Zeitschrift: Jahresbericht des Bündnerischen Lehrervereins

Herausgeber: Bündnerischer Lehrerverein

Band: 17 (1899)

Heft: : Der Geometrie-Unterricht in der I. und II. Klasse der Kantonsschule und in Realschulen

Artikel: Darstellung der Treppe und Ergänzungen zur früheren Behandlung des Prismas, des Parallelogramms, des Dreiecks und des Trapezes

Autor: Pünchera, J.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-145635

C. Darstellung der Treppe und Ergänzungen zur früheren Behandlung des Prismas, des Parallelogramms, des Dreiecks und des Trapezes.

I. Darstellung der Treppe in den verschiedenen Projektionen.

1) *Wir wollen die einfache Treppe, die wir im I. Kurs behandelt haben, zunächst durch Grund- und Aufriss darstellen.* (Fig. 20.)

Fig. 20.

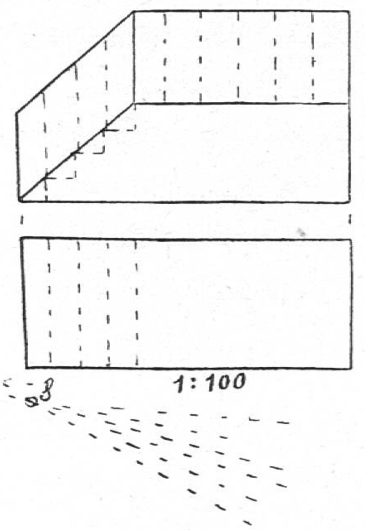
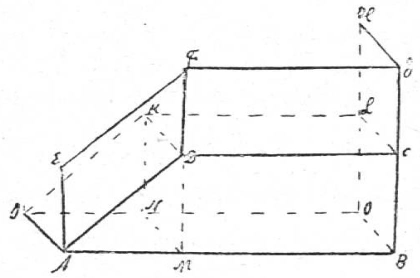


Fig. 21.



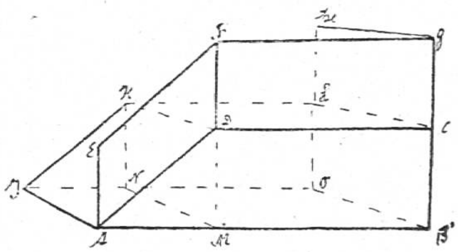


Fig. 22.

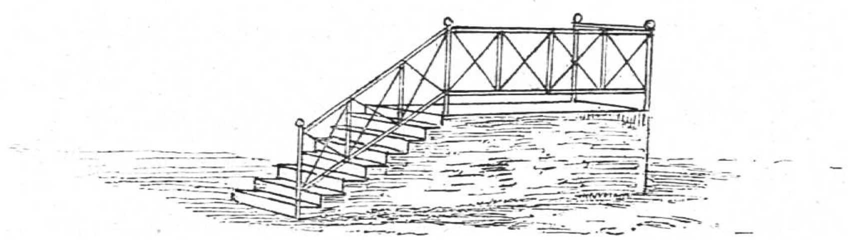


Fig. 22 b.

Grund- und Aufriss.

Die Aufrissebene denken wir uns mit der Fläche des schrägen Geländers zusammenfallend. Dann ist der Aufriss der

Treppe die Ansicht, die im ersten Kurs gezeichnet wurde. Der Grundriss ist ein Rechteck. (Repetiere die Eigenschaften, die Konstruktion und die Berechnung des Parallelogramms, des Trapezes und des Treppenmauerwerks.)

2) Um eine Parallelprojektion der Treppe zu zeichnen, stellen wir zuerst den rechtwinkligen Teil (M B O N, D C L K) des Mauerwerks dar und schliessen ihm dann den schrägen Teil des letztern, sowie das Geländer an. Die Fläche A B G F E ist mit dem Aufriss kongruent; die Kanten A J und G H laufen parallel mit M N, B O u. s. w. Um aus der Parallelprojektion eine klare Vorstellung von der Treppe zu erhalten, muss man die Zeichnung vom Auge weit entfernt halten. Parallel-projektion.

3) Um die Centralprojektion zu zeichnen, verfahren wir gleich. Die Kanten A J und G H sind in der Zeichnung nach dem Augpunkte gerichtet. Central-projektion.

Versuche auch Einzelheiten (Stufen etc.) einzuzeichnen.

4) Stelle noch eine zweite Treppe dar.

5) *Bemerkung*. Vergleiche in beiden Fällen das schräge Treppengeländer mit seinem Bilde im Aufriss. Alle Seiten des Originals erscheinen im Bilde im gleichen Verhältnis verkürzt; die Winkel sind gleich geblieben. Wir sagen, das Bildparallelogramm ist dem Originalparallelogramm ähnlich. Dasselbe gilt vom Trapez am Mauerwerk und im Bilde.

Zeichnet man ein Parallelogramm (Trapez) im verkleinerten Massstab, so erhält man ein Parallelogramm (Trapez), das dem ersten ähnlich heisst. Die beiden Figuren haben dieselben Winkel. Ihre Seitenpaare stehen in gleichem Verhältnisse.

II. Das schiefe Prisma.

1) Auf einer schrägen Waldfläche hat man vier gleich lange senkrechte Pfähle eingeschlagen, so dass ihre Fusspunkte ein Rechteck bilden; zwischen diesen Pfählen hat man 1 m langes Holz aufgeschichtet. Die Länge der Beige misst 4 m, die Breite 1 m, der Abstand von Grund- und Deckfläche 2 m. *Wie viele m^3 Holz enthält die Beige?* Schräge Holzbeige.

a) Wir wollen diesen Körper zunächst genau betrachten. Grund- und Deckfläche sind Rechtecke, desgleichen die untere und die obere Seitenfläche. Die Seitenflächen links und rechts Beschreibung.

sind schiefwinklige Parallelogramme. Die 4 Seitenkanten bilden mit der Grundfläche schiefe Winkel. Man nennt deshalb diesen Körper ein *schiefes Prisma* mit rechtwinkliger Grundfläche.

Denken wir uns die Beige wie früher die Geländermauer so umgelegt, dass eines der beiden Parallelogramme zur Grundfläche wird, so hat sie die Form eines senkrechten Prismas, weil die Seitenkanten auf der Grundfläche senkrecht stehen.

Inhalt dieses Prismas = G . H = Parallelogramm $\times$ H = 4 . 2 . 1 m³ = 8 m³.

Zeichne den Grund- und den Aufriss der Beige in dieser Lage. Der Grundriss ist ein Parallelogramm. Versuche, es aus Grundlinie und Höhe zu zeichnen. Wir müssen von ihm noch einen Winkel oder das Stück kennen, um welches die Decklinie über die Grundlinie hinaus verschoben ist.

Zeichne auch den Grund- und den Aufriss der Holzbeige in ihrer ursprünglichen Lage.

Wähle dabei die Waldfläche als Grundrissebene.

Fig. 23 a, b.

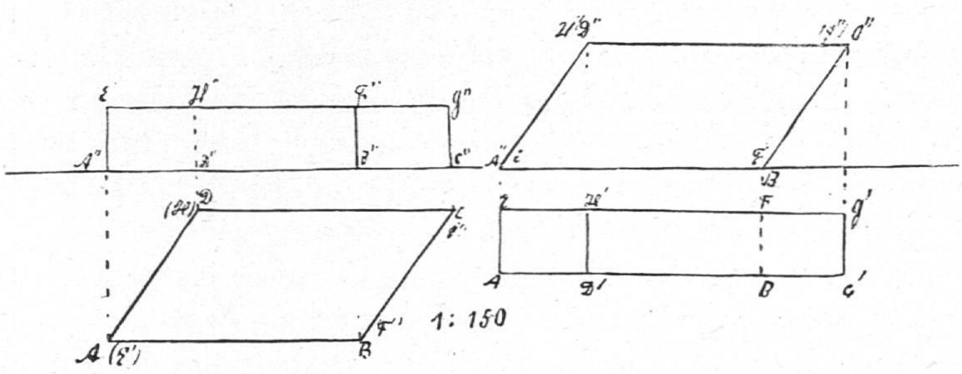


Fig. a geht in Fig. b über, wenn wir die Aufrissebene mit der Gundrissebene vertauschen.

b) Wir kommen zum nämlichen Resultat bezüglich des Inhalts, wenn wir auch hier die Grundfläche (A B F E) berechnen und ihre Masszahl mit der Höhe (2 m) multiplizieren.

Grundfläche A B F E = 4 . 1 m²

Inhalt des schrägen Prismas = 4 . 1 . 2 m³ = 8 m³.

Die Richtigkeit dieser Berechnungsweise können wir auch durch folgende Überlegung darthun: denken wir uns zunächst das Parallelogramm A″ B″ C″ D″ parallel zur Grundlinie in Streifen eingeteilt und diese nach links verschoben, bis sie senkrecht über A″ B″ stehen, so geht dadurch das Parallelogramm in ein Rechteck von gleicher Grundlinie und Höhe über, ohne den Inhalt zu ändern.

Denken wir uns dementsprechend den Körper in dünne Platten zerlegt, die parallel zur Grundfläche liegen, und all diese Platten verschoben, bis sie senkrecht über die Grundfläche zu liegen kommen, so geht dadurch das schiefe Prisma in ein senkrechtes von gleicher Grundfläche und Höhe über, dessen Inhalt gleich G . H ist.

Wir erhalten demnach auch den Inhalt unseres schiefen Prismas, indem wir die Grundfläche mit ihrem Abstande von der Deckfläche multiplizieren.

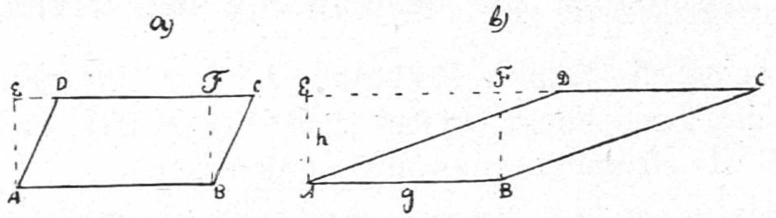
2) Berechne auf diese Weise auch die früher betrachtete Geländermauer.

3) Zeichne den Grund- und den Aufriss einer schrägen Ackermauer, die 20 m lang, 1,5 m hoch und 45 cm breit ist, und deren schräge Kanten gegen die vertikalen Kanten bezw. um 80° geneigt sind. Nimm die Aufrissebene parallel zu den Längsseitenflächen und die Grundrissebene wagerecht an. Berechne die Erstellungskosten der Mauer à 11 Fr. pro m³.

III. Ergänzung zur Berechnung des Parallelogramms.

Versuche, die Berechnungsweise des Parallelogramms A B C D (Fig. 24b) zu erklären. Der frühere Beweis lässt uns hier im Stich.

Fig. 24.



Wir wollen deshalb einen zweiten Beweis geben, der sich auf alle Fälle anwenden lässt.

Wir gehen von der ganzen Figur A B C E aus und fragen uns, welches Stück müssen wir von ihr abschneiden, um 1) das Parallelogramm A B C D, 2) das Rechteck A B F E zu erhalten?

Parallelogramm A B C D = Trapez A B C E — Dreieck A E D

Rechteck A B E F = „ „ — Dreieck B F C

Aber Dreieck A E D ist kongruent ($\cong$) B F C,

folglich:

Parallelogramm $ABCD$ = Rechteck $ABEF$ = AB . BF = g . h.

Das sehen wir auch ein, wenn wir uns das Parallelogramm in Streifen parallel zu A B zerlegt und diese parallel zu A B verschoben denken, bis sie senkrecht über A B liegen.

Um den Inhalt des Parallelogramms A B C D zu berechnen, haben wir demnach die Grundlinie A B und die Senkrechte zwischen ihr und der Verlängerung von C D zu messen und die beiden Masszahlen zu multiplizieren. Jene Senkrechte gibt den Abstand der Grundlinie von der Gegenseite an; wir wollen sie Höhe des Parallelogramms nennen. Dann gilt allgemein die Regel:

Inhalt des Parallelogramms = Grundlinie $\times$ Höhe = g . h.

(Weise darauf hin, dass obige Ableitung sowohl für Fig. a, als für Fig. b gilt.)

Übungen.

1) Wähle B C als Grundlinie, und zeichne darüber das Rechteck von gleicher Grundlinie und Höhe.

2) Wie kann man leicht unzählig viele Parallelogramme zeichnen, die mit A B C D inhaltsgleich sind?

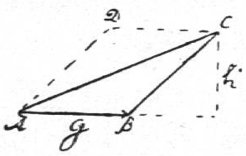
3) Zeichne ein Parallelogramm, dessen Inhalt 12 cm^2 ist, und dessen Grundlinie 4 cm misst.

IV. Ergänzung zur Berechnung des Dreiecks.

Versuche, die frühere Erklärung der Berechnung der Dreiecke auf das gezeichnete Dreieck A B C (Fig. 25) anzuwenden, wenn A B als Grundlinie gewählt werden soll.

Wir müssen hier einen anderen Beweis geben.

Fig. 25.



Wir ergänzen das Dreieck ABC zum Parallelogramm ABCD, das den doppelten Inhalt hat, weil A B C $\cong$ A C D.

Inhalt von A B C D = g . h, wobei g = A B, und h = Abstand A B und D C.

$$\text{Inhalt von } ABC = \frac{g \, . \, h}{2}$$

Wir erhalten den Inhalt des Dreiecks A B C, indem wir die Grundlinie A B und ihren Abstand von der Parallelen durch die gegenüberliegende Ecke (Spitze) messen, die beiden Masszahlen multiplizieren und das Produkt durch 2 dividieren.

Diesen Abstand erhalten wir auch, indem wir von der Spitze C aus diese Senkrechte auf die Verlängerung der Grundlinie A B fällen. Wir nennen diesen Abstand, gleich wie früher, die Höhe, welche zu A B als Grundlinie gehört. Es gilt dann auch hier die Regel:

$$\text{Inhalt des Dreiecks} = \frac{\text{Grundlinie mal Höhe}}{2} = \frac{g\,.\,h}{2}$$

Übungen.

1) Wie gestaltet sich die Berechnung, wenn man eine andere Dreiecksseite als Grundlinie wählt?

2) Zeichne spitzwinklige und stumpfwinklige Dreiecke, und konstruiere die zugehörigen Rechtecke von doppeltem Inhalte.

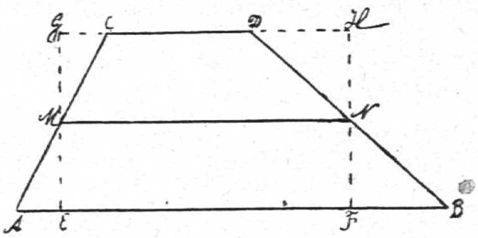
3) Zeichne Dreiecke, die einen Inhalt von 15 cm^2 und eine Grundlinie von 5 cm haben.

V. Ergänzung zur Berechnung des Trapezes.

Bei Behandlung der Treppe haben wir das Trapez kennen gelernt. Welche Trapezarten sind uns da begegnet? Wie haben wir das Trapez berechnet, wie das senkrechte Prisma mit trapezischer Grundfläche? Gebt Beispiele für diese Körperform an.

Wir wollen nun die Inhaltsregel für das Trapez auf eine neue Art ableiten und ausdrücken.

Fig. 26.



a) Versuche, das Trapez in ein inhaltsgleiches Rechteck zu verwandeln.

Wir halbieren die 2 nicht parallelen Seiten und ziehen durch ihre Mitten M und N Senkrechte zu den parallelen Trapezseiten. Dadurch entsteht das Rechteck E F H G, das wir mit dem Trapez vergleichen wollen. Dreieck A E M $\cong$ C G M, denn M A = M C; W. A E M = W. C G M = 90^0; W. A M E = W. C M G als Scheitelwinkel, folglich auch W. E A M = W. G C M (III. Kongruenzsatz). Ebenso Dreieck B F N $\cong$ D H N.

Durch eine halbe Drehung des Dreiecks A E M rechts um und durch eine solche mit dem Dreieck B F N links um geht das Trapez A B D C in das Rechteck E F H G über; folglich ist das Trapez inhaltsgleich diesem Rechtecke.

In welcher Beziehung steht nun die Grundlinie des Rechtecks zu den Trapezseiten?

Aus der Kongruenz der Dreiecke A E M, C G M und B F N, D H N folgt, dass A E = C G und B F = H D ist. Die Grundlinie E F des Rechtecks E F H G ist um die zwei Strecken A E und B F kleiner als die Trapezseite A B; sie ist um 2 gleiche Strecken C G und D H grösser als die Trapezseite C D; folglich ist sie das Mittel (d. h. die halbe Summe) aus den parallelen Trapezseiten.

$$E\,F = \frac{A\,B + C\,D}{2} = \frac{4{,}5\text{ cm} + 1{,}5\text{ cm}}{2} = 3\text{ cm}.$$

Die Höhe des Rechtecks stimmt mit der Höhe des Trapezes, d. h. mit dem Abstande der beiden parallelen Seiten, überein.

$$\text{Inhalt des Trapezes} = \frac{4{,}5 + 1{,}5}{2} \,.\, 1{,}8\text{ cm}^2 = 5{,}4\text{ cm}^2.$$

Vergleiche diese Berechnung mit derjenigen vom I. Kurs.

Ein Trapez ist inhaltsgleich einem Rechtecke, dessen Grundlinie gleich dem Mittel aus den beiden parallelen Trapezseiten, dessen Höhe gleich dem Abstand dieser Seiten ist.

b) Es ist noch eine andere Ausdrucksweise üblich. Die Linie M N, welche die Mitten der nicht parallelen Trapezseiten verbindet, heisst *Mittellinie* des Trapezes. Vergleiche sie mit E F! Aus der bewiesenen Kongruenz der beiden Dreieckspaare folgt auch, dass M E = M G und F N = N H. M N teilt daher das Rechteck E F H G in zwei Rechtecke; deshalb ist M N gleich und parallel zu E F und also $= \frac{A\,B + D\,C.}{2}$

Der Inhalt des Trapezes ist also auch gleich Mittellinie mal Höhe.

Wiederhole den Beweis für ein zweites Trapez.

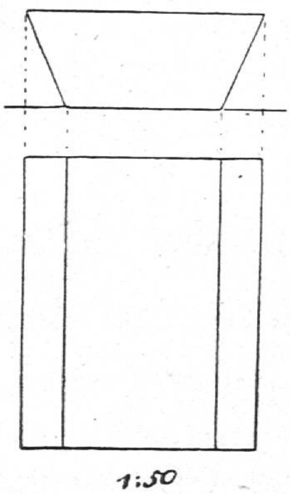
Satz 11. a) Die Verbindungslinie der Mitten der nicht parallelen Seiten eines Trapezes ist parallel zu den parallelen Trapezseiten und gleich dem Mittel aus denselben. Sie heisst Mittellinie des Trapezes.

b) Der Inhalt eines Trapezes ist gleich Mittellinie mal die Höhe.

Übungen.

1) Zeichne den Grund- und den Aufriss, sowie das Netz des Troges eines Düngerwagens, und berechne den Flächeninhalt der Bretter und seinen Rauminhalt. Nimm seine Masse. Z. B. Länge = 1,5 m, Breite unten = 80 cm, oben = 1,2 m, Höhe = 50 cm.

Fig. 27



Sehen wir eines der Trapeze als Grundfläche an, so hat der Trog die Gestalt eines senkrechten Prismas. Sein Inhalt

$$= \text{Trapez} \times \text{Länge} = \frac{0,8 + 1,2}{2} .\ 0,5\ .\ 1,5\ \text{m}^3 = 0,75\ \text{m}^3.$$

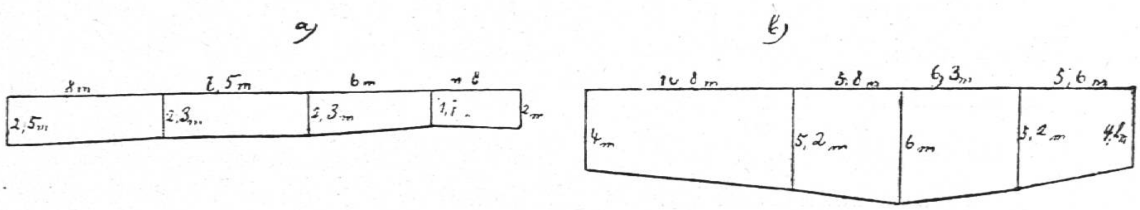
Zeichne den Grund- und den Aufriss des rechtwinkligen Prismas von gleichem Inhalt. Seine Breite ist die Mittellinie des

$$\text{Trapezes} = \frac{0,8 + 1,2\ \text{m}}{2} = 1\ \text{m}.$$

Wir erhalten den Inhalt des Troges, wenn wir Länge $\times$ mittlere Breite $\times$ Höhe nehmen.

2) Berechne die zwei folgenden Steinböschungen à 1 Fr. pro m².

Fig. 28



3) Berechne die Kosten für den Aushub eines Grabens von folgenden Ausdehnungen: seine Breite beträgt durchwegs 80 cm; seine Länge misst 200 m. Zu unterst ist er 1,5 m tief; seine Tiefe beträgt Ende des 10. Längenmeter 1,2 m, Ende des 35. 1,4 m, Ende des 60. 1,80 m, Ende des 75. 1,5 m; er behält diese Tiefe bei bis Ende des 160. Meter; Ende des 185. Meter ist die Tiefe 1,7 m und Ende des 200. 1,5 m. Man zahlt 90 Rp. pro m³. Zeichne Grund- und Aufriss des Grabens.

4) Eine Wuhrmauer von 2,3 m Dicke und 56 m Länge ist zu unterst 1,3 m hoch, beim 20. Längenmeter 1,6 m hoch; beim 45. Meter ist die Höhe 1,8 m und zuletzt 1,4 m. Berechne die Erstellungskosten à 10 Fr. pro m³. Zeichne den Grund- und den Aufriss.

D. Beweis der Sätze über die Konstruktion und die Eigenschaften des Parallelogramms.

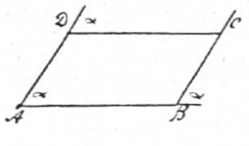
I. Die Winkel an einer Transversalen zwischen zwei Parallelen.

1) *Wir wollen die Konstruktion und die Eigenschaften der behandelten Parallelogramme genauer besprechen.*

Konstruktion der Parallelogramme.

Wie haben wir früher das Geländer A B C D herausgezeichnet? Wir haben zuerst den Winkel B A D = α gezeichnet, auf seinen Schenkeln die Seiten A B und A D abgetragen und alsdann den Winkel α auch bei B und bei D konstruiert.

Fig. 29



Beweise, dass so D C parallel zu A B und B C parallel zu A D wird.

---

*) Dieses Kapitel ist nur für Schüler berechnet, die später beweisenden Geometrieunterricht erhalten.