II. Teil.

A. Darstellung rechtwinkliger Körper.

I. Grund- und Aufriss rechtwinkliger Körper. (Ähnliche Rechtecke.)

Wir wollen zeigen, wie der Plan des Schulhauses zu zeichnen wäre.

Wer ein Haus bauen will, lässt zuerst durch einen Baumeister einen Plan entwerfen und an Hand desselben einen Kostenvoranschlag aufstellen. (Weise die Pläne eines Hauses, womöglich des Schulhauses, vor.)

1) *Einfachste Darstellung des Schulzimmers.*

Der Zimmerboden und sein Bild.

a) Wir beginnen mit der Darstellung des Schulzimmers und zeichnen den Boden im Massstabe 1 : 100. Diese Figur heisst der Grundriss des Schulzimmers. (Repetition der Konstruktion des Rechtecks und der Begriffe senkrecht und parallel.)

Zeichne in diesen Grundriss die Flächen hinein, auf welchen der Ofen, der Kasten, der Pult, die Bank und andere Gegenstände ruhen, also die Grundrisse dieser Körper. Welche Abstände müssen zu diesem Zwecke gemessen werden? (Repetition des Abstandes zweier Parallelen und eines Punktes von einer Geraden.)

Welche Kosten müssen für den Boden in den Voranschlag aufgenommen werden, wenn pro m² 4 Fr. berechnet werden?

(Repetition der Berechnung des Rechtecks.)

b) *Ähnlichkeit von Boden und Plan.* Vergleiche den Plan des Bodens (sein Bild) mit dem wirklichen Zimmerboden (dem

Original). Jede Seite des Bildes ist der 100. Teil der entsprechenden Seite des Originals. Die Winkel sind dieselben im Bild und im Original. Wir sagen: das Rechteck im Bilde ist dem Rechteck im Zimmer *ähnlich.* Die Grundlinie und die Höhe des einen sind dieselben Bruchteile von der Grundlinie und der Höhe des andern.

In welcher Beziehung stehen die Inhalte dieser beiden Rechtecke? Wie oft ist das kleine im grossen enthalten? Man könnte das kleine der Länge nach 100 mal im grossen aufstellen, der Breite nach auch 100 mal, in der ganzen Bodenfläche demnach 100 . 100 = 10000 mal. Der Inhalt des Bildrechtecks ist somit der 10000. Teil des Originalrechtecks.

Die Verkleinerungszahl für den Inhalt des Bodenrechtecks erhält man, indem man die Verkleinerungszahl für die Seitenlänge mit sich selbst multipliziert.

Wie verhält es sich damit, wenn man den Massstab 1 : 50 oder 1 : 200 wählt?

Die Zimmerwand und ihr Bild.

c) Konstruiere die Ansicht einer Wandfläche, und zeichne auch die Fenster ein, sowie Gegenstände, die sich an der Wand befinden. Das Bild der Wandfläche heisst ein Aufriss des Schulzimmers. Die Wandfläche und ihr Bild sind ähnliche Rechtecke. Die Seiten des Bildrechtecks sind bezw. der 100. Teil der entsprechenden Originalseiten. Der Inhalt des Bildrechtecks ist der 10000. Teil des Inhalts der Wandfläche.

Welches wäre die Beziehung zwischen Bild und Original, wenn man 1 : 25 oder 1 : 400 zeichnet?

Wieviel kostet der Anstrich der Wandfläche à 1 Fr. p. m^2?

Das Kartonmodell.

d) Nimm das Zimmermodell, und lege es auf den Grundriss, nachher mit der Wandfläche auf ihr Bild. Man sagt, das Zimmermodell sei dem Zimmerkörper ähnlich. Die 3 Ausdehnungen des Modells sind beziehungsweise der 100. Teil der entsprechenden Ausdehnungen des Zimmers. Wie oft ist das Modell im Zimmer enthalten? 100 . 100 . 100 = 1000000 mal.

Verallgemeinerung. Vergleiche die Beziehung zwischen Zimmerboden und seinem Bilde mit der Beziehung zwischen der Wandfläche und ihrem Bilde.

Es gilt allgemein:

Satz 1. a) Zeichnet man ein Rechteck in verkleinertem Massstabe, so erhält man ein Rechteck, das dem ersten ähnlich heisst. Zwei Rechtecke sind ähnlich,

wenn die Grundlinie und die Höhe des kleinen dieselben Bruchteile von der Grundlinie und der Höhe des grossen sind.

b) Man erhält die Verkleinerungszahl für den Inhalt, indem man die Verkleinerungszahl für die Seiten mit sich selbst multipliziert.

Anhang zu 1.

(Im Rechenunterricht zu behandeln.)

Proportionen.

1) *Wir wollen die Beziehungen ähnlicher Rechtecke auf eine neue Art ausdrücken und gehen vom Boden des Schulzimmers und seines Kartonmodells aus.*

Erstes Beispiel.

a) Es sollen L und B Länge und Breite des Zimmers, l und b. Länge und Breite des Modells bedeuten. Es sei also

L = 8 m; B = 5,5 m; l = 8 cm; b = 5,5 cm. Dann ist Das Verhältnis.
L : l = 8 m : 8 cm = 100, oder 100 . l = L und
B : b = 5,5 m : 5,5 cm = 100, oder 100 . b = B.

Man nennt L : l (lies l zu L) ein Verhältnis und 100 dessen Quotienten. L heisst das erste Glied (Vorderglied), l das zweite Glied (Hinterglied) des Verhältnisses.

Das Verhältnis B : l hat den gleichen Quotienten wie L : l. Diese zwei Verhältnisse heissen einander gleich. In diesem Sinne sagt man: die Länge des Zimmers und des Modells stehen im gleichen Verhältnisse zu einander wie deren Breiten.

Es ist also: 8 m : 8 cm = 5,5 m : 5 cm (= 100) oder

1) $L : l = B : b$ (lies L verhält sich zu l wie B zu b). Erste Proportion.

Diese Beziehung heisst eine Proportion; sie ist entstanden durch Gleichsetzung zweier gleichen Verhältnisse. L und b heissen die äusseren, l und B die inneren Glieder der Proportion.

b) Bilde das Verhältnis der Länge des Zimmers zur Breite, und vergleiche dieses Verhältnis mit dem entsprechenden Verhältnis beim Modell.

L : B = 8 m : 5,5 m = 8 : 5,5 = 80 : 55 = 16 : 11 = $1\,{}^{5}/_{11}$
l : b = 8 cm : 5,5 cm = 8 : 5,5 = 80 : 55 = 16 : 11 = $1\,{}^{5}/_{11}$

Zunächst sehen wir, dass diese Verhältnisse sich nicht ändern, wenn man beide Glieder mit derselben Zahl multipliziert oder dividiert.

Ferner ergibt sich, dass:

Zweite Proportion.

$$2)\ L : B = l : b \text{ ist.}$$

Die Länge des Zimmers verhält sich zu seiner Breite wie die Länge des Modells zu seiner Breite.

Man sagt auch, Länge und Breite des Zimmers und seines Modells sind proportioniert.

Das Produkt der äussern und der innern Glieder.

c) Zwischen den Gliedern der Proportion 2) besteht eine wichtige Beziehung, die wir zeigen wollen.

Wir haben schon gezeigt, dass sich der Boden des Modells 100 mal der Länge nach im Zimmerboden anlegen lässt. Dadurch entsteht auf dem Zimmerboden ein Streifen, dessen Länge gleich L, dessen Breite gleich b, dessen Inhalt also L . b ist.

Wir können aber das Modell auch 100 mal der Breite nach im Zimmer anlegen. Es entsteht dann ein Streifen mit den Ausdehnungen B und l, dessen Inhalt gleich B . l ist.

Da nun beide Streifen den Modellboden 100 mal enthalten, sind sie inhaltsgleich; somit:

$$L \,.\, b = B \,.\, l.$$

Das Produkt der äussern Glieder der Proportion 2) ist gleich dem Produkt der innern Glieder.

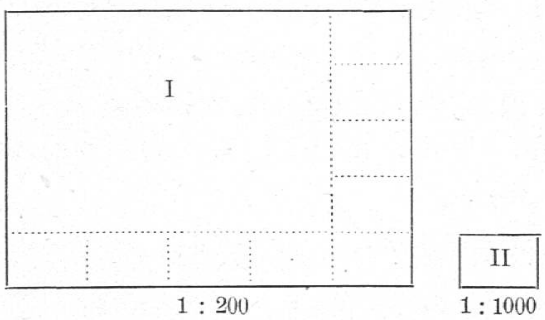
Bei Proportion 1) gilt das Gleiche.

Zweites Beispiel.

Darstellung in verschiedenen Massstäben.

Bei der Darstellung des Zimmerbodens kann der Massstab beliebig gewählt werden. Zeichne den Boden in 2 verschiedenen Massstäben, etwa 1 : 200 und 1 : 1000, und vergleiche die beiden Rechtecke I und II.

Fig. 1



a) In welcher Beziehung stehen Rechteck I und Rechteck II? Man erhält II, wenn man I im Massstabe 1 : 5 zeichnet. Sie sind also ähnlich. Bezeichnen G und g ihre Grundlinien, H und h ihre Höhen, so ist:

Erste Proportion.

$$G : g = 4 \text{ cm} : 0{,}8 \text{ cm} = 5$$
$$H : h = 2{,}7 \text{ cm} : 0{,}54 \text{ cm} = 5$$

Somit: $G : g = H : h$ (in Worten?)

$4 : 0{,}8 = 2{,}7 : 0{,}54.$

Zweite Proportion.

Ferner $G : H = 4 \text{ cm} : 2{,}7 \text{ cm} = 4 : 2{,}7 = 40 : 27 = 1^{13}/_{27}$

$g : h = 0{,}8 \text{ cm} : 0{,}54 \text{ cm} = 0{,}8 : 0{,}54 = 80 : 54 = 1^{13}/_{27}$

Somit $G : H = g : h$ (in Worten?)

Die Produkte der äussern und der innern Glieder.

b) Zeichne das Rechteck II 5 mal der Länge nach und 5 mal der Breite nach in das grössere Rechteck I ein. Dann ist

der Inhalt des ersten Streifens $= G \,.\, h$,

der Inhalt des zweiten Streifens $= H \,.\, g$.

Da beide Streifen das Rechteck II 5 mal enthalten, ist

$$G \,.\, h = H \,.\, g \text{ (in Worten?)}$$

Verallgemeinerung. Was haben uns Beispiel 1 und Beispiel 2 gelehrt?

Satz 2. a) Eine Proportion entsteht durch die Gleichsetzung zweier Verhältnisse, die denselben Quotienten haben.

b) Das Produkt der inneren Glieder einer Proportion ist gleich dem Produkt der äussern Glieder.

c) Die Grundlinien und die Höhen ähnlicher Rechtecke bilden eine Proportion.

2) Vergleiche die beiden Proportionen des Beispiels 1.

Umformung der Proportion.

1) $L : l = B : b \quad 8 \text{ m} : 8 \text{ cm} = 5{,}5 \text{ m} : 5{,}5 \text{ cm}.$

2) $L : B = l : b \quad 8 \text{ m} : 5{,}5 \text{ m} = 8 \text{ cm} : 5{,}5 \text{ cm}.$

Vertauscht man die innern Glieder der ersten Proportion miteinander, so erhält man die zweite Proportion. Stelle nun das Modell voran; dann erhältst du:

3) $l : L = b : B \; (= \frac{1}{100}).$

4) $l : b = L : B \; (= \frac{11}{16}).$

Beginne nun mit der Breite statt mit der Länge:

5) $B : b = L : l.$

6) $B : L = b : l.$

7) $b : B = l : L.$

8) $b : l = B : L.$

Sprich alle diese Proportionen in Worten aus. Vergleiche bei jeder das Produkt der äussern Glieder mit dem der innern.

Wie kann man aus einer dieser 8 Proportionen die 7 übrigen ableiten? 1) Durch Vertauschung der innern Glieder, 2) durch Vertauschung der äussern Glieder, 3) durch Vertauschung der zwei innern Glieder mit den zwei äussern.

Bilde auch bei Beispiel 2 die entsprechenden acht Proportionen.

Übungen.

1) Ein Zimmer ist 8,5 m lang und 6,8 m breit. Drücke das Verhältnis der Länge zur Breite in den kleinsten ganzen Zahlen aus.

2) Ein Haus ist $15^3/_4$ m hoch, ein anderes $13^1/_2$ m hoch. Wie verhalten sich diese Höhen?

3) Zu einem Photographierahmen, der 35 cm breit und 40 cm hoch ist, soll ein ähnlicher konstruiert werden, dessen Breite 10 cm misst. Wie hoch wird er?

a) Die Höhe betrage x cm; dann muss sein:

$$35 \text{ cm} : 40 \text{ cm} = 10 \text{ cm} : x \text{ cm} \text{ oder}$$

$$35 : 40 = 10 : x, \quad \text{und nach Satz 2 b}$$

$$35\,x = 40 \,.\, 10 \quad \text{(Wiederhole den Beweis)}$$

$$x = \frac{40 \,.\, 10}{35} = 11^3/_7.$$

Wie hat sich das vierte Glied der Proportion aus den drei übrigen berechnen lassen? Wir haben das Produkt der innern Glieder durch das andere äussere Glied dividiert.

b) Zweite Lösung: die Breite des kleinen Rahmens ist der 3,5. Teil von der Breite des grossen. Es muss auch die Höhe des kleinen der 3,5. Teil von der Höhe des grossen sein. Somit:

$$x = 40 : 3{,}5 = 11^3/_7.$$

4) Ein anderer Rahmen ist 70 cm hoch und 52 cm breit; wie hoch ist ein ähnlicher Rahmen von 27 cm Höhe?

5) Eine Wandtafel von 1,65 m Länge und 1,24 m Breite soll im Bilde auf eine Breite von 4 cm reduziert werden. Wie gross wird die Länge des Bildes?

$$1{,}65 \text{ m} : 1{,}24 \text{ m} = x \text{ cm} : 4 \text{ cm}.$$

$$1{,}65 : 1{,}24 = x : 4.$$

$$1{,}24 \,.\, x = 1{,}65 \,.\, 4 = 6{,}6.$$

$$x = 6{,}6 : 1{,}24 = 5{,}3 \text{ cm}.$$

Das unbekannte innere Glied der Proportion wurde gefunden, indem man die beiden äussern Glieder multipliziert und das Produkt durch das andere innere Glied dividiert hat.

Stelle auch die 7 Proportionen auf, welche aus 1,65 : 1,24 = x : 4 durch Vertauschung der Glieder hervorgehen, und zeige, dass man aus jeder den gleichen Wert für x erhält.

6) Der Schulzimmerboden (l = 8 m, b = 5,5 m) soll im Bilde auf eine Breite von 4 cm reduziert werden. Wie lang wird das Bild?

---

2) *Grundriss und Aufriss des Schulzimmers samt Mauern.*

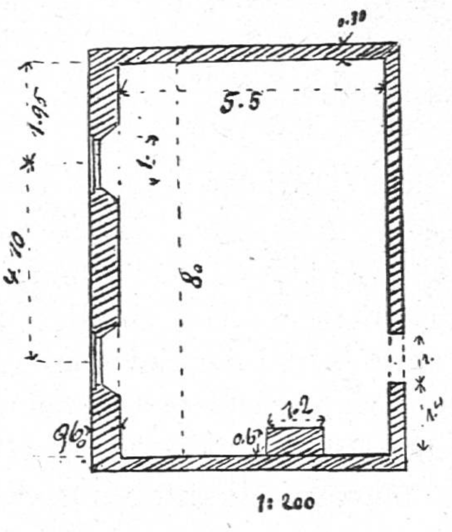
Wir wollen nun dem Grund- und dem Aufriss des Schulzimmers auch den Grund- und den Aufriss der zugehörigen Mauern anschliessen. Wir denken uns die Ebene des Zimmerbodens nach allen Seiten verlängert. Dann schneidet sie aus jeder Mauer ein Rechteck heraus. Um ein solches zu zeichnen, brauchen wir bloss die Mauerdicke zu kennen. Desgleichen denken wir uns eine Wandfläche verlängert; dann schneidet diese Ebene ebenfalls aus jeder Mauer ein Rechteck heraus, dessen Breite die Mauerdicke ist.

Berechne die Erstellungskosten der Mauern à 15 Fr. per m³; nimm dabei die Fenster auch als Mauern an. (Repitition der Inhaltsberechnung rechtw. Körper.)

3) *Grund- und Aufriss des Schulzimmers samt Mauern, Fenstern und Thüre.*

a) Aus den bisher gezeichneten Plänen könnte der Bauführer nicht entnehmen, wie er die Fenster und die Thüre zu bauen

Fig. 2.

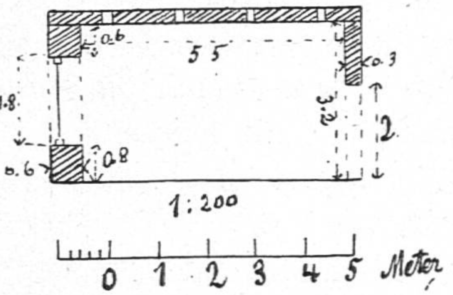


Grundriss. hätte. Um einen brauchbaren Plan zu bekommen, denken wir uns durch das Zimmer einen wagerechten Schnitt etwa 1 m 50 cm über dem Boden geführt und zeichnen die Figur, welche die Ebene herausschneidet. Sie heisst ein vollständiger Grundriss des Zimmers. Nimm die nötigen Dimensionen, und zeichne diesen Grundriss. Es kommen hier die Fenster und die Thüre hinzu. Der Grundriss des Fensters besteht aus einem symmetrischen Trapez und aus zwei kleinen Rechtecken (Fig. 2).

Man wird am vorteilhaftesten zuerst die Symmetrieachse des Trapezes einzeichnen.

Aufriss. b) Was ersehen wir aus dem Grundriss noch nicht? Wir können daraus die Höhe der Fenster und der Thüre nicht entnehmen. Um diese Grössen in der Zeichnung zu erhalten, denken wir uns einen Schnitt durch das Zimmer und die beiden Seitenwände parallel zur Breitenwandfläche und die Mitte des Fensters gelegt. Dieser Schnitt trifft hier auf die Thüre. Zeichne die Schnittfigur; sie heisst ein Aufriss des Zimmers und der beiden Längsmauern samt dem Fenster und der Thüre (Fig. 3).

Fig 3.



Berechnung. Berechne nun genau das ganze Mauerwerk (Rep. der Berechnung des Prismas mit trapezischer Grundfläche), sowie dessen Erstellungskosten.

Berechne auch genau den Anstrich sämtlicher Zimmerflächen.

Benutzung des Massstabes. Einer Grund- oder Aufrisszeichnung wird gewöhnlich noch ein Massstab beigefügt, mit dessen Hülfe man auch diejenigen Dimensionen aus der Zeichnung entnehmen kann, deren Masszahlen nicht angegeben sind. Da wir hier im Massstab 1 : 200 gezeichnet haben, wird $^1/_2$ cm der Zeichnung 1 m wahrer Grösse, 1 mm der Zeichnung 2 dm wahrer Grösse u. s. f. entsprechen. Darum bedeuten die Interwalle 0 bis 1,1 bis 2 je 1 m und die Interwalle des kleinen Massstabes links je 2 dm. Nimm

Strecken der Zeichnung in den Zirkel, und miss sie am Massstab.

Übungen.

Versuche den Grundriss des ganzen Stockwerkes zu zeichnen, auf dem sich das Schulzimmer befindet, jedoch ohne Treppenhaus, desgleichen den Aufriss des rechtwinkligen Teiles des Hauskörpers.

Bestimme zur Übung auf deiner Landkarte Distanzen mit Benutzung des am Fusse der Karte angebrachten Massstabs.

II. Die Parallelprojektion rechtwinkliger Körper.

1) Aus Grund- und Aufriss des Hauses macht ihr euch nur schwer eine Vorstellung desselben. Eine Photographie (von zwei Seiten) gibt uns eine bessere Anschauung. Wir wollen zeigen, wie ein solches Bild zu zeichnen ist.

Zunächst wollen wir ein Bild zeichnen, das nicht ganz wie eine Photographie aussieht, aber leichter zu konstruieren ist und uns auch eine gute Vorstellung des Hauskörpers gibt.

Entstehung des Schattenbildes des Drahtmodells.

2) a) Wir benutzen bei dieser Erklärung ein Karton- und ein Drahtmodell des rechtw. Teiles des Schulhauses. Von diesem Modell erhalten wir ein Bild auf folgende Weise: (Das Modell soll möglichst gross sein) wir halten im Freien das Drahtmodell an ein vertikales Brett, so dass die hintere Seitenfläche ganz aufliegt und lassen es durch die Sonne bescheinen. Das Drahtmodell wirft einen Schatten. Fahre mit einem Bleistift oder mit Kreide den Schatten der einzelnen Drähte nach; entferne dann den Körper, und betrachte das Schattenbild allein von der Sonnenseite aus. Es zeigt uns den Körper genau und zwar um so genauer, je weiter wir uns in der Sonnenrichtung vom Bilde entfernen. Dieses Bild ersetzt den Körper; es vertritt ihn. Wir nennen es eine *Parallelprojektion* des Drahtmodells. Das horizontale Brett heisst die *Projektionsebene;* die Sonnenstrahlen heissen *projizierende Strahlen,* und die Sonne selbst ist das *Projektionscentrum.*

b) Seiner Wichtigkeit wegen wollen wir das Schattenbild näher ansehen und nochmals mit dem Original (Drahtmodell) in Verbindung bringen. Stelle nochmals das Modell auf das

Schattenbild, und zeige, wo sich der Schatten eines jeden Eckpunktes, einer jeden Kante, einer jeden Fläche befindet; markiere durch Stäbe die Richtung der Sonnenstrahlen.

Der Schatten der hinteren Seitenfläche fällt mit dem Original zusammen; der Schatten der vorderen Seitenfläche ist ein ihr kongruentes Rechteck; diese beiden Flächen des Drahtmodells erscheinen im Bilde in wahrer Grösse parallel zu einander verschoben. Die zwei Seitenflächen links und rechts, sowie Grund- und Deckfläche sind im Schattenbilde schiefw. Parallelogramme.

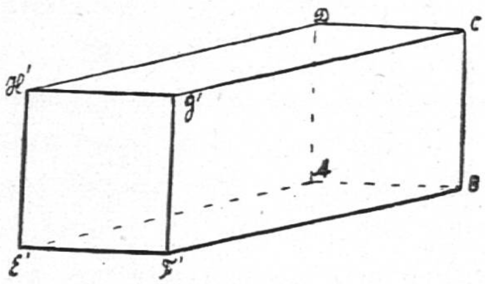
Die Kanten der vordern und hintern Seitenfläche projizieren sich in wahrer Grösse (d. h. erscheinen im Bilde in wahrer Grösse), während die Grund- und Deckkanten, welche senkrecht zum Brett stehen (oder nach hinten gehen) verändert erscheinen. Diese vier Kanten sind im Bilde gleich lang und parallel, nämlich nach der Sonne gerichtet.

Die Winkel der vordern und hintern Seitenfläche projizieren sich in ihrer wahren Grösse; ihre Schenkel laufen parallel zur Projektionsebene; je zwei Winkel von Grund- und Deckfläche und von den Seitenflächen links und rechts projizieren sich als spitze W., zwei als stumpfe Winkel.

Konstruktion des Schattenbildes.

c) Diese *Parallelprojektion* soll nun im verkleinerten Massstabe gezeichnet werden. Wir brauchen bloss die beiden kongruenten Rechtecke im richtigen Abstande voneinander hinzuzeichnen und ihre entsprechenden Eckpunkte zu verbinden.

Fig. 4.



Bezeichnung. Die Punkte A, B, C, D sind Originalpunkte. E', F', G', H' sind Schattenpunkte oder Projektionen der vorderen Modellpunkte E, F, G, H. Das deuten wir durch Striche an.

Auf welcher Seite steht die Sonne?

Fig. 4 stellt uns zunächst das Drahtmodell dar, aber zugleich auch den Hauskörper selbst.

3) Lass den Drahtkörper zu verschiedenen Stunden bescheinen, und beschreibe jedesmal das Schattenbild; es ändert sich mit dem Stand der Sonne.

Verallgemeinerung. Welche Merkmale sind allen Bildern gemeinsam? Die vordere Seitenfläche projiziert sich immer in wahrer Grösse als ein Rechteck, dessen Seiten mit den Seiten der hintern Seitenfläche A B C D parallel laufen. Die übrigen Flächen projizieren sich immer als schiefwinklige Parallelogramme.

Die vier Kanten, welche nach hinten gehen, haben parallele und gleiche Schattenbilder.

Man kann sich jedes dieser Schattenbilder durch parallele Verschiebung der hintern Fläche A B C D entstanden denken. Zeichne das Rechteck A B C D mehrmals nebeneinander, und verschiebe es durch Zeichnung parallel zu sich selbst, jedesmal um eine andere Strecke und unter anderm Winkel. Suche dir das vorteilhafteste Bild heraus.

Von den Schattenbildern irgend eines rechtwinkligen Körpers wird das Gleiche gelten wie von denjenigen des Hauskörpers.

Satz 3. a) Man nennt das Schattenbild eines rechtwinkligen Körpers, der von der Sonne beleuchtet wird, eine Parallelprojektion desselben.

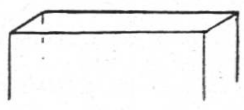
b) Man erhält eine Parallelprojektion eines rechtwinkligen Körpers, indem man eine seiner Flächen hinzeichnet und sie parallel zu sich selbst verschiebt.

Übungen.

1) Zeichne die Parallelprojektion eines dm^3 und eines cm^3, und gib die Richtung der Sonnenstrahlen an. Man erhält ein vorteilhaftes Bild, wenn man für die nach hinten gehenden Kanten die Verkürzung $^1/_3$ und die Winkel der Deckfläche $= 30^0$ und $= 150^0$ wählt.

2) Zeichne einen Tisch in Parallelprojektion. Wir denken uns die Tischbeine verbunden; dann entsteht ein rechtwinkliges Prisma, dessen Bild wir gleich wie den Hauskörper zeichnen können. Wähle für die Kanten A E, B F, C G, D H die Verkürzung $^1/_3$.

Fig. 5.



3) Zeichne noch die Parallelprojektion anderer rechtwinkliger Körper.

III. Die Centralprojektion oder das perspektivische Bild rechtwinkliger Körper.

1) *Wir wollen nun zeigen, wie man ein Bild des Hauskörpers zeichnet, das einem photographischen Bilde entspricht.*

Betrachtung des Schattenbildes.

a) Wir legen das Drahtmodell an die Wandtafel (oder an die Wand) so, dass die hintere Seitenfläche mit ihr zusammenfällt, machen das Zimmer dunkel und beleuchten den Körper durch eine Flamme (z. B. durch eine Gasflamme oder eine Lampe). Dann wirft das Drahtmodell auf die Tafel einen Schatten. Wer sein Auge nach der Flamme verlegt, sieht, dass der Körper und der Schatten sich genau decken. Markiere durch einen Stab die Richtung der Strahlen, welche von der Flamme nach den Eckpunkten gehen. Fahre mit einer Kreide dem Schatten aller Kanten nach, und zeichne so das Schattenbild. Zeichne die Kanten, welche man von der Flamme aus sehen würde, auch wenn der Körper massiv wäre, dick und diejenigen, die man dann nicht sehen könnte, punktiert. Entfernt man nun den Drahtkörper, so ersetzt ihn das Schattenbild für das bei der Flamme befindliche Auge vollständig. Es ist eine Erscheinung, die einen tiefen Eindruck hervorruft, wenn man sieht, wie das ebene Bild sich plötzlich zum Raumgebilde entwickelt. Betrachten wir das Schattenbild von einer anderen Stelle aus, so gibt es uns nicht mehr eine so deutliche Vorstellung des Drahtmodells.

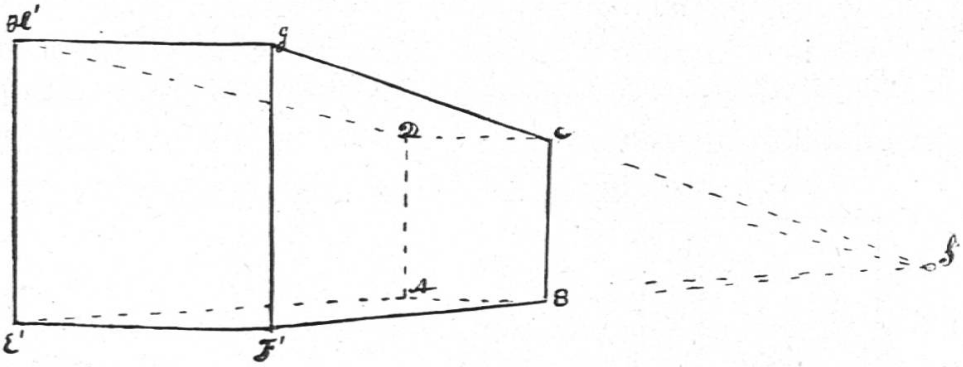
Dieses Schattenbild heisst nun ein *perspektivisches Bild* oder eine *Centralprojektion* des Drahtmodells. Die Tafel heisst Projektionsebene; die Strahlen, welche von der Flamme nach dem Körper gehen, heissen projizierende Strahlen, und die Flamme selbst heisst das Centrum der Projektion.

Genaue Beschreibung

b) Lege das Modell wieder auf das Bild, und untersuche wie die einzelnen Flächen, Kanten und Winkel sich projizieren.

Der Schatten der hinteren Seitenfläche A B C D fällt mit dem Original zusammen. Der Schatten der vorderen Seitenfläche E F G H ist ein vergrössertes Rechteck. Zeige durch Messung, dass Grundlinie und Höhe sich in gleichem Verhältnis vergrössert haben (hier im Verhältnis 4 : 7). Dieses Rechteck E′ F′ G′ H, erscheint zu dem hinteren A B C D parallel verschoben und ist ihm nur ähnlich und nicht kongruent wie bei der Parallelprojektion.

Fig. 6.



Die Schattenbilder der übrigen Flächen sind Trapeze; die nach hinten gehenden Kanten sind im Schatten ungleich und gegeneinander geneigt; ihre Verlängerungen laufen nach einem Punkte hin, welcher der Flamme genau gegenüberliegt. Er ist der Fusspunkt des Perpendikels, das man von der Flamme auf die Tafel fällen kann. Wir wollen diesen Punkt den *Augpunkt* der Zeichnung nennen.

Zeichnung der Schattenbilder.

c) Zeichnet diese Centralprojektion in euerm Heft in verkleinertem Massstab. Man zeichnet zuerst die beiden Rechtecke, indem man ihre Seiten und ihre Abstände in gleichem Verhältnis verkleinert, und verbindet dann die entsprechenden Eckpunkte.

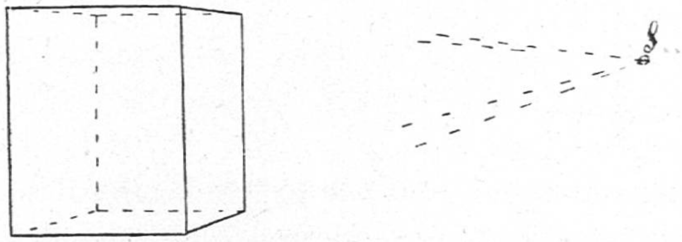
Zweite Stellung.

d) Lege den Körper nun auch an eine andere Stelle der Tafel hin, und lass ihn durch dieselbe Flamme beleuchten, oder verlege statt des Körpers die Flamme. Das Bild ist ein anderes geworden. Wir bekommen ja auch verschiedene Eindrücke vom Hause, wenn wir es von verschiedenen Standpunkten aus betrachten. Zeichne auch dieses Schattenbild, und beschreibe es genau. Konstruiere es, indem du wiederum zuerst das hintere Rechteck zeichnest, dann den Augpunkt S annimmst, die Strahlen S A, S B, S C, S D ziehst, eine der zur Tafel senkrechten Seitenkanten abträgst und das Rechteck E′ F′ G′ H′ parallel zu A B C D zeichnest. Zeichne ferner zuerst das Rechteck A B C D; wähle den Augpunkt, sowie die Länge einer der Seitenkanten A E, B F, C G, D H beliebig, jedoch so, dass ein gefälliges Bild entsteht. Betrachte das Bild mit einem Auge von der Senkrechten zur Tafel im Augpunkte aus; dann erhältst du eine sehr deutliche Vorstellung vom Körper.

2) Zeichnet das Bild eines zweiten rechtwinkligen Körpers.

Verallgemeinerung. Welche Merkmale haben alle diese Centralprojektionen gemeinsam? Sie bestehen aus 2 ähnlichen Rechtecken, deren Seiten paarweise parallel laufen, während sich die Verbindungslinien entsprechender Eckpunkte in einem Punkte treffen, welcher Augpunkt heisst. Man konstruiert ein solches Bild am bequemsten, indem man vom hinteren Rechteck und vom Augpunkte ausgeht.

Fig. 7.



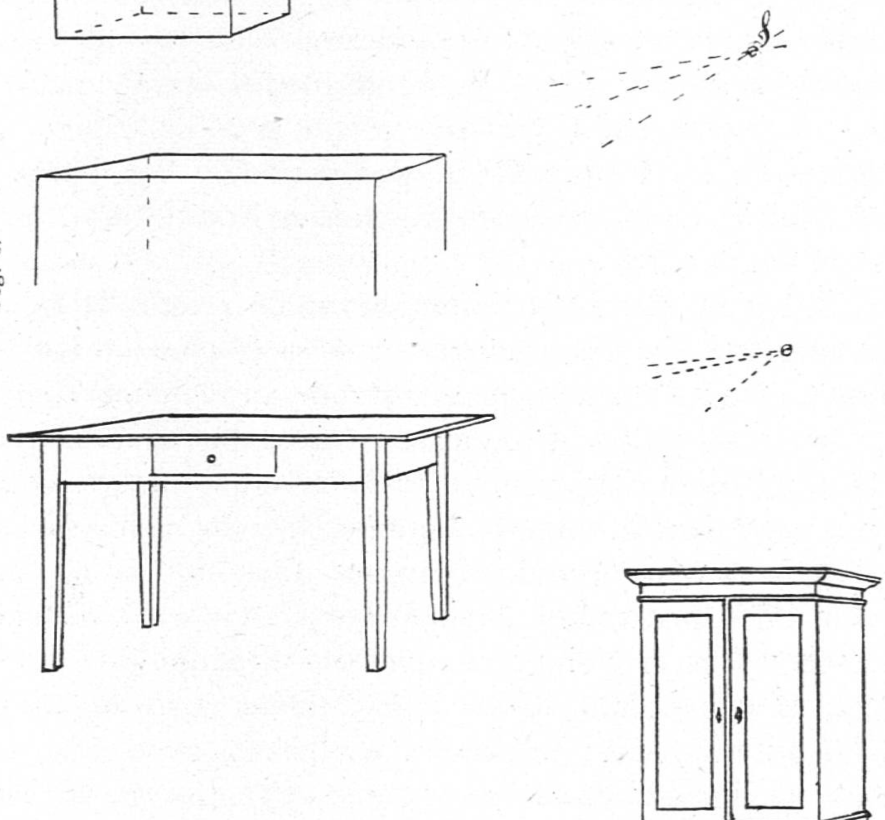


Fig. 8.

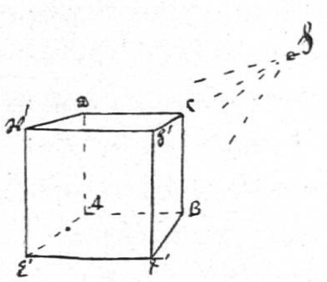


Fig. 9.

Satz 4. a) Man nennt das Schattenbild eines rechtwinkligen Körpers, der von einer in gewisser Entfernung liegenden Flamme beleuchtet wird, eine Centralprojektion desselben.

b) Man erhält eine Centralprojektion irgend eines rechtwinkligen Körpers folgendermassen: man zeichnet eines seiner Rechtecke (A B C D) im verkleinerten Massstabe, wählt den Augpunkt S, zieht die Strahlen von diesem nach A B C D und zeichnet das Rechteck, welches A B C D gegenüberliegt, so, dass seine Seiten zu den entsprechenden Seiten von A B C D parallel laufen.

Übungen.

Zeichne ein perspektivisches Bild des Kastens, des Tisches, des dm^3 und anderer rechtwinkliger Körper.

Gib bei Fig. 9 die Lage der Flamme genau an.

Stellt man in B z. B. eine Würfelkante senkrecht zum Zeichnungsblatt auf, und verbindet man F' mit dem Endpunkte dieser Kante, so hat man die Richtung nach der Flamme.

IV. Grund- und Aufriss als Schattenbilder.

a) *Wie kann der Grundriss eines Körpers als Schattenbild aufgefasst werden?*

Wir legen unser Drahtmodell auf eine wagerechte Unterlage (Boden, Tisch) und denken uns, die Sonne würde sich vertikal über uns befinden; dann fallen ihre Strahlen vertikal ein, und das Schattenbild fällt mit der Grundfläche des Modells zusammen und stellt den Grundriss des Modells dar. Die wagerechte Unterlage heisst Grundrissebene. Die projizierenden Strahlen sind hier gleich gerichtet und stehen senkrecht zur Projektionsebene. Deshalb nennt man den Grundriss eine senkrechte Projektion. Bei der früher besprochenen Parallelprojektion waren die projizierenden Strahlen gegen die Projektionsebene geneigt, weshalb jene Projektion eine *schräge Parallelprojektion* genannt wird. Grundriss.

b) Aus dem Grundriss allein können wir uns noch keine vollständige Vorstellung vom Modell machen. Darum bringen wir mit dem Grundriss noch ein zweites Bild in Beziehung, das wir auf einer zur Grundrissebene senkrechten Aufrissebene entstehen lassen. Aufriss.

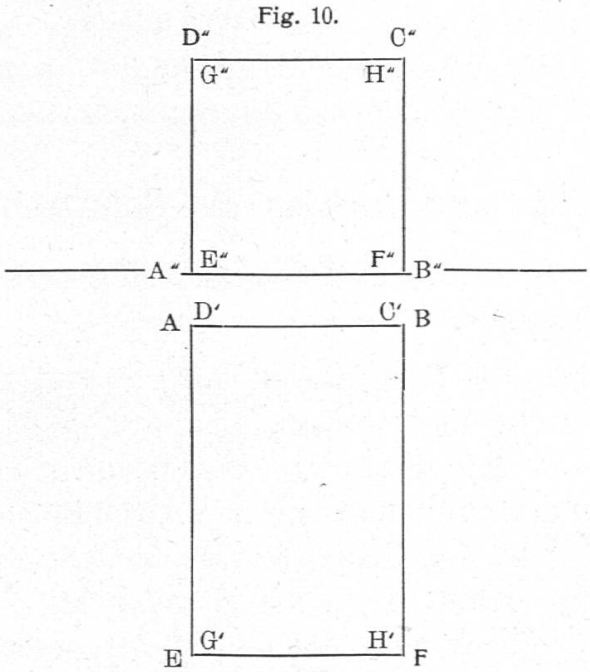
Wir denken uns, es treffen auf den Körper Sonnenstrahlen senkrecht zu dieser Aufrissebene ein. Was für ein Schattenbild entsteht? Ist das Modell so gestellt, dass eine Seitenfläche parallel zur Aufrissebene läuft, so ist das Schattenbild ein Rechteck.

Betrachtung der Projektion von Flächen und Kanten.

c) Wie projiziert sich die Deckfläche, wie die Grundfläche, wie projizieren sich die Seitenflächen, wie die Kanten und Eckpunkte 1) auf die Grundrissebene, 2) auf die Aufrissebene? Welche Flächen und Kanten erscheinen 1) im Grundriss, 2) im Aufriss in wahrer Grösse? Welche Flächen projizieren sich als Linien, welche Kanten als Punkte?

d) Zeichne den Grund- und den Aufriss; entferne dann das Modell, und versuche, es dir mit Hilfe von Grund- und Aufriss vorzustellen.

Fig. 10.



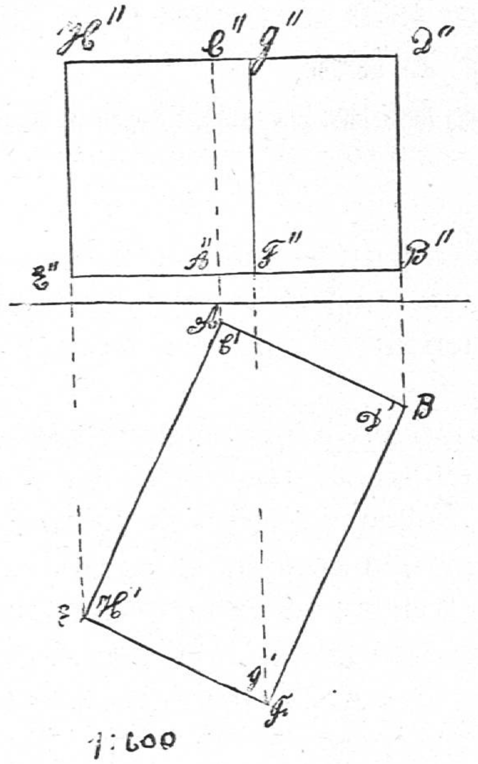
1 : 600

Wir wollen nun die Aufrissebene nicht abtrennen, sondern um die Linie, nach welcher sie die Grundrissebene schneidet, in die Grundrissebene umdrehen. Diese Schnittlinie nennen wir die *Achse*. Wie liegen Grund- und Aufriss eines Eckpunktes hinsichtlich der Achse? G″ (Aufriss von G) liegt senkrecht über G′ (Grundriss von G).

e) Nimm dein Zimmermodell, und zeichne in dein Heft seinen Grund- und seinen Aufriss. Halte dabei zuerst das Heft so, dass eine Heftseite wagerecht, die zweite Heftseite senkrecht zu ihr ist; stelle das Modell in das Heft hinein, und lege, nachdem du Grundriss und Aufriss gezeichnet hast, die Aufrissebene um. Bezeichne die Eckpunkte mit grossen Buchstaben, und füge dem Grundriss als erster Projektion einen Strich, dem Aufriss als zweiter zwei Striche bei. Beachte wiederum, wie Grund- und Aufriss der einzelnen Eckpunkte bezüglich der Achse liegen. Nenne die Flächen, die 1) im Grundriss, 2) im Aufriss, 3) in wahrer Grösse, 4) als Linien erscheinen, desgleichen die Kanten, die sich 1) in wahrer Grösse, 2) als Punkte projizieren.

f) Zeichne auch Grund- und Aufriss des Drahtmodells und des Kartonmodells des Zimmers, wenn die Grundfläche über der Grundrissebene steht, und auch in der Stellung, da keine Fläche parallel zur Aufrissebene läuft. Wiederhole die früheren Betrachtungen.

Fig. 11.



Verallgemeinerung. Wie haben wir in diesen Fällen den Grundriss und den Aufriss entstehen lassen? Was für einen Grundriss hatten Kanten und Flächen, welche parallel zur Grundrissebene lagen, solche, die zu ihr senkrecht waren? Was für einen Aufriss hatten solche Kanten und Flächen? Welche Kanten und welche Flächen haben sich in wahrer Grösse projiziert? (solche, die parallel zur Projektionsebene liefen). Welche erschienen in der Projektion verkürzt? (solche, die schief zur

Projektionsebene lagen). Wie kamen Grund- und Aufriss desselben Eckpunktes bezüglich der Achse zu liegen?

Satz 5. a) Unter dem Grundriss eines Körpers versteht man sein Schattenbild auf einer wagerechten Ebene (Grundrissebene), wenn die Lichtstrahlen vertikal einfallen.

Unter dem Aufriss eines Körpers versteht man sein Schattenbild auf einer vertikalen Ebene (Aufrissebene), wenn die Lichtstrahlen senkrecht zu ihr einfallen.

Grund- und Aufriss heissen senkrechte Projektionen.

b) Eine Kante projiziert sich dabei in wahrer Grösse, wenn sie parallel zur Projektionsebene läuft; sie erscheint verkürzt, wenn sie gegen die Projektionsebene geneigt ist, und ist im Bilde ein Punkt, wenn sie senkrecht zur Projektionsebene steht. Eine Fläche, welche parallel zu einer der Projektionsebenen läuft, projiziert sich auf diese in wahrer Grösse und erscheint in der andern Projektionsebene, zu der sie senkrecht steht, als Gerade.

Grund- und Aufriss desselben Eckpunktes liegen in einer Senkrechten zur Achse.

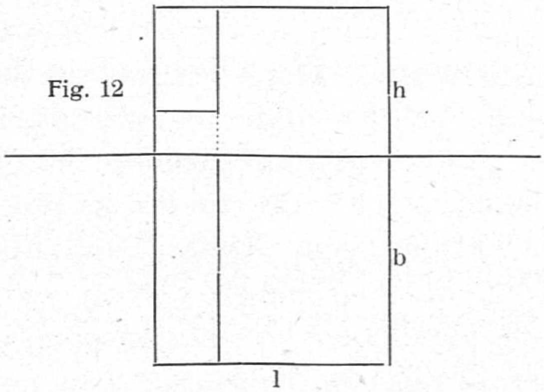
Übungen.

1) Zeichne den Grund- und den Aufriss eines rechteckigen Tisches und Schranks und anderer rechtwinkliger Gegenstände.

2) Zeichne den Grund- und den Aufriss des Treppenhauses der Schule.

3) Löse schwierigere Rechnungsaufgaben über rechtwinklige Körper. Z. B. Aus einem Heustock, der 8 m lang, 7 m breit und 5 m hoch ist, sollen 8 Klafter (à 1,8 m Kante) Heu herausgeschnitten werden, und zwar soll der Schnittt der ganzen Breite nach und in einer Länge von 2 m gemacht werden. Wie hoch wird er? Zeichne den Grund- und den Aufriss des Heustocks, und schraffiere das Stück, das herauszuschneiden ist.

Fig. 12



1 : 300

Bezeichnen wir die Grundfläche dieses Stückes mit G, seine Höhe mit H, so ist:

$$G \cdot H = 8 \text{ Klafter} = 8 \cdot 1{,}8 \cdot 1{,}8 \cdot 1{,}8 \text{ m}^3 = 46{,}656 \text{ m}^3$$

und $G = 7 \cdot 2 \text{ m}^2 = 14 \text{ m}^2$.

Somit $H = 46{,}656 : 14 = 3{,}33$ m.

B. Darstellung des dreiseitigen senkrechten Prismas.

1) *Zeichne den Grund- und den Aufriss eines Pultdachs.* Grund- und Aufriss.

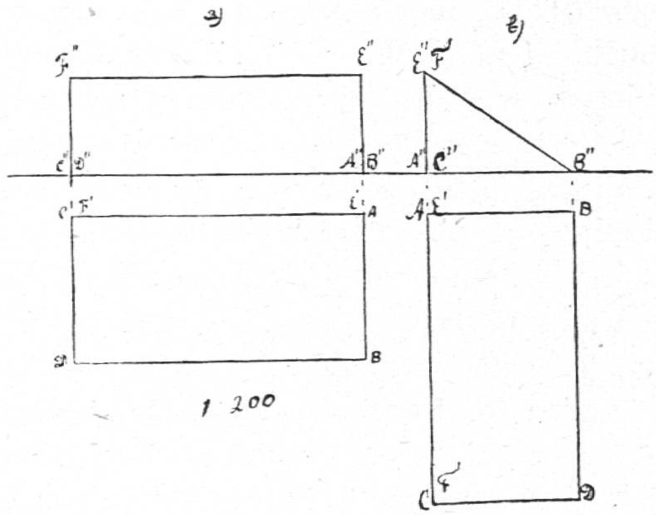
a) Wähle die Aufrissebene parallel zur rechteckigen Wandfläche.

b) Wähle die Aufrissebene parallel zu einer Giebelfläche.

c) Denke dir das Dach auf eine Giebelfläche gelegt.

Benütze zur Veranschaulichung das im I. Kurs konstruierte Modell.

Fig. 13



Repetiere die Merkmale und die Berechnung des rechtwinkligen Dreiecks und des senkrechten dreiseitigen Prismas, dessen Grundfläche ein rechtwinkliges Dreieck ist.

Ergänze in Fig. b) den Aufriss zu dem Aufriss des rechtwinkligen Prismas von gleicher Grundfläche und Höhe.

Repetiere auch das Messen der Winkel und die Konstruktion des rechtwinkligen Dreiecks aus gegebenen Stücken.

Parallel- u. Central-projektion.

2) *Zeichne eine schräge Parallel- und eine Centralprojektion eines Schopfs mit diesem Pultdach.*

Fig. 14

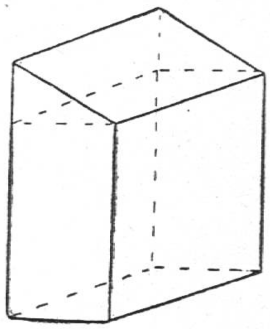
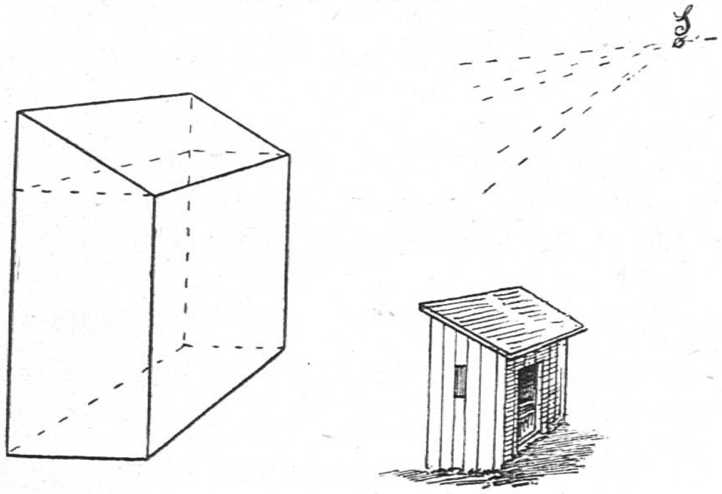


Fig. 15 (a, b.)



Wir denken uns das Modell des Schopfs konstruiert und so auf das Zeichnungsblatt gelegt, dass eine Seitenfläche, die einen Giebel enthält, mit dem Zeichnungsblatt zusammenfällt; dann erscheint diese Fläche des Modells in wahrer Grösse. Von ihr gehen wir aus.

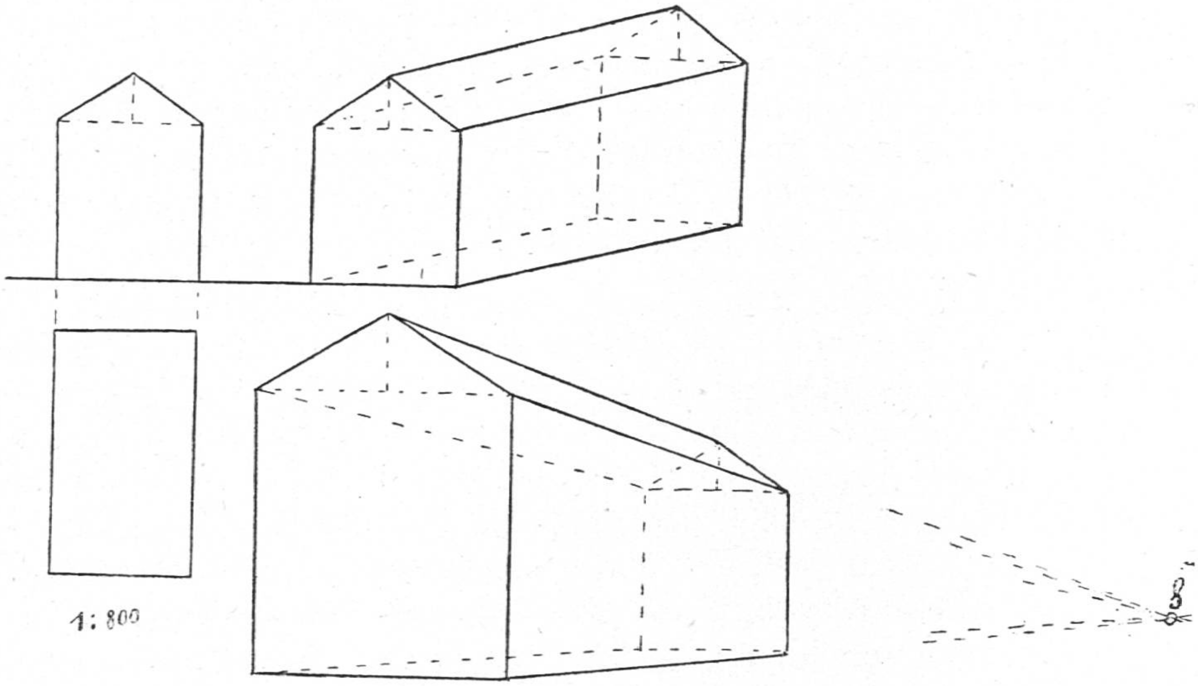
Wir zeichnen also zuerst das Rechteck dieser Fläche und dann das Dreieck. Um zunächst die Parallelprojektion zu erhalten, verschieben wir das gezeichnete Rechteck parallel zu sich selbst, wodurch wir das Bild des rechtwinkligen Prismas, worauf das Pultdach ruht, erhalten; dann verlängern wir die zweite Seitenkante, die bis zur Firstkante reicht, um die Höhe des Pultdachs und zeichnen die Firstkante. Wir brauchen dann nur noch ihre Endpunkte mit den Endpunkten der gegenüberliegenden Dachkante zu verbinden.

Um die Centralprojektion des Schopfs zu zeichnen, gehen wir von der gleichen Fläche aus, wählen einen geeigneten Augpunkt und zeichnen wieder das Bild des rechtwinkligen Prismas, sowie die Richtung der Firstkante, welche durch den Endpunkt der gezeichneten Dachkante und durch den Augpunkt geht, weil sie in Wirklichkeit mit den nach hinten gehenden Kanten parallel läuft. Dann verlängern wir die zweite Seitenkante, die bis zur Firstkante reicht, und erhalten so den letzten Eckpunkt des Daches, den wir noch mit dem nachfolgenden untern Eckpunkt des Daches zu verbinden haben.

Zeichne in Parallelprojektion das Dach in aufrechter Stellung.

3) *Zeichne den Grund- und den Aufriss eines Hauses mit gleichschenkligem Giebeldach, sowie dessen Parallel- und Centralprojektion.*

Fig. 16 Fig. 17



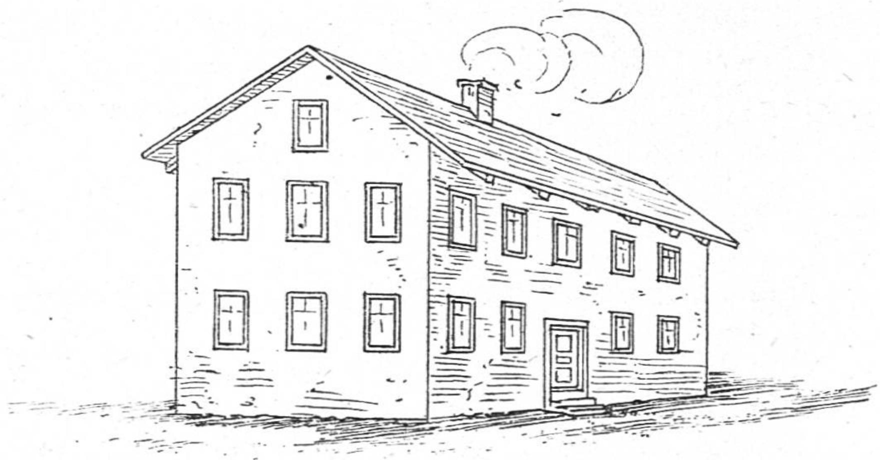


Fig. 18 (a, b.)

a) Wir beginnen mit Grund- und Aufriss. (Fig. 16.) Grund- und Aufriss.

Benütze zur Erklärung das Modell des Hauses, das im ersten Kurs verfertigt wurde, und lege es auf die Grundrissebene, dass die vordere Ansicht parallel zur Aufrissebene zu stehen kommt. Dann ist der Grundriss ein Rechteck und der Aufriss eine der Ansicht des Modells kongruente Figur.

Zeichne auch Grund- und Aufriss des Estrichs allein. Der Aufriss ist ein gleichschenkliges Dreieck. Welche Stücke müssen zu seiner Konstruktion gegeben sein? (Repetition der Eigenschaften und der Konstruktion des gleichschenkligen Dreiecks.)

Parallelprojektion.

b) Um unseren Hauskörper in Parallelprojektion darzustellen, denken wir uns das Zeichnungsblatt mit der hinteren Ansicht des Modells zusammenfallend; dann erscheint diese in wahrer Grösse; wir zeichnen sie. Dann konstruieren wir zuerst die Parallelprojektion des rechtwinkligen Teiles des Modells, tragen nachher in der Mitte der Grundlinie des vorderen Giebels die Höhe des Giebels (Symmetrieachse) auf und können dann die Firstkante und die schrägen Kanten des vorderen Giebels zeichnen. (Fig. 17.)

Centralprojektion.

c) Um ein perspektivisches Bild des Hauskörpers oder seines Kartonmodells zu erhalten, gehen wir auch von der hinteren (oder vorderen) Ansicht aus und schliessen ihr das Bild des rechtwinkligen Teiles des Körpers an. (Fig. 18.) Die Richtung der Firstkante geht durch den Augpunkt und die Spitze des gezeichneten hintern Giebels. Wir zeichnen diese Linie und errichten in der Mitte der Grundlinie des vorderen Giebels das Perpendikel; sein Schnittpunkt mit der Firstkante ist die Spitze des vorderen Giebels. Verbinden wir letztere mit den Endpunkten der Grundlinie des vorderen Giebels, so ist das Bild fertig.

Betrachte das Bild, indem du ein Auge schliessest und das andere senkrecht über den Augpunkt der Zeichnung stellst.

Übungen.

Stelle auch ein zweites Haus dar, und zeichne Einzelheiten (Fenster etc.) ein.

4) *Zeichne den Grund- und den Aufriss eines Estrichs mit ungleichseitigen Giebeln. Wähle dieselbe Stellung gegenüber den Projektionsebenen.*

Welche Dimensionen müssen bekannt sein? Z. B. Länge des Estrichs 12 m, Breite 9 m, Höhe 4 m. Abschnitte, welche die Höhe auf der Grundlinie macht, 5 m und 4 m.

Wie könnte man ohne Benutzung der Höhe C D und der Abschnitte A D und D B den Aufriss A B C zeichnen? Aus was für Stücken lässt sich ein Dreieck A B C konstruieren? (Repetition der Konstruktion der Dreiecke, der Beziehungen zwischen den Winkeln und zwischen Winkeln und Seiten).

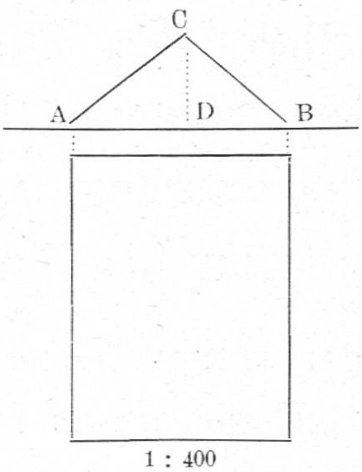


Fig. 19

Aus diesen Konstruktionen ergeben sich folgende Kongruenzsätze:

Satz 6. Zwei Dreiecke, die in allen Seiten paarweise übereinstimmen, sind kongruent (≌). (I. Kongruenzsatz.)

Satz 7. Zwei Dreiecke, die in zwei Seiten und dem eingeschlossenen Winkel paarweise übereinstimmen, sind kongruent. (II. Kongruenzsatz.)

Satz 8. Zwei Dreiecke, die in einer Seite und den ihr anliegenden Winkeln paarweise übereinstimmen, sind kongruent. (III. Kongruenzsatz.)

Satz 9. Zwei Dreiecke, die in zwei Seiten und dem der grösseren Seite gegenüberliegenden Winkel übereinstimmen, sind kongruent. (IV. Kongruenzs.)

Wie lauten die Sätze für das rechtwinklige und für das gleichschenklige Dreieck?

Repetiere die Berechnung der Giebel- und der Dachflächen; berücksichtige, dass die Dachflächen über den Unterbau hinausragen. Repetiere die Berechnung des Estrichraumes.

5) Bemerkung über die Ähnlichkeit der Dreiecke.

Wir haben mehrere Giebelflächen im verkleinerten Massstabe gezeichnet. Weise durch Messung nach, dass alle 3 Seiten eines jeden dieser Bilddreiecke dieselben Bruchteile der entsprechenden Seiten des Originaldreiecks sind, und dass Bild- und Originaldreieck in den Winkeln paarweise übereinstimmen. Man sagt, das Bilddreieck sei dem Original *ähnlich*.

Satz 10. Zeichnet man ein Dreieck im verkleinerten Massstabe, so erhält man ein Dreieck, das dem ersten ähnlich heisst. Die beiden Dreiecke haben die Winkel paarweise gleich; alle drei Seiten des einen sind dieselben Bruchteile der entsprechenden Seiten des andern.

C. Darstellung der Treppe und Ergänzungen zur früheren Behandlung des Prismas, des Parallelogramms, des Dreiecks und des Trapezes.

I. Darstellung der Treppe in den verschiedenen Projektionen.

1) *Wir wollen die einfache Treppe, die wir im I. Kurs behandelt haben, zunächst durch Grund- und Aufriss darstellen.* (Fig. 20.)

Fig. 20.

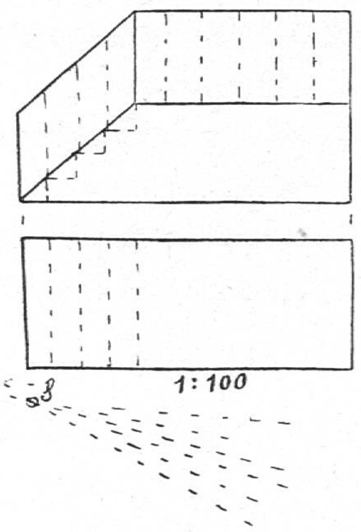
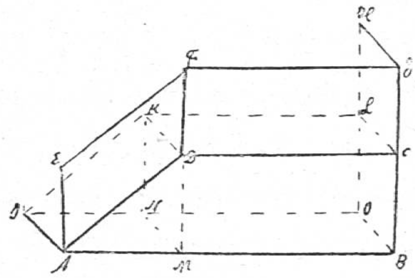


Fig. 21.



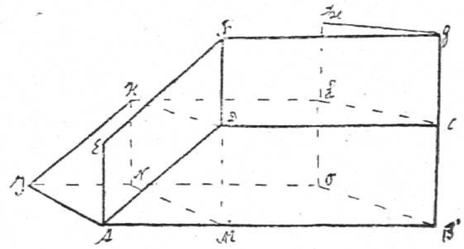


Fig. 22.

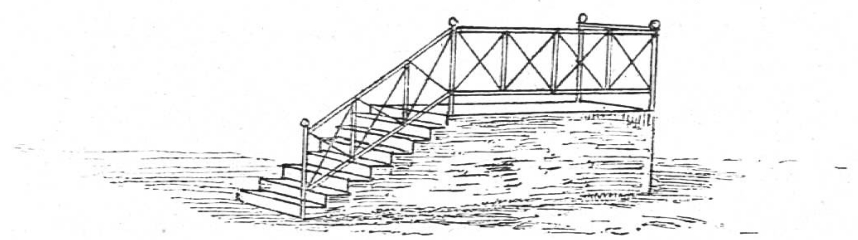


Fig. 22 b.

Grund- und Aufriss.

Die Aufrissebene denken wir uns mit der Fläche des schrägen Geländers zusammenfallend. Dann ist der Aufriss der

Treppe die Ansicht, die im ersten Kurs gezeichnet wurde. Der Grundriss ist ein Rechteck. (Repetiere die Eigenschaften, die Konstruktion und die Berechnung des Parallelogramms, des Trapezes und des Treppenmauerwerks.)

2) Um eine Parallelprojektion der Treppe zu zeichnen, stellen wir zuerst den rechtwinkligen Teil (M B O N, D C L K) des Mauerwerks dar und schliessen ihm dann den schrägen Teil des letztern, sowie das Geländer an. Die Fläche A B G F E ist mit dem Aufriss kongruent; die Kanten A J und G H laufen parallel mit M N, B O u. s. w. Um aus der Parallelprojektion eine klare Vorstellung von der Treppe zu erhalten, muss man die Zeichnung vom Auge weit entfernt halten. Parallelprojektion.

3) Um die Centralprojektion zu zeichnen, verfahren wir gleich. Die Kanten A J und G H sind in der Zeichnung nach dem Augpunkte gerichtet. Centralprojektion.

Versuche auch Einzelheiten (Stufen etc.) einzuzeichnen.

4) Stelle noch eine zweite Treppe dar.

5) *Bemerkung.* Vergleiche in beiden Fällen das schräge Treppengeländer mit seinem Bilde im Aufriss. Alle Seiten des Originals erscheinen im Bilde im gleichen Verhältnis verkürzt; die Winkel sind gleich geblieben. Wir sagen, das Bildparallelogramm ist dem Originalparallelogramm ähnlich. Dasselbe gilt vom Trapez am Mauerwerk und im Bilde.

Zeichnet man ein Parallelogramm (Trapez) im verkleinerten Massstab, so erhält man ein Parallelogramm (Trapez), das dem ersten ähnlich heisst. Die beiden Figuren haben dieselben Winkel. Ihre Seitenpaare stehen in gleichem Verhältnisse.

II. Das schiefe Prisma.

1) Auf einer schrägen Waldfläche hat man vier gleich lange senkrechte Pfähle eingeschlagen, so dass ihre Fusspunkte ein Rechteck bilden; zwischen diesen Pfählen hat man 1 m langes Holz aufgeschichtet. Die Länge der Beige misst 4 m, die Breite 1 m, der Abstand von Grund- und Deckfläche 2 m. *Wie viele m^3 Holz enthält die Beige?* Schräge Holzbeige.

a) Wir wollen diesen Körper zunächst genau betrachten. Grund- und Deckfläche sind Rechtecke, desgleichen die untere und die obere Seitenfläche. Die Seitenflächen links und rechts Beschreibung.

sind schiefwinklige Parallelogramme. Die 4 Seitenkanten bilden mit der Grundfläche schiefe Winkel. Man nennt deshalb diesen Körper ein *schiefes Prisma* mit rechtwinkliger Grundfläche.

Denken wir uns die Beige wie früher die Geländermauer so umgelegt, dass eines der beiden Parallelogramme zur Grundfläche wird, so hat sie die Form eines senkrechten Prismas, weil die Seitenkanten auf der Grundfläche senkrecht stehen.

Inhalt dieses Prismas = G . H = Parallelogramm $\times$ H = 4 . 2 . 1 m^3 = 8 m^3.

Zeichne den Grund- und den Aufriss der Beige in dieser Lage. Der Grundriss ist ein Parallelogramm. Versuche, es aus Grundlinie und Höhe zu zeichnen. Wir müssen von ihm noch einen Winkel oder das Stück kennen, um welches die Decklinie über die Grundlinie hinaus verschoben ist.

Zeichne auch den Grund- und den Aufriss der Holzbeige in ihrer ursprünglichen Lage.

Wähle dabei die Waldfläche als Grundrissebene.

Fig. 23 a, b.

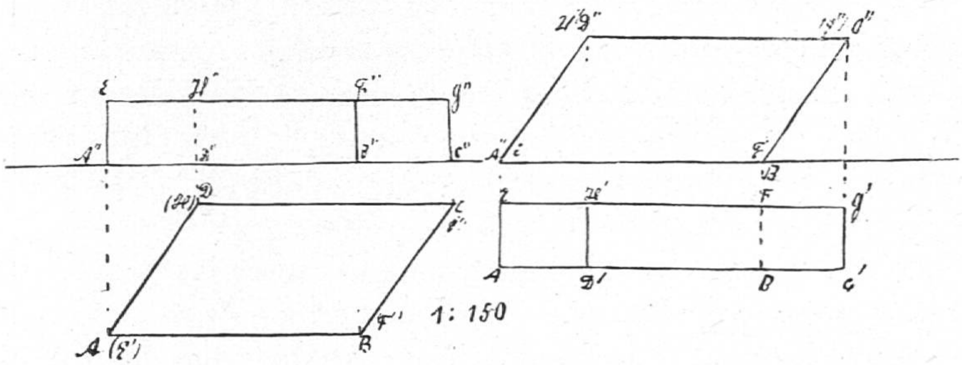


Fig. a geht in Fig. b über, wenn wir die Aufrissebene mit der Gundrissebene vertauschen.

b) Wir kommen zum nämlichen Resultat bezüglich des Inhalts, wenn wir auch hier die Grundfläche (A B F E) berechnen und ihre Masszahl mit der Höhe (2 m) multiplizieren.

Grundfläche A B F E = 4 . 1 m^2

Inhalt des schrägen Prismas = 4 . 1 . 2 m^3 = 8 m^3.

Die Richtigkeit dieser Berechnungsweise können wir auch durch folgende Überlegung darthun: denken wir uns zunächst das Parallelogramm A'' B'' C'' D'' parallel zur Grundlinie in Streifen eingeteilt und diese nach links verschoben, bis sie senkrecht über A'' B'' stehen, so geht dadurch das Parallelogramm in ein Rechteck von gleicher Grundlinie und Höhe über, ohne den Inhalt zu ändern.

Denken wir uns dementsprechend den Körper in dünne Platten zerlegt, die parallel zur Grundfläche liegen, und all diese Platten verschoben, bis sie senkrecht über die Grundfläche zu liegen kommen, so geht dadurch das schiefe Prisma in ein senkrechtes von gleicher Grundfläche und Höhe über, dessen Inhalt gleich G . H ist.

Wir erhalten demnach auch den Inhalt unseres schiefen Prismas, indem wir die Grundfläche mit ihrem Abstande von der Deckfläche multiplizieren.

2) Berechne auf diese Weise auch die früher betrachtete Geländermauer.

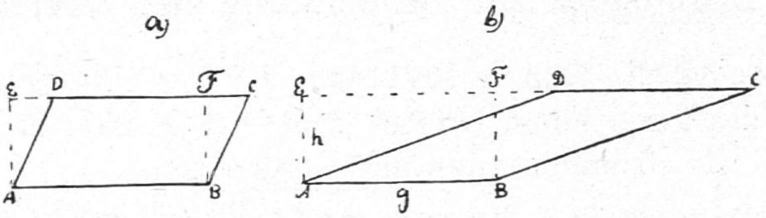
3) Zeichne den Grund- und den Aufriss einer schrägen Ackermauer, die 20 m lang, 1,5 m hoch und 45 cm breit ist, und deren schräge Kanten gegen die vertikalen Kanten bezw. um 80° geneigt sind. Nimm die Aufrissebene parallel zu den Längsseitenflächen und die Grundrissebene wagerecht an.

Berechne die Erstellungskosten der Mauer à 11 Fr. pro m³.

III. Ergänzung zur Berechnung des Parallelogramms.

Versuche, die Berechnungsweise des Parallelogramms A B C D (Fig. 24 b) zu erklären. Der frühere Beweis lässt uns hier im Stich.

Fig. 24.



Wir wollen deshalb einen zweiten Beweis geben, der sich auf alle Fälle anwenden lässt.

Wir gehen von der ganzen Figur A B C E aus und fragen uns, welches Stück müssen wir von ihr abschneiden, um 1) das Parallelogramm A B C D, 2) das Rechteck A B F E zu erhalten?

Parallelogramm A B C D = Trapez A B C E — Dreieck A E D

Rechteck A B E F = „ „ — Dreieck B F C

Aber Dreieck A E D ist kongruent ($\cong$) B F C,

folglich:

Parallelogramm $ABCD$ = *Rechteck* $ABEF = AB \cdot BF = g \cdot h$.

Das sehen wir auch ein, wenn wir uns das Parallelogramm in Streifen parallel zu A B zerlegt und diese parallel zu A B verschoben denken, bis sie senkrecht über A B liegen.

Um den Inhalt des Parallelogramms A B C D zu berechnen, haben wir demnach die Grundlinie A B und die Senkrechte zwischen ihr und der Verlängerung von C D zu messen und die beiden Masszahlen zu multiplizieren. Jene Senkrechte gibt den Abstand der Grundlinie von der Gegenseite an; wir wollen sie Höhe des Parallelogramms nennen. Dann gilt allgemein die Regel:

Inhalt des Parallelogramms = *Grundlinie* $\times$ *Höhe* = $g \cdot h$.

(Weise darauf hin, dass obige Ableitung sowohl für Fig. a, als für Fig. b gilt.)

Übungen.

1) Wähle B C als Grundlinie, und zeichne darüber das Rechteck von gleicher Grundlinie und Höhe.

2) Wie kann man leicht unzählig viele Parallelogramme zeichnen, die mit A B C D inhaltsgleich sind?

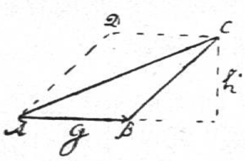
3) Zeichne ein Parallelogramm, dessen Inhalt 12 cm² ist, und dessen Grundlinie 4 cm misst.

IV. Ergänzung zur Berechnung des Dreiecks.

Versuche, die frühere Erklärung der Berechnung der Dreiecke auf das gezeichnete Dreieck A B C (Fig. 25) anzuwenden, wenn A B als Grundlinie gewählt werden soll.

Wir müssen hier einen anderen Beweis geben.

Fig. 25.



Wir ergänzen das Dreieck ABC zum Parallelogramm ABCD, das den doppelten Inhalt hat, weil A B C $\cong$ A C D.

Inhalt von A B C D = g . h, wobei g = A B, und h = Abstand A B und D C.

$$\text{Inhalt von } ABC = \frac{g \cdot h}{2}$$

Wir erhalten den Inhalt des Dreiecks A B C, indem wir die Grundlinie A B und ihren Abstand von der Parallelen durch die gegenüberliegende Ecke (Spitze) messen, die beiden Masszahlen multiplizieren und das Produkt durch 2 dividieren.

Diesen Abstand erhalten wir auch, indem wir von der Spitze C aus diese Senkrechte auf die Verlängerung der Grundlinie A B fällen. Wir nennen diesen Abstand, gleich wie früher, die Höhe, welche zu A B als Grundlinie gehört. Es gilt dann auch hier die Regel:

$$\text{Inhalt des Dreiecks} = \frac{\text{Grundlinie mal Höhe}}{2} = \frac{g \cdot h}{2}$$

Übungen.

1) Wie gestaltet sich die Berechnung, wenn man eine andere Dreiecksseite als Grundlinie wählt?

2) Zeichne spitzwinklige und stumpfwinklige Dreiecke, und konstruiere die zugehörigen Rechtecke von doppeltem Inhalte.

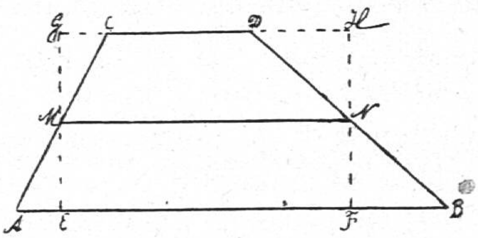
3) Zeichne Dreiecke, die einen Inhalt von 15 cm^2 und eine Grundlinie von 5 cm haben.

V. Ergänzung zur Berechnung des Trapezes.

Bei Behandlung der Treppe haben wir das Trapez kennen gelernt. Welche Trapezarten sind uns da begegnet? Wie haben wir das Trapez berechnet, wie das senkrechte Prisma mit trapezischer Grundfläche? Gebt Beispiele für diese Körperform an.

Wir wollen nun die Inhaltsregel für das Trapez auf eine neue Art ableiten und ausdrücken.

Fig. 26.



a) Versuche, das Trapez in ein inhaltsgleiches Rechteck zu verwandeln.

Wir halbieren die 2 nicht parallelen Seiten und ziehen durch ihre Mitten M und N Senkrechte zu den parallelen Trapezseiten. Dadurch entsteht das Rechteck E F H G, das wir mit dem Trapez vergleichen wollen. Dreieck A E M $\cong$ C G M, denn M A = M C; W. A E M = W. C G M = 90°; W. A M E = W. C M G als Scheitelwinkel, folglich auch W. E A M = W. G C M (III. Kongruenzsatz). Ebenso Dreieck B F N $\cong$ D H N.

Durch eine halbe Drehung des Dreiecks A E M rechts um und durch eine solche mit dem Dreieck B F N links um geht das Trapez A B D C in das Rechteck E F H G über; folglich ist das Trapez inhaltsgleich diesem Rechtecke.

In welcher Beziehung steht nun die Grundlinie des Rechtecks zu den Trapezseiten?

Aus der Kongruenz der Dreiecke A E M, C G M und B F N, D H N folgt, dass A E = C G und B F = H D ist. Die Grundlinie E F des Rechtecks E F H G ist um die zwei Strecken A E und B F kleiner als die Trapezseite A B; sie ist um 2 gleiche Strecken C G und D H grösser als die Trapezseite C D; folglich ist sie das Mittel (d. h. die halbe Summe) aus den parallelen Trapezseiten.

$$E\,F = \frac{A\,B + C\,D}{2} = \frac{4{,}5\text{ cm} + 1{,}5\text{ cm}}{2} = 3\text{ cm}.$$

Die Höhe des Rechtecks stimmt mit der Höhe des Trapezes, d. h. mit dem Abstande der beiden parallelen Seiten, überein.

$$\text{Inhalt des Trapezes} = \frac{4{,}5 + 1{,}5}{2}\,.\,1{,}8\text{ cm}^2 = 5{,}4\text{ cm}^2.$$

Vergleiche diese Berechnung mit derjenigen vom I. Kurs.

Ein Trapez ist inhaltsgleich einem Rechtecke, dessen Grundlinie gleich dem Mittel aus den beiden parallelen Trapezseiten, dessen Höhe gleich dem Abstand dieser Seiten ist.

b) Es ist noch eine andere Ausdrucksweise üblich. Die Linie M N, welche die Mitten der nicht parallelen Trapezseiten verbindet, heisst *Mittellinie* des Trapezes. Vergleiche sie mit E F! Aus der bewiesenen Kongruenz der beiden Dreieckspaare folgt auch, dass M E = M G und F N = N H. M N teilt daher das Rechteck E F H G in zwei Rechtecke; deshalb ist M N gleich und parallel zu E F und also $= \frac{A\,B + D\,C}{2}$.

Der Inhalt des Trapezes ist also auch gleich Mittellinie mal Höhe.

Wiederhole den Beweis für ein zweites Trapez.

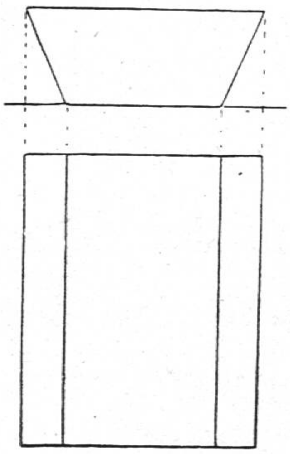
Satz 11. a) Die Verbindungslinie der Mitten der nicht parallelen Seiten eines Trapezes ist parallel zu den parallelen Trapezseiten und gleich dem Mittel aus denselben. Sie heisst Mittellinie des Trapezes.

b) Der Inhalt eines Trapezes ist gleich Mittellinie mal die Höhe.

Übungen.

1) Zeichne den Grund- und den Aufriss, sowie das Netz des Troges eines Düngerwagens, und berechne den Flächeninhalt der Bretter und seinen Rauminhalt. Nimm seine Masse. Z. B. Länge = 1,5 m, Breite unten = 80 cm, oben = 1,2 m, Höhe = 50 cm.

Fig. 27



1:50

Sehen wir eines der Trapeze als Grundfläche an, so hat der Trog die Gestalt eines senkrechten Prismas. Sein Inhalt

$$= \text{Trapez} \times \text{Länge} = \frac{0{,}8 + 1{,}2}{2} \,.\, 0{,}5 \,.\, 1{,}5 \text{ m}^3 = 0{,}75 \text{ m}^3.$$

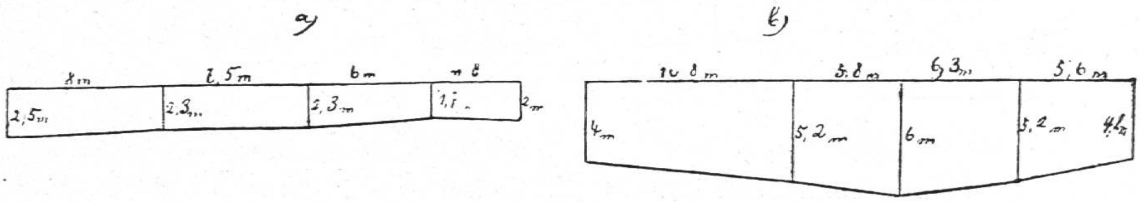
Zeichne den Grund- und den Aufriss des rechtwinkligen Prismas von gleichem Inhalt. Seine Breite ist die Mittellinie des

$$\text{Trapezes} = \frac{0{,}8 + 1{,}2 \text{ m}}{2} = 1 \text{ m}.$$

Wir erhalten den Inhalt des Troges, wenn wir Länge $\times$ mittlere Breite $\times$ Höhe nehmen.

2) Berechne die zwei folgenden Steinböschungen à 1 Fr. pro m².

Fig. 28



3) Berechne die Kosten für den Aushub eines Grabens von folgenden Ausdehnungen: seine Breite beträgt durchwegs 80 cm; seine Länge misst 200 m. Zu unterst ist er 1,5 m tief; seine Tiefe beträgt Ende des 10. Längenmeter 1,2 m, Ende des 35. 1,4 m, Ende des 60. 1,80 m, Ende des 75. 1,5 m; er behält diese Tiefe bei bis Ende des 160. Meter; Ende des 185. Meter ist die Tiefe 1,7 m und Ende des 200. 1,5 m. Man zahlt 90 Rp. pro m³. Zeichne Grund- und Aufriss des Grabens.

4) Eine Wuhrmauer von 2,3 m Dicke und 56 m Länge ist zu unterst 1,3 m hoch, beim 20. Längenmeter 1,6 m hoch; beim 45. Meter ist die Höhe 1,8 m und zuletzt 1,4 m. Berechne die Erstellungskosten à 10 Fr. pro m³. Zeichne den Grund- und den Aufriss.

D. Beweis der Sätze über die Konstruktion und die Eigenschaften des Parallelogramms.

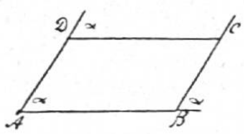
I. Die Winkel an einer Transversalen zwischen zwei Parallelen.

1) *Wir wollen die Konstruktion und die Eigenschaften der behandelten Parallelogramme genauer besprechen.*

Konstruktion der Parallelogramme.

Wie haben wir früher das Geländer A B C D herausgezeichnet? Wir haben zuerst den Winkel B A D $= \alpha$ gezeichnet, auf seinen Schenkeln die Seiten A B und A D abgetragen und alsdann den Winkel α auch bei B und bei D konstruiert.

Fig. 29



Beweise, dass so D C parallel zu A B und B C parallel zu A D wird.

---

*) Dieses Kapitel ist nur für Schüler berechnet, die später beweisenden Geometrieunterricht erhalten.

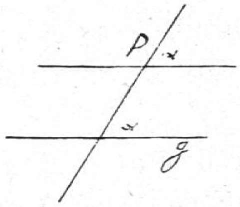
Würden sich A B und D C verlängert, z. B. rechts, schneiden, so würden sie mit A D ein Dreieck bilden. Die der Dreiecksseite A D anliegenden Winkel B A D und A D C würden dann zusammen 180° betragen; denn Winkel A D C ist der Nebenwinkel eines Winkels, der gleich α gemacht wurde. Da die Winkelsumme eines Dreiecks aber nur 180° beträgt, muss der dritte Winkel = O sein, d. h. A B und D C haben keinen Richtungsunterschied oder sind parallel.

Beweise auf gleiche Art, dass A D || B C (|| bedeutet parallel).

Übung.

Konstruktionsaufgabe: gegeben eine Gerade (g) und ein Punkt (P) ausserhalb derselben. Konstruiere durch den Punkt eine Parallele zu dieser Geraden.

Fig. 30



Wir ziehen durch den Punkt P eine beliebige, die Gerade g schneidende Linie, die wir *Transversale* nennen wollen, und tragen den Winkel, den sie mit g bildet, bei P ab.

Wie haben wir im 1. Kurs diese Aufgabe gelöst?

Diese Konstruktion lässt sich bequem mit Hilfe eines Dreiecks und eines Lineals ausführen.

Wir legen das Dreieck an die Gerade g, setzen das Lineal an eine zweite Seite des Dreiecks an und verschieben letzteres längs des Lineals, bis die Dreiecksseite, die an g gelegt wurde, durch P geht. Dann ist sie ihrer früheren Lage parallel; denn sie bildet mit dem Lineal (der Transversalen) denselben Winkel (Dreieckswinkel).

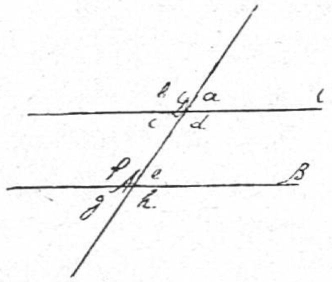
2) *Nun wollen wir auch die übrigen Winkel ins Auge fassen, welche zwei der parallelen Geraden der Fig. 29 mit der sie durchschneidenden Linie (der Transversalen) bilden.*

Wie viele Winkel bildet die Transversale A D Fig. 31 mit A B und D C?

Wir wollen diese 8 Winkel mit kleinen lateinischen Buchstaben bezeichnen. Man nennt die Winkel a, b, g und h *äussere,* Innere und äussere Winkel.

und die Winkel c, d, e und f *innere* Winkel und teilt sie folgendermassen in Paare ein.

Fig. 31



Korrespondierende Winkel.

a) W. a und e, b und f, c und g, d und h heissen *korrespondierende (entsprechende) Winkelpaare.* Sie liegen jeweilen auf gleicher Seite der Transversalen A D; der eine ist ein äusserer, der andere ein innerer Winkel.

Wir haben W. a = e (= 57°) gemacht; was folgt daraus für die andern Paare?

In welche Lage kommen je zwei korrespondierende Winkel, wenn man A B parallel zu sich selbst verschiebt, bis A auf D fällt?

Wechselwinkel.

b) W. c und e, d und f, a und g, b und h heissen Paare von *Wechselwinkeln*).* Zwei Wechselwinkel liegen auf verschiedener Seite der Transversalen und sind entweder beides innere oder beides äussere Winkel.

Was folgt aus der Gleichheit der W. a und e für die Wechselwinkel? In welche Lage kommen je zwei Wechselwinkel durch die vorhin genannte parallele Verschiebung? (Sie werden Scheitelwinkel.

Ergänzungswinkel.

c) W. c und f, d und e, a und h, b und g heissen Paare von *Ergänzungs*winkeln (auch Anwinkel). Zwei Ergänzungswinkel liegen auf der gleichen Seite der Transversalen und sind entweder beides innere oder beides äussere Winkel.

Aus W. $a=e$ folgt: W. d + W. e = 180°, weil d der Nebenwinkel von a ist.

Ebenso: e + f = a + h = b + g = 180°.

In welche Lage kommen je zwei Ergänzungswinkel durch die genannte parallele Verschiebung? (Sie werden Nebenwinkel.)

d) Führe noch ein zweites Beispiel durch. Es ergibt sich:

Satz 12. Werden zwei Gerade A B und D C von einer Transversalen so geschnitten, dass zwei korrespondierende Winkel (a und e) gleich sind, so sind auch

*) Die äussern Wechsel- und Ergänzungswinkel kommen selten in Betracht.

die übrigen korrespondierenden Winkel und je zwei Wechselwinkel gleich; je zwei Ergänzungswinkel betragen zusammen 180°, und die beiden Geraden A B und D C sind parallel.

Mache 2 Wechselwinkel gleich. Was folgt daraus für die andern Winkelpaare, für die gegenseitige Lage der geschnittenen Geraden?

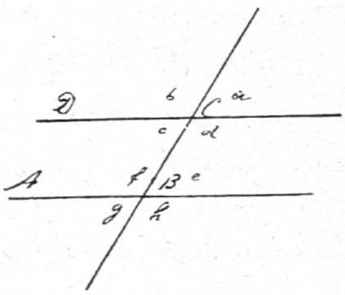
Zeichne die 3 Geraden auch so, dass zwei Ergänzungswinkel zusammen 180° betragen, und ziehe die Folgerungen.

3) *Umkehrung.*

a) Beim Parallegramm A B C D (Fig. 29) werden die beiden Parallelen A B und D C auch durch eine zweite Transversale B C geschnitten. Erstes Beispiel.

Wie sind die Winkel an dieser Transversalen? Wir lassen die Seite A D weg. (Fig. 32.)

Fig. 32.



Voraussetzung: A B ∥ D C.

Behauptung: W. a = W. e.

Beweis: wir denken uns W. e. bei C an B C abgetragen; dadurch erhalten wir in C (nach Satz 12) eine Parallele zu A B. Würde sie nicht mit D C zusammenfallen, d. h. wäre W. e nicht gleich W. a, so gäbe es zu A B durch C zwei parallele Linien, was unmöglich ist. Es muss also W. a = W. e sein; ebenso W. e = W. c u. s. f.

Je zwei korrespondierende und je zwei Wechselwinkel von B C sind einander gleich; je zwei Ergänzungswinkel betragen zusammen 180°.

b) Die Zeilen der liniierten Hefte sind parallel. Ziehe eine beliebige Transversale, und beweise, dass die korrespondierenden Winkel und die Wechselwinkel an derselben gleich sind, und dass je zwei Ergänzungswinkel 180° betragen. Zweites Beispiel.

Satz 13. Werden zwei parallele Linien durch eine beliebige Transversale geschnitten, so sind je zwei korrespondierende Winkel und je zwei Wechselwinkel einander gleich, und je zwei Ergänzungswinkel betragen zusammen 180 °.

Übung.

Übet euch an Parallelogrammen und Trapezen in der Unterscheidung der Winkel an einer Transversalen zwischen zwei Parallelen.

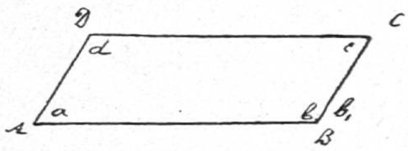
Konstruiert mehrere Trapeze und Parallelogramme nur mit Benutzung des Lineals und des „Dreiecks“.

II. Beziehung zwischen den Winkeln des Parallelogramms.

Wir können mit Hilfe der Sätze 12 und 13 mehrere Eigenschaften und Konstruktionen des Parallelogramms beweisen.

Welchen Zusammenhang zwischen den Winkeln hatten wir früher durch Messung gefunden? *Beweise ihn.*

Fig. 33.



Es sei A B ∥ DC, A D ∥ BC, A B C D also ein Parallelogramm. W. a = W. b_1 als korrespondierende Winkel an der Transversalen A B zwischen den Parallelen A D und B C. W. c = W. b_1 als Wechselwinkel an der Transversalen B C zwischen den Parallelen A B und D C, folglich: *W . a = W . c.*

Beweise, dass auch W. b = W. d.

Ferner ist:

W. a + W. b = 180° als Ergänzungswinkel an der Transversalen A B zwischen A D und B C

W. d + W. c = 180° als Ergänzungswinkel an der Transversalen D C zwischen A D und B C.

W. a + W. b. + W. c + W. d = 360°.

Satz 14. Je zwei Gegenwinkel des Parallelogramms sind einander gleich; je zwei an derselben Seite liegende Winkel sind Supplementswinkel.

III. Beziehung zwischen den Seiten des Parallelogramms.

Durch Messung haben wir gefunden, dass bei Parallelogrammen die Gegenseiten gleich sind. *Begründe dies.*

Voraussetzung: A B ∥ D C, und A D ∥ B C.

Behauptung: A B = D C, und A D = B C.

Beweis: wir ziehen die Diagonale B D.

Fig. 34.

Sie teilt das Parallelogramm A B C D in die 2 Dreiecke A D B und B C D, deren Kongruenz wir beweisen können: B D haben sie gemeinsam; W. A B D = W. B D C als Wechselw. an der Transversalen B D zwischen den Parallelen A B und D C; W. A D B = W. D B C als Wechselw. an der Transversalen B D zwischen den Parallelen A D und B C.

Die beiden Dreiecke stimmen also überein in einer Seite und den zwei an ihr liegenden Winkeln; sie sind also kongruent (III. Kongr.-Satz). Schneide das Dreieck B C D aus; drehe es, und lege es mit D B an B D; dann fällt D C auf A B, B C auf A D; folglich ist *A B* = *D C* und *B C* = *A D*.

Beachte noch, dass je 2 Seiten der beiden Dreiecke zur Deckung kommen, welche den gleichen Winkeln gegenüber liegen.

Beweise die Gleichheit der Gegenseiten auch mit Benutzung der 2. Diagonale.

Satz 15. Sind in einem Viereck zwei Gegenseiten parallel, so sind sie auch einander gleich.

Zeichne noch ein Parallelogramm mit Lineal und Dreieck, und wiederhole den Beweis.

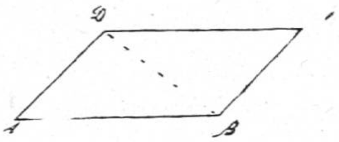
IV. Zweite Konstruktion des Parallelogramms.

Wir haben früher das Geländerparallelogramm A B C D auch konstruiert, indem wir zuerst das Dreieck A B D zeichneten und dann mit Benutzung des Zirkels D C = A B und B C =

A D machten; indem wir also die Gegenseiten des Vierecks A B C D gleich machten.

Beweise, dass in diesem Viereck die Gegenseiten auch parallel sind, dass das Viereck ein Parallelogramm ist.

Fig. 35.



Voraussetzung: A B = D C; A D = B C.

Behauptung: A B ∥ D C; A D ∥ B C.

Beweis: A B D ≌ C D B, da sie alle Seiten paarweise gleich haben (I. Kongr.-Satz).

Würden wir C B D ausschneiden und so drehen, dass seine Seiten auf die gleichen Seiten von A D B fallen, so müssten sich W. D B C und W. A D B, ferner W. B D C und W. A B D decken.

Weil W. D B C = W. A D B, ist A D ∥ B C.

Weil W. B D C ∥ W. A B D, ist A B ∥ D C.

Welche Eigenschaft haben laut Konstruktion das eben gezeichnete Parallelogramm, sowie die früher auf gleiche Weise konstruierten Parallelogramme? Welche weitere Eigenschaft haben wir bewiesen?

Satz 16. Sind in einem Vierecke je zwei Gegenseiten gleich, so sind sie auch parallel; das Viereck ist ein Parallelogramm.

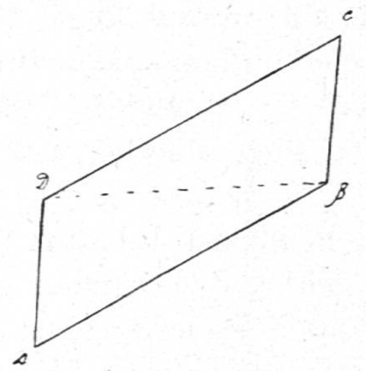
Zeichne noch ein Viereck mit gleichen Gegenseiten, und beweise, dass es ein Parallelogramm ist.

V. Dritte Konstruktion des Parallelogramms.

Wir wollen zeigen, wie man in einem liniierten Heft am einfachsten ein Parallelogramm zeichnet.

Denken wir an die Konstruktion des einfachsten Treppengeländers. Man nimmt zwei gleich lange Pfosten, stellt sie vertikal und verbindet ihre Endpunkte durch Eisen- oder Holzstangen. Man hat also 2 Seiten des Vierecks gleich lang und parallel gemacht. Wir haben durch Messung gesehen, dass auch das andere Seitenpaar gleich und parallel geworden ist. Beweise dies.

Fig. 36.



Voraussetzung: A D gleich und parallel B C.

Behauptung: A B gleich und parallel D C.

Beweis: A B D ≌ B D C; denn B D ist gemeisam; A D = B C, und W. A D B = W. D B C als Wechselwinkel.

Folglich ist 1) A B = D C, und W. A B D = W. C D B, und deshalb 2) A B ‖ D C.

Trage in deinem liniierten Heft auf zwei Zeilen die gleiche Strecke ab; verbinde die Endpunkte der beiden Strecken, und beweise, dass das entstehende Viereck ein Parallelogramm ist.

Welche Eigenschaft haben diese beiden Vierecke laut Konstruktion, und welche Eigenschaft lässt sich beweisen?

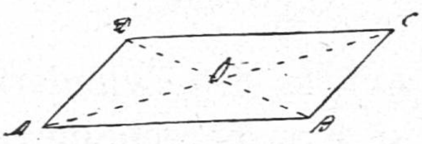
Satz 17. Sind in einem Vierecke zwei Gegenseiten gleich und parallel, so sind es auch die zwei andern Gegenseiten.

VI. Die Diagonalen des Parallelogramms.

Wir haben gesehen, dass jede Diagonale das Parallelogramm in zwei kongruente Dreiecke teilt.

Wie wird das Parallelogramm zerlegt, wenn man beide Diagonalen zieht?

Fig. 37.



△ A B O ≌ C D O, denn: A B = D C, W. B A O = W. D C O, W. A B O = W. C D O.

$\triangle$ C D O kann also durch Drehung mit $\triangle$ A B O zur Deckung gebracht werden; daraus folgt, dass $A\,O = O\,C$, und $B\,O = O\,D$ ist, d. h. jede Diagonale halbiert die andere.

Beweise auch, dass $\triangle$ A D O $\cong$ C B O.

Je zwei einander gegenüberliegende Dreiecke sind kongruent.

Wie verhält es sich mit den Inhalten von zwei anstossenden Dreiecken? $\triangle$ D O C und $\triangle$ B O C haben gleiche Grundlinie, da O D = O B ist, und auch gleiche Höhe, nämlich das Perpendikel von C auf die Verlängerung der Diagonale D B; sie haben daher gleichen Inhalt. Es sind also die 4 Dreiecke, in welche das Parallelogramm A B C D durch die beiden Diagonalen zerlegt wird, inhaltsgleich.

Wiederhole diese Ausführungen bei einem zweiten Parallelogramm.

Satz 18. Bei einem Parallelogramm halbieren sich die Diagonalen gegenseitig und zerlegen es in 4 inhaltsgleiche Dreiecke, wovon je zwei einander gegenüberliegende kongruent sind.

Der Schnittpunkt O der Diagonalen heisst *Mittelpunkt* des Parallelogramms. Denken wir uns O als Spiegel, so ist C das Spiegelbild von A, D das Spiegelbild von B, D C das Spiegelbild von A B, und B C das Spiegelbild von A D. Gib das Spiegelbild eines anderen Punktes des Umfangs an; es liegt auf dem Strahl durch O da, wo dieser die Gegenseite schneidet.

Beweise folgende Sätze:

Die Diagonalen des Rechtecks sind einander gleich.

„ „ „ Rhombus schneiden sich rechtwinklig.

„ „ „ Quadrats sind einander gleich und schneiden sich rechtwinklig.

E. Darstellung und Berechnung des Cylinders.

I. Grund- und Aufriss des Cylinders. Ergänzung zur Kreisberechnung.

a) *Zeichnet den Grund- und den Aufriss des Cylinderkörpers, den ihr früher aus Karton konstruiert habt. Wählt die einfachste Lage.*

Stellt man den Cylinder mit seiner Grundfläche auf die Grundrissebene, so ist der Grundriss ein Kreis (seine Grundfläche), und der Aufriss ein Rechteck. (Repetiere die Konstruktion und die Berechnung des Cylinders.)

Grund- und Aufriss des Cylinders.

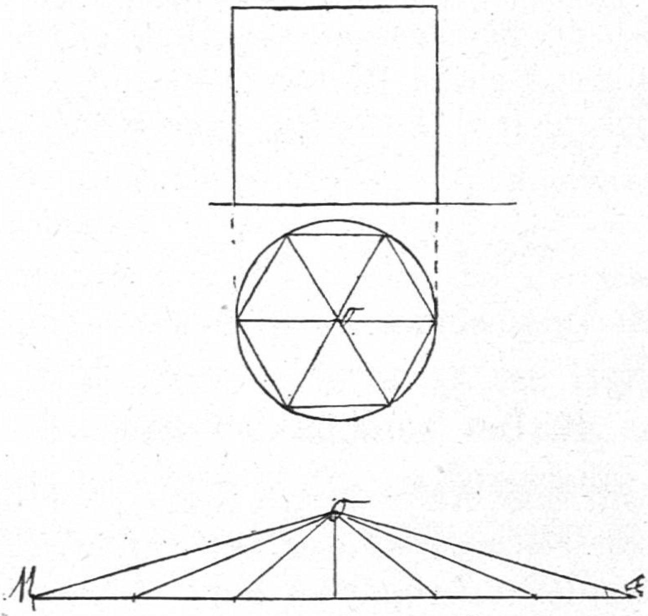


Fig. 38 (a u. b).

b) Wir wollen auf die Inhaltsberechnung des Kreises nochmals eintreten und gehen wiederum vom eingeschriebenen regelmässigen Sechseck aus. Beweise nun auf geometrischem Wege, dass das Sechseck inhaltsgleich einem Dreiecke M N O ist, dessen Grundlinie M N gleich dem Umfang des Sechsecks, dessen Höhe gleich der Höhe eines seiner Dreiecke ist. Verbinden wir die Teilpunkte auf M N, worauf der Radius (die Sechsseckseite) 6 mal abgetragen wurde, mit O, so entstehen 6 Dreiecke, die mit den Dreiecken des Sechsecks inhaltsgleich sind, weil sie in Grundlinie und Höhe übereinstimmen; folglich ist das Dreieck M N O dem Sechseck inhaltsgleich.

Berechnung des Sechsecks.

Führe dieselbe Betrachtung auch für das eingeschriebene Zwölfeck durch.

Übergang zum Kreis: wir denken uns nun die Kreislinie in unzählig viele gleiche Teile eingeteilt und die Teilpunkte mit dem Mittelpunkt verbunden; dann erscheint der Kreis als Summe von Dreiecken, die alle als Höhe den Radius haben, und deren Grundlinien zusammen die Peripherie bilden.

Berechnung des Kreises.

Die Peripherie denken wir uns nun auf einer Geraden abgewickelt, den Radius etwa im Mittelpunkte senkrecht zur Geraden abgetragen und seinen Endpunkt mit den Teilpunkten der abgewickelten Peripherie verbunden. Es entsteht dann ein Dreieck, das aus kleinen Dreiecken zusammengesetzt ist, die mit den Kreisdreiecken inhaltsgleich sind, weil sie in Grundlinie und Höhe übereinstimmen. So gelangen wir wieder zum frühern Ergebnis: der Kreis ist inhaltsgleich einem Dreiecke, dessen Grundlinie gleich der Peripherie, dessen Höhe gleich dem Kreisradius ist, oder gleich einem Rechteck, dessen Grundlinie gleich der halben Peripherie ($r\,\pi$), dessen Höhe gleich dem Radius (r) ist.

$$\text{Inhalt des Kreises } f = r \,.\, r \,.\, \pi = r^2\pi,$$

$$\text{oder } f = \left(\frac{d}{2}\right) . \left(\frac{d}{2}\right) . \pi = \frac{d^2 \,.\, \pi}{4}$$

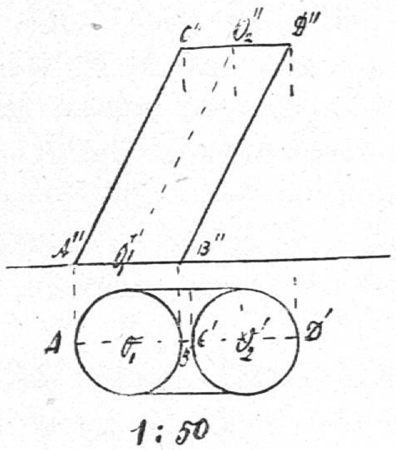
Zeichne das Dreieck und das Rechteck genau.

II. Der schiefe Cylinder.

a) *Betrachte eine Röhre, deren Achse (Verbindungslinie der Mittelpunkte von Grund- und Deckfläche) schief zu den zu einander parallelen Endflächen steht. Zeichne den Grund- und den Aufriss.*

Darstellung des schiefen Cylinders. Der Durchmesser der Röhre betrage 50 cm, ihre Höhe (d. i. der senkrechte Abstand zwischen Grund- und Deckfläche) 1,10 m; die Deckfläche sei gegen die Grundfläche um 60 cm parallel verschoben.

Fig. 39.



Grund- und Aufriss sind in Fig. 39 dargestellt.

Man nennt diese Röhre einen *schiefen* Cylinder, weil die Achse ($O_1\,O_2$) schief zur Grundfläche steht. Die bisher behandelten Cylinder heissen *gerade* oder *senkrechte* Cylinder, weil bei ihnen die Achse senkrecht zur Grundfläche steht.

b) Wie berechnet man den Rauminhalt dieses schiefen Cylinders? Denkt man sich ihn parallel zur Grundfläche in dünne Platten eingeteilt und diese parallel verschoben, bis sie senkrecht über der Grundfläche stehen, so geht der schiefe Cylinder in einen inhaltsgleichen geraden Cylinder von gleicher Grundfläche und Höhe über. Der Inhalt des schiefen Cylinders wird somit $= G \,.\, H = 2{,}5^2 \,.\, 3{,}14 \,.\, 11$ dm^3 $= 215{,}87$ dm^3 sein. Inhalt des schiefen Cylinders.

(Weise einen geraden und einen schiefen Blechcylinder von gleicher Grundfläche und Höhe vor, falls die Modellsammlung solche besitzt; fülle sie mit Wasser, und weise nach, dass sie gleich viel halten.)

Verallgemeinerung. Vergleiche die Merkmale und die Inhaltsberechnung der behandelten geraden und schiefen Cylinder.

Satz 19. a) Ein Cylinder ist begrenzt von zwei kongruenten Kreisen, die parallel liegen, als Grund- und Deckfläche und von einem runden Mantel. Der Abstand der beiden Kreise heisst die Höhe, die Verbindungslinie der beiden Mittelpunkte die Achse des Cylinders. Der Inhalt eines Cylinders ist gleich Grundfläche mal Höhe.

b) Steht die Achse senkrecht zur Grundfläche, so heisst der Cylinder ein gerader, sonst ein schiefer.

III. Der Hohlcylinder und der Kreisring.

1) *Zeichne den Grund- und den Aufriss eines cylindrischen Wasserbehälters von 4 m innerm Durchmesser, 50 cm Wanddicke und 3 m Höhe. Berechne das Volumen der Wandmauer (aus Cement) und deren Erstellungskosten à 25 Fr. pro m^3, sowie das Quantum Wasser, das der Behälter fasst.*

Berechne auch die Kosten für das Ausgraben und Wegführen der Erde à $2^1/_2$ Fr. pro m^3.

a) Die Grundfläche der Wandmauer ist begrenzt von zwei konzentrischen Kreisen und heisst *Kreisring.* Die Breite des Ringes ist der Unterschied zwischen dem grossen und kleinen Radius. Der Kreisring.

Kreisring = grosser Kreis — kleiner Kreis.

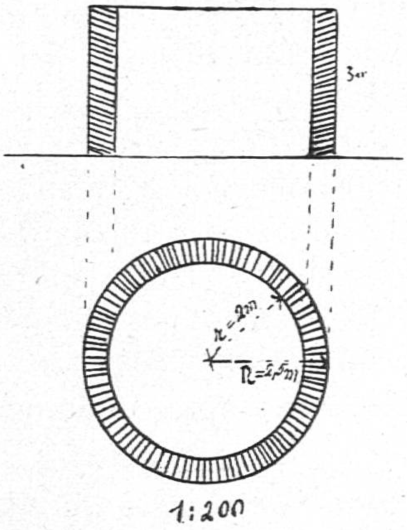
Flächeninhalt des grossen Kreises $= R^2\pi = 2{,}5^2 \,.\, \pi$ m^2 $= 6{,}25 \,.\, \pi$ m^2

„ „ kleinen Kreises $= r\,\pi = 2^2 \,.\, \pi$ m $= 4 \,.\, \pi$ m^2

Kreisring $= R^2\pi - r^2\pi = (6{,}25 \,.\, \pi - 4 \,.\, \pi)$ m^2 $= 2{,}25 \,.\, \pi$ m^2

$= 2{,}25 \,.\, 3{,}1416$ m^2 $= 7{,}068$ m^2.

Fig. 40



Berechnung der Wandmauer.

b) Diesen Körper nennt man einen *Hohlcylinder*. Sein Volumen werden wir erhalten, indem wir vom Inhalt des Cylinders mit Radius R den Inhalt des Cylinders mit Radius r abziehen, oder kürzer, indem wir die Masszahl des Kreisringes mit derjenigen der Höhe multiplizieren; denn grosser Kreis $\times$ Höhe — kleiner Kreis $\times$ Höhe $=$ (grosser Kr. — kl. Kr.) $\times$ Höhe $=$ Kreisring $\times$ Höhe.

Bestätige dies durch die Ausrechnung.

Somit: Volumen der Mauer $=$ Grundfläche $\times$ Höhe
$= 7{,}068 \,.\, 3\,m^3 = 21{,}204\,m^3$ u. s. f.

2) Führe dieselbe Berechnung durch für ein Wasserreservoir von 4,6 m äusserem Durchmesser, 70 cm Wanddicke und 2,7 m Höhe.

3) Ein Mühlenrad hat einen äussern Durchmesser von 1,2 m und einen innern von 50 cm, ferner eine Dicke von 40 cm. Zeichne den Grund- und den Aufriss des Rades, und berechne sein Gewicht, wenn sein spezifisches Gewicht 2,8 beträgt.

4) Betrachte ein Wagenrad, und zeichne es.

5) Zu einer Hydrantenleitung brauchte man Steingutröhren von 15 cm Lichtweite (d. h. innerm Durchmesser) und 2 cm Wanddicke. Man zahlt 4,6 Fr. den laufenden Meter. Berechne den Preis von 1 m^3 Steingut.

6) Ein Blecheimer ist 60 cm hoch, hat einen äussern Durchmesser von 24 cm und eine Wanddicke von 2 mm. Wie viele cm^3 Blech enthält der Eimer?

IV. Parallelprojektion des Cylinders. Die Ellipse.

1) *Wir wollen zeigen, wie man eine Parallelprojektion der Cylinderkörper, die wir behandelt haben, zeichnet.*

Das Schattenbild des Drahtcylinders.

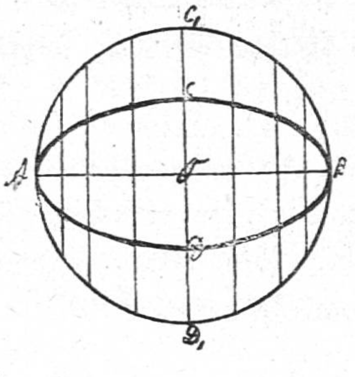
a) Zu diesem Zwecke benutzen wir zunächst einen Drahtcylinder, stellen ihn vor eine vertikale Fläche (ein Brett), welche von der Sonne direkt von vorn beschienen wird, und betrachten das Schattenbild des Cylinders. Grund- und Deckfläche erscheinen im Schatten als Ovale, die man *Ellipsen* nennt; die Mantelfläche projiziert sich als Rechteck, wenn der Cylinder senkrecht gestellt wird. Die zur Bildfläche senkrechten Sehnen erscheinen im Schatten alle im gleichen Verhältnisse verändert, verkürzt oder verlängert, je nachdem die Sonnenhöhe kleiner oder grösser als 45° ist.

Das Schattenbild des grossen Transporteurs.

b) Nimm auch einen Halbkreis (z. B. einen Holztransporteur); halte ihn wagerecht mit dem Durchmesser an das vertikale Brett, und betrachte sein Schattenbild. Markiere mit Stäbchen die zum Durchmesser senkrechten Halbsehnen, und vergleiche ihre Schatten mit den Originalen. Es zeigt sich wieder, dass alle im gleichen Verhältnisse verändert erscheinen. Ist z. B. der Radius im Schatten auf die Hälfte reduziert, so gilt das nämliche von allen zur Tafel senkrechten Halbsehnen, und wir könnten dieses Schattenbild konstruieren, indem wir den Halbkreis in die Bildfläche umlegen und darin die zum Durchmesser senkrechten Halbsehnen halbieren.

Führe diese Konstruktion aus. Der Radius des Transporteurs sei 30 cm; zeichne ihn im verkleinerten Massstabe (hier 1 : 20); ergänze ihn zum ganzen Kreis, und halbiere die genannten Halbsehnen.

Fig. 41



Diese Ellipse hat zwei Symmetrieachsen, A B und C D, (Fig.41). Man nennt A B die grosse Achse der Ellipse und bezeichnet sie mit 2a; CD heisst die kleine Achse; sie wird mit 2b bezeichnet. O A (= a) und O C (= b) heissen Halbachsen. O heisst Mittelpunkt der Ellipse. A und B heissen Scheitel der grossen Achse, C und D Scheitel der kleinen Achse.

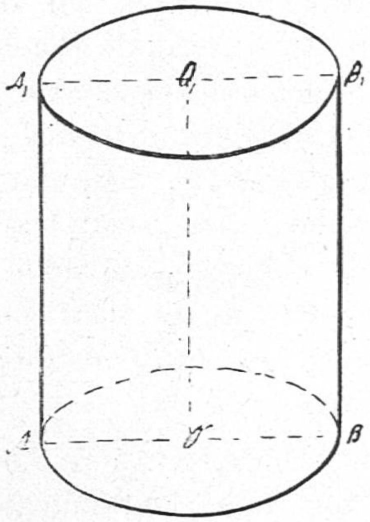


Fig. 42.

Darstellung des Drahtcylinders.

c) Das Schattenbild des Drahtcylinders und dasjenige des Halbkreises ändern sich mit der Höhe der Sonne. Zeichne das Schattenbild des Drahtcylinders, bei welchem ebenfalls die zur Bildfläche senkrechten Sehnen auf die Hälfte reduziert erscheinen. (Fig. 42.) Wir können uns jenes Bild auch folgendermassen entstanden denken: das Zeichnungsblatt werde durch die Achse des Cylinders gelegt; dann schneidet es aus dem Cylinder das Rechteck A B A_1 B_1 heraus. Dann denken wir uns die Strahlen von vorn unter solcher Neigung einfallend, dass die Verkürzung $^1/_2$ eintritt.

d) Zeichne nochmals den Kreis von Fig. 41, und verkürze 1) die Sehnen auf den dritten Teil; mache 2) alle 2 mal länger.

Wie haben wir in diesen Fällen Ellipsen konstruiert?

Satz 20. Wenn man die Sehnen eines Kreises, die zu einem seiner Durchmesser senkrecht stehen, in gleichem Verhältnis verkürzt oder verlängert, so entsteht eine Ellipse.

2) *Wie berechnet man den Inhalt einer Ellipse?*

Inhalt der Ellipse.

a) Indem wir bei Fig. 41 alle zum Durchmesser A B senkrechten Sehnen auf die Hälfte reduzierten, haben wir auch die zum Durchmesser A B senkrechten Streifen und damit die ganze Kreisfläche halbiert.

Inhalt des Kreises

$$= a \,.\, a \,.\, \pi = 1{,}5 \,.\, 1{,}5 \,.\, 3{,}14 \text{ cm}^2 = 7{,}065 \text{ cm}^2.$$

Inhalt der Ellipse

$$= \frac{1}{2} a \,.\, a \,.\, \pi = b \,.\, a \,.\, \pi = 3{,}532 \text{ cm}^2.$$

Wir erhalten demnach den Inhalt dieser Ellipse, indem wir die halbe grosse Achse mal die halbe kleine Achse mal π nehmen.

b) Berechne auch den Inhalt der Ellipse, die aus dem Kreis durch die Verkürzung der Sehnen auf den dritten Teil hervorgegangen ist. Ihr Inhalt wird der dritte Teil vom Kreisinhalte sein.

Inhalt dieser Ellipse $= \frac{1}{3}$ Kreis $= \frac{1}{3} \,.\, a \,.\, a \,.\, \pi = b \,.\, a \,.\, \pi$,

weil hier $b = \frac{1}{3}$ a ist.

3) Würde man die Kreissehnen auf das Doppelte verlängern, so wäre die entstehende Ellipse doppelt so gross wie der Kreis und $b = 2\,a$.

Inhalt der Ellipse $= 2 \,.\, a \,.\, a \,.\, \pi = b \,.\, a \,.\, \pi$.

Wie hat sich in diesen 3 Fällen der Inhalt der Ellipse aus ihren Achsen berechnen lassen?

Satz 21. Man erhält demnach den Inhalt einer Ellipse, indem man grosse Halbachse mal kleine Halbachse mal π nimmt. $f = a \,.\, b \,.\, \pi$.

Übungen.

1) Eine elliptische Wanne ist 1 m lang, 60 cm breit und 50 cm hoch; wieviel Wasser hält sie?

Diese Wanne wird das gleiche Volumen wie ein rechtwinkliges Prisma von gleicher Grundfläche und Höhe haben und wird nach der Regel $J = G \,.\, H$ berechnet werden.

Flächeninhalt des Bodens $= 5 \,.\, 3 \,.\, \pi$ dm².

Volumen der Wanne $= 5 \,.\, 3 \,.\, \pi \,.\, 5$ dm³ $= 235{,}5$ Liter.

Wie wäre der Boden genau zu zeichnen?

Aus welchem Kreise und durch welche Verkürzung können wir diese Ellipse entstehen lassen? Wir müssten die Sehnen des Kreises vom Radius 1 m so verkürzen, dass die Breite 60 cm wird, d. h. im Verhältnis $100 : 60 = 5 : 3$.

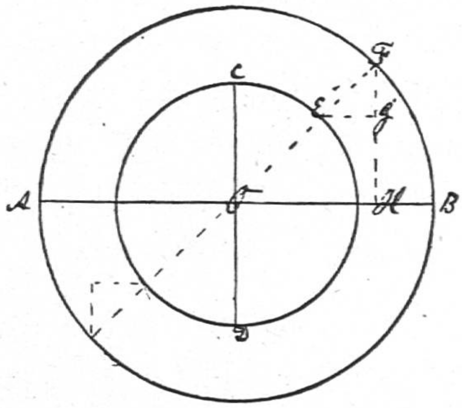
Zeichne diese Ellipse im verkleinerten Massstabe.

2) Ein elliptisches Fass ist 2,10 m hoch und 1,4 m breit. Berechne seinen Boden.

3) *Wir wollen zeigen, wie man die berechnete Wanne auf einfache Weise (z. B. im Massstabe 1 : 25) zeichnet.* Bequeme Konstruktion der Ellipse.

Wir erhalten eine Ellipse, deren grosse Achse 4 cm, deren kleine Achse 2,4 cm misst.

Fig. 43.



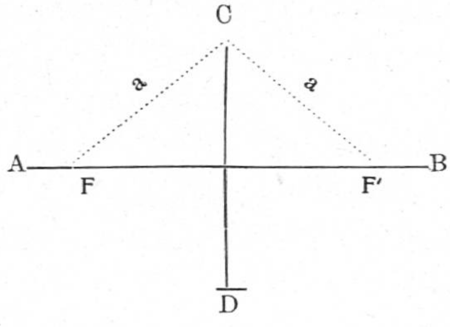
Wir zeichnen über beiden Achsen einen Kreis, ziehen durch O einen beliebigen Radius, errichten in seinem Schnittpunkt mit dem grossen Kreis eine Senkrechte zur grossen Achse (A B) und in seinem Schnittpunkte mit dem kleinen Kreis eine Senkrechte zur kleinen Achse; dann ist der Schnittpunkt der ersten Senkrechten mit der Verlängerung der zweiten ein Ellipsenpunkt. Die Sehne F H ist in gleichem Verhältnis (5 : 3) verkürzt worden wie die zu A B in O senkrecht stehende Kreissehne, die gleich O F ist. (Den genauen Beweis hiefür können wir hier nicht behandeln.)

Indem wir andere Radien oder Durchmesser ziehen und die gleiche Konstruktion wiederholen, erhalten wir weitere Ellipsenpunkte.

Konstruiere auch den Boden des genannten Fasses auf diese Art.

4) *Es gibt auch noch eine mechanische Konstruktion der Ellipse, die wir zeigen wollen.*

Fig. 44.



Fadenkonstruktion. Beschreibe um den Scheitel der kleinen Achse C (Fig. 44) einen Kreisbogen mit Radius a; er schneidet die grosse Achse in zwei Punkten F und F', welche Brennpunkte der Ellipse heissen, während die Entfernung eines Brennpunktes vom Mittelpunkt Excentrizität genannt wird.

Nimmt man einen Faden von der Länge 2 a, befestigt seine Endpunkte bei F und F', hält dann den Faden mit einem Stift bei C gespannt, so erhält man eine Ellipse, wenn man mit dem Stift herumfährt.

Prüfe die Richtigkeit dieser Konstruktion bei den schon gezeichneten Ellipsen.

Übungen.

1) Stelle einige der früher behandelten Cylinderkörper in Parallelprojektion dar.

2) Ein Erdmeridian ist eine Ellipse, bei welcher die kleine Achse $\frac{299}{300}$ der grossen Achse beträgt. Zeichne sie. Sie ist fast ein Kreis.

3) Die Bahn der Erde um die Sonne ist eine Ellipse, bei welcher $\frac{OF}{OA} = \frac{1}{60}$ ist; zeichne sie auf einem sehr grossen Blatte.

F. Regelmässige Prismen und Vielecke.

I. Konstruktion regelmässiger Vielecke aus ihren Seiten.

1) Ein sechsseitiger Brunnen hat eine innere Seitenlänge von 1,5 m, eine Tiefe von 90 cm und eine Wanddicke von 30 cm.

Zeichne den Grund- und den Aufriss dieses Brunnens, und berechne, wieviel Liter Wasser er hält, sowie den Rauminhalt der Wandung.

a) Der Grundriss des Innenraums ist ein regelmässiges Sechseck mit der Seitenlänge 1,5 m; der Grundriss der äusseren Wand ist ebenfalls ein regelmässiges Sechseck, dessen Seiten von den Seiten des inneren Sechsecks einen Abstand von 30 cm haben. Der Umriss des Aufrisses ist ein Rechteck. Der Grund- und der Aufriss des Brunnens.

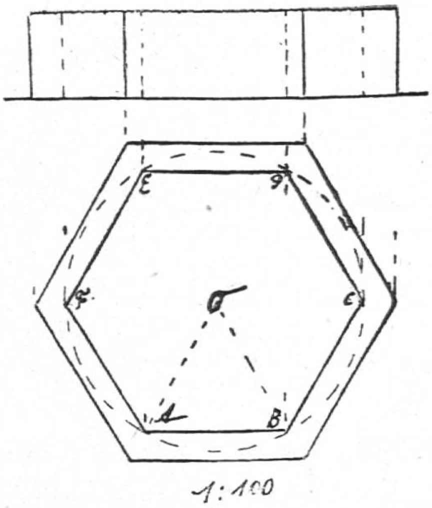
Wir wählen hier den Massstab 1 : 100.

Wie wird das innere Sechseck gezeichnet?

Wir beschreiben einen Kreis mit Radius 1,5 cm und tragen den Radius sechsmal als Sehne ein. Warum geht das? Dreieck

A B O ist gleichseitig, somit auch gleichwinklig; darum misst der Centriwinkel A O B 60° und ist genau sechsmal im vollen Winkel enthalten.

Fig. 45.



Das äussere Sechseck können wir zeichnen, indem wir zu den Seiten des inneren im Abstande von 3 mm Parallele ziehen.

Zweite Konstruktion des Sechsecks.

b) Wie könnte man das Sechseck A B C D E F ohne Hilfe des Kreises konstruieren? Wir werden davon Gebrauch machen, dass wir die Winkel an der Peripherie des Sechsecks kennen. W. A B C = W. A B O + W. C B O = 120°; ebenso W. B C D u. s. f. Jeder Peripheriewinkel des Sechsecks misst 120°; beachte, dass ein solcher den Centriwinkel eines der Dreiecke zu 180° ergänzt.

Wir erhalten das Sechseck, indem wir zuerst eine Strecke A B = 1,5 cm machen, dann in B einen Winkel von 120° abtragen, auf dem 2. Schenkel 1,5 cm abmessen, wiederum 120° abtragen u. s. f.

c) *Berechnung.* Der Hohlraum des Brunnens wird gleich inneres Sechseck mal Höhe, und die Wandung wird gleich ihrem Grundriss mal Höhe sein. Der Grundriss der Wandung besteht aus 6 gleichen Trapezen. Entnimm die Länge der Seite des äusseren Trapezes aus der Zeichnung.

Wir nennen den Hohlraum des Brunnens ein regelmässiges Prisma. Grund- und Deckfläche sind kongruent; ihre Seiten laufen paarweise parallel. Die Seitenkanten sind einander gleich und stehen senkrecht zur Grund- und zur Deckfläche.

2) *Zeichne den Grundriss einer sechsseitigen Schraubenmutter, deren Seite 2 cm misst, ohne Benutzung des Zirkels.*

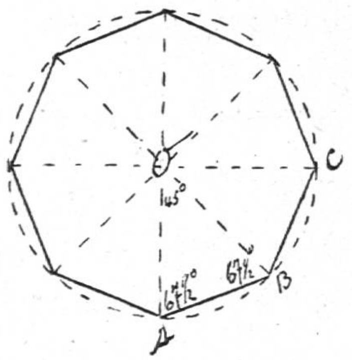
3) *Zeichne den Grundriss eines achtseitigen Brunnens, bei welchem eine Achteckseite 1,2 m misst.*

a) Wir denken uns je zwei gegenüberliegende Eckpunkte des Achtecks miteinander verbunden. Dadurch wird es in 8 kongruente gleichschenklige Dreiecke zerlegt. (Siehe Fig. 46.) Der Centriwinkel eines solchen Dreiecks misst $\frac{360}{8} = 45^0$; die Winkel an der Grundlinie messen somit zusammen $180^0 - 45^0 = 135^0$; jeder davon ist gleich $67^1/_2{}^0$.

Ein solches Dreieck des Achtecks lässt sich nun aus der Grundlinie A B und den beiden anliegenden Winkeln konstruieren; ihm können wir die 7 kongruenten Dreiecke am einfachsten anschliessen, indem wir um die Spitze einen Kreis beschreiben, welcher durch die Endpunkte der Grundlinie geht. In diesen Kreis tragen wir letztere noch 7 mal als Sehne ein.

Dieser Kreis heisst dem Achtecke umgeschrieben.

Fig. 46.



b) Wir könnten auch dieses Achteck konstruieren, ohne den Kreis zu ziehen. Wir berechnen einen Peripheriewinkel.

W. A B C $= 2 \,.\, 67^1/_2{}^0 = 135^0 = 180^0 - 45^0$.

Der Peripheriewinkel A B C ist das Supplement zum Centriwinkel A O B.

Nun können wir zuerst A B zeichnen, bei B 135^0 abtragen, B C abmessen u. s. w.

Wie wäre der Rauminhalt dieses Brunnens zu berechnen, wenn h = 40 cm ist?

4) *Wie zeichnet man ein beliebiges regelmässiges Vieleck aus seiner Seite?*

a) Ist die Seitenzahl n, so lässt sich das Vieleck in n kongruente gleichschenklige Dreiecke einteilen, indem man seine

Ecken mit seinem Mittelpunkte, den wir uns vorläufig nur denken, verbindet. Der Centriwinkel eines solchen Dreiecks misst $\frac{360^0}{n}$. Die zwei Winkel an der Grundlinie messen zusammen $180^0 = \frac{360^0}{n}$. Da sie gleich sind, misst ein jeder hievon die Hälfte. Aus der Grundlinie und den anliegenden Winkeln lässt sich das Dreieck zeichnen. Dann kann man den umgeschriebenen Kreis ziehen und darin die Vielecksseite als Sehne eintragen.

b) Wir können auch den Peripheriewinkel benutzen. Ein solcher setzt sich aus zwei Winkeln zusammen, die den Winkeln, welche an der Grundlinie eines Dreiecks im Vieleck liegen, gleich sind und folglich den Centriwinkel zu 180^0 ergänzen.

Der Peripheriewinkel ist daher das Supplement zum Centriwinkel, also $= 180^0 - \frac{360^0}{n}$.

Mit Hilfe des Peripheriewinkels kann man aber einer ersten Seite die folgenden anschliessen.

5) *Berechne den Peripherie- und den Centriwinkel bei mehreren regelmässigen Vielecken.*

Seitenzahl	n	4	5	6	8	9	12
Centriwinkel	$\frac{360^0}{n}$	90^0	72^0	60^0	45^0	40^0	30^0
Peripheriewinkel	$180 - \frac{360^0}{n}$	90^0	108^0	120^0	135^0	140^0	150^0

6) Zeichne den Boden eines Gartenhauses, der ein regelmässiges Fünfeck von 1,4 m Seitenlänge ist.

II. Das dem Kreise umgeschriebene regelmässige Vieleck. Die Tangente.

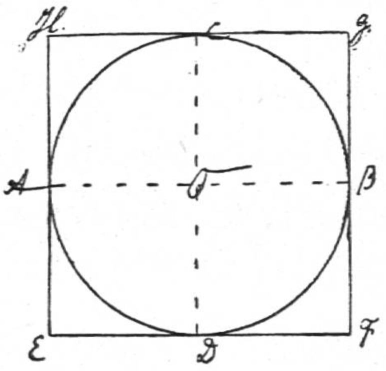
Wie könnte man aus einem Holzblock einen Cylinder von vorgeschriebenem Radius heraussägen?

Das Tangentenquadrat.

a) Wir zeichnen auf der Grundfläche des Blocks den Kreis vom geg. Radius ein und konstruieren zuerst ein Quadrat, das den Kreis einschliesst, indem wir ein Achsenkreuz, A B, C D, einzeichnen und in den Endpunkten der beiden Durchmesser die Senkrechten dazu ziehen.

Dann führen wir einen Sägeschnitt längs jeder Quadratseite; dadurch wird aus dem Holzblock zunächst ein quadratisches Prisma herausgeschnitten.

Fig. 47.



Wir wollen die Figur E F G H näher ins Auge fassen; sie heisst ein dem Kreise *umgeschriebenes Quadrat* oder *Tangentenquadrat.* Die Seite EF berührt den Kreis im Punkte D. Jeder Punkt auf E F ist vom Centrum weiter entfernt als D, liegt also ausserhalb des Kreises. E F heisst *Berührungslinie* oder *Tangente* des Kreises. D heisst ihr *Berührungspunkt.* Die Tangente E F steht auf dem Radius des Berührungspunktes senkrecht.

Wie nennt man FG, GH, HE? Welche Eigenschaft haben diese Linien? Wie ist jede konstruiert worden? Konstruktion der Tangente.

Satz 22. Man konstruiert die Tangente in einem Kreispunkte, indem man den Radius zieht und darauf im Kreispunkte die Senkrechte errichtet.

b) Nun wollen wir mit unserer Konstruktion weiter fahren. Das Tangentenachteck. Wir halbieren die Viertelsbogen des gezeichneten Kreises, zeichnen die Radien dieser Mitten und errichten die Senkrechten zu diesen. Die entstehende Figur heisst *umgeschriebenes regelmässiges Achteck* oder regelmässiges Tangentenachteck. Indem man längs der Seiten des Achtecks durch den Holzblock Schnitte führt, verwandelt man ihn in ein achtseitiges Prisma. Die Ecken sind stumpfer geworden.

Wie wird man nun fortfahren?

c) Mit welchem Vielecke hätte man mit Vorteil auch beginnen können? Zeichne das umgeschriebene regelmässige Sechs- und Zwölfeck eines Kreises.

Wie konstruiert man ein grosses Wasserrad?

Verallgemeinerung. 1) Vergleiche die gemeinsamen Eigenschaften des Quadrats, des regelm. 6-, 8- und 12-Ecks. Jedes dieser Vielecke hat alle Seiten und alle Winkel gleich und besitzt einen Mittelpunkt, um den sich ein Kreis beschreiben lässt, der durch die Eckpunkte geht (umgeschriebener Kreis) und einen Kreis, der alle Seiten berührt (eingeschriebener Kreis).

Satz 23. In einem regelmässigen Vieleck sind alle Seiten und alle Winkel gleich; es besitzt einen Mittelpunkt, einen eingeschriebenen und einen umgeschriebenen Kreis.

2) Wir wollen auch einen Rückblick auf die sämtlichen Prismen werfen, die wir bisher betrachtet haben.

Wir haben behandelt: rechtwinklige Prismen, senkrechte Prismen, deren Grundfläche ein Dreieck, ein Parallelogramm, ein Trapez, ein Trapezoid, ein regelmässiges Sechs- und Achteck war, ferner schiefe Prismen.

Bei allen diesen Prismen sind Grund- und Deckfläche kongruente Vielecke, deren Seiten paarweise parallel laufen; die Seitenflächen sind Parallelogramme. Die Prismen, deren Seitenkanten senkrecht zur Grundfläche stehen, haben wir senkrechte Prismen, und die Prismen, deren Seitenkanten schief zur Grundfläche stehen, schiefe Prismen genannt. Was gilt von den Seitenflächen?

Die senkrechten Prismen, deren Grundflächen regelmässige Vielecke sind, haben wir regelmässige Prismen genannt.

Wie haben wir die Prismen nach der Anzahl der Seiten der Grundfläche benannt?

Bei sämtlichen Prismen haben wir den Rauminhalt erhalten, indem wir die Grundfläche mit ihrem senkrechten Abstande von der Deckfläche (Höhe des Prismas) multipliziert haben.

Satz 24. a) Bei einem Prisma sind Grund- und Deckfläche kongruente Vielecke, deren Seiten paarweise parallel laufen; die Seitenflächen sind Parallelogramme.

b) Stehen die Seitenkanten senkrecht zur Grundfläche, so heisst das Prisma ein senkrechtes; ist die Grundfläche zudem ein regelmässiges Vieleck, so heisst das Prisma ein regelmässiges. Die Seitenflächen des senkrechten Prismas sind Rechtecke. Stehen die Seitenkanten schief zur Grundfläche, so heisst das Prisma ein schiefes.

c) Nach der Anzahl der Seiten der Grundfläche teilt man die Prismen in drei-, vier-, fünf-, sechsseitige u. s. w. ein.

d) Für jedes Prisma gilt die Regel:

Inhalt = Grundfläche mal Höhe.

G. Die Pyramide.

I. Die quadratische Pyramide.

1) Wir befinden uns vor einem Turme (oder Pfeiler), der in eine quadratische Pyramide ausläuft.

a) *Beschreibe den Turm von der Stelle an, wo seine rechtwinklige Form aufhört.* Beschreibung.

Die Grundfläche dieses Teiles des Turmes ist ein Quadrat; seine 4 Seitenflächen sind gleichschenklige Dreiecke, die in einer Ecke, der Spitze, zusammenlaufen. Wir nennen diesen Körper eine *quadratische* Pyramide. Sie ist begrenzt von einer Grund- und 4 Seitenflächen, von 4 gleichen Grund- und 4 gleichen Seitenkanten und von 5 Ecken.

b) *Es soll dieser Körper durch Grund- und Aufriss dargestellt werden.* Grund- und Aufriss.

Welche Masse müssen wir nehmen? Eine Grundkante misst 6 m und der senkrechte Abstand der Spitze von der Grundfläche, die Höhe der Pyramide, misst 10 m.

Wir zeichnen den Grund- und den Aufriss dieser Pyramide und denken sie uns einmal so auf die Grundrissebene gestellt, dass zwei Seiten ihrer Grundfläche parallel zur Aufrissebene laufen, und ein zweites Mal so, dass zwei Seitenkanten diese Lage erhalten.

In Fig. 1 erscheinen die Seitenkanten im Aufriss verkürzt. Bei der Stellung 2) laufen A S und C S parallel zur Aufrissebene und erscheinen im Aufriss in wahrer Grösse; denn die Raumfiguren A A″ S S″ und C C″ S S″ sind Rechtecke.

c) *Was kostet die Erstellung dieses Turmdachs à 7 Fr. pro m²?*

Wir zeichnen das Netz der Pyramide und berechnen ihre Seitenflächen. Das Netz lässt sich leicht der Seite S″ C″ anschliessen (siehe Fig. 48 b). Die Höhe einer Seitenfläche kann man der Zeichnung entnehmen. S″ M misst in der Zeichnung (1 : 400) 2,6 cm, in der Natur also 10,4 m.

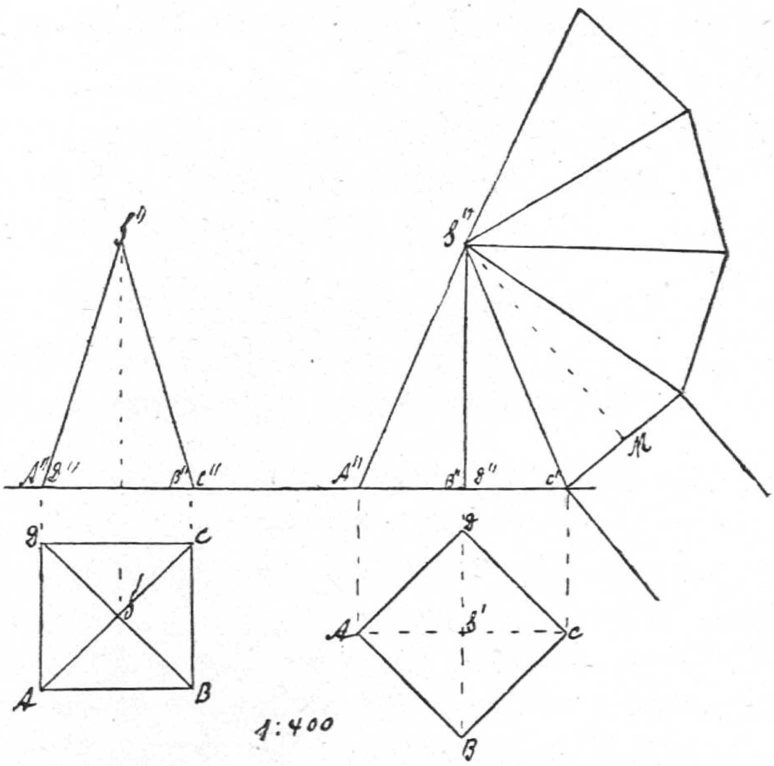


Fig. 48 (a) Fig. 48 (b)

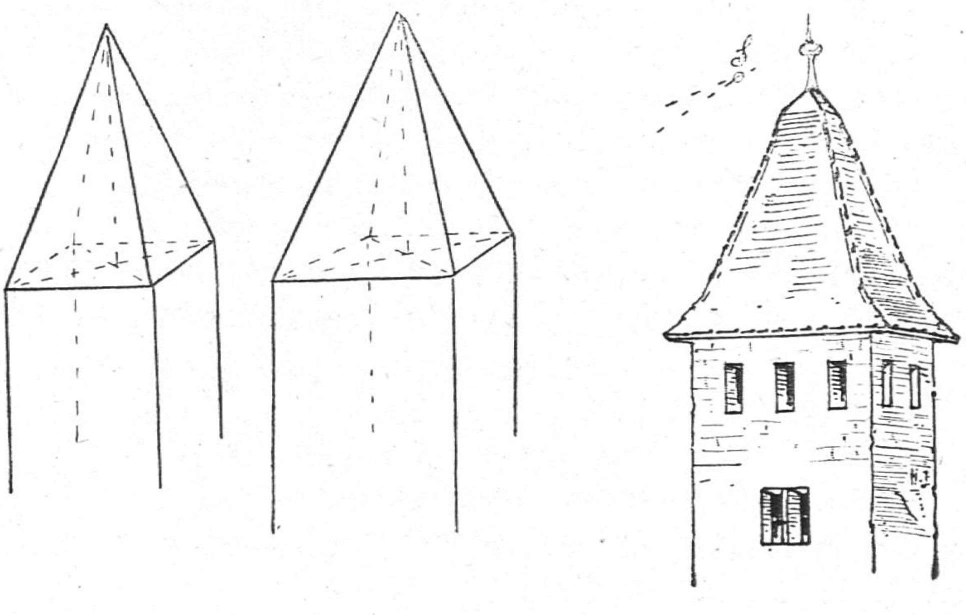
Inhalt der 4 Seitenflächen = 4 . 3 . 10,4 m² = 124,8 m²
Erstellungskosten 124,8 . 7 Fr. = 873,6 Fr.

Zeichne das Netz etwa im Massstabe 1:100 auf Karton, und konstruiere den Kartonkörper.

d) *Zeichne den Turm in Parallel- und Centralprojektion.*

Wir stellen zuerst den Unterbau dar und brauchen dann bloss die Höhe vom Schnittpunkt der Diagonalen der Grundfläche der Pyramide aus aufzutragen.

Fig. 49 (a) (b) (c)



e) *Wie hoch käme die Erstellung dieses Turmdaches pro m^3 nach Berechnung c) zu stehen?*

Wie berechnet man den Inhalt dieser Pyramide?

Vergleiche deinen Kartonkörper mit einem rechtwinkligen Kartonkörper von gleicher Grundlinie und gleicher Höhe, und fülle letztern mit feinem Sand. Es wird sich zeigen, dass der Innenraum der Pyramide 3 mal mit diesem Sand gefüllt werden kann. (Es empfiehlt sich für diesen Versuch 2 genau konstruierte Blechkörper zu haben, die man mit Wasser füllen kann.) Berechnung des Inhalts.

Der rechtwinklige Körper schliesst demnach einen 3 mal so grossen Raum ein als die Pyramide. Somit

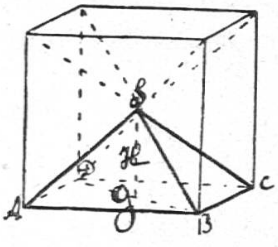
$$\text{Inhalt der Pyramide} = \frac{\text{Grundfläche . Höhe}}{3} = \frac{36 \;.\; 10}{3} = 120 \text{ m}^3$$

$$\text{Kosten pro m}^3 = 873{,}6 \text{ Fr.} : 120 = 7 \text{ Fr. } 28 \text{ Rp.}$$

2) *Die Regel für die Inhaltsberechnung lässt sich in einem besonderen Fall leicht beweisen.*

(Weise ein Würfelmodell vor, das in 6 gleiche Pyramiden zerlegbar ist.*)

Fig. 50



Dieser Würfel lässt sich in 6 kongruente Pyramiden zerlegen. Jede dieser Pyramiden hat dieselbe Grundfläche wie der Würfel und die halbe Höhe.

Wir bezeichnen die Grundfläche einer Pyramide mit G die Höhe mit H; dann ist die Würfelhöhe 2 . H, und

$$\text{der Inhalt des Würfels} = G \;.\; 2\,H$$

$$\text{„ „ der Pyramide} = \frac{G \;.\; 2\,H}{6} = \frac{G \;.\; H}{3}$$

Somit erhalten wir den Inhalt der Pyramide, indem wir Grundfläche mal Höhe nehmen und das Produkt durch 3 dividieren.

---

*) Wenn in der Sammlung kein zerlegbares Würfelmodell vorhanden ist, können die Schüler sechs quadratische Kartonpyramiden, bei welchen die Höhe gleich der halben Quadratseite ist, konstruieren und zu einem Würfel zusammenlegen.

II. Die dreiseitige Pyramide.

(Weise ein Mineral vor, welches Tetraederform zeigt [oder ein solches Modell].)

Beschreibung.

a) *Beschreibe diesen Körper.*

Seine Grundfläche ist ein Dreieck. Er hat drei Seitenflächen und 3 Seitenkanten und heisst deshalb *dreiseitige Pyramide* oder auch *Tetraeder*, weil er von 4 Flächen begrenzt ist. Miss die Seitenkanten und die Grundkanten. Sie sind alle gleich (4 cm); der Körper ist von 4 gleichseitigen Dreiecken begrenzt.

Grund- und Aufriss.

b) *Zeichne den Grund- und den Aufriss dieses Tetraeders.*

Lege den Körper mit einer Fläche auf die Grundrissebene so, dass eine Grundkante (A B, Fig. 51) senkrecht zur Achse steht; dann läuft die gegenüberliegende Seitenkante C S parallel zur Aufrissebene und erscheint im Aufriss in wahrer Grösse.

Den Grundriss der Spitze erhält man, indem man die Ecken des Dreiecks A B C mit den Mitten der gegenüberliegenden Seiten verbindet. Der Aufriss liegt in einer Senkrechten zur Achse von S′ aus. Man erhält S″, indem man die Seitenkante von C aus abträgt.

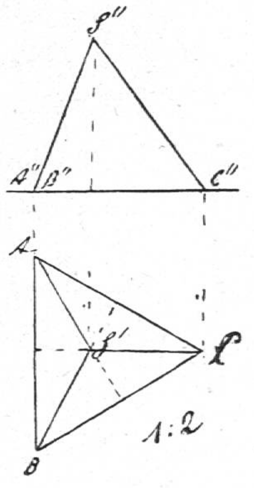


Fig. 51

c) *Zeichne das Netz dieses Tetraeders.*

Berechnung.

d) *Berechne den Körper.*

Die Oberfläche besteht aus 4 gleichseitigen Dreiecken. Die Dreieckshöhe entnehmen wir aus der Grundrisszeichnung (= 3,5 cm).

$$\text{Grundfläche} = \frac{4 \,.\, 3{,}5}{2} = 7 \text{ cm}^2.$$

$$\text{Oberfläche} = 4 \,.\, \frac{4 \,.\, 3{,}5}{2} = 28 \text{ cm}^2.$$

Wie erhält man den Inhalt dieses Körpers? Wir könnten auch bei ihm nachweisen, dass er nur den 3. Teil des Raumes eines rechtwinkligen Körpers von gleicher Grundfläche und Höhe einschliesst. (Weise, wenn in der Sammlung vorhanden, ein dreiseitiges Prisma vor, das sich in 3 dreiseitige Pyramiden zerlegen lässt.)

Die Höhe des Tetraeders entnehmen wir der Aufrisszeichnung, H = 3,3 cm.

$$\text{Volumen} = \frac{7\ .\ 3{,}3}{3} = 7{,}7\ \text{cm}^3.$$

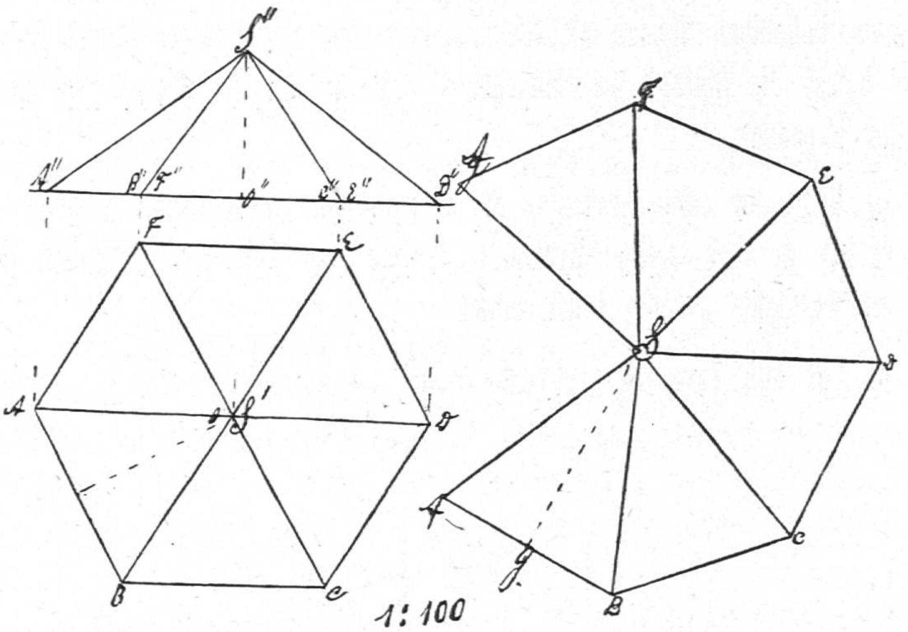
III. Die sechsseitige Pyramide.

Das Dach eines Gartenpavillons ist eine Pyramide, deren Grundfläche ein regelmässiges Sechseck von 2 m Seitenlänge ist; die Höhe dieser Pyramide misst 1 m 50 cm.

Beschreibe diese Pyramide; zeichne ihren Grund- und ihren Aufriss, sowie ihr Netz, und berechne sie.

Wir denken uns die Pyramide so auf die Grundrissebene gelegt, dass zwei Seitenkanten zur Aufrissebene parallel laufen.

Fig. 52 (a u. b)



A B = 2 m, A S = 2,5 m, S G (Höhe einer Seitenfläche) = 2,3 m, Höhe eines Dreiecks der Grundfläche = 1,7 m.

$$\text{Inhalt der Seitenflächen (Mantelfläche)} = 6\ .\ \frac{2\ .\ 2{,}3}{2} = 13{,}8\ \text{m}^2.$$

Inhalt der Grundfläche $= 6 \cdot \frac{2 \cdot 1{,}7}{2} = 10{,}2 \text{ m}^2$.

Volumen der Pyramide $= \frac{G \cdot H}{3} = \frac{10{,}2 \cdot 1{,}5}{3} = 5{,}1 \text{ m}^3$.

Wie wird eine fünfseitige, eine achtseitige, eine zwölfseitige Pyramide aussehen?

(Weise auch das Modell einer schiefen Pyramide vor, und lass ihren Grund- und ihren Aufriss zeichnen, sowie ihren Inhalt nach der Regel $J = \frac{G \cdot H}{3}$ berechnen, wobei H die Senkrechte von der Spitze auf die Grundfläche bedeutet.)

Was für Dreiecke sind die Seitenflächen dieser *schiefen* Pyramide? Wie sind die Seitenkanten?

Die behandelten vier-, drei-, sechsseitigen Pyramiden, bei welchen alle Seitenkanten gleich waren, wollen wir zur Unterscheidung von dieser schiefen Pyramide *gerade Pyramiden* nennen. Sie heissen zudem noch *regelmässig,* weil ihre Grundflächen regelmässige Vielecke sind.

Verallgemeinerung. Vergleiche die Merkmale, sowie die Berechnungsart der behandelten Pyramiden, und entwickle:

Satz 25. a) Eine Pyramide ist begrenzt von Dreiecken als Seitenflächen und von einem beliebigen Vieleck als Grundfläche. Der gemeinsame Punkt der Seitenflächen heisst die Spitze; die Senkrechte von ihr auf die Grundfläche heisst die Höhe der Pyramide.

b) Nach der Zahl der Seiten der Grundfläche unterscheidet man drei-, vier-, fünf-, sechs- u. s. f. seitige Pyramiden. Sind alle Seitenkanten gleich lang, so heisst die Pyramide gerade, sonst schief.

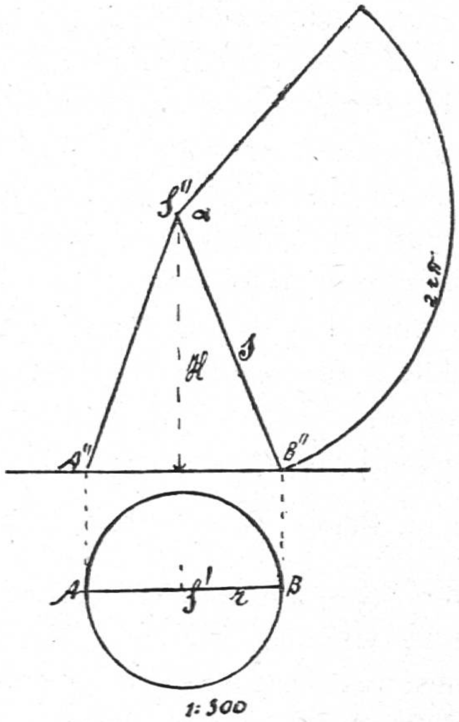
c) Für alle Pyramiden gilt die Regel: $J = \frac{G \cdot H}{3}$

H. Der Kegel.

1) Besichtigt einen Turm mit Kegeldach. Schätzt den Radius der Grundfläche des Daches (3 m) und seine Höhe (8 m).

Beschreibe dieses Dach; zeichne seinen Grund- und seinen Aufriss, sowie sein Netz, und konstruiere das Kartonmodell.

Fig. 53 (a)



a) Diese Dachfläche ist unten durch eine Kreislinie begrenzt. Wir können sie uns zusammengesetzt denken aus unzählig vielen Linien, welche den Kreis mit der Turmspitze verbinden. Wir nennen diese Fläche eine *Kegelfläche* und den Körper, den sie umschliesst, *Kegel.* Die Dachfläche heisst Mantel des Kegels; die Linien, aus denen sie zusammengesetzt ist, heissen *Seitenlinien.* Was nennt man Grundfläche, was Spitze des Kegels? Der senkrechte Abstand der Spitze von der Grundfläche, den wir abgeschätzt haben, heisst Höhe; sie fällt in die Linie hinein, welche die Spitze mit dem Mittelpunkt der Grundfläche verbindet und Achse des Kegels genannt wird. Beschreibung.

b) Zeichne den Grund- und den Aufriss. Ersterer ist ein Kreis; sein Mittelpunkt ist der Grundriss der Spitze. Der Aufriss ist ein gleichschenkliges Dreieck; wir zeichnen zuerst seine Grundlinie und dann die Höhe. Die Seitenlinien A S und B S erscheinen im Aufriss unverkürzt (immerhin im Massstabe 1 : 300). Ihre Länge können wir der Zeichnung entnehmen (8,5 m natürl. Grösse.) Grund- und Aufriss.

c) Wie konstruiert man das Kartonmodell? Schneide einen Kartonkegel nach einer Seitenlinie auf, und wickle den Mantel ab; dann erhältst du einen Kreissektor; die Seitenlinien des Kegels sind Radien des Sektors geworden, und die Peripherie der Grundfläche erscheint als Bogen des Sektors. Das Netz.

Um das Netz des Turmmodells zu zeichnen, brauchen wir daher bloss um S" mit Radius S" B" einen Bogen zu beschreiben und auf diesen die Peripherie des Grundkreises abzutragen. Lässt sich das ganz genau machen? Wir haben früher den Kreisumfang auf eine Gerade abgetragen, indem wir den Radius $6^2/_7$ mal abtrugen; auf einem zweiten Bogen können wir aber die Peripherie nicht genau abmessen.

Es lässt sich aber leicht der Centriwinkel α des Sektors berechnen. Er verhält sich zu 360^0 wie der Bogen des Sektors zum ganzen Umfang des Kreises mit Radius s.

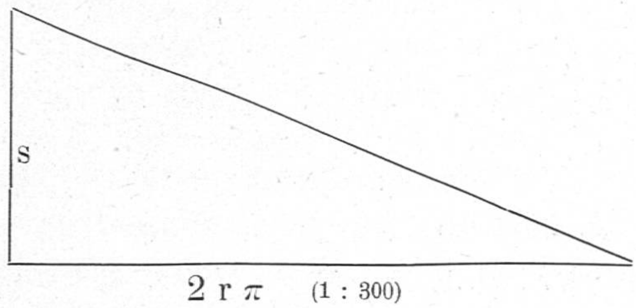
$$\alpha : 360^0 = 2\,r\,\pi : 2\,s\,\pi$$

$$\alpha = 360^0 \,.\, \frac{r}{s} = 360^0 \,.\, \frac{3}{8{,}5} = 127^0$$

Berechnung des Mantels.

d) *Wie berechnet man den Mantel?* (Siehe Kreisberechnung). Zeichne das Dreieck, welches gleichen Inhalt wie der Sektor hat. Die Grundlinie des Dreiecks ist gleich dem Bogen des Sektors und die Höhe gleich seinem Radius. Warum?

Fig. 53 (b)



(1 : 300)

$$\text{Inhalt des Dreiecks} = \frac{g \,.\, h}{2} = r\,\pi\,s.$$

Somit: Mantel des Kegels $= r \,.\, \pi \,.\, s = 3 \,.\, 3{,}14 \,.\, 8{,}5\ m^2 = 80{,}07\ m^2$.

Was kostet die Herstellung dieses Daches à 8 Fr. pro m^2?

Erkundige dich nach dem Unterschiede der Kosten bei Holz- und bei Blechkonstruktion.

Berechnung des Inhalts.

e) *Welchen Rauminhalt hat dieser Kegel?* Wir können den Kegel als eine Pyramide mit unzählig vielen Seitenflächen ansehen. Es wird daher beim Kegel dieselbe Inhaltsregel gelten wie bei der Pyramide.

$$\text{Volumen} = \frac{G \,.\, H}{3} = \frac{r^2\pi \,.\, H}{3} = \frac{3^2 \,.\, 3{,}14 \,.\, 8\ m^3}{3} = 75{,}36\ m^3.$$

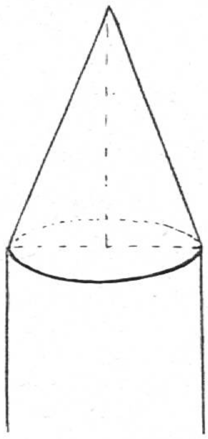
Wie hoch kommt 1 m^3 zu stehen?

Parallel-

f) *Parallelprojektion des Kegels. Wir wollen unsern Turm auch in Parallelprojektion darstellen.*

Wir zeichnen die Parallelprojektion des Unterbaus, der ein Cylinder ist, und zeichnen dann die Achse des Kegels ein.

Fig. 54.



2) *Konstruiere in Karton einen Trichter von 10 cm Weite und 10 cm Seitenlänge.*

Zweites Beispiel.

Zeichne seinen Grund- und seinen Aufriss. Entnimm der Zeichnung die Höhe des Trichters. Berechne den Centriwinkel des abgewickelten Mantels, ebenso die Mantelfläche, sowie das Quantum Wasser, das der Trichter hält, wenn man seine kleine Öffnung mit dem Finger schliesst. (Letztere soll bei der Zeichnung als Punkt angenommen werden.)

3) *Der schiefe Kegel.*

Entstehung.

a) Die beiden behandelten Kegel können wir uns dadurch entstanden denken, dass man alle Punkte eines Kreises (der Grundfläche) mit allen Punkten eines senkrecht über dem Kreismittelpunkte befindlichen Punkt (der Spitze) verbindet. Nun können wir uns einen Kreis auch verbunden denken mit einem Raumpunkte, der nicht senkrecht über dem Mittelpunkte des Kreises steht.

Wir wollen den Körper, der so entsteht, betrachten.

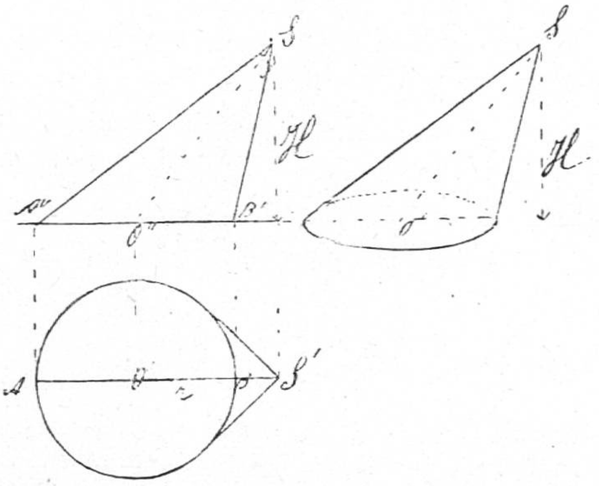
Die Seitenlinien erhalten dann ungleiche Länge; die Verbindungslinie des Kreismittelpunktes mit der Spitze (die Achse des Kegels) steht schief zur Ebene des Kreises. Man nennt diesen Körper einen *schiefen Kegel.* (Weise ein Modell vor.)

Im Gegensatz hiezu nennt man die zwei früheren Kegel, bei welchen die Achse senkrecht zur Grundfläche stand, *gerade Kegel.*

b) *Zeichne den Grund- und den Aufriss, sowie die Parallelprojektion eines schiefen Kegels* (z. B. des Modells der Sammlung).

Darstellung. Die Höhe, (d. i. die Senkrechte von der Spitze auf die Grundfläche, trifft letztere nicht in ihrem Mittelpunkte.

Fig. 55 (a) (b)



c) *Wie wird der schiefe Kegel berechnet?*

Der Mantel des schiefen Kegels lässt sich nicht auf elementare Weise berechnen, wohl aber sein Inhalt. Wie das schiefe Dreieck A″ B″ S″ gleichen Inhalt hat wie ein gleichschenkliges mit gleicher Grundlinie und Höhe, ist auch der schiefe Kegel einem geraden von gleicher Grundfläche und Höhe inhaltsgleich und würde nach der Regel berechnet $J = \frac{G \cdot H}{3}$

Berechnung.

Berechne den Inhalt des Modells.

Verallgemeinerung. Vergleiche die Merkmale, sowie die Berechnungsart der behandelten Kegel.

Satz 26. a) Ein Kegel ist begrenzt von einem Kreis als Grundfläche und von einem runden Mantel, der aus unzählig vielen Seitenlinien besteht, welche die Kreislinie mit der Spitze verbinden.

Die Verbindungslinie der Spitze mif dem Mittelpunkt der Grundfläche heisst die Achse, und das Perpendikel von der Spitze auf die Grundfläche heisst die Höhe des Kegels.

b) Steht die Achse senkrecht zur Grundfläche, fällt sie also mit der Höhe zusammen, so heisst der Kegel ein gerader; steht die Achse schief zur Grundfläche, so heisst der Kegel ein schiefer.

c) Die Abwicklung der Mantelfläche eines geraden Kegels ist ein Kreissektor, dessen Radius gleich der Seitenlinie, dessen Bogen gleich der Peripherie der Grundfläche ist.

Die Mantelfläche ist gleich Radius mal Seitenlinie mal π = r . π . s.

d) Der Inhalt des Kegels ist gleich $\frac{\text{Grundfläche} \times \text{Höhe}}{3} = \frac{G \,.\, H}{3}$.

Übungen.

1) Es soll die Holzmasse annähernd berechnet werden, die eine Staublawine niedergerissen hat.

Welche Form hat ein Baumstamm? Er kann als Kegel angesehen werden. Wie erhalten wir die Zahl der m^3 (Festmeter) eines solchen Stammes? Wir messen mit der Kluppe (weise eine solche vor) den Durchmesser der Grundfläche und mit einem Messband die Höhe; dann ist $J = \frac{G \,.\, H}{3}$

Es sei d = 60 cm, H = 12 m; dann ist:

$$J = \frac{0{,}3 \,.\, 0{,}3 \,.\, \pi}{3} \,.\, 12\ m^3 = 1{,}13\ m^3.$$

So misst man jeden niedergerissenen Stamm aus.

Es sei $d = 23$ cm, $H = 15{,}6$ m; $d_2 = 41$ cm, $H_2 = 28{,}3$ m; $d_3 = 65$ cm, $H_3 = 34{,}5$ m.

Berechne diese Bäume.

2) a) Es soll ein stehender Baumstamm berechnet werden.

Wie können wir die Höhe indirekt bestimmen? Wir messen eine wagerechte Standlinie A B bis zum Fusse B des Baumes, richten in A eine Latte nach der Baumspitze C und messen mit einem Holztransporteur ihren Neigungswinkel. Dann lässt sich das rechtwinklige Dreieck A B C in verkleinertem Massstab zeichnen, und wir können die Baumhöhe aus der Zeichnung entnehmen. Es sei gemessen worden A B = 24 m und W. C A B = $38^1/_2{}^0$, dann ist die Baumhöhe = 19 m.

Fig 56.

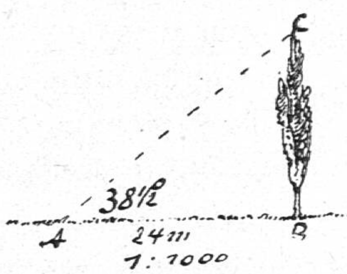
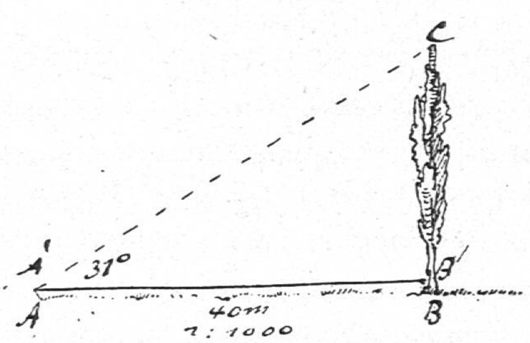


Fig 57.



In welcher Beziehung stehen das Dreieck A B C in der Zeichnung und dasjenige in der Natur? Jede Seite des Bilddreiecks ist $^1/_{1000}$ von der entsprechenden Seite des Originaldreiecks; ihre Winkel sind paarweise gleich. Wie bezeichnet man diese Beziehung?

b) Der Neigungswinkel würde sich genauer mit einem Winkelinstrument (dem Theodolit) messen lassen. Sein Fernrohr lässt sich aber nicht in A aufstellen. Es bezeichne A' den Drehpunkt des Fernrohrs; er befinde sich z. B. 1 m 30 cm über dem Fusspunkt A; dann können wir den Winkel messen, welchen das nach der Baumspitze C gerichtete Fernrohr mit der Horizontalen durch A' bildet. Aus der Länge der Standlinie und dem Winkel C A' B' lässt sich das Dreieck A' B' C konstruieren, welchem wir die Höhe C B' entnehmen, wozu noch die Höhe des Instruments (1 m 30 cm) zu addieren ist.

Die Basis A B messe 40 m, der Neigungswinkel C A' B' betrage 31°; wie hoch ist der Baum, wenn der Drehpunkt des Fernrohrs 1 m 30 cm über dem Boden steht? Welchen Kubikinhalt hat der Baum, wenn sein Umfang unten 1 m 80 cm misst?

3) Wieviel dm^2 Blech enthält eine kegelförmige Kaminkappe von 1 m Weite und 80 cm Seitenlänge?

4) Ein Zuckerhut hat eine Grundfläche, deren Durchmesser 30 cm misst, und eine Seitenlinie von 80 cm. Wieviel Zucker enthält er? Entnimm die Höhe aus der Aufrisszeichnung.

Dieser Zuckerhut soll gut verpackt werden. Mit was für einem Kartonstück kann man ihn einwickeln?

J. Der Pyramidenstumpf.*)

1) Wir betrachten den Trichter einer Mühle.

Beschreibung. a) *Beschreibe ihn.* Er ist begrenzt von 4 symmetrischen Trapezen, deren obere Seiten ein grosses, deren untere Seiten ein kleines Quadrat bilden. Wenn wir die Seitenkanten verlängern, sehen wir, dass sie sich in einem Punkte treffen. Der

*) Bei Zeitmangel kann dieses Kapitel kürzer gefasst werden.

Trichter wird dann zu einer Pyramide ergänzt. Die Ebene des Bodens des Trichters schneidet von der ganzen Pyramide eine kleinere ab, die wir Ergänzungspyramide nennen. Der Rest, unser Trichter, heisst ein *Pyramidenstumpf.* Wir wollen diese Körperform genau kennen lernen.

Grund- und Aufriss.

b) *Es sollen Grund- und Aufriss, sowie das Netz dieses Trichters gezeichnet und ein Kartonmodell hergestellt werden.* Nimm die notwendigen Masse.

Die Seite des grösseren Quadrats misst 70 cm, die des kleineren 30 cm und die Höhe die Trichters, d. h. der Abstand des Bodens von der Deckfläche, 50 cm.

Fig. 58.

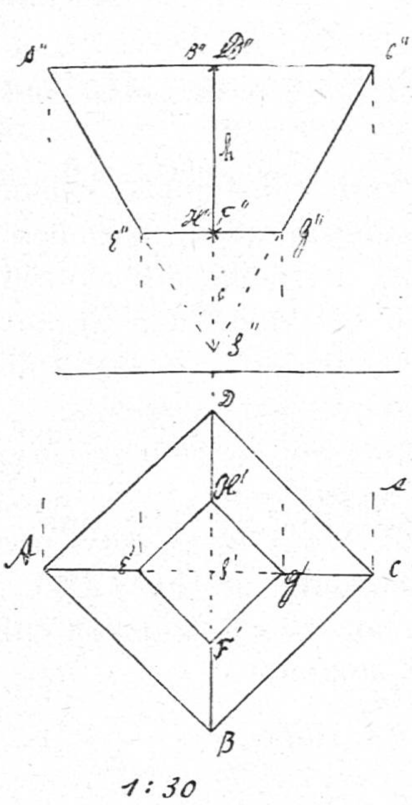
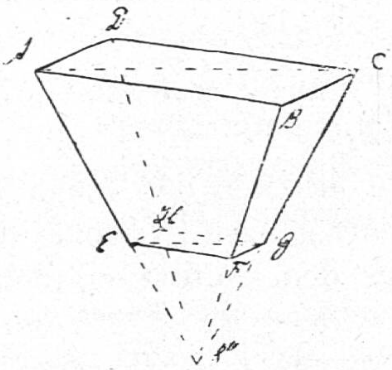


Fig. 60.



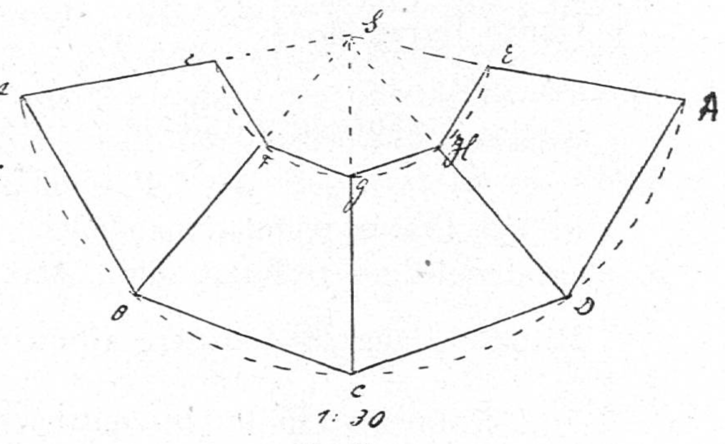


Fig. 59.

Wir denken uns den Körper so gestellt, dass 2 Seitenkanten und also auch je eine Diagonale von Grund- und Deckfläche parallel zur Aufrissebene laufen. Der Grundriss besteht aus zwei Quadraten, die bez. mit Grund- und Deckfläche kongruent sind. Die Grundrisse der Seitenkanten verbinden die entsprechenden Ecken dieser Quadrate. Der Aufriss des Pyramidenstumpfes ist ein Trapez; Grund- und Deckfläche erscheinen im Aufriss als Strecken, 2 Seitenlinien in wahrer Grösse.

Das Netz.

Wir ergänzen den Körper in der Zeichnung zur ganzen Pyramide. Um das Netz des Stumpfs zu zeichnen, konstruieren wir zuerst das Netz der ganzen Pyramide (wie früher) und darin das Netz der Ergänzungspyramide. Der Rest gibt uns das Netz des Pyramidenstumpfs. Die wahre Länge der Seitenkanten entnehmen wir dem Aufriss, diejenige von Grund- und Deckkante dem Grundriss.

Berechnung der Seitenflächen.

c) *Berechnung: 1) Wieviel dm^2 messen die Bretter des Trichters?*

Wir messen die Trapezhöhe und können mit Hülfe des Massstabs ihre wahre Länge (54 cm) berechnen.

Inhalt der 4 Seitenflächen $= 4 \cdot \frac{30 + 70}{2} \cdot 54 \text{ cm}^2 =$ *108 dm^2.*

2) Wieviel Getreide hält der Trichter, wenn man ihn ganz füllt?

Berechnung des Inhalts.

Wir erhalten den Inhalt unseres Pyramidenstumpfs, indem wir von der ganzen Pyramide die Ergänzungspyramide abziehen.

Aus dem Aufriss ersehen wir, dass die Höhe der ganzen Pyramide $(h + x) = 8^3/_4$ dm und dass die Höhe der Ergänzungspyramide $x = 3^3/_4$ dm misst.

$$\text{Ganze Pyramide} = \frac{G \cdot H}{3} = \frac{49 \cdot 8^3/_4}{3} \text{ dm}^3 = 142^{11}/_{12} \text{ dm}^3.$$

$$\text{Ergänzungspyramide} = \frac{9 \cdot 3^3/_4}{3} \text{ dm}^3 = \underline{11^1/_4 \text{ dm}^3.}$$

$$\text{Pyramidenstumpf} = 131^2/_3 \text{ dm}^3.$$

In der Praxis rechnet man nach einer Regel, die nur ein annähernd richtiges Resultat gibt. Man nimmt:

$$\text{Mittlere Länge} \times \text{mittlere Breite} \times \text{Höhe} = \left(\frac{7+3}{2}\right) \cdot \left(\frac{7+3}{2}\right) \cdot 5 \text{ dm}^3 = 125 \text{ dm}^3 \;(= \text{mittlerer Durchschnitt} \times \text{Höhe}).$$

Dieses Resultat ist um $6^2/_3$ dm³ zu klein.

Mitunter nimmt man auch das Mittel aus Grund- und Deckfläche und multipliziert es mit der Höhe.

$$\frac{G + g}{2} \cdot h = \frac{49 + 9}{2} \cdot 5 \text{ dm}^3 = 29 \cdot 5 \text{ dm}^3 = 145 \text{ dm}^3.$$

Dieses Ergebnis ist um $13^1/_3$ dm³ zu gross.

Die erste Annäherung ist demnach der zweiten vorzuziehen.

Der Fehler ist klein, wenn Grund- und Deckfläche fast gleich sind.

d) *Es soll die Parallelprojektion dieses Pyramidenstumpfs gezeichnet werden.* Parallelprojektion.

Wir denken uns das Zeichnungsblatt in die Diagnalebene A C E G S (Fig. 60) hineingelegt. Beleuchtet die Sonne den Körper, so ist das Schattenbild der Deckfläche ein Parallelogramm; die Neigung der Seite A D gegen die Diagonale und ihre Länge hängen von dem Stand der Sonne ab; wir können sie willkürlich wählen. Dann ist aber das Parallelogramm A B C D bestimmt und mit ihm auch die ganze Projektion. Verbinden wir A, B, C, D mit S, so haben wir das Bild der ganzen Pyramide. Die Seiten des Parallelogramms E F G H sind durch E und G parallel zu den entsprechenden Seiten von A B C D zu ziehen.

In welcher Beziehung steht das kleine Parallelogramm E F G H zum grossen A B C D? Zeichne A B C D im Massstabe 3 : 7, und du wirst das kleine Parallelogramm E F G H erhalten. Die beiden Parallelogramme sind also ähnlich.

Denke dir den Trichter auf das grosse Quadrat gestellt, und zeichne ihn in dieser Stellung.

2) Es gibt auch Trichter, deren Boden ein ungleichseitiges Rechteck ist. Wir wollen die Zeichnung eines solchen entwerfen.

Zeichne den Grundriss, den Aufriss und die Parallelprojektion einer geraden Pyramide mit rechteckiger Grundfläche, und führe einen Schnitt parallel zur Grundfläche durch das erste Drittel der Höhe, von der Spitze aus gemessen.

Länge der Grundfläche = 2,5 cm, Breite = 1,5 cm, Höhe der Pyramide = 3 cm.

Fig. 61.

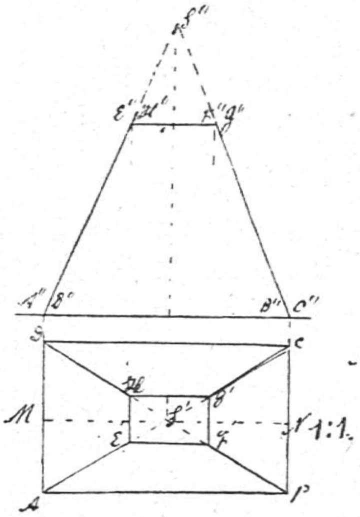
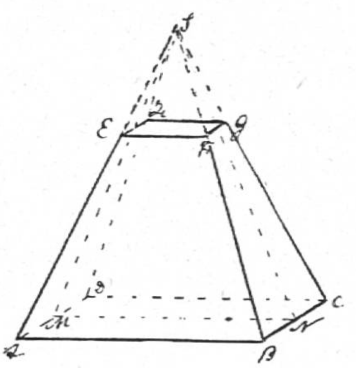


Fig. 62.



Grund- und Aufriss.

a) Wir denken uns diesmal die Pyramide so auf die Grundrissebene gestellt, dass eine Quadratseite parallel zur Aufrissebene läuft. Die Seitenkanten erscheinen dann im Aufriss verkürzt. Der Aufriss A″ S″ B″ ist kongruent mit dem mittleren Längsschnitt der Pyramide, der durch S und die Mitten von A D und B C geht. Der Aufriss der Schnittfigur ist eine zur Achse parallele Linie, welche von der Höhe den dritten Teil abschneidet. Durch Hinunterloten erhalten wir den Grundriss E′ F′ G′ H′, der die wahre Grösse des Schnitts angibt. Miss die Seiten E′ F′ und F′ G′. Die Seiten von E F G H sind $^1/_3$ von den entsprechenden Seiten von A B C D und laufen mit ihnen parallel. Die Schnittfigur ist demnach der Grundfläche ähnlich. Ihr Inhalt ist der 9. Teil vom Inhalt der Grundfläche.

Der Pyramidenstumpf.

b) Beschreibe den Pyramidenstumpf A B C D E F G H. Er ist begrenzt von 2 ähnlichen Rechtecken, deren Seiten parallel laufen, als Grund- und Deckfläche und von 4 symmetrischen Trapezen als Seitenflächen, wovon je zwei einander gegenüberliegende kongruent sind.

Berechnung.

c) Berechne die Oberfläche und den Inhalt dieses Stumpfs wie bei Beispiel 1.

Die Höhe der seitlichen Trapeze kann man dem Aufriss entnehmen (A″ E″), desgleichen die Höhe der 2 Pyramiden.

Parallelprojektion.

d) Zeichne auch die Parallelprojektion der ganzen Pyramide und des Stumpfs. Denke dir das Zeichnungsblatt in die Ebene des mittlern Längsschnittes hineingelegt. Dann erscheint dieser in wahrer Grösse und kann dem Aufriss entnommen werden. Dann kann man die Grundfläche A B C D (Fig. 62) einzeichnen, mit S verbinden und parallel zu ihr E F G H ziehen. In welcher Beziehung stehen A B C D und E F G H?

Drittes Beispiel.

3) Vor uns liegt ein Gewichtstein von 10 kg; seine Grundfläche ist ein regelmässiges Sechseck, dessen Seite 9,1 cm misst; seine Deckfläche ist ein regelmässiges Sechseck mit 7,2 cm Seitenlänge. Die Höhe beträgt 9 cm.

Markiere durch Stäbe die Verlängerungen der Seitenkanten. Diese Verlängerungen treffen sich in einem Punkte, der Pyramidenspitze. Wie erhält man die Form des Gewichtsteins aus der ganzen Pyramide? Indem man in der Höhe von 9 cm über der Grundfläche einen Schnitt parallel zu dieser führt. Dieser Gewichtstein ist auch ein Pyramidenstumpf. Seine 6 Seitenflächen sind kongruente, symmetrische Trapeze.

In welcher Beziehung stehen nun Grund- und Deckfläche? Würden wir die Grundfläche im Massstabe 7,2 : 9,1 zeichnen, so würden wir die Deckfläche erhalten. Je zwei Seiten von Grund- und Deckfläche sind parallel; Grund- und Deckfläche sind ähnlich.

Wie wäre das Volumen dieses Körpers zu berechnen? Wie sieht sein Netz aus?

Verallgemeinerung. Vergleichen wir die drei behandelten Pyramidenstumpfe, so sehen wir, dass sie alle durch Verlängerung der Seitenkanten zu einer Pyramide ergänzt werden können. Umgekehrt konnten wir uns jede dieser Körperformen dadurch entstanden denken, dass durch die zugehörige Pyramide ein Schnitt parallel zur Grundfläche geführt wurde. Die Deckfläche ist bei jedem der Grundfläche ähnlich; je zwei ihrer Seiten laufen parallel. Die Seitenflächen sind Trapeze. Wie erhielten wir den Inhalt dieser Körper genau? wie annähernd?

Satz 27. a) Ein Pyramidenstumpf entsteht, indem man durch eine Pyramide einen Schnitt parallel zu ihrer Grundfläche führt. Grund- und Deckfläche des Stumpfs sind ähnliche Vielecke, deren Seiten paarweise parallel laufen. Die Seitenflächen sind Trapeze.

b) Man erhält den Inhalt des Stumpfs, indem man von der ganzen Pyramide die weggeschnittene abzieht. Annähernd erhält man den Inhalt, wenn man den Inhalt des mittleren Durchschnitts mit der Höhe multipliziert.

Übungen.

1) Es soll ein Trichter von der Form eines Pyramidenstumpfs mit rechteckiger Grundfläche konstruiert werden, der oben 90 cm lang und 70 cm breit, unten 40 cm lang werden soll. Seine Höhe muss 80 cm betragen.

Zeichne seinen Grund- und seinen Aufriss und sein Netz, und berechne ihn.

2) Ein Kieshaufen hat folgende Dimensionen:

Untere Länge = 4 m, obere Länge = 3 m;
„ Breite = 2,5 m, „ Breite = 2 m;
Höhe = 1,30 m.

Wieviel m^3 Kies enthält er? Man erhält ein annähernd richtiges Resultat, wenn man mittlere Länge $\times$ mittlere Breite $\times$ Höhe nimmt, also $\left(\frac{4+3}{2}\right) \cdot \left(\frac{2,5+2}{2}\right) \cdot 1,30\ m^3 = 10,24\ m^3$.

Wieviel erhält der Weger für die Erstellung des Haufens à 3 Fr. pro m³?

Inwiefern hat der Haufen nicht genau die Form eines Pyramidenstumpfs?

Wie gross müsste seine obere Breite sein, damit er diese Form hätte? $4 : 2{,}5 = 3 : x$; $x = 7{,}5 : 4 = 1{,}875$ m.

3) Zeichne den Grund- und den Aufriss des Daches eines Gartenhäuschens, dessen Grundfläche ein regelmässiges Sechseck von 1 m Seite, dessen Deckfläche ein solches von 40 cm Seite ist, während der Abstand von Grund- und Deckfläche 2 m beträgt. Berechne, wieviel m² Bretter es enthält.

Entnimm die Höhe einer Seitenfläche der Zeichnung.

K. Der Kegelstumpf.

1) *Ein Milchhafen ist unten 12 cm, oben 8 cm breit und 10 cm hoch. Stelle ihn dar; berechne seine Wandung und seinen Inhalt, und verfertige ein Kartonmodell.*

Fig. 63

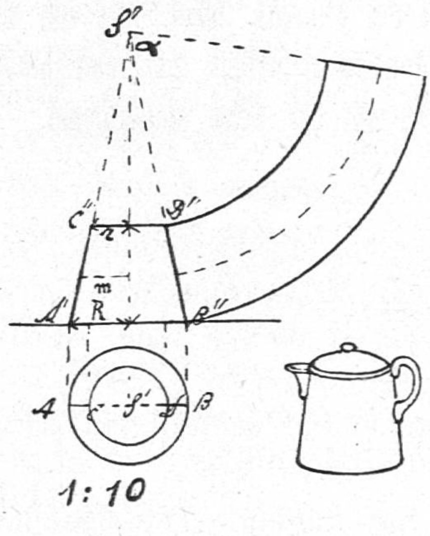
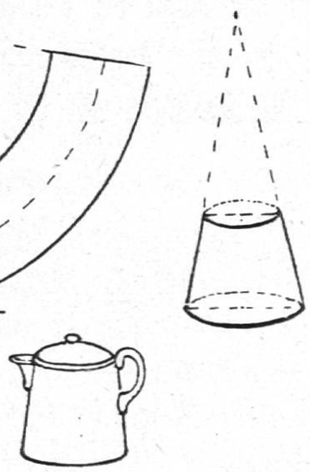


Fig. 64 (a u. b)



Beschreibung und Zeichnung.

a) Diese Körperform heisst *Kegelstumpf.* Sie wird begrenzt von zwei ungleichen parallelen Kreisen als Grund- und Deckfläche und von einem Mantel. A C heisst eine Seitenlinie des Stumpfs. Die Verbindungslinie der Kreismittelpunkte heisst seine Achse; sie gibt die Höhe an.

Zeichnet den Grund- und den Aufriss.

Ergänzet in der Zeichnung (Fig. 63) den Kegelstumpf zum Kegel. Der Kegel C D S, der den Stumpf zum Kegel A B S ergänzt, heisst Ergänzungskegel.

Das Netz.

b) Wie könnte man das Kartonmodell konstruieren?

Wir zeichnen die Abwicklung des Mantels des Kegels A B S und des Kegels C D S und sehen, dass die Abwicklung des Mantels des Kegelstumpfs ein Ringausschnitt ist. Um ihn genau zu zeichnen, haben wir den Centriwinkel α bei S zu berechnen.

$$\alpha = 360^0 \cdot \frac{R}{B\,S} = 360^0 \cdot \frac{6}{30{,}5} = 71^0 \text{ (siehe Kapitel H.)}$$

(Die Länge von B S gibt uns der Aufriss.)

Berechnung des Mantels.

c) Berechnung des Mantels. Denken wir uns die beiden Sektoren durch Seitenlinien, die von S ausgehen, in unzählig viele Dreiecke zerlegt, so sehen wir, dass dieser Ringausschnitt als Summe von unzählig vielen Trapezen aufgefasst werden kann, die alle als Höhe die Seitenlinie s des Kegelstumpfs haben, und deren Mittellinien zusammen den Umfang des mittleren Durchschnitts bilden, der gleich $2\,m\,\pi = (R + r)\,\pi$ ist. (Vergl. Fig. 63). Der Mantel ist also = Umfang des mittleren Durchschnitts $\times$ Seitenlinie $= (R + r) \cdot \pi \cdot s = (6 + 4) \cdot \pi \cdot 10{,}2 \text{ cm}^2 = 320{,}3 \text{ cm}^2 = 3{,}2 \text{ dm}^2$.

Die Seitenlinie entnehmen wir der Zeichnung (10,2 cm).

d) Berechnung des Volumens. Volumen des Kegelsstumpfs = Volumen des Kegels A B S — Volumen des Kegels C D S.

Die Höhen der beiden Kegel entnehmen wir wieder der Aufrisszeichnung.

Volumen des Kegelstumpfs

$$= \frac{(0{,}6^2\pi \cdot 3}{3} - \frac{0{,}4^2 \cdot \pi \cdot 2) \text{ dm}^3}{3} = 0{,}79 \text{ dm}^3.$$

In der Praxis berechnet man das Volumen des Kegelstumpfs meistens, indem man den Inhalt des mittleren Durchschnitts mit der Höhe multipliziert.

Der Radius des mittleren Durchschnitts ist:

$$m = \frac{R + r}{2} = \frac{6 + 4}{2} = 5 \text{ cm} = 0{,}5 \text{ dm}.$$

Sein Flächeninhalt $= 0{,}5^2 \cdot \pi \text{ dm}^2$.

Mittlerer Durchschnitt $\times$ Höhe $= 0{,}5^2 \cdot \pi \cdot 1 \text{ dm}^3 = 0{,}78 \text{ dm}^3$.

Dieses Resultat ist nur 0,01 dm^3 zu klein, also gut brauchbar.

Der Fehler wird grösser, wenn der Unterschied zwischen R und r grösser ist, wenn also der Kegelstumpf vom Cylinder mehr abweicht.

Die ganz genaue Regel für die Inhaltsberechnung des Kegelstumpfs, die wir hier nicht ableiten, heisst:

$$\text{Volumen} = \frac{h\,\pi}{3}(R^2 + Rr + r^2) = \frac{1 \,.\, 3^1/_7}{3}(0{,}6^2 + 0{,}6 \,.\, 0{,}4 + 0{,}4^2)\ dm^3 = 0{,}796\ dm^3.$$

R bedeutet den Radius der Grundfläche, r den Radius der Deckfläche und h die Höhe des Stumpfs.

Zu welchem Resultat käme man, wenn man das Mittel aus Grund- und Deckfläche mal die Höhe nehmen würde?

Berechne den Unterschied zwischen dem mittleren Durchschnitt mit Radius m und dem arithmetischen Mittel aus Grund- und Deckfläche.

2) 2. Beispiel. Eine runde Waschkanne aus Blech ist unten 21 cm, oben 32 cm breit und hat einen Mantel, der 14 cm breit ist.

Beschreibe ihre Form. Zeichne ihren Grund- und ihren Aufriss, ihr Netz und ihre Parallelprojektion. Berechne, wieviel dm^2 Blech die Wanne enthält, und wieviel Wasser sie fasst.

3) Zeichne einen schiefen Kegel, und führe einen Schnitt parallel zur Grundfläche. Dann erhältst du einen *schiefen Kegelstumpf*. Seine Achse steht schief zur Grundfläche. Sein Inhalt wird auf gleiche Weise wie derjenige der zwei behandelten Kegelstumpfe berechnet. Letztere nennt man gerade Kegelstumpfe.

Verallgemeinerung. Vergleiche die Merkmale und die Berechnungsart der behandelten Kegelstumpfe.

Satz 28. a) Ein Kegelstumpf ist begrenzt von zwei ungleichen Kreisen, die parallel liegen, und von einem runden Mantel, der aus geraden Seitenlinien zusammengesetzt ist, deren Verlängerungen einen Kegelmantel bilden. Führt man durch einen Kegel einen Schnitt parallel zur Grundfläche, so entsteht ein Kegelstumpf. Die Verbindungslinie der beiden Kreismittelpunkte heisst die Achse, der senkrechte Abstand der beiden Kreise die Höhe des Stumpfs. Steht die Achse senkrecht zur Grundfläche, so heisst der Stumpf ein gerader, sonst ein schiefer.

b) Der Mantel des geraden Kegelstumpfs isl ein Ringausschnitt, dessen Fächeninhalt gleich dem Umfang des mittleren Durchschnitts des Stumpfs mal die Seitenlinie ist.

$$\textbf{Mantel} = 2 \,.\, m \,.\, \pi \,.\, s = (R + r) \,.\, \pi \,.\, s.$$

c) Für den Inhalt des Kegelstumpfs erhält man ein annäherndes Resultat, wenn man mittleren Radius mal mittleren Radius mal π mal Höhe nimmt.

Die genaue Regel lautet:

$$V = \frac{h \cdot \pi}{3} (R^2 + Rr + r^2).$$

Übungen.

1) Ein Spengler hat einen Blecheimer von folgenden Dimensionen zu verfertigen: Bodendurchmesser = 22 cm, Breite oben = 30 cm und Höhe = 26 cm. Zeichne im verkleinerten Massstab das Blechstück, das er auszuschneiden hat, und berechne es. Wieviel Liter hält der Eimer?

2) Für eine Kunstmühle soll ein grosser Trichter aus Blech konstruiert werden, der oben 1 m, unten 25 cm weit sein soll, während seine Seitenlinie 1 m 40 cm zu messen hat. Was für ein Blechstück muss verwendet werden? Wieviel Mehl würde dieser Trichter halten, wenn man ihn unten abschliessen würde? Wende die genaue Regel an. Die andere würde hier ein schlechtes Resultat liefern.

3) Berechne folgende Baumstämme annähernd:

1) D = 64 cm, d = 55 cm, h = 6,2 m;
2) D = 47 cm, d = 41 cm, h = 5,3 m.

D bedeutet den Durchmesser der Grundfläche, d denjenigen der Deckfläche.

4) Ein Weinzuber mit elliptischer Grund- und Deckfläche ist unten 1 m 60 cm, oben 1 m 20 cm lang; unten 90 cm, oben 70 cm breit und 1,1 m hoch. Wieviel Liter Wein hält er? Berechne den mittleren Durchschnitt (halbe mittlere Länge mal halbe mittlere Breite mal π), und multipliziere seinen Inhalt mit der Höhe.

L. Die Kugel.

I. Der Erdglobus.

1) *Beschreibung.* Weise den Erdglobus vor. Welche Eigenschaften haben die Punkte der Oberfläche dieses Globus? Wie nennt man diese Körperform? Was sind Meridiane, Parallelkreise, Länge und Breite? Wie wird die Erde in Zonen eingeteilt?

2) *Grund- und Aufriss.* Wir wollen diesen Globus durch Grund- und Aufriss darstellen. Stelle die Erdachse senkrecht zur Grund- und Aufriss.

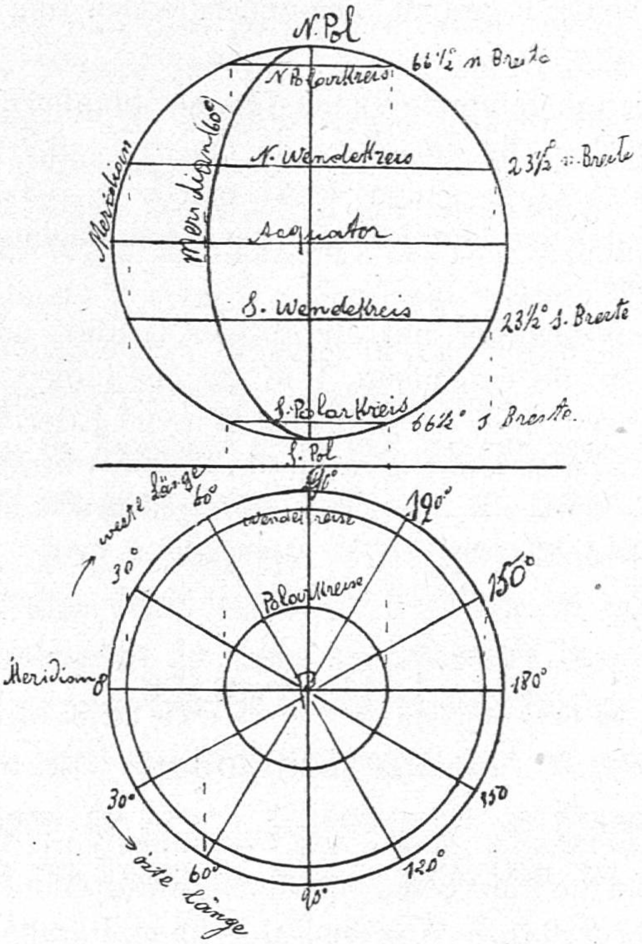
Grund- und Aufriss der Meridiane und der Parallelkreise.

Grundrissebene; dann kommt der Äquator in parallele Lage zur Grundrissebene. Drehe den Globus so, dass der Nullmeridian (von Greenwich) parallel zur Aufrissebene läuft. Wie projizieren sich dann die Meridiane und die Parallelkreise?

Der Äquator erscheint im Grundriss in wahrer Grösse, im Aufriss als gerade Linie parallel zur Achse; der Nullmeridian erscheint im Grundriss als gerade Linie parallel zur Achse und im Aufriss in wahrer Grösse.

Die Parallelkreise erscheinen im Grundriss in wahrer Grösse und im Aufriss als Linien parallel zur Achse; die Grundrisse der Meridiane sind Radien des Äquatorkreises; ihre Aufrisse sind Ellipsen, die gegen den 90. Meridian hin immer schmäler werden; letzterer erscheint im Aufriss als eine zur Achse senkrecht stehende Linie.

Fig. 65.



Zeichne die beiden Wendekreise und die beiden Polarkreise ein. Wir zeichnen zuerst ihre Aufrisse. Der nördliche Wendekreis liegt $23^{1}/_{2}{}^{0}$ nördlich vom Äquator, der nördliche Polarkreis

$23^1/_2{}^0$ südlich vom Nordpol. Mit Hülfe des Transporteurs markieren wir auf dem Anfangsmeridian den $23^1/_2$. und den $66^1/_2$. Grad vom Äquator aus nördlich und südlich.

Aus dem Aufrisse entnehmen wir die Radien dieser Kreise und können sie dann auch im Grundriss zeichnen.

Hebe die einzelnen Zonen durch verschiedene Farben hervor.

Zeichne im Grundriss die Meridiane von 30 zu 30 Grad ein. Man teilt den Äquator mit Hülfe des Transporteurs in zwölf Teile ein und verbindet die Teilpunkte mit dem Mittelpunkt.

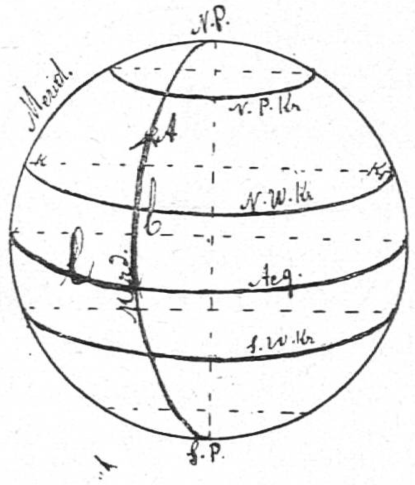
Wie zeichnen wir den Aufriss eines solchen Meridians? Sein Aufriss ist eine halbe Ellipse, deren grosse Achse die Erdachse ist; ihre halbe kleine Achse fällt in die Äquatorlinie hinein; ihren Endpunkt erhalten wir z. B. für den 60. Meridian, indem wir den Teilpunkt 60^0 des Äquators hinaufloten. Aus den beiden Achsen haben wir früher gelernt die Ellipse zu zeichnen.

3) *Parallelprojektion des Globus.* Ein anschaulicheres Bild vom Globus gibt uns seine Parallelprojektion. Parallelprojektion.

Wir denken uns die Blattebene in die Ebene des Nullmeridians hineingelegt und lassen die Strahlen von vorn einfallen (wie beim Cylinder) und zwar so, dass die zur Aufrissebene senkrecht stehenden Sehnen im Schattenbilde auf den 4. Teil verkürzt erscheinen.

Der Äquator und die Parallelkreise erscheinen im Bilde als Ellipsen, deren kleine Achsen $^1/_4$ von den Hauptachsen sind.

Fig. 66.



Um die Paralleloprojektion zu zeichnen, gehen wir von der Aufrisszeichnung aus, die zugleich einen Schnitt durch den Nullmeridian darstellt. Im Aufriss haben wir die grossen Achsen jener Ellipsen. So stellt z. B. K K die grosse Achse des Schattenbildes des nördlichen Wendekreises dar. Die kleine Achse ist der 4. Teil hievon und kann abgemessen werden.

Zeichne auch einen beliebigen Meridian ein; sein Schattenbild ist eine Ellipse. Nimm auf diesem Meridian einen Ort an, und hebe die Bogen hervor, die seine Breite und seine Länge angeben. Der Bogen vom Ort A bis zum Äquator gibt seine Breite, der Bogen des Äquators zwischen dem Anfangsmeridian und demjenigen des Ortes A gibt die Länge des Ortes an. Was für Breiten und Längen unterscheidet man?

Darstellung gegebener Orte.

4) *Darstellung von Orten auf der Erde.* Um uns die Begriffe Länge und Breite genau einzuprägen, wollen wir den Grund- und den Aufriss einer Anzahl wichtiger Städte und Berge einzeichnen, deren Länge und Breite wir vom Globus ablesen.

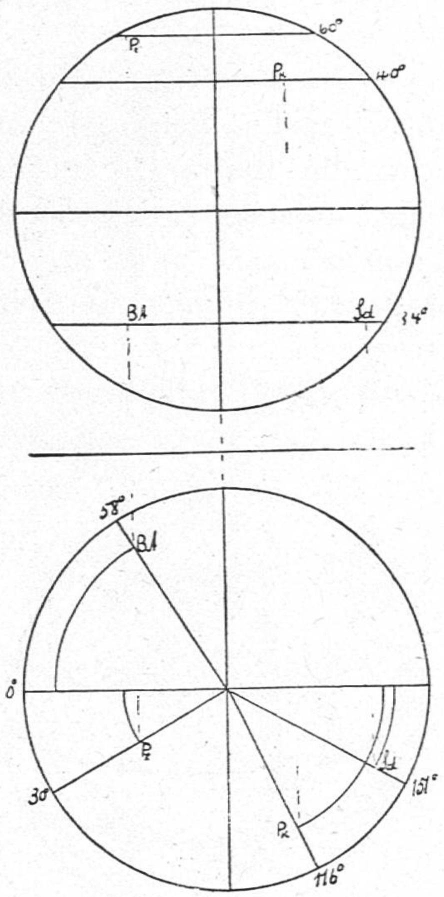


Fig. 67.

St. Petersburg:	Länge	=	30° östl.;	Breite	=	60° nördl.
Peking:	„	=	116° östl;	„	=	40° närdl.
Buenos-Ayres:	„	=	58° westl.;	„	=	34° südl.
Sydney (Australien):	„	=	151° östl.;	„	=	34° südl.

Petersburg z. B. liegt auf dem 60. Parallelkreis nördlich vom Äquator; wir zeichnen zuerst den Aufriss und dann den Grundriss dieses Kreises. Petersburg liegt ferner auf dem 30. Meridian östlich von Greenwich. Wir zeichnen zuerst den Grundriss des Meridians ein; es ist der Radius, der mit dem 1. einen Winkel von 30^0 bildet und bei der Drehung links herum auf letztern folgt. Der Schnittpunkt dieses Radius mit dem Parallelkreis ist der Grundriss von St. Petersburg; der Aufriss liegt senkrecht darüber.

So können wir jeden Ort einzeichnen, dessen Länge und Breite wir kennen.

Die westlichen Längen tragen wir vom Nullmeridian aus im Sinne rechtsum ein.

Nimm umgekehrt einen Punkt in der Zeichnung an; miss seine Länge und Breite, und suche ihn auf dem Globus auf.

5) *Berechnung der Erdoberfläche.*

Berechnung der Erdoberfläche.

Wie gross ist die Oberfläche der Erde?

a) Weise eine Halbkugel vor. Wir wollen zunächst nach der Oberfläche dieser Halbkugel fragen. Wir vergleichen die Wölbung mit der Kreisfläche. Es lässt sich beweisen, dass die Wölbung genau doppelt so gross ist als die Kreisfläche, deren Inhalt $r^2 . \pi$ ist, wenn r den Kugelradius bezeichnet.

Wir bezeichnen die ganze Kugeloberfläche mit O; dann ist: $O = 4 . r^2 . \pi$. Ist der Radius dieser Halbkugel = 5 cm, so ist $O = 4 . 5 . 5 . \pi \text{ cm}^2 = 314 \text{ cm}^2 = 3{,}14 \text{ dm}^2$.

b) Welche Oberfläche hat der Erdglobus, wenn r = 20 cm misst? $O = 4 . 20 . 20 . 3{,}14 \text{ cm}^2 = 5024 \text{ cm}^2 = 50{,}24 \text{ dm}^2$.

c) Der Erdradius selbst misst ungefähr 6370 km. Berechne O.

6) *Berechnung des Volumens.*

Berechnung des Inhalts.

Welchen Raum nimmt die Erde ein? Wir berechnen zunächst den Globus. Durch die Parallelkreise und die Meridiane wird die Oberfläche des Globus in unzählig viele kleine Flächen eingeteilt, die wir als Rechtecke ansehen können. Ihre Ecken denken wir uns mit dem Centrum verbunden; dadurch wird die Kugel in ebenso viele Pyramiden zerlegt, die alle als Höhe den Radius haben, und deren Grundflächen zusammen die Kugeloberfläche bilden. Alle diese Pyramiden werden zusammen gleichen Inhalt haben wie eine Pyramide, deren Grundfläche gleich der Oberfläche der Kugel, deren Höhe gleich dem Kugelradius ist; ihr Inhalt ist $= O \cdot \frac{r}{3} = \frac{50{,}24 \cdot 2}{3} \text{dm}^3 = 33{,}5 \text{ dm}^3$, oder

Inhalt des Globus $= O \cdot \frac{r}{3} = 4 r^2 \pi \cdot \frac{r}{3} = \frac{4}{3} r^3 \pi = \frac{4}{3} \cdot 2^3 \pi$ $\text{dm}^3 = 33{,}5 \text{ dm}^3$.

Entsprechend ist der Inhalt des Kugelmodells

$$(r = 5 \text{ cm}) = O \cdot \frac{r}{3} = 3{,}14 \cdot \frac{0{,}5}{3} \text{ dm}^3 = 5{,}233 \text{ dm}^3.$$

$$\text{oder} = \frac{4}{3} \cdot r^3 \pi = \frac{4}{3} \cdot 0{,}5^3 \pi \text{ dm}^3 = 5{,}233 \text{ dm}^3.$$

$$\text{Inhalt des Erdkörpers} = O \cdot \frac{r}{3} = \ldots$$

$$= \frac{4 r^3 \pi}{3} = \ldots$$

Verallgemeinerung. Wie haben wir die Oberfläche und den Inhalt der betrachteten Kugeln berechnet?

Satz 29. Für die Berechnung der Kugel gelten folgende Regeln:

$$O = 4 \cdot r^2 \cdot \pi;\ J = \frac{4}{3} \cdot r^3 \cdot \pi = \frac{O \cdot r}{3}$$

Übungen.

1) Wie gross ist das Gewicht des Erdkörpers, wenn sein spezifisches Gewicht im Mittel 5,5 beträgt?

2) Die Erde ist an den Polen abgeplattet. Um ihren Aufriss genau zu zeichnen, müssten wir den Kreis oben und unten um $\frac{1}{300}$ zusammendrücken. Stelle den Erd-Meridian in grösserm Massstab dar.

3) Miss in der Aufrisszeichnung des Globus den Radius des Äquators und des Parallelkreises von Chur.

Gib ihr Verhältnis ungefähr an, und berechne den Radius und den Umfang des Parallelkreises von Chur aus der Länge des Äquatorradius, der ungefähr 859 geographische Meilen à 7420 m beträgt. Welchen Weg legt ein Ort des Äquators, welchen Chur beim Umschwung der Erde in einem Tag zurück?

4) Zeichne den Meridian von Chur, sowie die Lotrichtung und die wagerechte Richtung (Tangente) von Chur, vom Äquatorpunkte und vom Pol.

5) Was wiegt eine Gewehrkugel aus Blei, die einen Durchmesser von 9 mm hat, wenn das spezifische Gewicht des Bleis 11,3 beträgt? Welches Gewicht hätte eine Kugel von doppeltem, eine solche von zehnfachem Durchmesser?

6) Ein Kessel von der Form einer Halbkugel hat einen Durchmesser von 1,10 m. Wieviel Liter hält er? Wie gross ist sein Deckel, wie gross seine Wandung?

7) Ein Kalkofen hat einen äussern Umfang von 20 m; die Wanddicke beträgt 40 cm; er wird halbkugelförmig überfüllt. Welches Volumen hat diese Halbkugel?

M. Das Ausziehen der Quadratwurzel.

I. Die Quadratwurzel aus drei- und vierstelligen Quadratzahlen.

1) Der Kanton Baselstadt hat ein Gesamtareal von ungefähr 36 km².

Welches Quadrat hat denselben Flächeninhalt?

Bezeichnen wir die Seite mit x, so muss: Seite $\times$ Seite $=$ x km² $=$ 36 km² sein. $x = 6$; denn $6^2 = 36$.

Ein Quadrat von 6 km Seite ist so gross wie der Kanton Baselstadt.

Man nennt 6 die Quadratwurzel aus 36 und schreibt $\sqrt{36} = 6$.

2) Der Kanton Graubünden hat einen Flächeninhalt von 7185 km².

Wie lang ist die Seite des Quadrates, das denselben Flächeninhalt hat?

Wir wollen diese Seite mit x bezeichnen. Dann muss sein: Seite $\times$ Seite $= x^2 =$ 7185 km².

Wir haben demnach die Zahl zu suchen, die mit sich selbst multipliziert 7185 gibt, oder deren Quadrat $=$ 7185 ist. Man nennt diese Zahl die Quadratwurzel aus 7185. Wie gross ist sie ungefähr? Sie liegt zwischen 80 und 90, denn $80^2 = 6400$; $90^2 = 8100$. Durch Probieren finden wir genauer, dass sie zwischen 84 und 85 liegt.

$$84^2 = 7056;\ 85^2 = 7225.$$

$$\sqrt{7056} = 84;\ \sqrt{7225} = 85;\ \sqrt{7185} = 84, \ldots$$

3) *Wir wollen eine Regel kennen lernen, nach welcher wir diese Quadratseite direkt genau berechnen können.*

Definition der Quadratwurzel.

Zu diesem Zwecke wollen wir zunächst von bequemen Zahlen ausgehen.

Wie gross ist $\sqrt{4}$, $\sqrt{9}$, $\sqrt{16}$ . . . $\sqrt{100}$, $\sqrt{121}$, $\sqrt{900}$, $\sqrt{1600}$ u. s. f.? Wie gross ist $\sqrt{0{,}04}$, $\sqrt{0{,}16}$, $\sqrt{1{,}21}$ . . .?

Satz 30. Unter der Quadratwurzel aus einer Zahl versteht man diejenige Zahl, die mit sich selbst multipliziert oder ins Quadrat erhoben, die gegebene Zahl gibt. Die gegebene Zahl nennt man Radikand.

Der Kürze halber wollen wir statt Quadratwurzel nur Wurzel sagen.

Quadratzahlen.

Bildet Zahlen, deren Wurzeln ganzzahlig sind . $1^2 = 1$; $2^2 = 4$, . . . $10^2 = 100$; $11^2 = 121$; . . . diese Zahlen nennt man *Quadratzahlen.* Was lässt sich über ihre Stellenzahl aussagen?

Die Quadrate der einstelligen Zahlen (1—9) liegen zwischen 1 und 100; sie sind also ein- oder zweistellig.

Die Quadrate der zweistelligen Zahlen (10—99) liegen zwischen 100 und 10000; sie sind also drei- oder vierstellig.

Die Quadrate der dreistelligen Zahlen (100—999) liegen zwischen 10000 und 1000000; sie sind also fünf- oder sechsstellig.

Umgekehrt wird die Wurzel aus ein- und zweistelligen Quadratzahlen einstellig sein, die Wurzel aus drei- und vierstelligen zweistellig, die Wurzel aus fünf- und sechsstelligen wird dreistellig sein u. s. f.

Klasseneinteilung.

Daraus ergibt sich, dass man durch folgende Einteilung des Radikanden die Stellenzahl der Wurzel sofort angeben kann.

Wir teilen die Zahl von den Einern aus nach links in Klassen von je zwei Stellen ein.

Z. B. $\sqrt{1'21} = 11$; $\sqrt{3'24} = 18$; $\sqrt{64'00} = 80$; $\sqrt{9'00'00} = 300$; $\sqrt{49'00'00} = 700$.

Die Wurzel hat so viele Stellen wie der Radikand Klassen.

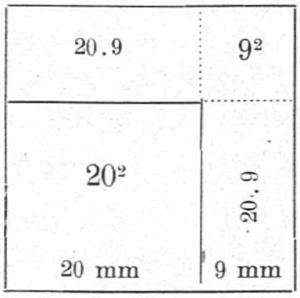
Zeiget, dass bei Dezimalbrüchen die Einteilung vom Komma aus nach rechts geschehen muss. Z. B. $\sqrt{1,'21'} = 1{,}1$; $\sqrt{0{,}00'64} = 0{,}08$.

4) a) Um nun herauszufinden, wie man die Wurzel einer beliebigen Quadratzahl direkt findet, müssen wir zuerst genau

zusehen, wie die Quadratzahl entstanden ist, welche Bestandteile sie enthält. Wir fragen uns zunächst: welchen Inhalt hat das Quadrat von der Seite 2 cm 9 mm = 29 mm? Wir zeichnen das Quadrat, konstruieren darin über 20 mm das Quadrat und verlängern zwei seiner Seiten so, dass das ganze Quadrat zerlegt wird: in das Quadrat über 20 mm, in das doppelte Rechteck aus den Seiten 20 mm und 9 mm und in das Quadrat über 9 mm.

Bestandteile des Quadrats.

Fig. 68.



Zahl der mm² dieses Quadrates $= 29^2 = (20 + 9)^2 =$

$$20^2 + 2 \cdot 20 \cdot 9 + 9^2 = \begin{array}{r} 400 \\ +\ 360 \\ +\ \ 81 \\ \hline 841 \end{array}$$

Aus welchen Bestandteilen können wir uns daher 1) das Quadrat über 29 mm, 2) das Quadrat der Zahl 29 (841) zusammengesetzt denken? Das Quadrat der Zahl 29 ist zusammengesetzt aus dem Quadrat von 20, aus dem doppelten Produkt von 20 und 9 (360) und aus dem Quadrat von 9 (81).

b) Nun werden wir sehen, wie wir aus 841 leicht die Wurzel ziehen können.

Ausziehen der Wurzel aus der gebildeten Quadratzahl.

$$\begin{array}{l} \sqrt{8'41} = 20 + 9 = 29 \\ \underline{\ 4\,00} \\ \ 4\,41 : 40 \\ \ 3\,60 \\ \underline{\quad 81} \\ \ \text{„ „ „} \end{array}$$

Die Wurzel liegt offenbar zwischen 20 und 30. Sie wird gleich sein 20 + einige Einer. Wir bilden $20^2 = 400$ und ziehen es von 841 ab. Der Rest 441 enthält noch das doppelte Produkt aus 20 und den Einern und das Quadrat der Einer. Die Einer mal 2 . 20 und das Quadrat der Einer müssen 441 ausmachen. Demnach erhalten wir die Einer, indem wir 40 in 441 dividieren und dafür Sorge tragen, dass wir auch noch das Quadrat der Einer abziehen können. Es kann höchstens 9 Einer geben, da die Wurzel kleiner als 30 ist. Um zu sehen, ob 9 die richtige Einerzahl ist, haben wir das doppelte Produkt aus 20 und 9 (d. h. 9 . 40 = 360) und das Quadrat von 9 (= 81) zu bilden. Ihre Summe muss 441 geben, oder ziehen wir ihre Summe von 441 ab, so muss es aufgehen.

c) Entwickle auf gleiche Weise z. B. 37^2, und ziehe die Wurzel daraus.

Kürzere Darstellung.

5) a) Wir wollen uns eine kürzere Darstellung merken, die uns namentlich später grosse Vorteile bieten wird. Wir zeichnen nochmals das Quadrat über 29 mm und drücken seinen Inhalt auf zweifache Art aus.

Es ist 29 mm = 2 cm + 9 mm; 29 = 2 Zehner + 9 Einer = $2^Z + 9^E$.

$$(2^Z + 9^E)^2 = (2^Z)^2 + 2 \,.\, (2^Z \,.\, 9^E) + (9^E)^2 = \begin{array}{r} \scriptstyle HZE \\ 4\,.\,. \\ 36\,. \\ 81 \\ \hline 841 \end{array}$$

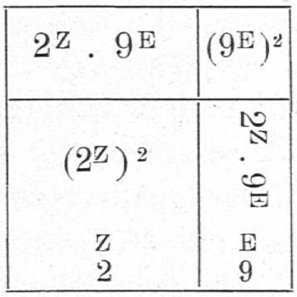


Fig. 69.

Das Quadrat der zweistelligen Zahl 29 enthält 1) das Quadrat der 2 Zehner (= 4 Hunderter), 2) das doppelte Produkt der 2 Zehner und 9 Einer (= 36 Zehner) und das Quadrat der 9 Einer (= 81 Einer). Achte auf die Ziffernstellung dieser 3 Bestandteile 4, 36, 81; jeder folgende reicht eine Stelle weiter rechts (ausführlich!).

b) Nun wollen wir wiederum die Wurzel aus 841 suchen.

$$\begin{array}{l} \qquad\qquad\quad \scriptstyle ZE \\ \sqrt{8'41} = 29 \\ \;\;4 \\ \hline \;\;44'1 \;:\; 4 \\ \;\;36 \\ \;\;\;\;81 \\ \hline \;\;\;\;- \end{array}$$

Teile 841 in Klassen ein. Wieviel Stellen bekommt die Wurzel? Sie besitzt Zehner und Einer. Wie setzt sich 841 aus diesen zusammen? Was enthält 8 in erster Linie? (Das Quadrat der Zehner.) Wir nehmen auf eine Einheit genau die Wurzel aus 8 Hundertern; sie ist 2 Zehner. Ziehen wir das Quadrat dieser 2 Zehner (d. i. 4 Hunderter) von 8 H. ab und nehmen die zweite Klasse (41) herunter, so enthält der Rest noch das doppelte Produkt der Zehner und Einer und das Quadrat der Einer; und zwar muss ersteres in 44 enthalten sein, da es nur eine Stelle weiter nach rechts reicht als das Quadrat der Zehner. $2 \cdot 2^{Z} =$ (4 Z) mal die unbekannten Einer gibt eine Zahl, die in 44 enthalten ist. Um die Einer zu erhalten, dividieren wir 44 durch die doppelte erste Stelle der Wurzel, bedenken aber, dass in 44 auch die Zehner enthalten sind, die vom Quadrat der Einer herrühren. Wir versuchen, ob die höchste Einerzahl, 9, passt. Zur Prüfung haben wir das doppelte Produkt der Zehner und Einer, $9 \cdot 4^{Z} = 36^{Z}$, und das Quadrat der Einer, $9^2 = 81^{E}$, zu bilden; die Summe dieser beiden Ausdrücke muss 441 sein; ziehen wir beide von 441 ab, so muss es aufgehen. Wir nehmen also $9 \times 4^{Z} = 36^{Z}$ und schreiben 36 unter 44, — eine Stelle weiter rechts als das vorhergehende Quadrat — ferner $9^2 = 81^{E}$ und rücken damit um eine Stelle weiter rechts, so dass 8^{Z} unter die Zehner, 1 Einer unter 1 Einer zu stehen kommt. Die Subtraktion ergibt den Rest 0. 29 ist die richtige Wurzel. Wo steht die Probe für die Richtigkeit?

c) Bilde auf gleiche Weise wie 29^2 auch 37^2, und suche zur Quadratzahl wieder die Wurzel.

Hat die Zahl a Zehner und b Einer, so ist $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ und $\sqrt{a^2 + 2ab + b^2} = a + b$.

Verallgemeinerung. Vergleiche das nackte Verfahren bei beiden Beispielen.

Satz 31. Um aus einer drei- oder vierstelligen Quadratzahl die Wurzel zu ziehen, teilt man sie, von den Einern ausgehend, in zweistellige Klassen ein, nimmt die Wurzel aus der ersten Klasse auf eine Einheit genau und erhält die Zehnerstelle der Wurzel; ihr Quadrat zieht man von der ersten Klasse ab und nimmt die folgende Klasse herunter. Den Rest mit Ausnahme der letzten Stelle dividiert man durch die doppelte erste Stelle der Wurzel und erhält die zweite Stelle (Einerstelle) der Wurzel. Die gefundene zweite Stelle wird mit dem Divisor (doppelte erste Stelle) multipliziert und das Ergebnis so unter den Rest geschrieben, dass es eine Stelle weiter rechts als

das Quadrat der ersten Wurzelstelle reicht. Dann bildet man das Quadrat der zweiten Stelle und setzt es so unter das hingeschriebene doppelte Produkt, dass es eine Stelle weiter rechts als dieses reicht. Ergibt die Subtraktion den Rest 0, so hat man die richtige Wurzel gefunden.

d) Wende das gleiche Verfahren auf $\sqrt{8,41}$; $\sqrt{0,08'41}$ an. Es gilt auch für Dezimalbrüche. Die Klasseneinteilung geschieht hier vom Komma aus nach beiden Seiten.

Übungen.

1) Eine rechteckige Wiese ist 54 m lang und 24 m breit; welche Seite hat eine quadratische Wiese von gleichem Inhalt?

2) Ein rechtwinkliges gleichschenkliges Giebeldreieck hat einen Flächeninhalt von 5,12 m². Wie viel misst eine seiner Katheten.

3) Berechne $\sqrt{5041}$, $\sqrt{27,04}$ und $\sqrt{0,0361}$.

II. Die Quadratwurzel aus beliebigen Zahlen.

1) Indem man genau zusehen würde, wie das Quadrat einer mehrstelligen Zahl entsteht, würde man das Verfahren finden, um aus beliebigen Quadratzahlen die Wurzel zu ziehen. Wir beschränken uns darauf, das Verfahren an einigen Beispielen zu erläutern.

$$\begin{array}{lll}
1)\ \sqrt{68'72,41} = 82,9 & & \\
\quad 64 & & \\
\hline
\quad 47'2 & : & 16 \\
\quad 32 & & \\
\quad\ \ 4 & & \\
\hline
\quad 148\,4'1 & : & 164 \\
\quad 1476 & & \\
\quad\quad\ 81 & & \\
\hline
\quad\quad — & &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{lll}
2)\ \sqrt{9'48'64} = 308 & & \\
\quad 9 & & \\
\hline
\quad 4'8 & : & 6 \\
\hline
\quad 486'4 & : & 60 \\
\quad 480 & & \\
\quad\ \ 64 & & \\
\hline
\quad — & &
\end{array}$$

$$\begin{array}{lll}
3)\ \sqrt{0,05'47'56} = 0,234 & & \\
\quad 4 & & \\
\hline
\quad 14'7 & : & 4 \\
\quad 12 & & \\
\quad\ \ 9 & & \\
\hline
\quad 185'6 & : & 46 \\
\quad 184 & & \\
\quad\ \ 16 & & \\
\hline
\quad\ \ — & &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{lll}
4)\ \sqrt{5} = \sqrt{5,000000} = 2,236 & & \\
\quad 4 & & \\
\hline
\quad 10'0 & : & 4 \\
\quad 84 & & \\
\hline
\quad 160'0 & : & 44 \\
\quad 132 & & \\
\quad\quad 9 & & \\
\hline
\quad 2710'0 & : & 446 \\
\quad 2676 & & \\
\quad\quad 36 & & \\
\hline
\quad\quad 304 & &
\end{array}$$

Prüfe die Richtigkeit durch Quadrieren der Wurzel.

Um die Wurzel aus einer Zahl (6872,41) zu ziehen, teilt man sie vom Komma aus nach links und rechts in Klassen von je zwei Stellen ein; dann zieht man auf eine Einheit genau die Wurzel aus der ersten Klasse (68) links und erhält die erste Stelle der Wurzel (8); ihr Quadrat wird von der ersten Klasse abgezogen und die folgende Klasse (72) wird herunter genommen und angeschlossen; dieser Teil des Restes mit Ausnahme der lezten Stelle wird durch die doppelte erste Stelle der Wurzel dividiert, (wobei zu beachten ist, dass man den Quotienten nicht zu hoch wählt, weil auch sein Quadrat abzuziehen ist), (47 : 16 = 2), wodurch man die zweie Stelle (2) der Wurzel erhält. Diese wird mit dem Divisor (16) multipliziert und dann quadriert. Das erste Produkt (32) wird unter den Dividenden (47) gestellt, während man das Quadrat eine Stelle weiter rechts schreibt; nachdem man diese Ausdrücke subtrahiert hat, nimmt man die folgende Klasse (41) herunter und dividiert den erhaltenen Rest (14841) mit Ausnahme der letzten Stelle durch das Doppelte des gefundenen Teils der Wurzel (1484 : 164 = 9) und erhält die dritte Stelle derselben; diese wird 1) mit dem letzten Divisor multipliziert und 2) quadriert. Das erste Produkt (1476) wird unter den letzten Dividenden (1484), das Quadrat eine Stelle weiter rechts gestellt, und beides wird subtrahiert. Geht es auf, und hat der Radikand keine Klassen mehr, so ist die genaue Wurzel gefunden. Bleibt ein Rest übrig, so nimmt man die folgende Klasse herunter, falls der Radikand noch eine solche besitzt; andernfalls hängt man zwei Nullen an und dividiert den Rest mit Ausnahme der letzten Stelle durch das Doppelte des gefundenen Teiles der Wurzel u. s. f. Die Stellung des Komma ergibt sich unmittelbar.

2) Eine einfachere Darstellung ergibt sich, wenn man jeweilen das Quadrat vor dem doppelten Produkte hinschreibt und die zweite Stelle des Quadrats, falls es eine solche besitzt, sofort zum doppelten Produkte schlägt; siehe folgende Beispiele:

$$\begin{array}{lcl}
\sqrt{68'72'41} & = & 829 \\
64 & & \\
\hline
47'2 & : & 16 \\
32\;4 & & \\
\hline
1484'1 & : & 164 \\
1484\;1 & & \\
\hline
— & &
\end{array}$$

Die bequemste Darstellung ist folgende:

$$\begin{array}{lcl}
\sqrt{68'72'41} & = & 829 \\
64 & & \\
\hline
472 & : & 16_2 \leftarrow \\
324 & & \\
\hline
14841 & : & 164_9 \leftarrow \\
14841 & &
\end{array}$$

Übungen.

1) Gib die vollständige Lösung von Aufgabe 2.

$\sqrt{7185} = ?$ auf 2 Dezimalstellen genau.

2) Wieviel misst der Radius des Kreises, der gleichen Inhalt hat wie der Boden des Schulzimmers?

Es sei $l = 8$ cm, $b = 5{,}5$; dann muss $r^2 \pi = 8 \,.\, 5{,}5 = 44$ sein.

$$r^2 = 44 : 3^1/_7 = 14$$

$$r = \sqrt{14} = ?$$

Vergleiche den Umfang des Zimmers mit demjenigen des Kreises.

3) Welchen Durchmesser hat ein cylindrisches Litergefäss, welches 20 cm hoch ist? $r^2 \pi \,.\, 20\ (\mathrm{cm}^3) = 1000\ (\mathrm{cm}^3)$

$$r^2 = 1000 : 62{,}8 \text{ u. s. f.}$$

4) Welchen Radius hat die Kugel, welche dem Schulzimmer inhaltsgleich ist?

5) Bezeichnet G den Inhalt der Grundfläche, g denjenigen der Deckfläche, H die Höhe eines Pyramidenstumpfs, so lautet die genaue Regel für die Berechnung seines Inhalts:

$$V = \frac{H}{3}\,(G + \sqrt{Gg} + g)$$

Bei Beispiel 1) Kap. J war $G = 49\ \mathrm{dm}^2$; $g = 9\ \mathrm{dm}^2$; $H = 5$ dm.

$$V = \frac{5}{3}\,(49 + \sqrt{49 \,.\, 9} + 9)\ \mathrm{dm}^2 = \frac{5}{3} \,.\, (49 + 21 + 9)$$

$\mathrm{dm}^3 = 131^2/_3\ \mathrm{dm}^3$.

Berechne auf gleiche Weise die Inhalte der andern Pyramidenstumpfe, die betrachtet wurden.

N. Der pythagoräische Lehrsatz.

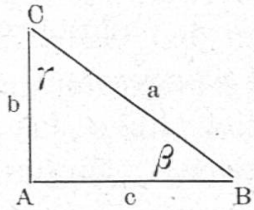
I.

Wie haben wir in Kap. B, I. Teil, die schrägen Dachflächen berechnet? Die Breite der Dachflächen wurde nicht am Dache selbst gemessen; wir haben sie der Zeichnung der Giebelflächen entnommen.

Wir wollen nun zeigen, wie man diese Breite genau durch Rechnung finden kann.

1) a) Fig. 70 stellt uns die Giebelfläche eines Pultdachs im Massstabe 1 : 200 dar. Erstes Beispiel.

Fig. 70



1 : 200

Es wurde gemessen: A B = c = 4 m; A C = b = 3 m. Der Zeichnung entnehmen wir: B C = a = 5 m; W. $\beta = 37^0$; W. $\gamma = 53^0$. Die Seite a ist also durch die Seiten b und c bestimmt.

Wir wollen zeigen, wie sich a aus b und c durch Rechnung ergibt.

Es ist $5^2 = 4^2 + 3^2 = 25$, somit: $a^2 = b^2 + c^2 = 25$
und $a = \sqrt{25} = 5$

Wie erhält man also hier a aus b und c? Man bildet die Summe der Quadrate von b und c und zieht daraus die Wurzel.

b) *Wir wollen die Beziehung $a^2 = b^2 + c^2$ begründen.*

Zu diesem Zwecke zeichnen wir zweimal das Quadrat von der Seite (b + c). Fig. 71 a; Fig. 71 b.

Fig. 71 (a)

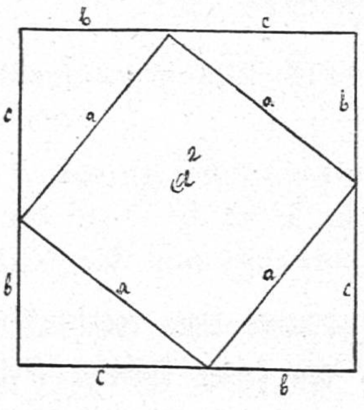
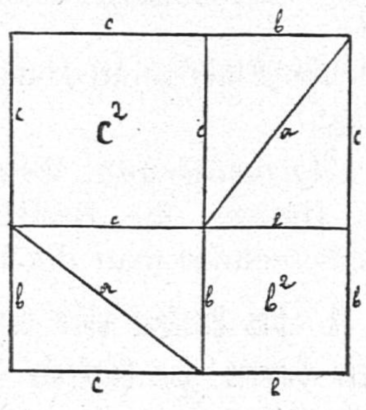


Fig. 71 (b)



In das Quadrat Fig. 71 a legen wir das rechtwinklige Dreieck A B C viermal ein; dann entsteht in der Mitte ein gleichseitiges Viereck, dessen Seite die Hypotenuse a unseres rechtw. Dreiecks ist. Jeder seiner Winkel wird durch die Dreieckswinkel β und γ zu 180^0 ergänzt; da letztere zusammen 90^0 betragen, sind die Winkel dieses Vierecks rechte; letzteres ist also ein Quadrat; sein Inhalt ist gleich a^2 (=25 m²). Fig. 71 b zeigt uns, dass das Quadrat über der Seite (b + c) auch zusammengesetzt werden kann, 1) aus dem Quadrat über der Kathete b (b^2), 2) aus dem Quadrat über der Kathete c (c^2) und aus vier Dreiecken, die dem gegebenen Dreiecke A B C kongruent sind. Denken wir uns nun von den beiden gleichen Figuren 71 a und 71 b dieselben 4 Dreiecke weggeschnitten, so bleibt links dasselbe übrig wie rechts, nämlich links das Quadrat über der Hypotenuse a, rechts die beiden Quadrate über den zwei Katheten b und c.

Es folgt also: *Das Quadrat über der Hypotenuse des rechtwinkligen Dreiecks A B C hat gleichen Inhalt wie die beiden Quadrate über den zwei Katheten zusammen.*

Kurz: $a^2 = b^2 + c^2$.

Bemerkung. Um den rechtwinkligen Grundriss eines Hauses abzustecken, bilden die Bauarbeiter mit drei Schnüren, die bezw. 3 m, 4 m, 5 m messen in jeder Ecke ein rechtw. Dreieck.

Zweites Beispiel.

2) Beim Pultdach, das wir in Karton nachgebildet haben, war b = 2 m, c = 3 m. Zeichne die Giebelfläche, sowie die beiden Quadrate über (b + c), und beweise, dass $a^2 = b^2 + c^2$.

Hier ist also $a^2 = 2^2 + 3^2 = 13$

$$a = \sqrt{13} = 3{,}60 \text{ m}.$$

Wie hat man also hier die Hypotenuse aus den Katheten berechnet?

Welchen Flächeninhalt hat die Deckfläche, wenn ihre Länge 4 m beträgt?

Verallgemeinerung. Wie wird man bei irgend einem rechtwinkligen Dreieck die Beziehung $a^2 = b^2 + c^2$ nachweisen?

Wie berechnet man die Hypotenuse aus den Katheten?

Satz 32. Das Quadrat über der Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks ist gleich der Summe der Quadrate über den beiden Katheten (Pythagoräischer Lehrsatz). Man berechnet die Hypotenuse aus den beiden Katheten, indem man die Summe ihrer Quadrate bildet und daraus die Wurzel zieht.

Übungen.

1) Die Basis einer gleichschenkligen Giebelfläche, die wir früher berechnet hatten, misst 12 m, ihre Höhe 4 m, die Länge

des Estrichs 20 m. Berechne die schrägen Dachkanten, sowie die Dachflächen.

2) Die Höhe einer ungleichseitigen Giebelfläche, die wir früher ausgemessen hatten, beträgt 4 m; die Abschnitte, welche sie auf der Basis macht, messen 5 m und 4 m. Berechne die Länge der schrägen Giebelkanten.

3) Wie haben wir den Mantel des geraden Kegels (Turms) berechnet, dessen Radius = 3 m, dessen Höhe = 8 m betrug?

Wir haben nach der Regel: Mantel = r . π . s gerechnet und die Länge der Seitenlinie (8,5 m) der Aufrisszeichnung entnommen. Bestimme die Länge der Seitenlinie durch Rechnung. Prüfe die Genauigkeit der früheren Berechnung.

4) Wir haben in Fig. 48 eine quadratische Pyramide dargestellt und berechnet, deren Grundkante 6 m, deren Höhe 10 m betrug. Aus Fig. 48a ersieht man leicht, wie man die Höhe einer Seitenfläche berechnen kann, welche zur Berechnung der Seitenflächen bekannt sein muss.

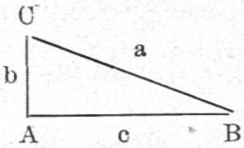
Um das Netz genau zu zeichnen, mussten wir die Länge einer Seitenkante der Zeichnung entnehmen. Benutze Fig. 48b, um sie genau zu berechnen.

Verbinde mit diesen Aufgaben eine Repetition.

II. Berechnung einer Kathete aus der Hypotenuse und der andern Kathete.

Eine Rampe von 4 m Länge ist 1,6 m hoch. Wie lang ist ihre Basis?

Fig. 72.



1 : 200

$a = 4$ m; $b = 1{,}6$ m.

Nach Satz 32 ist: $c^2 + b^2 = a^2$, oder $c^2 + 1{,}6^2 = 4^2$.

Also $\underline{c^2 = a^2 - b^2}$; $c^2 = 16 - 2{,}56 = 13{,}44$.

Somit $c = \sqrt{a^2 - b^2}$; $c = \sqrt{13{,}44} = 3{,}66$ m.

Das Quadrat über einer Kathete eines rechtwinkligen Dreiecks ist gleich dem Quadrate über der Hypotenuse weniger *dem Quadrate über der anderen Kathete. Man berechnet eine Kathete, indem man vom Quadrat der Hypotenuse das Quadrat der anderen Kathete subtrahiert und aus der Differenz die Wurzel zieht.*

Übungen.

1) Die Seitenlinie eines Trichters, den man als Kegel ansehen darf, misst 23 cm, seine grösste Weite 18 cm. Berechne die Höhe des Trichters und das Quantum Wasser, das er hält, wenn man die kleine Öffnung schliesst.

2) Zeichne den Grund- und den Aufriss eines Turmdaches mit Kegelform, dessen Grundfläche einen Durchmesser von 9 m hat, und dessen Seitenlinie 12 m misst. Berechne genau die Höhe dieses Turmdaches.

3) Eine Leiter von 7 m Länge ist so aufgestellt, dass ihr Grundriss 3,2 m misst. Wie hoch ist der höchste Punkt der Leiter?

O. Ergänzung zur Ausmessung von Grundstücken.

I. Horizontale Grundstücke.

Messet mehrere horizontale Grundstücke von unregelmässiger Form aus, indem ihr sie auf passende Weise in Dreiecke und rechtwinklige Trapeze zerlegt.

Fig. 73, Fig. 74, Fig. 75 stellen Beispiele für diese Zerlegung dar. Berechne diese gezeichneten Grundstücke.

Entnimm bei Fig. 75 die Masse aus der Zeichnung.

II. Schiefe Grundstücke.

1) Vor uns liegt eine Böschungsfläche, welche die Form eines Rechtecks hat, dessen Grundlinie horizontal läuft.

Es soll der Nutzungswert dieser Fläche à 20 Rp. per m^2 berechnet werden.

Man berechnet nicht die Böschungsfläche selbst, sondern ihren Grundriss, weil der Ertrag von diesem abhängt.

Fig. 73.

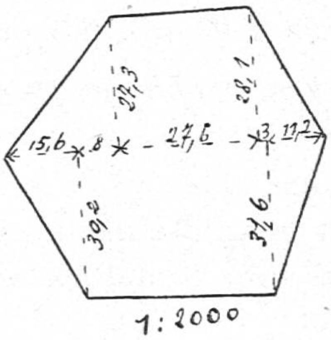
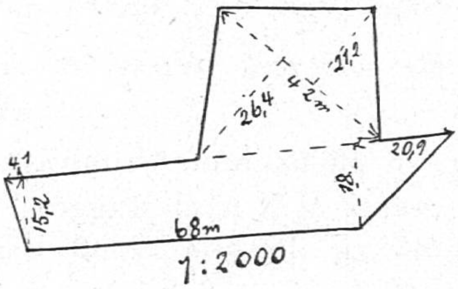


Fig. 74.



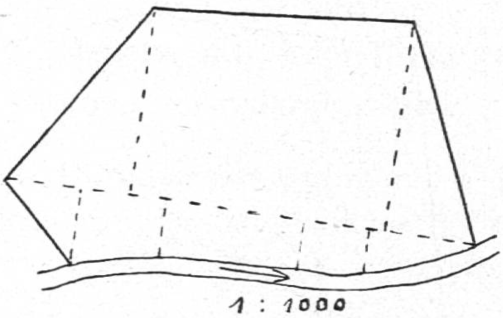
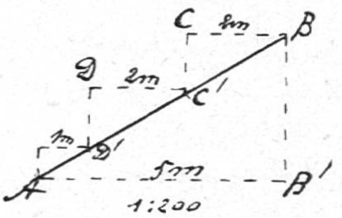


Fig. 75.

Die Grundlinie deckt sich mit ihrem Grundriss. Um den Grundriss (A B′) der schiefen Rechtecksseite A B zu messen, benutzt man zwei Latten; die eine wird beim Messen wagerecht, die andere senkrecht gehalten wie Fig. 76 zeigt.

Es ist A B′ = B C + C′ D + D′ E = 2 m + 2 m + 1 m = 5 m.

Fig. 76.

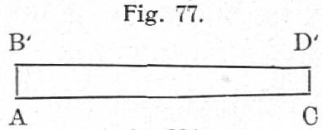


Die Länge der Böschungsfläche betrage 63 m; dann ist der Inhalt des Grundrisses = 63 . 5 m² = 315 m² und der Nutzungswert = 63 Fr.

2) *Ein trapezischer Ackerrain A B C D habe den Grundriss A B′ C D′; die Seite A B ist horizontal. Wie misst man ihn?*

Man misst A C und die Grundrisse der schiefen Seiten A B und C D auf gleiche Weise wie bei Aufgabe 1.

Fig. 77.



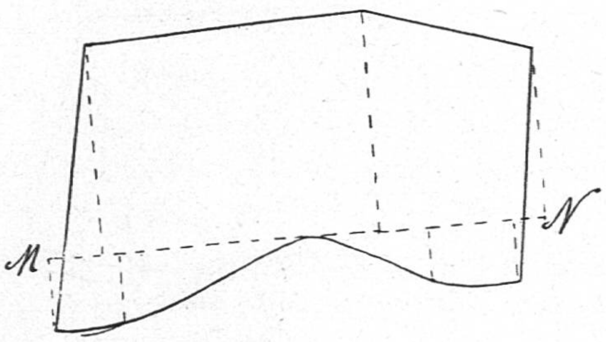
Es sei A C = 60,3 m; A C' = 6,8 m und C D' = 5,2 m. Berechne den Wert dieses Rains à 25 Rp. pro m².

3) *Es soll eine Wiese an einem Abhange ausgemessen werden.*

Fig. 78 stelle ihren Grundriss dar.

Die Achse M N wird wagerecht gewählt; dann werden die Senkrechten zu ihr abgesteckt und ihre Grundrisse gemessen.

Fig. 78.



Die beiden Dreiecke ausserhalb des Umrisses müssen in Abzug gebracht werden.

Bemerkung. Ist die Neigung eines Grundstücks nur klein, so darf man die wahre Länge der Linien nehmen.