleich $2\,m\pi = (R + r)\pi$ ist. (Vergl. Fig. 63). Der Mantel ist also = Umfang des mittleren Durchschnitts $\times$ Seitenlinie $= (R + r) \cdot \pi \cdot s = (6 + 4) \cdot \pi \cdot 10,2\ cm^2$ $= 320,3\ cm^2 = 3,2\ dm^2$. Berechnung des Mantels.

Die Seitenlinie entnehmen wir der Zeichnung (10,2 cm).

d) Berechnung des Volumens. Volumen des Kegelsstumpfs = Volumen des Kegels A B S — Volumen des Kegels C D S.

Die Höhen der beiden Kegel entnehmen wir wieder der Aufrisszeichnung.

Volumen des Kegelstumpfs

$$= \frac{(0,6^2\pi \cdot 3}{3} - \frac{0,4^2 \cdot \pi \cdot 2)\ dm^3}{3} = 0,79\ dm^3.$$

In der Praxis berechnet man das Volumen des Kegelstumpfs meistens, indem man den Inhalt des mittleren Durchschnitts mit der Höhe multipliziert.

Der Radius des mittleren Durchschnitts ist:

$$m = \frac{R + r}{2} = \frac{6 + 4}{2} = 5\ cm = 0,5\ dm.$$

Sein Flächeninhalt $= 0,5^2 \cdot \pi\ dm^2$.

Mittlerer Durchschnitt $\times$ Höhe $= 0,5^2 \cdot \pi \cdot 1\ dm^3 = 0,78\ dm^3$.

Dieses Resultat ist nur 0,01 dm^3 zu klein, also gut brauchbar.

Der Fehler wird grösser, wenn der Unterschied zwischen R und r grösser ist, wenn also der Kegelstumpf vom Cylinder mehr abweicht.

Die ganz genaue Regel für die Inhaltsberechnung des Kegelstumpfs, die wir hier nicht ableiten, heisst:

$$\text{Volumen} = \frac{h\,\pi}{3}\,(R^2 + Rr + r^2) = \frac{1 \cdot 3^1/_7}{3}\,(0{,}6^2 + 0{,}6 \cdot 0{,}4 + 0{,}4^2)\ \text{dm}^3 = 0{,}796\ \text{dm}^3.$$

R bedeutet den Radius der Grundfläche, r den Radius der Deckfläche und h die Höhe des Stumpfs.

Zu welchem Resultat käme man, wenn man das Mittel aus Grund- und Deckfläche mal die Höhe nehmen würde?

Berechne den Unterschied zwischen dem mittleren Durchschnitt mit Radius m und dem arithmetischen Mittel aus Grund- und Deckfläche.

2) 2. Beispiel. Eine runde Waschkanne aus Blech ist unten 21 cm, oben 32 cm breit und hat einen Mantel, der 14 cm breit ist.

Beschreibe ihre Form. Zeichne ihren Grund- und ihren Aufriss, ihr Netz und ihre Parallelprojektion. Berechne, wieviel dm^2 Blech die Wanne enthält, und wieviel Wasser sie fasst.

3) Zeichne einen schiefen Kegel, und führe einen Schnitt parallel zur Grundfläche. Dann erhältst du einen *schiefen Kegelstumpf*. Seine Achse steht schief zur Grundfläche. Sein Inhalt wird auf gleiche Weise wie derjenige der zwei behandelten Kegelstumpfe berechnet. Letztere nennt man gerade Kegelstumpfe.

Verallgemeinerung. Vergleiche die Merkmale und die Berechnungsart der behandelten Kegelstumpfe.

Satz 28. a) Ein Kegelstumpf ist begrenzt von zwei ungleichen Kreisen, die parallel liegen, und von einem runden Mantel, der aus geraden Seitenlinien zusammengesetzt ist, deren Verlängerungen einen Kegelmantel bilden. Führt man durch einen Kegel einen Schnitt parallel zur Grundfläche, so entsteht ein Kegelstumpf. Die Verbindungslinie der beiden Kreismittelpunkte heisst die Achse, der senkrechte Abstand der beiden Kreise die Höhe des Stumpfs. Steht die Achse senkrecht zur Grundfläche, so heisst der Stumpf ein gerader, sonst ein schiefer.

b) Der Mantel des geraden Kegelstumpfs isl ein Ringausschnitt, dessen Fächeninhalt gleich dem Umfang des mittleren Durchschnitts des Stumpfs mal die Seitenlinie ist.

$$\textbf{Mantel} = 2 \cdot m \cdot \pi \cdot s = (R + r) \cdot \pi \cdot s.$$

c) Für den Inhalt des Kegelstumpfs erhält man ein annäherndes Resultat, wenn man mittleren Radius mal mittleren Radius mal π mal Höhe nimmt.

Die genaue Regel lautet:

$$V = \frac{h \cdot \pi}{3} (R^2 + Rr + r^2).$$

Übungen.

1) Ein Spengler hat einen Blecheimer von folgenden Dimensionen zu verfertigen: Bodendurchmesser = 22 cm, Breite oben = 30 cm und Höhe = 26 cm. Zeichne im verkleinerten Massstab das Blechstück, das er auszuschneiden hat, und berechne es. Wieviel Liter hält der Eimer?

2) Für eine Kunstmühle soll ein grosser Trichter aus Blech konstruiert werden, der oben 1 m, unten 25 cm weit sein soll, während seine Seitenlinie 1 m 40 cm zu messen hat. Was für ein Blechstück muss verwendet werden? Wieviel Mehl würde dieser Trichter halten, wenn man ihn unten abschliessen würde? Wende die genaue Regel an. Die andere würde hier ein schlechtes Resultat liefern.

3) Berechne folgende Baumstämme annähernd:

1) D = 64 cm, d = 55 cm, h = 6,2 m;
2) D = 47 cm, d = 41 cm, h = 5,3 m.

D bedeutet den Durchmesser der Grundfläche, d denjenigen der Deckfläche.

4) Ein Weinzuber mit elliptischer Grund- und Deckfläche ist unten 1 m 60 cm, oben 1 m 20 cm lang; unten 90 cm, oben 70 cm breit und 1,1 m hoch. Wieviel Liter Wein hält er? Berechne den mittleren Durchschnitt (halbe mittlere Länge mal halbe mittlere Breite mal π), und multipliziere seinen Inhalt mit der Höhe.

L. Die Kugel.

I. Der Erdglobus.

1) *Beschreibung.* Weise den Erdglobus vor. Welche Eigenschaften haben die Punkte der Oberfläche dieses Globus? Wie nennt man diese Körperform? Was sind Meridiane, Parallelkreise, Länge und Breite? Wie wird die Erde in Zonen eingeteilt?

2) *Grund- und Aufriss.* Wir wollen diesen Globus durch Grund- und Aufriss darstellen. Stelle die Erdachse senkrecht zur Grund- und Aufriss.