

Résonances pour l'opérateur de DIRAC-II

Autor(en): **Parisse, Bernard**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **Helvetica Physica Acta**

Band (Jahr): **65 (1992)**

Heft 8

PDF erstellt am: **27.04.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-116524>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Résonances pour l'opérateur de Dirac-II.

Bernard PARISSE
 Université de Paris-Sud
 Bâtiment 425
 91405 ORSAY

(8. VI. 1992, revised 12. IX. 1992)

Abstract

This paper is a continuation of [8]. We study the *shape resonances* of the Dirac operator in the semi-classical limit and prove that they live exponentially near the real axis. The exponential decay is measured by the Agmon's distance between the *well* and the *sea*. If the well is ponctual and non-degenerated, we can state precisely the asymptotic behaviour of the imaginary part of the first resonance.

Résumé

Cet article est la suite de [8]. On étudie ici les *résonances de forme* de l'opérateur de Dirac en limite semi-classique et on prouve qu'elles se localisent exponentiellement près de l'axe réel. La décroissance exponentielle est mesurée à l'aide de la distance d'Agmon entre le *puits* et la *mer*. Lorsque le puits est ponctuel et non dégénéré, on peut préciser le comportement asymptotique de la partie imaginaire de la première résonance.

Table des Matières

1	Introduction.	2
2	Résonances de forme.	4
2.1	Puits, distance d'Agmon, problème modifié.	4
2.2	Hypothèses.	6
2.3	Localisation des résonances.	9

2.4	Fonctions résonnantes.	10
2.4.1	Construction des fonctions résonnantes	10
2.4.2	Estimations sur la résolvante $(z - D)^{-1}$	11
2.4.3	Estimation des fonctions résonnantes avec perte de ε	12
2.4.4	Estimation des fonctions résonnantes avec gain de ε	12
3	Cas du puits ponctuel non dégénéré.	15
3.1	Réduction au calcul d'une intégrale de surface.	16
3.2	Construction <i>BKW</i> analytique.	17
3.2.1	Construction près du puits P	17
3.2.2	Prolongement le long d'une géodésique minimale.	23
3.2.3	Passage de l'île à la mer.	25
3.3	Valeur de $\Im z$	30
A	Appendice: Singularités analytiques.	34
A.1	Ensemble de fréquences analytiques.	35
A.2	Propagation des singularités analytiques.	36
B	Fin de la preuve de la Proposition 9.	40

1 Introduction.

L'opérateur de Dirac est défini sur $C^\infty(\mathbb{R}^3; \mathbb{C}^4)$ par:

$$D(h) = h \sum_{j=1}^3 \alpha_j D_j + \alpha_4 + V(x) I_4, \quad (1)$$

où les $\alpha_{j,j \in [1,4]}$ sont des matrices carrées d'ordre 4 de trace nulle qui anticommulent:

$$\alpha_i \alpha_j + \alpha_j \alpha_i = 2\delta_{ij}, \quad (2)$$

où I_4 est la matrice identité et où $V(x)$ est le potentiel.

Dans [8, section 1], nous avons montré que sous certaines hypothèses (analyticité sur le potentiel $V(x)$ et existence d'une fonction *fuite* G), on pouvait voir l'opérateur $D(h) - z$, $z \in \mathbb{C}$, comme un opérateur pseudo-différentiel agissant sur des espaces de Sobolev à poids $H(\Lambda_{tG}, m)$ définis à l'aide de la fonction fuite G . Le symbole de $D(h) - z$ étant alors elliptique à l'infini, on en déduisait qu'au voisinage d'un réel E il n'y avait qu'un nombre fini de valeurs de z pour lesquelles l'opérateur $D(h) - z$ n'était pas inversible, ces valeurs étant les résonances.

Dans cet article, on va renforcer les hypothèses permettant de définir les résonances dans le cas général pour préciser la localisation et le comportement asymptotique (quand h tend vers 0) des résonances *de forme*.

Avant de définir les résonances de forme pour l'opérateur de Dirac, il nous faut d'abord rappeler brièvement ce qu'est une résonance de forme pour l'opérateur de Schrödinger

$$P(h) = -h^2 \Delta + V(x), \quad (3)$$

défini sur $C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$. Supposons que le potentiel $V(x)$ [voir Figure 1] vérifie:

- $V(x) \leq E$ si $x \in U$, U un compact de $\mathbb{R}^n$ (le *puits*),
- $V(x) > E$ si $x \in O - U$, O un ouvert pas forcément borné de $\mathbb{R}^n$ (l'*île*),
- $V(x) \leq E$ si $x \in \mathbb{R}^n - O$ (la *mer*).

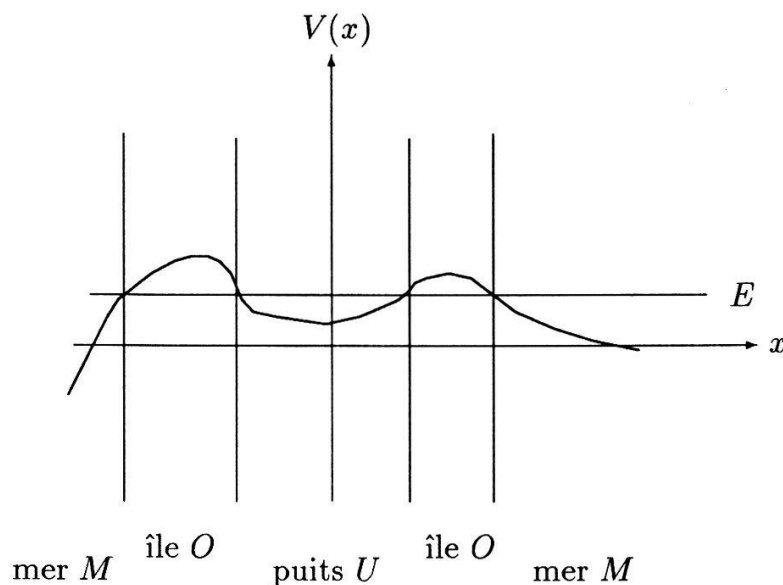


Figure 1: Puits dans une île.

Montrons maintenant heuristiquement comment de tels potentiels peuvent générer des résonances. Considérons un état quantique noté $\phi(x, t)$ (i.e. à tout instant t , $\phi(\cdot, t) \in L^2(\mathbb{R}_x^n, \mathbb{C})$) d'énergie E localisé à l'intérieur du puits U à l'instant $t = 0$. En mécanique classique, une particule d'énergie E ne peut franchir une barrière de potentiel $V(x) > E$. Mais en mécanique quantique, une particule peut franchir une telle barrière (c'est *l'effet tunnel*). Dans notre cas, on observerait que l'état ϕ se délocalise au cours du temps en fuyant vers la mer O par effet tunnel (la probabilité d'observer la particule à l'intérieur d'un compact K fixé décroît exponentiellement avec le temps). L'état $\phi(x, t)$ est proche d'une fonction résonnante u_z (au sens de la norme $L^2(K)$) vérifiant:

$$D(h)u_z(x, 0) = zu_z(x, 0)$$

L'évolution au cours du temps de la fonction résonnante est donnée par l'équation:

$$ih\partial_t u_z(x, t) = D(h)u_z(x, t),$$

donc la norme $L^2(K)$ de u_z décroît exponentiellement avec le temps:

$$|u_z(x, t)|_{L^2(K)} = e^{\frac{t\Im z}{h}} |u_z(x, 0)|_{L^2(K)}.$$

La constante de décroissance exponentielle (inverse du temps de demi-vie de l'état quantique ϕ) ne dépend que de la partie imaginaire de la résonance, d'où l'intérêt d'essayer de préciser $\Im z$ (qui doit être négative). On peut d'ailleurs montrer que la partie imaginaire des résonances est négative lorsqu'on utilise la définition microlocale de Helffer-Sjöstrand. Ce point sera explicité à la Remarque 2 (p. 7).

Dans le cas de l'opérateur de Schrödinger, B.Helffer et J.Sjöstrand ([4, section 9]) ont montré que les résonances sont exponentiellement proches des valeurs propres d'un problème de Dirichlet sur un compact K de l'île. Plus précisément, il existe une bijection b entre résonances et valeurs propres proches de E telle que:

$$b(\mu) - \mu = O_\varepsilon(e^{-\frac{2S_0 - \varepsilon}{h}}),$$

où S_0 est la distance d'Agmon entre le puits U et la mer M . On peut rendre ε aussi petit que l'on veut en choisissant le compact K proche du bord de l'île.

Pour l'opérateur de Dirac, il nous faudra préciser ce qu'on entend par "puits dans une île". Dans la section 2, on montrera alors que les résonances sont exponentiellement proches des valeurs propres d'un opérateur de Dirac "à potentiel modifié". Dans la section 3, on adaptera les techniques de [4, Section 10] pour préciser le comportement asymptotique de la partie imaginaire d'une résonance de forme dans le cas où le puits U est ponctuel et non dégénéré. En particulier pour la première résonance, on montrera que:

$$\Im z(h) = -Ch^{\frac{d-1}{2}} e^{-\frac{2S_0}{h}} (1 + O(h)),$$

- où d est un entier dépendant de la géométrie du bord de l'île (génériquement égal à 2, mais valant par exemple 0 pour un potentiel à symétrie sphérique),
- où C dépend du potentiel $V(x)$ mais pas de h ,
- et où S_0 est la distance d'Agmon du puits à la mer (la distance d'Agmon est associée à la métrique $(1 - (V(x) - E)^2)dx^2$ comme on le verra dans la section 2.1).

2 Résonances de forme.

Commençons par définir ce qu'est un puits pour l'opérateur de Dirac.

2.1 Puits, distance d'Agmon, problème modifié.

Soit $E \in \mathbb{R}$ le niveau d'énergie au voisinage duquel on souhaite étudier les propriétés spectrales de $D(h)$.

Soit π_x la projection de $T^*\mathbb{R}^3 = \mathbb{R}_x^3 \times \mathbb{R}_\xi^3$ sur $\mathbb{R}_x^3$.

Pour l'opérateur de Schrödinger de symbole $p(x, \xi) = \xi^2 + V(x)$, on définit les puits microlocaux comme les composantes connexes de la surface d'énergie E définie par:

$$\sigma_E = \{(x, \xi) / p(x, \xi) - E = 0\},$$

et on en déduit les puits en projetant σ_E sur $\mathbb{R}_x^3$ à l'aide de π_x .

Pour l'opérateur de Dirac de symbole

$$D_V(x, \xi) = \sum_{j=1}^3 \alpha_j \xi_j + \alpha_4 + V(x) \cdot I_4, \quad (4)$$

on définit de manière analogue les puits microlocaux comme les composantes connexes de:

$$\sigma_E = \{(x, \xi) / D_V(x, \xi) - E \text{ admet } 0 \text{ pour valeur propre}\}.$$

Le symbole D_V possède deux valeurs propres, chacune double:

$$p^\pm(x, \xi) = V(x) \pm \sqrt{1 + \xi^2}, \quad (5)$$

donc la surface d'énergie E possède deux composantes disjointes σ^+ et σ^- d'équations respectives $p^+ = E$ et $p^- = E$. On montre facilement que la projection sur $\mathbb{R}_x^3$ de la surface d'énergie est donnée par:

$$\{x / (V(x) - E)^2 \geq 1\}. \quad (6)$$

Pour simplifier, on supposera dans la suite que $E = 0$, quitte à modifier le potentiel $V(x)$. Les puits sont donc les composantes connexes de l'ensemble $\{x / V(x) \geq 1\} \cup \{x / V(x) \leq -1\}$.

Pour étudier les propriétés spectrales d'un opérateur de Dirac, on utilise des estimations L^2 à poids qui permettent par exemple d'établir la décroissance de fonctions propres à l'aide de la distance d'Agmon. On montre (cf [12, Proposition 2.1]) la:

Proposition 1 Soit $V(x) \in C^\infty$, soit ϕ une fonction uniformément lipschitzienne de $\mathbb{R}^3$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ et soit $u \in H^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{C}^4)$. Alors, on a:

$$\begin{aligned} h^2 \int_{\mathbb{R}^3} \left| \nabla \left(e^{\frac{\phi}{h}} u \right) \right|^2 dx + \int_{\mathbb{R}^3} \left(1 - V^2 - |\nabla \phi|^2 \right) e^{\frac{\phi}{h}} |u|^2 dx \\ = \Re \left(\int_{\mathbb{R}^3} e^{\frac{2\phi}{h}} (D_{-V}(h) D_V(h) u | u)_{\mathbb{C}^4} dx \right), \end{aligned} \quad (7)$$

où $D_{-V}(h) = h \sum_{j=1}^3 \alpha_j D_j + \alpha_4 - V(x) \cdot I_4$.

L'équation (7) conduit à associer la distance d'Agmon $d(x, y)$ à la métrique:

$$(1 - V^2(x)) dx^2. \quad (8)$$

Elle permet à Wang ([12]) de montrer des résultats analogues à ceux de [3] sur les fonctions propres et les valeurs propres d'opérateurs de Dirac à puits multiples. Néanmoins, au lieu de comparer à des problèmes de référence du type de Dirichlet, il est techniquement plus simple pour l'opérateur de Dirac de comparer à des problèmes modifiés.

"Modifier un problème" associé à un puits U_j du potentiel $V(x)$ consiste à modifier le potentiel $V(x)$ au voisinage de tous les puits U_k distincts de U_j en sorte que:

- U_j soit le seul puits du potentiel modifié $\tilde{V}$,
- l'inégalité $\tilde{V}^2 \leq V^2$ soit respectée.

(On montre sans difficultés que c'est possible).

Notons:

$$B_d(U, S) = \{x / d(U, x) < S\}, \quad (9)$$

la boule de rayon S pour la distance d'Agmon d . Si S_0 est la distance d'Agmon du puits U_j au puits U_k le plus proche, on peut s'arranger pour avoir un potentiel modifié $\tilde{V}$ qui coïncide avec V sur $B_d(U, S_0 - \eta)$, $\eta > 0$. Un autre choix de potentiel modifié ne change alors les valeurs propres que de l'ordre de:

$$e^{-\frac{2S_0 - \varepsilon(\eta)}{h}}, \quad \lim_{\eta \rightarrow 0} \varepsilon(\eta) = 0.$$

2.2 Hypothèses.

Nous sommes maintenant en mesure de donner les hypothèses sur le potentiel $V(x)$. On suppose toujours qu'on s'intéresse aux résonances proche du niveau d'énergie $E = 0$.

Nous faisons les hypothèses de [8, Section 1] qu'on rappelle brièvement:

- Il existe deux fonctions $r, R \in C^\infty(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^+)$ telles que:

1. $r \geq 1, rR \geq 1$,
- 2.

$$\forall \alpha \in \mathbb{N}, \quad \exists C_\alpha / \quad |\partial_x^\alpha r| \leq C_\alpha r R^{-\alpha}, \quad |\partial_x^\alpha R| \leq C_\alpha R^{1-\alpha},$$

3. V est analytique sur $\mathbb{R}^3$ et s'étend analytiquement au domaine:

$$D = \{x / |\Im x| \leq R(\Re x)/C\},$$

4. $|V(x)| \leq Cr(\Re x), \quad \forall x \in D$.

On note alors:

$$\tilde{r}(x, \xi) = \sqrt{r^2(x) + \xi^2},$$

qui contrôlera les dérivées en ξ des symboles.

- Il existe une fonction fuite $G(x, \xi) \in C^\infty(\mathbb{R}^6, \mathbb{R})$, impaire en ξ et telle que:

1. pour $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^3$ vérifiant $|\alpha| + |\beta| \geq 1$, il existe $C_{\alpha\beta}$ tel que:

$$|\partial_\alpha \partial_\beta G| \leq C_{\alpha\beta} \tilde{r}^{1-\alpha} R^{1-\beta},$$

2. En dehors d'un compact de $\mathbb{R}^6$, on a:

$$\begin{aligned} H_{p^+}(G)(x, \xi) &\geq r(x)/C \quad \text{si } p^+(x, \xi) = 0, \\ H_{p^-}(G)(x, \xi) &\geq r(x)/C \quad \text{si } p^-(x, \xi) = 0, \end{aligned} \tag{10}$$

Dans la suite, on notera :

$$\sigma^+ = \{(x, \xi) / p^+(x, \xi) = 0\}, \quad \sigma^- = \{(x, \xi) / p^-(x, \xi) = 0\}$$

3. $|\partial_x G(x, \xi)| \leq C(1 + |\Re \xi|)$

En rajoutant une hypothèse d'uniformité de (10) par rapport aux fonctions d'échelles $\tilde{r}$ et R (Hypothèse [8, (1.9)]), on peut alors appliquer le [8, Théorème 1.5] qui permet de définir les résonances en limite semi-classique. De plus, les espaces résonnants sont de dimension paire ([8, Théorème 2.4]).

Remarque 2 Comme indiqué en introduction, l'Hypothèse (10) entraîne que les résonances ont une partie imaginaire négative (cf [9, Théorème 1.18]). Ce résultat est également valable pour les résonances d'énergie négative, ce qui est en contradiction avec le résultat obtenu en définissant les résonances par la technique de la dilatation analytique développée par Aguilar et Combes pour l'opérateur de Schrödinger et adaptée par Seba ([10, Théorème 1]) dans le cas de l'opérateur de Dirac.

En fait, B.Helffer et A.Martinez ont montré dans [1] que les définitions du type microlocal et du type "dilatation analytique" sont compatibles lorsque l'on peut choisir comme fonction d'échelle:

$$r(x) = 1, \quad R(x) = \sqrt{1 + x^2},$$

et comme fonction fuite:

$$G(x, \xi) = x \cdot \xi.$$

Il faut donc comparer les signes des résonances définies par ces deux théories.

La dilatation analytique revient à effectuer une rotation des énergies dans le complexe ([10, figure 1]) dans le sens des aiguilles d'une montre, c'est-à-dire que le spectre essentiel positif tourne vers le demi-plan inférieur et le spectre essentiel négatif tourne vers le demi-plan supérieur. D'où le résultat:

Le produit de la partie imaginaire d'une résonance par son énergie est négatif.

Par contre le choix des signes dans (10) "tord" les énergies vers le demi-plan complexe inférieur ce qui explique que la partie imaginaire d'une résonance soit toujours négative.

Il semble d'ailleurs impossible de changer de sens et signe l'une seulement des deux inégalités de (10). On ne peut que changer les deux inégalités simultanément. En effet, lorsqu'on prouve le [8, Théorème 1.5] qui définit les résonances, on doit montrer que le symbole de l'opérateur $D(h) - z$ — défini de l'espace de Sobolev à poids $H(\Lambda_{tG}, \tilde{r})$ dans $H(\Lambda_{tG}, 1)$ — est elliptique (en-dehors d'un compact) à la fois pour des z tels que:

- $\Im z \geq \varepsilon$ (le symbole est alors globalement elliptique et $D(h) - z$ est inversible),
- $-t \leq \Im z \leq \varepsilon$ (le symbole n'est alors elliptique qu'en-dehors d'un compact et des résonances peuvent apparaître).

C'est la [8, Proposition 1.4] qui nous donne ce résultat d'ellipticité, pour des z appartenant à l'ensemble:

$$\Omega_t = \{z \in \mathbb{C} / \quad |\Re z - E| \leq \frac{1}{2C}, \quad -\frac{t}{2C} \leq \Im z \leq T\},$$

où C est une grande constante positive et T est arbitraire. En relisant la preuve de cette Proposition 1.4, on s'aperçoit alors que changer l'une seulement des inégalités de (10) obligerait à diminuer Ω_t en un ensemble:

$$\{z \in \mathbb{C} / \quad |\Re z - E| \leq \frac{1}{2C}, \quad -\frac{t}{2C} \leq \Im z \leq \frac{t}{2C}\},$$

qui ne contient plus l'ensemble $\{z / \quad \Im z \geq \varepsilon\}$ lorsque h est assez petit (rappelons que ε est fixé, alors que t est dans un intervalle du type $]0, t_0(h)[$, où $t_0(h)$ tend vers 0 lorsque h tend vers 0).

Remarquons que la théorie n'interdit pas d'avoir simultanément une "fuite" vers les puits de type $V(x) \geq E + 1$ et vers les puits du type $V(x) \leq E - 1$. Les effets de ces fuites s'additionnent et diminuent alors le temps de vie de l'état quantique. Ce qui doit se traduire par une partie imaginaire de résonance plus grande en valeur absolue (chaque type de puits apportant une contribution négative à $\Im z$). On arrive à la conclusion suivante:

Le choix de signes identiques dans (10) équivaut à dire que les contributions des deux types de puits s'additionnent.

Revenons à la comparaison avec le choix de signe de la théorie de la dilatation analytique. On souhaiterait pouvoir choisir de prendre des parties imaginaires positives pour des résonances d'énergie négative. Or dans la théorie microlocale, le choix du signe est une convention locale (valable au voisinage d'un niveau d'énergie E). Il nous suffit donc de changer de convention (c'est-à-dire changer simultanément les deux inégalités de (10)) lorsqu'on étudie des résonances d'énergie négative. Notons que dans ce cas, les deux types de puits apporteront une contribution positive à la partie imaginaire des résonances.

On rajoute les hypothèses de "puits dans une île", c'est-à-dire qu'on suppose l'existence d'un compact U inclus dans un ouvert connexe O tels que:

$$|V(x)| \geq 1 \text{ si } x \in U, \quad |V(x)| < 1 \text{ si } x \in O - U, \quad |V(x)| \geq 1 \text{ si } x \notin O.$$

On appelle O l'île, U le puits, et $M = \mathbb{R}^3 - O$ la mer.

On va renforcer l'hypothèse d'existence de fonction fuite. Notons encore:

$$p(x, \xi) = p^+ p^-(x, \xi) = V^2(x) - 1 - \xi^2.$$

On remplace l'Hypothèse (10) par:

$$H_p(G) \leq -\frac{r^2(x)}{C} \text{ si } (x, \xi) \in \sigma^+ \cap M, \quad H_p(G) \geq \frac{r^2(x)}{C} \text{ si } (x, \xi) \in \sigma^- \cap M. \quad (11)$$

On peut alors montrer comme dans [4, Proposition 9.2] la:

Proposition 3 Soit $S_0 = d(U, M)$ la distance d'Agmon du puits à la mer (cf Figure 2, p. 9). Alors $B_d(U, S_0)$ est relativement compacte.

Fixons pour la suite de cette section $\eta > 0$ assez petit. Soit:

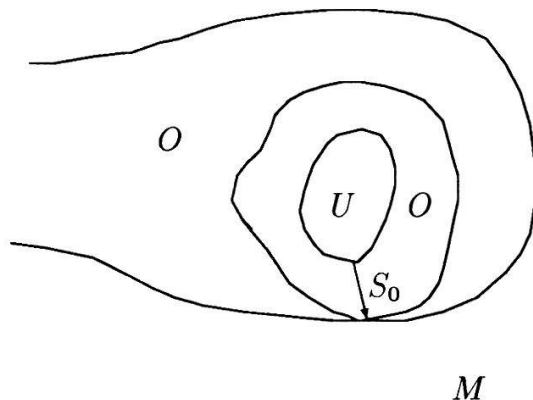
$$M_0 = \overline{B_d(U, S_0 - \eta)}. \quad (12)$$

On modifie si nécessaire la fonction fuite G de telle sorte que:

$$G(x, \xi) = 0 \quad \text{si } x \in M_0. \quad (13)$$

Soit $D^0 = D_{V^0}(h) = D_{M_0}$ un opérateur de Dirac modifié (au sens de la section 2.1) hors de M_0 de telle sorte que U soit le seul puits du potentiel modifié V^0 et plus précisément:

- qu'il existe ε tel que $|V^0(x)| \leq 1 - \varepsilon$ si $x \notin M_0$,

Figure 2: $B_d(U, S_0)$.

- que $|\partial_x^\lambda V^0(x)| \leq C_\lambda$.

On peut alors montrer que D^0 est essentiellement autoadjoint de domaine $H^1(\mathbb{R}^3, \mathcal{C}^4)$ comme opérateur non-borné de L^2 (cf [7] par exemple).

On suppose qu'il existe une famille d'intervalles compacts $I(h)$, tendant vers $\{0\}$ si h tend vers 0, et une fonction $a(h)$ vérifiant:

- Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $C_\varepsilon > 0$ tel que:

$$a(h) \geq C_\varepsilon e^{-\frac{\varepsilon}{h}}, \quad \text{Sp}(D^0) \cap \{(I(h) + [-2a(h), 2a(h)]) - I(h)\} = \emptyset, \quad (14)$$

•

$$\text{Sp}(D^0) \cap I(h) = \{\mu_1(h), \dots, \mu_m(h)\}, \quad (15)$$

chaque valeur propre étant répétée autant de fois que sa multiplicité.

Les résultats sur la fonction de comptage (cf [2, Théorème 5.8] dans le cas de l'opérateur de Schrödinger ou [6]) permettent de supposer que dans des cas "raisonnables", on peut décomposer le spectre en intervalles $I(h)$ vérifiant (14). En effet, si on note $N(\lambda, \mu, h)$ le nombre de valeurs propres de $D^0(h)$ situées dans l'intervalle $[\lambda, \mu]$, alors on montre l'estimation grossière:

$$N(\lambda, \mu, h) = O(h^{-N_0}),$$

pour N_0 assez grand et on a même une asymptotique:

$$N(\lambda, \mu, h) = C(\mu - \lambda)h^{-\frac{3}{2}} (1 + O(\sqrt{h})).$$

2.3 Localisation des résonances.

Soit $b(h)$ une fonction tendant vers 0 lorsque h tend vers 0 et telle que $b(h) \geq a(h)$. Notons:

$$\Omega(h) = \{z \in \mathcal{C} / \text{dist}(\Re z, I(h)) \leq a(h), \quad |\Im z| \leq b(h)\}. \quad (16)$$

On a le:

Théorème 4 *Il existe une bijection b entre les valeurs propres du “problème modifié” D^0 situées dans l’intervalle $I(h)$ et les résonances de l’opérateur de Dirac $D_V(h)$ situées dans le rectangle $\Omega(h)$ telle que:*

$$b(\mu_i) - \mu_i = O\left(e^{-\frac{2S_0 - \varepsilon(\eta)}{h}}\right), \quad \lim_{\eta \rightarrow 0} \varepsilon(\eta) = 0. \quad (17)$$

Ici, la bijection tient compte des multiplicités des résonances et des valeurs propres.

On prouve ce Théorème exactement comme B.Helffer et J.Sjöstrand ont montré le théorème analogue pour l’opérateur de Schrödinger ([4, Proposition 9.6]). L’idée de la preuve consiste à caractériser les résonances de $D(h)$ par l’annulation d’un déterminant d’une matrice carrée d’ordre m à l’aide d’un problème de Grushin. Cette matrice est alors proche de la matrice obtenue en considérant l’opérateur modifié D^0 (on estime l’écart à partir de résultats sur la décroissance exponentielle des noyaux de résolvantes d’opérateurs modifiés obtenus avec les inégalités L^2 à poids (7)). D’où l’on déduit une bijection entre les $\mu_i(h)$ et les résonances de $D(h)$. On peut consulter les détails de la preuve pour l’opérateur de Dirac dans [9, Section 2.3].

2.4 Fonctions résonnantes.

Dans cette section, on construit une base de fonctions résonnantes à partir des fonctions propres de D^0 , puis on estime la taille des fonctions résonnantes d’abord sur $\mathbb{R}^3$ tout entier à l’aide d’estimation sur le noyau de $(D(h) - z)^{-1}$, puis on précise ces estimations en-dehors de $B_d(U, S_0)$. Introduisons encore quelques notations commodes pour la suite:

- On dira qu’une quantité $q(h)$ est un $\tilde{O}(e^{-C/h})$ si:

$$\forall \eta > 0, \quad \exists \varepsilon(\eta) > 0, \exists C_\eta / \quad |q(h)| \leq C_\eta e^{-\frac{C}{h}} e^{\frac{\varepsilon(\eta)}{h}}, \quad \lim_{\eta \rightarrow 0} \varepsilon(\eta) = 0. \quad (18)$$

- Soit $f : \mathbb{R}^3 * \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^+$

On dira que le noyau K_P d’un opérateur P agissant de L^2 dans H^1 est un $\mathcal{O}(e^{-f/h})$ si pour tout $x_0, y_0 \in \mathbb{R}^3$, pour tout $\varepsilon_0 > 0$, il existe un voisinage W de x_0 et un voisinage V de y_0 tels que:

$$|Pu|_{H^1(W)} = |u|_{L^2(V)} \tilde{O}\left(e^{-\frac{f(x,y)}{h}} e^{\frac{\varepsilon_0}{h}}\right), \quad \text{pour } u \text{ supporté dans } V. \quad (19)$$

2.4.1 Construction des fonctions résonnantes

Soit $(\varphi_j(h))_{1 \leq j \leq m}$ une base de vecteurs propres de D^0 , donc telle que:

$$(D^0 - \mu_j)\varphi_j = 0.$$

Soit F la somme directe des espaces résonnants F_z associées aux résonances z de $D(h)$ situées dans $\Omega(h)$ et π_F la projection sur F (définie ci-dessous). Posons:

$$v_j(h, t, G, \eta) = \pi_F(\chi \varphi_j) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma (z - D)^{-1} \chi \varphi_j dz, \quad (20)$$

- où $\chi \in C_0^\infty(M_0)$ vaut 1 dans $B_d(U, S_0 - 2\eta)$
- où γ est un contour rectangulaire contenu dans $\Omega(h)$, contenant $I(h)$ et non exponentiellement proche de $I(h)$.

Dans la suite, on notera aussi $\psi_j = \chi\varphi_j$.

La dépendance de v_j par rapport aux paramètres t et G se trouve dans la projection π_F . Or, on peut montrer, en déformant la fonction fuite comme lorsqu'on voulait prouver que l'ensemble des résonances ne dépendait pas de t et G ([4, Théorème 8.5]), que:

Si $w \in C_0^\infty$, $\pi^F w$ ne dépend ni de t ni de G pour h assez petit.

Soit:

$$r_j = (D - \mu_j)\psi_j = [D, \chi]\varphi_j.$$

En regardant le support de χ et la décroissance des fonctions propres de D^0 , on a:

$$r_j = O_\varepsilon \left(e^{-\frac{d(U,x)-\varepsilon}{h}} \right) = \tilde{O} \left(e^{-\frac{S_0}{h}} \right), \quad (21)$$

et de plus r_j est supporté en dehors de $B_d(U, S_0 - 2\eta)$.

Par définition de r_j , on a:

$$(D - z)\psi_j = r_j + (\mu_j - z)\psi_j,$$

et en multipliant par $(z - \mu_j)(z - D)^{-1}$,

$$-(z - \mu_j)^{-1}\psi_j = (z - \mu_j)(z - D)^{-1}r_j - (z - D)^{-1}\psi_j,$$

d'où, en intégrant:

$$v_j - \psi_j = \pi_F \psi_j - \psi_j = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma (z - D)^{-1} (z - \mu_j)^{-1} r_j dz. \quad (22)$$

Comme r_j vérifie l'estimation (21), il nous reste à obtenir des estimations sur la résolvante $(z - D)^{-1}$ pour mieux connaître les fonctions résonnantes v_j (le comportement des fonctions propres d'un opérateur de Dirac a été étudié par Wang: [12]).

2.4.2 Estimations sur la résolvante $(z - D)^{-1}$.

Soit:

$$\tilde{d}(x, y) = \min(d(x, y), 2S_0 - d(U, x) - d(U, y)). \quad (23)$$

On montre comme dans [4, Proposition 9.8] la:

Proposition 5 Soit $\Gamma(h)$ un sous-ensemble de $\Omega(h)$ tel que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $C_\varepsilon > 0$ tel que $\text{dist}(\Gamma(h), \{\mu_1(h), \dots, \mu_m(h)\}) \geq C_\varepsilon^{-1} e^{-\varepsilon/h}$.

Alors pour $t > 0$ assez petit, il existe $h(t) > 0$ tel que pour $h \in]0, h(t)[$, $z \in \Gamma(h)$, $\varepsilon > 0$, on ait uniformément par rapport à z :

- la norme de l'opérateur $(D - z)^{-1}$ agissant de $H(\Lambda_t, 1)$ dans $H(\Lambda_t, \tilde{r})$ se majore par $C_{\varepsilon,t} e^{\varepsilon/h}$.

•

$$K_{(D-z)^{-1}}(x, y) = \mathcal{O} \left(e^{-\frac{\tilde{d}(x,y)}{h}} \right), \quad (24)$$

pour $(x, y) \in B_d(U, S_0)$.

2.4.3 Estimation des fonctions résonantes avec perte de ε .

On a le:

Théorème 6 *On a uniformément dans M_0 :*

$$v_j - \psi_j = \tilde{O} \left(e^{-\frac{2S_0 - d(x, U)}{h}} \right). \quad (25)$$

Si on note:

$$s(x) = \begin{cases} d(U, x) & \text{si } x \in B_d(U, S_0) \\ S_0 & \text{sinon,} \end{cases} \quad (26)$$

alors pour tout compact $K \subset\subset \mathbb{R}^3$ et tout $\varepsilon > 0$, on a uniformément en h :

$$v_j(x) = O \left(e^{-\frac{s(x) - \varepsilon}{h}} \right), \quad x \in K, \quad (27)$$

et de même pour les dérivées. Ici la majoration ne dépend pas de η .

Encore une fois, la preuve est semblable à celle utilisée pour l'opérateur de Schrödinger dans [4, Théorème 9.9]. Elle consiste à utiliser les estimations (24, 22) et à regarder le lieu où est supporté r_j .

On en déduit facilement le:

Corollaire 7 *Les fonctions $v_1, \dots, v_m$ forment une base de F et la matrice de l'opérateur D restreint à F dans cette base est de la forme:*

$$\text{Diag}(\mu_j) + \tilde{O} \left(e^{-\frac{2S_0}{h}} \right).$$

2.4.4 Estimation des fonctions résonnantes avec gain de ε .

Avec le Théorème 6 et le Corollaire 7, on a pour $x \in K$ compact:

$$(D - \mu_j)v_j = O \left(e^{-\frac{2S_0 + s(x) - \varepsilon(\eta)}{h}} \right),$$

et de même lorsqu'on dérive. D'où sur $K - B_d(U, S_0)$:

$$(D - \mu_j)v_j = O \left(e^{-\frac{3S_0 - \varepsilon(\eta)}{h}} \right). \quad (28)$$

En appliquant les inégalités à poids (7), et en contrôlant v_j au bord de l'ouvert $O - \overline{B_d(U, S_0)}$ à l'aide de (27), on montre facilement la:

Proposition 8 *Pour tout compact $K \subset\subset O - \overline{B_d(U, S_0)}$, il existe $\varepsilon_0 > 0$ tel que:*

$$v_j = O \left(e^{-\frac{S_0 + \varepsilon_0}{h}} \right) \quad (29)$$

uniformément sur K (et de même pour les dérivées).

Ce résultat n'est pas optimal lorsqu'on est proche d'un point du bord de l'île situé à une distance (d'Agmon) du puits supérieure à S_0 . Un tel point est dit de type 2, par opposition aux points de $\overline{B_d(U, S_0)} \cap \partial O$ qui sont dits de type 1. Mais l'hypothèse renforcée d'existence d'une fonction fuite (11) va nous permettre de montrer la:

Proposition 9 *Pour tout compact K de $\overline{O} - \overline{B_d(U, S_0)}$, il existe un voisinage Ω de K dans $\mathbb{R}^3$ et un réel $\varepsilon_0 > 0$ tels que:*

$$v_j = O\left(e^{-\frac{S_0 + \varepsilon_0}{h}}\right), \quad (30)$$

uniformément sur Ω (et de même pour les dérivées).

Preuve de la Proposition 9.

Encore une fois, on suit la preuve de B.Helffer et J.Sjöstrand ([4, p.129-132]).

- L'idée de la preuve est qu'aucune trajectoire du flot hamiltonien H_{p+} ou de H_{p-} issue d'un point de ∂O ne peut revenir au bord de l'île à cause de l'hypothèse renforcée (11). Donc une telle trajectoire ne peut atteindre un point de type 2 à partir d'un point de type 1 (ou inversement). Comme l'éloignement de ces trajectoires devrait entraîner un gain de décroissance exponentielle pour les fonctions résonnantes et comme en-dehors de $\overline{B_d(U, S_0)}$ le chemin le plus court vers le puits U en restant dans l'île est de longueur strictement plus grande que S_0 , on aura une décroissance exponentielle des fonctions résonnantes près des points de type 2 "meilleure" que S_0 .

- Justification du fait que les trajectoires du flot hamiltonien de p ne peuvent contenir qu'un point de l'île.

Soit $\gamma(s) = (x(s), \xi(s))$ une trajectoire de H_p telle que $\gamma(0) = (x_2, 0)$ où $x_2 \in \partial O$ (dans la suite x_2 sera un point de type 2 mais cela s'applique aussi à un point de type 1).

On a alors $x(s) = x(-s)$ et $\xi(s) = -\xi(-s)$. Si $x(s_0) \in \partial O$ pour un réel s_0 non nul, alors on a $x(s - s_0) = x(s + s_0)$ et en particulier $x(2s_0) = x(0)$.

La bicaractéristique γ est donc périodique de période $2s_0$ donc reste dans un compact. Ceci contredit l'hypothèse (11).

En effet, soit $]T_-, T_+[$ l'intervalle maximal de définition de γ . Si $V(x_2) = -1$ alors d'après (11) on a:

$$\gamma(s) \in \sigma^+, \quad H_p(G)(\gamma(s)) \leq -\frac{r^2}{C}.$$

Comme $\partial_s G(\gamma(s)) = H_p(G)$, on en déduit que:

$$\pm G(\gamma(s)) \leq -\frac{1}{C} r(x(s)) R(x(s)), \quad \text{pour } \pm s \geq s_0.$$

Si $V(x_2) = 1$, on a:

$$\pm G(\gamma(s)) \geq \frac{1}{C} r(x(s)) R(x(s)) \quad \text{pour } \pm s \geq s_0.$$

En particulier, on a:

$$\lim_{s \rightarrow T_{\pm V(\gamma(0))}} G(\gamma(s)) = \pm \infty.$$

- Représentons maintenant les espaces $H(\Lambda_t, \cdot)$ à l'aide d'une transformée de F.B.I. adaptée à Λ_0 (et pas à Λ_{tG}). Le poids exponentiel intervenant dans la définition des $H(\Lambda_t, 1)$ devient ([4, p.130–131]):

$$\tilde{G}_t(\alpha) = tG(\alpha) + O(t^2 \tilde{r} R).$$

Le symbole de D n'est pas elliptique si $p = 0$, donc on va faire une étude microlocale de $v = v_j$ le long d'une bicaractéristique de p issue d'un point $\gamma(0) = (x_2, 0)$, où x_2 est un point de type 2. On a $|V(x_2)| = 1$. Si par exemple $V(x_2) = 1$, alors:

$$\lim_{s \rightarrow T_-} \tilde{G}(\gamma(s)) = -\infty.$$

On rappelle que la transformée de F.B.I. Tv vérifie:

$$Tv \in L^2(\Lambda_0, e^{-t \frac{\tilde{G}(x, \xi)}{h}} dx d\xi),$$

donc Tv_j est exponentiellement petit "au voisinage de $\gamma(T_-)$ ".

Plus précisément, si on fixe $\delta > 0$, il existe s_1 tel que:

$$\tilde{G}(\gamma(-s_1)) \geq -(\delta + \varepsilon(\eta)).$$

On prend deux voisinages $\Omega_0 \subset \subset \Omega_1$ de la projection sur x de $\gamma([-s_1, 0])$. D'après (27) et comme γ ne rencontre pas de point de type 1, la fonction v est uniformément un $O_\varepsilon(e^{-(S_0 - \varepsilon)/h})$ sur Ω_1 . Soit $\chi_0 \in C_0^\infty(\Omega_1)$ une troncature valant 1 sur Ω_0 . Alors, on a:

$$\chi_0 v = O_\varepsilon\left(e^{-\frac{S_0 - \varepsilon}{h}}\right),$$

et il existe $\beta > 0$ tel que:

$$T\chi_0 v = O\left(e^{-\frac{S_0 + \beta}{h}}\right),$$

uniformément dans un voisinage de $\gamma(-s_1)$.

D'après (28), on a:

$$(D - \mu_j)\chi_0 v = [D, \chi_0]v + O\left(e^{-\frac{2S_0}{h}}\right),$$

et de plus $[D, \chi_0]$ est supporté loin de la bicaractéristique. Il faut alors appliquer un analogue du théorème de propagation des singularités analytiques le long des bicaractéristiques pour un opérateur de type principal réel (cf [11, Théorème 9.1]) à l'opérateur matriciel D . On montrera dans l'Appendice (Section B) comment on peut adapter la démonstration de [11, Théorème 9.1] à l'opérateur de Dirac.

On en conclut alors qu'il existe un réel $\varepsilon_0 > 0$ et un voisinage Ω_2 de x_2 tels que:

$$v_j = O\left(e^{-\frac{S_0 + \varepsilon_0}{h}}\right),$$

uniformément dans Ω_2 .

Si on avait eu $V(x_2) = -1$, il aurait fallu partir de la limite $s \rightarrow T_+$ et de l'inégalité:

$$\tilde{G}(\gamma(s_1)) \leq -(\varepsilon(\eta) + \alpha)$$

pour s_1 assez grand. On peut aussi changer le signe de t (renverser le temps).

Remarque 10 Si on regarde dans cette représentation les espaces $H(\Lambda_t, \cdot)$, on voit que $v \in H(\Lambda_t, \cdot)$ si Tv est exponentiellement petit le long des trajectoires entrantes de p^+ et p^- et peut être exponentiellement grand le long des trajectoires sortantes.

Comme:

$$H_p = p^+ H_{p^-} + p^- H_{p^+},$$

et comme $p = 0$ si et seulement si $p^+ = 0$ ou $p^- = 0$, on a sur σ^+ :

$$H_p = p^- H_{p^+} = -2\sqrt{1 + \xi^2} H_{p^+},$$

et sur σ^- :

$$H_p = p^+ H_{p^-} = 2\sqrt{1 + \xi^2} H_{p^-}.$$

Donc sur σ^+ , la bicaractéristique de p est celle de p^+ parcourue en sens inverse (et à une vitesse différente) et sur σ^- , la bicaractéristique de p est celle de p^- parcourue dans le même sens.

Finalement Tv est exponentiellement petit le long des trajectoires de p entrantes sur σ^- et sortantes sur σ^+ .

3 Cas du puits ponctuel non dégénéré.

Comme dans la section précédente, on s'intéresse aux valeurs propres et aux résonances proches du niveau d'énergie $E = 0$. On suppose que V est analytique sur $\mathbb{R}^3$ et que les hypothèses de la section 2 sont vérifiées. On suppose de plus que le puits U est réduit à un point P que l'on prendra pour origine de $\mathbb{R}^3$. Enfin, on suppose que le puits P est non dégénéré, c'est-à-dire que le hessien de V est non dégénéré.

Comme P est un extrémum de V , on suppose donc que $V''(P)$ est défini positif si $V(P) = -1$ et que $V''(P)$ est défini négatif si $V(P) = 1$. Dans le premier cas, il apparaît aussi des résonances pour l'opérateur de Schrödinger muni du potentiel $V(x)$, alors que le second cas n'a pas d'analogue (on peut qualifier ce cas de résonances d'antimatière). En choisissant une base dans laquelle V'' est diagonal, on peut écrire:

$$V(x) = \pm(-1 + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^3 \lambda_j^2 x_j^2) + o(x^2), \quad \pm \lambda_j > 0. \quad (31)$$

On veut appliquer le Théorème 4. On commence donc par localiser les valeurs propres d'un problème modifié. Pour cela, on dispose des résultats de Wang ([12]). Rappelons brièvement ceux qui nous intéressent ici.

- La distance d'Agmon:

$$d : x \rightarrow d(x) := \phi(x) := d(x, P)$$

est C^∞ au voisinage du puits P . On montre d'ailleurs qu'elle est analytique en appliquant les résultats de [3, section 4].

- Pour $C > 0$ donné, il existe $h_0 > 0$ tel que le spectre de l'opérateur de Dirac à un puits ponctuel non dégénéré (tel qu'en dehors d'un voisinage de P on ait $V^2(x) < 1 - \delta$, $\delta > 0$) $D_V(h)$ dans l'intervalle $[-Ch, Ch]$ soit constitué de valeurs propres

pour $h < h_0$. De plus ces valeurs propres admettent un développement asymptotique en puissances demi-entières de h et sont, modulo $O(h^{3/2})$, de la forme:

$$e_\alpha = \mu_\alpha h, \quad \text{où } \mu_\alpha = \sum_{j=1}^3 \lambda_j \left(\alpha_j + \frac{1}{2} \right), \quad \alpha \in \mathbb{N}^3. \quad (32)$$

C'est le sens du [12, Théorème 3.9]. En choisissant des intervalles $I(h)$ du type $[ah, bh]$ où a, b ne sont pas des μ_α , on vérifie alors l'Hypothèse (14).

On appelle "première valeur propre", la valeur propre correspondant à $\alpha = 0$. Il existe $C' > 0$ et $h_0 > 0$ tels que, pour $h < h_0$, cette valeur propre soit la seule valeur propre (de multiplicité deux) de l'opérateur de Dirac à un puits ponctuel non dégénéré dans l'intervalle $[-C'h, C'h]$.

Remarquons encore que si $V(P) = 1$, alors ces valeurs propres sont négatives (puisque les λ_j le sont) tandis que si $V(P) = -1$, ces valeurs propres sont positives.

- Les vecteurs propres correspondant à la première valeur propre admettent un développement asymptotique en puissance entières de h (construction *BKW* C^∞ : cf [12, Théorème 4.4]).

On peut ainsi souhaiter connaître le développement asymptotique de la première résonance, c'est-à-dire de la résonance associée à la première valeur propre d'un problème modifié. Il en existe une d'après le Théorème 4 puisqu'on peut isoler la première valeur propre du reste du spectre par un écart de l'ordre de $\inf(|\lambda_j|)h$ qui n'est pas exponentiellement petit.

On va tout d'abord montrer que le calcul de la partie imaginaire d'une résonance se ramène à évaluer une intégrale de surface prise dans la mer, au voisinage des points du bord de l'île issus d'une géodésique réalisant la distance d'Agmon S_0 du puits P à la mer M . Ensuite, on approchera cette intégrale à l'aide de développements *BKW* des fonctions résonnantes. Il faudra donc prolonger ces constructions d'un voisinage du puits P le long d'une géodésique minimale jusqu'au bord de l'île, puis traverser ce bord. Pour cela, on utilise la méthode de B.Helffer et J.Sjöstrand ([4, Section 10]) qui nécessite des constructions *BKW* analytiques.

3.1 Réduction au calcul d'une intégrale de surface.

Soit W un ouvert borné de $\mathbb{R}^3$ que l'on choisira plus loin. Pour faire apparaître la partie imaginaire d'une résonance, on part de l'identité:

$$2i\Im z(v|v) = (zv|v) - (v|zv),$$

où $(\cdot|\cdot)$ est le produit scalaire sur $L^2(W)$ et v une fonction de $L^2(W)$.

Ici, on prendra v dans l'espace résonnant associé à la résonance z , v est bien dans $L^2(W)$ puisque W est borné. On a alors:

$$2i\Im z(v|v) = (D(h)v|v)_{L^2(W)} - (v|D(h)v)_{L^2(W)}.$$

Comme $D(h) = h \sum_{j=1}^3 \alpha_j D_j + \alpha_4 + V(x).I_4$ est formellement autoadjoint, il ne va rester qu'un terme de bord. Plus précisément, supposons que ∂W ait pour équation:

$$\partial W = \{x \in \mathbb{R}^3 / \omega(x) = 0\}, \quad \omega \in C^\infty,$$

où on choisit ω sortant. Alors on applique la formule de Stokes, et on obtient:

$$2i\Im z(v|v)_{L^2(W)} = h \int \int_{\partial W} \left(\left(\sum_{j=1}^3 \alpha_j D_j \omega \right) v | v \right) \frac{dS_{\partial W}}{|\nabla \omega|}. \quad (33)$$

On cherche à estimer la partie principale de cette intégrale de bord. D'après le Théorème 4, on sait que $\Im z$ est "de l'ordre de $e^{-2S_0/h}$ ". Donc sur ∂W , la fonction résonnante v doit être de l'ordre de $e^{-S_0/h}$ sinon la contribution principale de l'intégrale s'annulera. Vu la taille des fonctions résonnantes (Proposition 6), on choisira W tel que:

$$\overline{B_d(U, S_0)} \subset W, \quad (34)$$

qui assure que sur ∂W , la fonction v n'est pas trop grande. On rajoute la condition

$$\exists \varepsilon > 0, \quad \forall x \in W, \quad 1 - V^2(x) > -\varepsilon, \quad (35)$$

qui est compatible avec (34) et signifie que W "ne s'enfonce pas trop loin dans la mer" (lorsqu'on prolongera les constructions BKW hors de l'île, on utilisera des méthodes de type analytique qui donnent des prolongements près du bord de l'île seulement).

D'après la Proposition 9, v continue de décroître exponentiellement dans $O - B_d(U, S_0)$. Donc seuls les voisinages de $\partial O \cap B_d(U, S_0)$ apporteront une contribution non négligeable devant $e^{-2S_0/h}$. Soit donc Ω_1 une réunion de voisinages de tous les points de type 1. Alors, il existe $\varepsilon_0 > 0$ tel que:

$$2i\Im z(v|v)_{L^2(W)} = h \int \int_{\partial W \cap \Omega_1} \left(\left(\sum_{j=1}^3 \alpha_j D_j \omega \right) v | v \right) \frac{dS_{\partial W}}{|\nabla \omega|} + O \left(e^{-\frac{2S_0 + \varepsilon_0}{h}} \right). \quad (36)$$

On verra plus loin que le symbole de la fonction BKW qui approche v admet une singularité au bord de l'île. On rajoute donc une hypothèse sur W :

$$\exists \delta > 0, \quad 1 - V^2(x) < -\delta, \quad x \in \partial W \cap \Omega_1. \quad (37)$$

3.2 Construction BKW analytique.

3.2.1 Construction près du puits P .

D'après [12], on sait effectuer la construction BKW C^∞ pour la première valeur propre. Mais pour passer à des constructions analytiques, il n'existe actuellement pas de méthode explicite permettant de construire les fonctions BKW pour l'opérateur de Schrödinger. La seule méthode connue est celle de [3, Section 4] et nous allons nous y ramener en effectuant une diagonalisation pseudo-différentielle par blocs 2×2 de l'opérateur de Dirac dans la classe des opd analytiques à l'aide d'un théorème de B. Helffer et J. Sjöstrand (Harper II: [5, Proposition 3.2.1]).

Comme précédemment, on s'intéresse aux propriétés spectrales près du niveau d'énergie $E = 0$. On suppose que le potentiel V est analytique sur $\mathbb{R}^3$ et a un puits ponctuel P non dégénéré. On suppose enfin qu'en-dehors d'un voisinage de P , on a l'inégalité $V^2 < 1 - \delta$ pour un réel $\delta > 0$. Dans ces conditions, il existe $C > 0$ et $h_0 > 0$ tels que, pour $h < h_0$,

le spectre de l'opérateur de Dirac $D(h)$ soit constitué de valeurs propres dans l'intervalle $[-Ch, Ch]$. Il existe une bijection b entre le spectre de $D(h)$ et l'ensemble:

$$\{e_\alpha = \mu_\alpha h\}, \quad \text{où } \mu_\alpha = \sum_{j=1}^3 \lambda_j \left(\alpha_j + \frac{1}{2}\right), \quad \alpha \in \mathbb{N}^3, \quad \text{et où } \lambda_j \text{ est défini en (31),}$$

telle que:

$$b(\mu) - \mu = O(h^{\frac{3}{2}}).$$

Fixons un triplet α et notons $e = \mu_\alpha h$. Supposons qu'il existe N_0 triplets d'entiers $\alpha_1, \dots, \alpha_{N_0}$ tels que $\mu_{\alpha_i} = \mu_\alpha$. Alors, on a le:

Théorème 11 *Il existe $\varepsilon_0 > 0$ tel que le spectre de l'opérateur $D(h)$ dans l'intervalle $[h(e - \varepsilon_0), h(e + \varepsilon_0)]$ est constitué de $2N_0$ valeurs propres (comptées avec multiplicité). Ces valeurs propres sont des réalisations de symbole analytiques semi-classiques:*

$$\mu_l(h) \sim h \sum_{k=0}^{\infty} e_{k,l} h^{\frac{k}{2}}, \quad (38)$$

i.e., pour tout $C > 0$, il existe $\varepsilon > 0$ tel que:

$$\left| \mu_l - \sum_{k=1}^{\frac{1}{Ch}} e_{k,l} h^{\frac{k}{2}} \right| = O\left(e^{-\frac{\varepsilon}{h}}\right). \quad (39)$$

Les vecteurs propres correspondants $w_l(x, h)$ sont sur un voisinage Ω du puits P des réalisations de symbole analytiques semi-classiques:

$$w_l(x, h) \sim e^{-\frac{\phi(x)}{h}} \sum_{k=0}^{\infty} w_{k,l} h^{\frac{k}{2}}, \quad (40)$$

i.e., pour tout $C > 0$, il existe $\varepsilon > 0$ tel que:

$$\left| e^{\frac{\phi(x)}{h}} \left(w_l - \sum_{k=1}^{\frac{1}{Ch}} w_{k,l} h^{\frac{k}{2}} \right) \right|_{L^2(\Omega)} = O\left(e^{-\frac{\varepsilon}{h}}\right). \quad (41)$$

Le terme "semi-classique" signifie que l'on somme sur des puissances demi-entières de h .

Si $2N$ valeurs propres admettent le même développement asymptotique que μ_1 sans lui être forcément égale, on dira que μ_1 a pour *multiplicité asymptotique* $2N$. Le [12, Théorème 3.9] montre alors que l'on peut choisir la bijection b de telle sorte qu'à μ correspondent $2N$ valeurs propres de $D(h)$ telles que:

$$b(\mu) - \mu = O(h^\infty).$$

Preuve du Théorème 11.

Dans toute la suite, on supposera pour fixer les idées que $V(P) = -1$, le cas $V(P) = 1$ se traite exactement de la même façon.

On choisit un voisinage complexe Ω_x du puits P sur lequel on a:

$$\exists \delta \in]0, 1/2[, \quad V(x) < \delta - 1.$$

1ère étape: diagonalisation pseudo-différentielle par blocs.

Commençons par rappeler quelques notations de HarperII ([5]). Soit E un espace vectoriel de dimension finie et Ω un ouvert de $\mathcal{C}_x^3 \times \mathcal{C}_\xi^3$. Notons:

$$S_h^j(\Omega, E) = \left\{ A : \begin{array}{ll}]0, h_0] & \rightarrow C_b^\infty(\overline{\Omega}, E) \\ h & \rightarrow A(., ., h) \end{array} \right\},$$

l'ensemble des applications A telles que l'application:

$$(x, \xi) \rightarrow h^j A(x, \xi, h)$$

soit uniformément bornée par rapport à h , i.e. pour tout couple $(\alpha, \beta) \in (\mathbb{N}^3)^2$, il existe une constante $C_{\alpha, \beta}$ telle que, pour tout $h \in]0, h_0]$ et $(x, \xi) \in \overline{\Omega}$, on ait:

$$h^j \left| \partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta A(x, \xi, h) \right| \leq C_{\alpha, \beta}.$$

On prendra ici $E = \mathcal{L}(\mathcal{C}^4, \mathcal{C}^4)$, l'espace vectoriel des endomorphismes de $\mathcal{C}^4$. On définit l'analogue "formel analytique" de $S_h^0(\Omega, E)$ par:

$$S_h^{0, \text{af}}(\Omega, E) = \left\{ A \in S_h^0 / \begin{array}{l} A(x, \xi, h) \sim \sum_{j \in \mathbb{N}} h^j A_j(x, \xi), \\ A_j \in S^0(\Omega, E), \\ |A_j| \leq C^{j+1} j^j \end{array} \right\}.$$

Dans toute la suite, on utilisera la quantification de Weyl des symboles et on omettra l'indice w qui apparaît dans [5, Section 3]. De même, on oublie l'indice h dans le signe de composition des symboles.

L'ensemble $S_h^{0, \text{af}}(\Omega, E)$ muni de la loi de composition " $\#$ " des symboles est alors une algèbre.

On dit aussi que $A(x, \xi) \in S_h^{0, \text{af}}(\Omega, E)$ est formellement autoadjoint si:

$$\forall (x, \xi) \in \Omega \cap \Omega^C, \quad A(\overline{x}, \overline{\xi}) = (A(x, \xi))^*, \quad \text{où } \Omega^C = \{z \in \mathcal{C}^6 / \overline{z} \in \Omega\}.$$

Enfin, on dit que $A(x, \xi)$ est formellement unitaire si:

$$(A(x, \xi))^* = A^{-1}(\overline{x}, \overline{\xi}).$$

On veut appliquer la:

Proposition 12 ([5, Proposition 3.2.1])

Soit $A \in S_h^{0, \text{af}}(\Omega, E)$ vérifiant:

•

$$A_0(x, \xi) = \begin{pmatrix} A_0^{11} & 0 \\ 0 & A_0^{22} \end{pmatrix} \tag{42}$$

•

$$\text{dist}(sp A_0^{11}, sp A_0^{22}) \geq \delta > 0 \text{ pour tout } (x, \xi) \in \Omega. \tag{43}$$

A est formellement autoadjoint. (44)

Alors, il existe $U(x, \xi, h) \in S^{0, \text{af}}(\Omega)$ inversible et formellement unitaire tel que:

$$U^{-1} \# A \# U = \begin{pmatrix} \tilde{A}^{11} & 0 \\ 0 & \tilde{A}^{22} \end{pmatrix}, \quad \tilde{A}_0^{11} = A_0^{11}, \quad \tilde{A}_0^{22} = A_0^{22}, \quad (45)$$

Au niveau des opérateurs, comme on travaille sur le réel, on a:

$$\begin{aligned} \text{Op}(U)^* &= \text{Op}(U^{-1}) + O\left(e^{-\frac{\varepsilon}{h}}\right), \\ \text{Op}(U)^{-1} \text{Op}(A) \text{Op}(U) &= \begin{pmatrix} \text{Op}(\tilde{A}^{11}) & 0 \\ 0 & \text{Op}(\tilde{A}^{22}) \end{pmatrix} + O\left(e^{-\frac{\varepsilon}{h}}\right), \end{aligned}$$

où $O(e^{-\varepsilon/h})$ signifie que le reste, en tant qu'opérateur de $L^2(\mathbb{R}^3; \mathbb{C}^4)$, est de norme plus petite que $Ce^{-\varepsilon/h}$ pour un réel $\varepsilon > 0$ (uniformément en fonction de $h \in]0, h_0]$).

Pour appliquer la Proposition 12, il nous faut déjà diagonaliser le symbole principal de $D_V(x, \xi)$. On montre facilement qu'une matrice de passage permettant de diagonaliser la matrice $D_V(x, \xi)$ est donnée par:

$$W(\xi) = \frac{\sqrt{1 + \xi^2} I_4 + \sum_{j=1}^3 \xi_j \alpha_j \alpha_4}{\sqrt{2\sqrt{1 + \xi^2}(\sqrt{1 + \xi^2} + 1)}}, \quad (46)$$

et on a:

$$W^{-1}(\xi) D_V(x, \xi) W(\xi) = \begin{pmatrix} p^+ \cdot I_2 & 0 \\ 0 & p^- \cdot I_2 \end{pmatrix}. \quad (47)$$

De plus, la matrice W est unitaire (si $\xi \in \mathbb{R}^3$). Si on choisit Ω comme le produit cartésien $\Omega_x \times \Omega_\xi$ du domaine Ω_x par le domaine Ω_ξ défini par:

$$\Omega_\xi = \{\xi \in \mathbb{C}^3 / |\Im \xi_j| < \frac{1}{2}, \quad 1 \leq j \leq 3\}, \quad (48)$$

on vérifie que U et D_V sont des éléments de $S_h^{0, \text{af}}(\Omega, E)$. En effet, si $\xi \in \Omega_\varepsilon$, alors on a $\Re(1 + \xi^2) \geq \frac{1}{4}$ donc $\sqrt{1 + \xi^2}$ est analytique et, de plus:

$$p^+(x, \xi) - p^-(x, \xi) \geq 1. \quad (49)$$

Il existe donc un symbole W formellement unitaire, tel que:

$$A = W^{-1} \# D_V(x, \xi) \# W = \begin{pmatrix} p^+ I_2 & 0 \\ 0 & p^- I_2 \end{pmatrix} + [W^{-1}, V] \# W. \quad (50)$$

Le symbole A vérifie (42, 44). De plus, l'Equation (49) entraîne (43) avec $\delta = 1$.

On peut donc appliquer la Proposition 12 et en déduire l'existence d'un opd analytique $\mathcal{U}$ de symbole dans la classe $S_h^{0, \text{af}}(\Omega)$ tel que:

$$\mathcal{U}^{-1} D(h) \mathcal{U} = P + O\left(e^{-\frac{\varepsilon_0}{h}}\right), \quad (51)$$

où l'opérateur P est donné par:

$$P = \begin{pmatrix} P^+ & 0 \\ 0 & P^- \end{pmatrix}, \quad (52)$$

l'opérateur P^+ [respectivement P^-] ayant pour symbole principal $p^+ I_2$ [$p^- I_2$].

2ème étape: étude de l'opérateur $P = \mathcal{U}^{-1} D(h) \mathcal{U}$.

On cherche maintenant des symboles analytiques formels u et E tels que:

$$(P - hE) \left(u e^{-\frac{\phi}{h}} \right) = 0. \quad (53)$$

Si on écrit $u = (u_+, u_-)$ avec $u_{\pm} \in \mathcal{C}^2$, l'Equation (53) devient:

$$\begin{cases} (P^+ - hE)(u_+ e^{-\phi/h}) = 0 \\ (P^- - hE)(u_- e^{-\phi/h}) = 0 \end{cases}. \quad (54)$$

On rappelle que l'on est au voisinage de $V(x) = -1$. Comme le symbole principal de P^- est $p_- I_2$, on en déduit que $P^- - hE$ est elliptique (pour h assez petit). Donc $u_- = 0$.

D'autre part, on a:

$$p^+(x, \xi) = p_0^+ + O(|x, \xi|^3), \quad \text{où } p_0^+(x, \xi) = \frac{\xi^2}{2} + (V''(0)x|x). \quad (55)$$

Le symbole p_0^+ est le symbole d'un opérateur de Schrödinger avec potentiel quadratique ("oscillateur harmonique"). On est alors essentiellement ramené à la situation de [3]. La seule différence réside dans la dimension (2 au lieu de 1) mais n'est pas essentielle car le symbole principal de P^+ est diagonal.

On effectue donc la transformation de FBI défini en [3, (3.11)] (c'est la transformée adaptée à la phase analytique ϕ). On note alors $\tilde{P}^+$ l'opérateur tel que:

$$\tilde{P}^+ T = T P^+, \quad (56)$$

et on se ramène à l'étude de l'opérateur $Q^+ = \lambda \tilde{P}^+$, $\lambda = h^{-1}$.

Introduisons les classes de symboles formels qui permettaient d'effectuer la construction BKW pour l'opérateur de Schrödinger. Soit $S^{m,k}(\Omega_x, \mathcal{C}^2)$ l'ensemble des symboles formels "semi-classiques" $w(x, h)$ définis sur Ω_x et dont le développement:

$$w(x, h) \sim \sum_{j \text{ entier}, s \in \mathbb{N}^3} w_{j,s} x^s h^{\frac{j}{2}}$$

ne contient que des termes tels que:

$$j \geq -m, \quad j + \frac{|s|}{2} \geq \frac{k}{2} - m.$$

Ce qui revient à dire que, en notant χ une troncature valant 1 près du puits, on a pour chaque monôme du développement de $w(x, h)$:

$$\int w_{i,s} h^{\frac{j}{2}} x^s \chi(x) e^{-\frac{\phi(x)}{h}} = O\left(h^{\frac{k}{2} - m}\right).$$

On note aussi $S_a^{m,k}$ le sous-ensemble de $S^{m,k}$ composé des symboles analytiques (au sens de (41)).

On écrit alors que:

$$Q^+ = Q_0.I_2 + Q^+ - Q_0.I_2, \quad Q_0 = \sum_{|\alpha|=|\beta|=1} x^\alpha a_{\alpha,\beta} \partial_x^\beta + a_{0,0}. \quad (57)$$

L'opérateur Q_0 conserve les espaces $S^{m,k}(\mathbb{R}^3, \mathcal{C})$ et l'opérateur $Q - Q_0.I_2$ agit de $S^{m,k}$ dans $S^{m,k+1}$. On peut donc appliquer la méthode de [3, Section 4] et on montre le:

Théorème 13 *Si E n'appartient pas au spectre de Q_0 , alors l'opérateur $Q^+ - E$ réalise une bijection de $S_a^{m,k}(\Omega_x, \mathcal{C}^2)$ dans $S_a^{m,k}(\Omega_x, \mathcal{C}^2)$.*

On suit maintenant [3, Section 3] pour chercher les développements asymptotiques (formels mais pas encore analytiques) des vecteurs propres et des valeurs propres BKW de l'opérateur $\mathcal{U}^{-1}D(h)\mathcal{U}$ et on applique ce Théorème 13. On montre ainsi, comme pour l'opérateur de Schrödinger, que les symboles formels sont en fait des symboles analytiques formels au voisinage du puits. C'est-à-dire qu'il existe $2N_0$ symboles formels analytiques (semi-classiques) $e_k(h)$ et $2N_0$ symboles analytiques $u_k(x, h)$ tels que:

$$(\mathcal{U}^{-1}D(h)\mathcal{U} - e_k(h))(u_k(x, h)e^{-\phi(x)/h}) = 0. \quad (58)$$

(Remarquons qu'il y a en fait au plus N_0 symboles e_k distincts, chacun ayant une multiplicité paire). On en déduit donc

$$(D(h) - e_k(h))(v_k(x, h)e^{-\phi(x)/h}) = 0, \quad (59)$$

où $v_k(x, h)$ est le symbole analytique formel défini par:

$$v_k(x, h)e^{-\frac{\phi(x)}{h}} = \mathcal{U}(u_k(x, h)e^{-\frac{\phi(x)}{h}}). \quad (60)$$

En prenant des réalisations de ces symboles analytiques formels (au sens de [11, Exemple 1.1]), nous avons donc des fonctions $\tilde{\mu}_l(h)$ et des vecteurs $\tilde{w}_l(x, h)$ tels que:

$$e^{\frac{\phi(x)}{h}}(D(h) - \tilde{\mu}(h)) \left(e^{-\frac{\phi(x)}{h}} \tilde{w}_l(x, h) \right) = O \left(e^{-\frac{\epsilon_0}{h}} \right).$$

Après avoir regroupé les valeurs propres ayant le même développement asymptotique qu'un μ fixé, on considère l'espace propre correspondant $\mathcal{E}$ et l'espace $\mathcal{E}'$ engendré par les $\tilde{w}_l(x, h)$ correspondant à μ . On applique alors la [3, Proposition 2.5] et on en déduit que:

$$\vec{d}(\mathcal{E}, \mathcal{E}') = O \left(e^{-\frac{\epsilon_0}{h}} \right),$$

ce qui entraîne alors le Théorème 11.

3.2.2 Prolongement le long d'une géodésique minimale.

Soit γ une géodésique (pour la métrique d'Agmon) issue du puits P et contenue dans l'île O . On va prolonger le symbole analytique formel dans un voisinage Ω de γ . On cherche donc à résoudre l'équation:

$$e^{\frac{\phi(x)}{h}}(D(h) - hE(h))(w(x, h)e^{-\frac{\phi(x)}{h}}) = 0, \quad (61)$$

où $hE(h)$ est un des symboles formels du Théorème 11 dont on écrira le développement sous la forme:

$$hE(h) \sim \sum_{n=1}^{\infty} e_n h^n, \quad (62)$$

la somme portant sur des $n \in \frac{1}{2}\mathbb{N}$.

On va d'abord chercher quelles sont les équations que doivent vérifier les éléments du développement de $w(x, h)$ et on en déduira que le symbole $w(x, h)$ peut être prolongé en un symbole formel (mais pas forcément analytique). Ensuite on montrera que ce symbole formel est solution d'une équation de transport dont le symbole principal est diagonal et on en déduira, à l'aide d'un résultat de l'Appendice, que le symbole formel est bien analytique.

On remplace donc $w(x, h)$ par $\sum_{n=0}^{\infty} w_n(x)h^n$ dans l'Equation (61) ce qui donne¹:

$$(P_V + h(Q - E(h))) \sum_{n=0}^{\infty} w_n h^n = O(h^\infty), \quad (63)$$

$$P_V = i \sum_{j=1}^3 \alpha_j \phi_j + \alpha_4 + V.I_4, \quad Q = \sum_{j=1}^3 \alpha_j D_j, \quad \phi_j = \partial_j \phi. \quad (64)$$

Pour tout x , la matrice P_V admet deux valeurs propres doubles

$$V(x) \pm \sqrt{1 - |\nabla \phi|^2}$$

dont l'une est nulle en vertu de l'équation éiconale. Il est donc naturel de décomposer $\mathcal{C}^4$ en tout point $x \in \mathbb{R}^3$ en somme directe orthogonale de deux espaces vectoriels de dimension 2 dont l'un est $\text{Ker } P_V(x)$. Mieux, on décompose le fibré trivial $\mathcal{C}^4$ au-dessus d'un ouvert Ω en une somme orthogonale de deux fibrés de rang 2 dont l'un est $\text{Ker } P_V$. Ces fibrés sont analytiques. En fait on montre que:

$$\mathcal{C}_\Omega^4 = \text{Ker } P_V \perp \text{Ker } \overline{P_{-V}}, \quad \overline{P_{-V}} = -i \sum_{j=1}^3 \alpha_j \phi_j + \alpha_4 - V.I_4. \quad (65)$$

Utilisant (65), on écrit $w_j = u_j + v_j$, où $u_j \in \text{Ker } P_V$ et où $v_j \in \text{Ker } \overline{P_{-V}}$.

On décompose alors (63) en puissances de h , et on obtient pour les puissances $m \geq 1$ demi-entières:

$$P_V v_m + Q(u_{m-1} + v_{m-1}) = \sum_{n=1}^m e_n (u_{m-n} + v_{m-n}), \quad (66)$$

où la somme porte sur des $n \in \frac{1}{2}\mathbb{N}$.

¹On somme toujours sur des $n \in \frac{1}{2}\mathbb{N}$

A ce rang, les inconnues sont u_{m-1} et v_m . Comme $v_m \in \text{Ker } \overline{P_{-V}}$, on en déduit que:

$$P_V v_m = 2\alpha_4 v_m,$$

d'où l'on tire v_m en fonction de u_{m-1} :

$$v_m = \frac{1}{2}\alpha_4 \left(\sum_{n=1}^m e_n(u_{m-n} + v_{m-n}) - Q(u_{m-1} + v_{m-1}) \right), \quad v_0 = v_{1/2} = 0. \quad (67)$$

Le calcul de u_{m-1} s'effectue en écrivant que v_m doit être une section du fibré $\text{Ker } \overline{P_{-V}}$:

$$P_{-V} \left(\sum_{n=1}^m e_n(u_{m-n} + v_{m-n}) - Q(u_{m-1} + v_{m-1}) \right) = 0. \quad (68)$$

Cette équation admettra une solution u_{m-1} dans $\text{Ker } P_V$ car $P_V P_{-V} = 0$. On peut s'en convaincre en exhibant une base de $\text{Ker } P_V$ et en écrivant le système différentiel 2×2 vérifié par les deux coordonnées de u_{m-1} .

Grâce à la relation:

$$P_{-V} Q + Q P_V = \sum_{j=1}^3 \alpha_j D_j V + 2 \sum_{j=1}^3 \phi_j \partial_j + \Delta \phi, \quad (69)$$

l'Equation (68) est équivalente² à:

$$\begin{aligned} \left(-2V e_1 - \sum_{j=1}^3 \alpha_j D_j V - 2 \sum_{j=1}^3 \phi_j \partial_j - \Delta \phi \right) u_{m-1} = \\ 2V \sum_{n=1}^{m-1} e_n u_{m-n} + P_{-V} \left(\sum_{n=1}^{m-1} e_n v_{m-n} - Q v_{m-1} \right) \end{aligned} \quad (70)$$

Paramétrons la géodésique γ à l'aide de la distance euclidienne. La partie différentielle de l'Equation (70) devient le long de la géodésique γ :

$$\sum_{j=1}^3 \phi_j \partial_j = |\nabla \phi| \partial_s. \quad (71)$$

Comme $|\nabla \phi| = \sqrt{1 - V^2}$ en vertu de l'équation éiconale, le coefficient de ∂_s ne s'annule pas sur $O - \{P\}$. On peut donc prolonger u_{m-1} le long de toute géodésique issue du puits P à l'aide de (70, 71). Ce prolongement est unique.

Remarquons encore pour la suite que la première équation de transport s'écrit:

$$\left(-2V e_1 - \sum_{j=1}^3 \alpha_j D_j V - \Delta \phi - 2\sqrt{1 - V^2} \partial_s \right) u_0(x(s)) = 0, \quad w_0(x) = u_0(x). \quad (72)$$

Notons qu'en regardant (70, $m = 1$) au voisinage du puits P , on peut déterminer e_1 . Lorsque e_1 est "simple", c'est-à-dire qu'il n'existe qu'un triplet $(n_1, n_2, n_3) \in \mathbb{N}^3$ tel que:

$$e_1 = -\frac{1}{V(P)} \left(\frac{\Delta \phi(P)}{2} + \sum_{j=1}^3 n_j \lambda_j \right), \quad \text{où les } \lambda_j \text{ sont définis en (31),} \quad (73)$$

²On rappelle que $u_{m-1} \in \text{Ker } P_V$.

alors les équations de transport (70) donnent un algorithme de construction du symbole $w(x, h)$.

Ainsi, on peut prolonger le symbole BKW $w(x, h)$ au voisinage de γ . Le prolongement est unique. On obtient bien sûr un symbole formel qui n'est pas forcément analytique.

Soit:

$$P = (D_{-V} + hE(h))(D_V - hE(h)) = -\Delta + 1 - (V - hE(h))^2 + h \sum_{j=1}^3 \alpha_j D_j V. \quad (74)$$

On a au niveau des symboles formels analytiques dans un voisinage du puits P :

$$e^{\frac{\phi(x)}{h}} P(w e^{-\frac{\phi(x)}{h}}) = 0.$$

On observe alors que P est un opérateur différentiel de symbole analytique et de symbole principal diagonal $p.I_4$ où p est le symbole d'un opérateur de Schrödinger avec comme potentiel $1 - V^2$.

Par définition, une géodésique minimale pour la métrique d'Agmon de l'opérateur de Dirac avec potentiel V est une géodésique pour la métrique d'Agmon pour l'opérateur de Schrödinger avec potentiel $1 - V^2$.

Au voisinage Ω de γ , on peut donc appliquer le Théorème 23 de l'Appendice qui permet d'affirmer l'existence d'un symbole analytique formel $\tilde{w}(x, h)$ tel que sur Ω :

$$e^{\frac{\phi(x)}{h}} P(\tilde{w} e^{-\frac{\phi(x)}{h}}) = 0.$$

Mais on vient de montrer que le symbole w s'étend en un symbole formel w' qui vérifie la même équation au sens des symboles formels. D'autre part, le prolongement par les équations de transport pour l'opérateur P est aussi unique. Donc on a forcément $\tilde{w} = w'$ sur Ω . On en conclut ainsi que w' est analytique.

A l'aide des inégalités à poids (7), on montre comme dans [3, preuve de (5.43)], que l'on peut propager l'estimation (41) du Théorème 11 à un voisinage encore noté Ω de la géodésique γ .

3.2.3 Passage de l'île à la mer.

On s'intéresse au prolongement des solutions BKW à l'extérieur de l'île près d'un point Q de type 1 (réalisant le minimum de la distance puits-mer). La méthode de prolongement est identique à celle utilisée pour l'opérateur de Schrödinger dans [4, Section 10], on va donc juste rappeler les résultats sans démonstrations et fixer les notations utiles pour la suite (les énoncés sont suivis de la référence des énoncés correspondants de [4]). Dans cette section, on notera parfois $d(x)$ la phase $\phi(x)$ et même $f(x) + S_0 = d(x) = \phi(x)$.

Soit donc γ une géodésique allant de P à Q que l'on paramètre par $\gamma(-\infty) = P, \gamma(0) = Q$. Soit Λ la variété des $(x, \nabla d(x))$ pour x dans un voisinage de $\gamma([-\infty, 0])$. De l'équation éiconale, on déduit:

$$\Lambda \subset q^{-1}\{0\}, \quad \text{où } q(x, \xi) = \xi^2 - (1 - V^2). \quad (75)$$

On notera encore $\tilde{\gamma}(s) = (\gamma(s), \nabla d(\gamma(s)))$ l'élément de Λ de projection $\gamma(s)$.

La variété Λ est aussi la variété stable sortante associée au flot hamiltonien H_q de q dont les courbes intégrales sont données par:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \partial_\xi q(x(t), \xi(t)) = 2\xi(t) \\ \frac{d\xi}{dt} = \partial_x q(x(t), \xi(t)) \end{cases} \quad (76)$$

Or H_q ne s'annule pas au voisinage de Q en vertu de l'hypothèse de fonction fuite renforcée (11). Dans un voisinage ouvert de $\tilde{\gamma}([-\infty, 0])$, on peut donc prolonger Λ en une variété H_q -invariante fermée contenue dans $q^{-1}\{0\}$. Bien sûr, on ne peut pas paramétrer Λ par sa première composante au voisinage de $\tilde{\gamma}(0) = (Q, 0)$. En effet, si π désigne la projection sur $\mathbb{R}_x^3$, alors $\pi(\Lambda) \subset \overline{O}$ et comme $Q \in \partial O$, $d\pi$ ne peut être bijectif en $(Q, 0)$.

Soit H l'hypersurface de Λ où la projection π sur $\mathbb{R}_x^3$ est singulière et

$$C = \pi(H)$$

la "caustique".

En $(Q, 0)$, comme $\frac{dx}{dt} = 2\xi(t) = 0$, on a:

$$H_q(Q, 0) \subset d\pi(Q, 0).$$

En fait, on peut montrer que $\text{Ker } d\pi(Q) = \text{Vect } H_q(Q, 0)$. Comme $H_q(Q, 0)$ est transverse à H , on en déduit que C est une hypersurface analytique de $\mathbb{R}_x^3$, contenue dans $\overline{O}$ et tangente à ∂O au point Q .

Si on choisit le système de coordonnées de telle sorte que $T_Q(\partial O)$ ait une équation de la forme $x_3 = 0$ (avec $x = (x', x_3)$), alors:

$$1 - V^2(x) = -Cx_3 + W(x), \quad W(x) = O(x^2),$$

avec $C > 0$ si on choisit judicieusement le sens de l'axe des x_3 . Alors,

$$H_q(Q, 0) = -C\partial_{\xi_3}.$$

On peut donc paramétrer la variété Λ par (x', ξ_3) près de Q . En fait, il existe une fonction analytique g telle que:

$$\begin{cases} x_3 = \partial_{\xi_3} g(x', \xi_3) \\ \xi' = \partial_{x'} g(x', \xi_3) \end{cases},$$

avec $g(0) = dg(0) = 0$. L'hypersurface H a pour équation $\partial_{\xi_3}^2 g = 0$.

En utilisant l'équation éiconale et sa dérivée par rapport à ξ_3 , on peut montrer que l'équation de H se met sous la forme:

$$\xi_3 = \xi_3^c(x'), \quad \xi_3^c(x') = O(x'^2),$$

où ξ_3 est une fonction analytique.

Comme $\Lambda = (x, \nabla d(x))$ près de $\tilde{\gamma}$, on a:

$$f(x) = d(x) - S_0 = \text{v.c.}_{\xi_3} (x_3 \xi_3 + g(x', \xi_3)), \quad (77)$$

si on choisit bien le point critique. Le calcul des points critiques donne alors:

$$\xi_3 = \xi_3^c \pm \sqrt{-K(x_3 + b(x'))}, \quad b(x') = O(x'^2), \quad K > 0. \quad (78)$$

Comme $f(\gamma(s))$ croît en même temps que $x_3(\gamma(s))$, il faut alors choisir le signe "+". On obtient finalement:

$$f(x) = a(x') + x_3 \xi_3^c(x') + G(x, -\sqrt{x_3 + b(x')}), \quad (79)$$

où G est analytique et où $G(x, s) = O(s^3)$. L'Equation (79) nous permet de prolonger f au domaine $x_3 + b(x') > 0$ de deux façons suivant le choix de la branche de la racine carrée (qui équivaut au choix du point critique):

$$f(x) = f_1(x) \pm i f_2(x), \quad f_i \in \mathbb{R}. \quad (80)$$

On peut alors montrer que $f_i \geq 0$ en-dehors de l'île O et que f_1 est nul uniquement pour les points issus des points de type 1 en suivant les courbes intégrales du flot hamiltonien de $q(x, i\xi)$. Ces points sont aussi les points tels qu'il existe $t \leq 0$ vérifiant:

$$\exp(t \nabla f_2(x)) \in \{y \in C / f(y) = 0\}.$$

Soit

$$\Gamma = C \cap \partial O.$$

Génériquement, on a $\Gamma = \{Q\}$ alors que pour un potentiel à symétrie sphérique, on a au contraire $\Gamma = \partial O$.

B.Helffer et J.Sjöstrand montrent dans [4, Remarque 10.3] la:

Remarque 14 *Il y a équivalence entre:*

- C a un contact d'ordre 2 exactement avec ∂O le long de Γ , i.e.

$$1 - V|_C^2(x) = \text{dist}(x, \Gamma)^2, \quad (81)$$

où " $1 - V|_C^2$ " désigne la restriction de $1 - V^2$ à C .

- $\tilde{f} = f|_C$ s'annule à l'ordre 2 exactement sur Γ , i.e.

$$\tilde{f}(x) = \text{dist}(x, \Gamma)^2. \quad (82)$$

Dans ce cas, l'ensemble G des x tels que $f_1(x) = 0$ est une sous-variété analytique de $\mathbb{R}^3$ vérifiant:

$$\text{codim}_{\mathbb{R}^3} G = \text{codim}_C \Gamma, \quad (83)$$

(et vaut 2 dans les cas génériques). De plus, on a:

$$f_1(x) \sim \text{dist}(x, G)^2 \text{ uniformément dans } x_3 + b(x') \geq 0. \quad (84)$$

Il nous faut encore prolonger le symbole $w(x, h)$. L'idée consiste à "changer de représentation" près de la caustique comme précédemment. On peut alors prolonger le symbole analytique $a(x', \xi_3, h)$ correspondant à $w(x, h)$ en résolvant les équations de transport induites le long du prolongement de $\tilde{\gamma}$. L'analyticité permet alors de construire un prolongement de $w(x, h)$ à l'extérieur de l'île à partir de la bijection entre w et a .

Soit $a(x', \xi_3, h)$ un symbole analytique formel semi-classique. On montre que pour un contour $\zeta(x) \subset \mathcal{C}^3$ bien choisi, la fonction:

$$u(x, h) = I(a)(x, h) = \frac{1}{\sqrt{h}} \int_{\zeta(x)} a(x', \xi_3, h) e^{-\frac{x_3 \xi_3 + g(x', \xi_3)}{h}} d\xi_3, \quad (85)$$

est au voisinage de tout point situé dans la zone $x_3 + b(x') < 0$ (du même côté que P de la caustique C) de la forme:

$$u(x, h) \sim \tilde{a}(x, h) e^{-\frac{f(x)}{h}},$$

où $\tilde{a}$ est un symbole analytique formel semi-classique. La correspondance $a \rightarrow \tilde{a}$ est une bijection.

Donc un symbole *BKW* pourra se mettre sous la forme $I(a)$ dans l'île au voisinage de Q . Il faut maintenant "faire passer $D(h)$ sous l'intégrale $I(a)$ " pour obtenir l'équation de transport sur a . On remarque que la [4, Proposition 10.5] s'applique aussi à l'opérateur $D(h)$, la partie délicate de la transformation était en effet le passage du potentiel $V(x)$ sous l'intégrale:

Proposition 15 ([4, Théorème 10.5])

Il existe un voisinage U de Q et un réel $\varepsilon_1 > 0$ tels que:

$$D(h)(I(a)(\cdot, h)) - \frac{1}{\sqrt{h}} \int_{\zeta(x)} e^{-\frac{x_3 \xi_3}{h}} \tilde{D}(x', \xi_3, h D_{x'}, h \partial_{\xi_3}, h) (e^{-\frac{g}{h}} a) d\xi_3 = O\left(e^{-\frac{\Re f(x) + \varepsilon_1}{h}}\right),$$

uniformément pour $x \in U$, avec:

$$\tilde{D} = h \sum_{j=1}^2 \alpha_j D_j + \alpha_3 \xi_3 + V(x', h \partial_{\xi_3}).$$

(Dans cette dernière expression, il faudrait remplacer les matrices canoniques α_j par des combinaisons linéaires de ces matrices pour tenir compte du changement de coordonnées $x \rightarrow (x', x_3)$).

On suppose donc que $\tilde{a} e^{-f/h}$ est une solution *BKW* associée à une valeur propre μ dans un voisinage de la géodésique γ allant de P vers Q . Puisque la correspondance $a \rightarrow \tilde{a}$ est bijective, on sait que près de la projection sur (x', ξ_3) de $\tilde{\gamma}(s)$, $s < 0$, on a:

$$e^{\frac{g(x', \xi_3)}{h}} \left((\tilde{D}(h) - hE(h)) a e^{-\frac{g}{h}} \right) = O(e^{-\frac{\delta}{h}}), \quad \delta > 0. \quad (86)$$

L'Equation (86) entraîne des équations de transport pour a qui font intervenir un opérateur de transport dont la partie différentielle est un champ de vecteur dont la projection de $\tilde{\gamma}(s)$, $|s| \leq \varepsilon$ est une courbe intégrale. On peut ainsi prolonger a à tout un voisinage de la projection de la géodésique en conservant l'Equation (86).

On peut donc définir $I(a)(x, h)$ dans tout un voisinage du point Q , et particulièrement à l'extérieur de l'île.

Soit $2N$ la multiplicité asymptotique de la valeur propre μ . On a finalement la:

Proposition 16 ([4, Théorème 10.9])

Il existe un voisinage $\tilde{\Omega}$ de $\gamma([-\infty, 0])$, il existe des fonctions $u_1, \dots, u_{2N} \in C^\infty(\tilde{\Omega})$ et des symboles analytiques $a_1, \dots, a_{2N}$:

$$a_j = \sum_{-\infty < \nu \leq 2m_j} a_{j,\nu}(x) h^{-\frac{\nu}{2}},$$

définis dans $\tilde{\Omega} - C$ qui prolongent les constructions BKW le long de la géodésique γ . Il existe alors un réel $\varepsilon_2 > 0$ tel que:

- Sur tout compact de $\tilde{\Omega} - C$, $e^{(S_0 + \Re f)/h} u_j$ est une réalisation de $h^{-3/4} a_j$.
- $h^{\frac{3}{4} + \frac{1}{2}} u_j = O\left(e^{-\frac{S_0 + \Re f}{h}}\right)$,
- $e^{\frac{\varepsilon_2}{h}} (D(h) - \mu_j) u_j = O\left(e^{-\frac{S_0 + \Re f}{h}}\right)$ uniformément dans $\tilde{\Omega}$;

Remarque 17 Si on revient à la forme $I(a)$ de $\tilde{a}e^{-f/h}$, on s'aperçoit en appliquant un théorème de la phase stationnaire que:

$$\psi(x) = \lim_{y \rightarrow x \in C} \sqrt{1 - V^2(y)} |\tilde{a}|^2(y), \quad (87)$$

existe et n'est pas identiquement nul.

En faisant le produit scalaire de l'Equation de transport (72) avec $u_0(x(s))$, on trouve:

$$-(2Ve_1 + \Delta\phi)(u_0|u_0) = \left(\sum_{j=1}^3 \alpha_j D_j V u_0|u_0\right) + 2\sqrt{1 - V^2}(\partial_s u_0|u_0).$$

Comme $\sum_{j=1}^3 \alpha_j D_j V$ est antihermitienne, et comme $\partial_s(u_0|u_0) = 2(\partial_s u_0|u_0)$, on peut même réécrire $\psi(x)$ sous la forme:

$$\psi(x) = |\tilde{a}|^2(0) \lim_{y \rightarrow x} \sqrt{1 - V^2(y)} e^{-\int_0^t \frac{2V\varepsilon_1 + \Delta\phi}{\sqrt{1 - V^2}}(\gamma(s)) ds}, \quad (88)$$

où l'on paramètre la géodésique à l'aide de la distance euclidienne de telle sorte que $\gamma(t) = y$.

Posons encore sur $\tilde{\Omega} \cap O$:

$$\varphi_j = h^{-\frac{3}{4}} a_j(x, h) e^{-\frac{d(x)}{h}} \quad (89)$$

et, comme dans la section 2,

$$v_j = \pi_F(\chi\varphi_j). \quad (90)$$

On note ici F l'espace résonnant associé aux $2N$ résonances exponentiellement proches de μ , et où χ est une troncature.

Comme dans [4, Théorème 10.10], si on près d'un point x_2 de type 1 tel que $V(x_2) = -1$, alors le choix du signe dans (80) est imposé par l'appartenance de v à $H(\Lambda_{tG}, m)$. Comme on est alors dans la situation analogue à celle de l'opérateur de Schrödinger, on peut montrer qu'il faut choisir le signe moins:

$$f = f_1 - if_2.$$

Si $V(x_2) = 1$, on doit prendre au contraire $f = f_1 + if_2$. Alors les v_j forment une base de F et l'écart entre fonction résonnante et fonctions BKW prolongées est estimé par le:

Théorème 18 ([4, Théorème 10.10])

Quitte à diminuer $\tilde{\Omega}$ autour de $\gamma([-\infty, 0])$, il existe un réel $\varepsilon_3 > 0$ tel que:

$$u_j - v_j = O(1)e^{-\frac{s(x)+\varepsilon_2}{h}} \text{ uniformément sur } \tilde{\Omega}. \quad (91)$$

Ici, on a noté $s(x) = d(x)$ si $x \in B_d(P, S_0)$ et $s(x) = S_0$ sinon.

3.3 Valeur de $\Im z$.

On se place maintenant près d'une valeur propre μ de multiplicité asymptotique $2N$ (au sens de la section 3.2). Pour N_2 assez grand, on sait alors que l'intervalle $I(h) = [\mu - h^{N_2}, \mu + h^{N_2}]$ contient exactement $2N$ valeurs propres et les hypothèses (14, 15) de la section 2.2 sont vérifiées en prenant $a(h) = h^{N_2}$. Nous avons donc $2N$ résonances³ exponentiellement proches de μ . En particulier pour la première résonance, on a $N = 1$ et on peut prendre $N_2 = 2$. On considère l'une de ces $2N$ résonances et une fonction résonante v associée. On veut exploiter l'équation (36).

Nous allons maintenant remplacer la fonction résonnante v dans (36) par son approximation *BKW* de la Section 3.2.

D'après le Théorème 18, on peut, modulo une erreur d'ordre $O(e^{-(2S_0+\varepsilon)/h})$, remplacer dans Ω_1 la fonction v par une combinaison linéaire de fonctions *BKW* de la forme:

$$\sum_{j=1}^{2N} \eta_j h^{-3/4} \sum_{\nu=-\infty}^{2m_j} a_{j,\nu}(x) h^{-\nu/2} e^{-\frac{f(x)+S_0}{h}}, \quad (92)$$

- $|\eta| = 1$,
- $a_{j,2m_j}$ est normalisé, c'est-à-dire que si $\mathcal{V}$ est un voisinage du puits P :

$$\left| h^{-3/4} \sum_{\nu=-\infty}^{2m_j} a_{j,\nu}(x) h^{-\nu/2} e^{-\frac{d(x)}{h}} \right|_{L^2(\mathcal{V})} = 1 + O(h), \quad (93)$$

- $f(x) + S_0$ est le prolongement de la phase de la forme:

$$f(x) + S_0 = f_1(x) \pm i f_2(x) + S_0,$$

où $f_i \in \mathbb{R}^+$ et où on choisit le même signe que $V(Q)$.

L'Equation (36) devient:

$$(1 + O(h))\Im z = \frac{h}{2i} \int \int_{\partial W \cap \Omega_1} \left(\sum_{j=1}^3 \alpha_j D_j \omega v |v \right) \frac{dS_{\partial W}}{|\nabla \omega|} \quad (94)$$

On en déduit le résultat de majoration de la partie imaginaire des résonances:

³On compte les multiplicités. En fait, il y a au plus N résonances distinctes.

Théorème 19 *Les $2N$ résonances exponentiellement proches de μ vérifient:*

$$\exists C_0 > 0, \quad 0 \leq -\Im z(h) \leq C_0 h^{-1/2-2\max(m_j)} e^{-2\frac{S_0}{h}}, \quad (95)$$

où la définition des $m_{j,j \in [1,2N]}$ a été donnée à la Proposition 16.

Notons encore qu'en revenant à l'équation (70, $m = 1$), on obtient une majoration explicite des m_j par e_1 du type:

$$\max(m_j) \leq -\frac{e_1 - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^3 \lambda_j}{2V(P) \inf(|\lambda_j|)}.$$

On montre aussi que la partie imaginaire des résonances admet un développement asymptotique:

Théorème 20 *Il existe $2N$ réalisations $f_l(h)$ de symboles formels analytiques tels que:*

$$-\Im z_l(h) = f_l(h) e^{-\frac{2S_0}{h}}, \quad (96)$$

où les $z_l(h)$ sont les $2N$ résonances exponentiellement proches de μ .

On s'intéresse maintenant plus précisément à la première résonance mais le développement ultérieur des calculs s'applique aux autres résonances. Pour la première valeur propre, on sait que $N = 1, m_1 = m_2 = 0$. On suppose de plus qu'au sens de la Remarque 14:

$$\partial O \text{ a un contact d'ordre 2 exactement avec } C \text{ le long de } \Gamma \quad (97)$$

(Ici Γ désigne l'intersection de l'ensemble des points de type 1 avec la caustique C).

On va donc appliquer (94) en choisissant W (et ω) vérifiant (34,35,37). En fait, on va choisir une famille W_ε d'ouverts tendant vers le bord de l'île. Comme $\Im z$ ne dépend pas de l'ouvert choisi, on pourra faire tendre ε vers 0 pour obtenir une expression plus explicite de $\Im z$.

Calcul de $\Im z$ à ε fixé.

On pose:

$$\omega_\varepsilon = f_2 - \varepsilon, \quad \partial W_\varepsilon = \{\omega_\varepsilon = 0\}. \quad (98)$$

On a alors $\nabla \omega_\varepsilon = \nabla f_2$.

On écrit maintenant l'équation " $P_V a_0 = 0$ " vérifiée à l'extérieur de l'île par le symbole principal a_0 de la fonction BKW :

$$\pm \left(\sum_{j=1}^3 \alpha_j \partial_j f_2 + \alpha_4 + V(x).I_4 \right) a_0 = i \left(\sum_{j=1}^3 \alpha_j \partial_j f_1 \right). \quad (99)$$

L'Equation (94) devient:

$$(1 + O(h)) \Im z = O \left(e^{-2\frac{\varepsilon_0 + S_0}{h}} \right) - \frac{h}{2} \int \int_{\partial W \cap \Omega_1} \pm ((\alpha_4 + V.I_4) a_0 | a_0) + R) h^{-\frac{3}{2}} e^{-2\frac{f_1(x) + S_0}{h}} \frac{dS_{\partial W}}{|\nabla f_2|}, \quad (100)$$

où:

•

$$R = \pm \left(\sum_{j=1}^3 \alpha_j D_j f_1 a_0 |a_0 \right) + O(h), \quad (101)$$

(pour les autres résonances le reste $O(h)$ devient $O(\sqrt{h})$),

- les signes $\pm$ sont ceux de V au point de type 1 au voisinage duquel on est.

Etudions l'exposant $e^{-2f_1(x)/h}$.

Soit C_ε l'ensemble des x contenus dans un voisinage de Γ tels que $f_2(x) = \varepsilon$ et soit

$$\Gamma_\varepsilon = C_\varepsilon \cap \{f_1 = 0\}.$$

L'hypothèse (97) permet de montrer que:

$$f_1(x)|_{C_\varepsilon} = d_{C_\varepsilon}^2(x, \Gamma_\varepsilon), \quad (102)$$

où $d_{C_\varepsilon}(x, \Gamma_\varepsilon)$ a le même comportement que la distance euclidienne de x à Γ_ε restreinte à C_ε .

On déduit de (102) que $\nabla f_1 = 0$ sur Γ_ε puisque $f_1 = 0$ sur Γ_ε . On va donc appliquer un lemme de la phase stationnaire à (100). On obtient ainsi:

$$(1 + O(h))e^{\frac{2S_0}{h}} \Im z = -\frac{1}{2} h (h\pi)^{\frac{d}{2}} \int_{\Gamma_\varepsilon} \pm (((\alpha_4 + V.I_4)a_0|a_0) + R) h^{-\frac{3}{2}} \sqrt{\frac{1}{F_\varepsilon} \frac{dS_{\Gamma_\varepsilon}}{|\nabla f_2|}}, \quad (103)$$

- où d est la codimension de Γ_ε dans C_ε (dans les cas génériques, il n'y a qu'un seul point de type 1 donc $d = 2$),
- et où $F_\varepsilon(x)$ est le hessien de $f_1|_{C_\varepsilon}$ pris le long du sous-espace de TC_ε orthogonal à $T\Gamma_\varepsilon$.

Comme $\nabla f_1 = 0$ sur Γ_ε , le reste R est un $O(h)$. Et de plus l'équation éiconale devient sur Γ_ε :

$$|\nabla f_2| = \sqrt{V^2 - 1}. \quad (104)$$

Si on décompose $a_0 \in \mathcal{C}^4$ suivant ces deux premières composantes et ses deux dernières composantes $a_0 = (a_0^1, a_0^2)$, et que l'on utilise la définition des matrices α_i à partir des matrices de Pauli⁴ $\sigma_j, j \in [1, 3]$:

$$\alpha_j = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_j \\ \sigma_j & 0 \end{pmatrix}, \quad 1 \leq j \leq 3; \quad \alpha_4 = \begin{pmatrix} I_2 & 0 \\ 0 & -I_2 \end{pmatrix} \quad (105)$$

on déduit de l'équation (99) le système:

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^3 \sigma_i \partial_i f_2 a_0^2 + (1 + V) a_0^1 = 0 \\ \sum_{j=1}^3 \sigma_i \partial_i f_2 a_0^1 + (-1 + V) a_0^2 = 0 \end{cases} \quad (106)$$

⁴Ces matrices sont hermitiennes, de trace nulle et anticommulent:

$$\sigma_j \sigma_k + \sigma_k \sigma_j = 2\delta_{j,k}.$$

En utilisant ces équations et le fait que les σ_j sont hermitiennes, on montre qu'en-dehors de l'île:

$$(V-1)|a_0^2|^2 = (V+1)|a_0^1|^2. \quad (107)$$

Limite lorsque ε tend vers 0.

Lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$, $\Gamma_\varepsilon \rightarrow \Gamma$ et, d'après la Remarque 17, $\sqrt{V^2-1}|a_0|^2(y)$ tend vers une limite non identiquement nulle notée $\psi(x)$ si $y \in \Gamma_\varepsilon$ tend vers $x \in \Gamma$. Le déterminant $F_\varepsilon(y)$ du hessien transversal de $f_{1|C_\varepsilon}$ tend vers le déterminant $F(x)$ du hessien de $f_{1|C}$ restreint à l'orthogonal de $T\Gamma$ pris au point x .

Si $V(x) = 1$, l'Equation (107) entraîne que

- a_0^1 est négligeable devant a_0^2 .
- $\sqrt{V^2-1}|a_0^2|(y) \rightarrow \psi(x)$ d'après le premier item.

Si $V(x) = -1$, on a alors

- a_0^2 est négligeable devant a_0^1 ,
- $\sqrt{V^2-1}|a_0^1|(y) \rightarrow \psi(x)$.

On développe alors $((\alpha_4 + V.I_4)a_0|a_0)$ en utilisant la définition (105) de α_4 . Un calcul simple donne:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} ((\alpha_4 + V.I_4)a_0|a_0)/\sqrt{V^2-1} = \pm\psi(x). \quad (108)$$

L'Equation (103) devient finalement:

$$e^{2\frac{S_0}{h}} \Im z = -\frac{1}{2} h^{\frac{d-1}{2}} \pi^{\frac{d}{2}} \left(\int_{\Gamma} \frac{\psi(x)}{\sqrt{F(x)}} dS_{\Gamma} + O(h) \right), \quad (109)$$

où $F(x)$ est le hessien de $f_{1|C}$ restreint à l'orthogonal de $T\Gamma$ et où $\psi(x)$ est donné à la Remarque 17.

Exemple: potentiel à symétrie sphérique.

Soit V un potentiel à symétrie sphérique tel que:

$$V(r) = -1 + \frac{1}{2}\lambda^2 r^2 + o(r^2), \quad \lambda > 0,$$

au voisinage de $r = 0$.

On montre alors que:

$$\nabla\phi = \sqrt{1-V^2} \frac{\vec{r}}{r}, \quad \phi(r) = \int_0^r \sqrt{1-V^2}(s) ds, \quad \Delta\phi = \frac{1}{r^2} \partial_r(r^2 \partial_r \phi) = \frac{1}{r^2} \partial_r(r^2 \sqrt{1-V^2}),$$

d'où l'on déduit que:

$$\frac{\Delta\phi}{\sqrt{1-V^2}} = \partial_r \ln(r^2 \sqrt{1-V^2}), \quad e^{\int_\varepsilon^t \frac{\Delta\phi}{\sqrt{1-V^2}}(s) ds} = \frac{t^2 \sqrt{1-V^2}(t)}{\varepsilon^2 \sqrt{1-V^2}(\varepsilon)}. \quad (110)$$

Les normalisations pour l'énergie et le symbole principal BKW sont données par:

$$e_1 = \frac{3}{2}\lambda, \quad |a|^2(0) = \sqrt{\frac{\lambda}{\pi}}.$$

Revenons maintenant à l'Equation (109). Vu la symétrie sphérique, il n'y a pas de hessien transversal et on a:

$$d = 0, \quad \Gamma \text{ est une sphère de rayon } R, R > 0, \quad F(x) = 1, \quad \psi(x) = \psi.$$

Nous avons donc:

$$\Im z = -e^{-\frac{2S_0}{\hbar}} \frac{1}{\sqrt{h}} 2\pi R^2 \psi(1 + O(h)),$$

où il reste à déterminer ψ à l'aide des Equations (88) et (110):

$$\psi(x) = \psi = \lim_{t \rightarrow R, \varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{t^2} \lambda^{\frac{5}{2}} \frac{1}{\sqrt{\pi}^3} \varepsilon^3 e^{-\int_{\varepsilon}^t \frac{2Ve_1}{\sqrt{1-V^2}}(s)ds}.$$

Ecrivant encore ε^3 comme:

$$\varepsilon^3 = R^3 e^{-3 \int_{\varepsilon}^R \frac{ds}{s}},$$

on en déduit finalement que:

$$\Im z = -2 \frac{1}{\sqrt{\pi \lambda h}} e^{-\frac{2S_0}{\hbar}} (\lambda R)^3 e^{-3 \int_0^R \left(\frac{1}{s} + \frac{\lambda V}{\sqrt{1-V^2}} \right) (s) ds} (1 + O(h)), \quad (111)$$

où on rappelle que:

$$S_0 = \int_0^R \sqrt{1 - V^2}(s) ds, \quad V(r) = -1 + \frac{1}{2} \lambda^2 r^2 + o_{r \rightarrow 0}(r^2).$$

Notons encore que par rapport aux normalisations "physiques", on a, en notant $\hbar$ la constante de Planck, m la masse de la particule soumise à l'Equation de Dirac, c la vitesse de la lumière et W le potentiel auquel est soumis la particule (exprimé en unités d'énergie):

$$h = \frac{\hbar}{mc}, \quad V = \frac{W}{mc^2} - 1, \quad \Im z|_{\text{physique}} = mc^2 \Im z|_{\text{Equation (111)}}.$$

A Appendice: Singularités analytiques.

Dans cet appendice, on souhaite étendre le [11, Théorème 9.1] (propagation des singularités analytiques pour un opérateur différentiel de type principal réel) à l'opérateur de Dirac. On montrera aussi comment on peut adapter ce théorème à la situation de la preuve de la Proposition 9. On commence par rappeler les notations de [11], et en particulier on pose:

$$\lambda = \frac{1}{h}. \quad (112)$$

On étudie le domaine où $\lambda \rightarrow +\infty$.

A.1 Ensemble de fréquences analytiques.

Soit Ω un ouvert de $\mathcal{C}^n$ et $\phi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. On définit l'espace $H_\phi^{\text{loc}}(\eta, \mathcal{C})$ comme l'ensemble des fonctions u :

$$(z, \lambda) \in \Omega \times \mathbb{R}_+ \rightarrow u(z, \lambda) \in \mathcal{C},$$

telles que:

- u est holomorphe en z pour tout $\lambda > 0$,
- pour tout compact $K \subset \Omega$ et tout $\varepsilon > 0$, il existe C_ε telle que:

$$|u(z, \lambda)| \leq C_\varepsilon e^{\lambda(\phi(z) + \varepsilon)}. \quad (113)$$

On définit alors:

$$H_\phi^{\text{loc}}(\Omega, \mathcal{C}^l) = \{u(z, \lambda) = (u_1, u_2, \dots, u_l) : \Omega \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathcal{C}^l / u_i \in H_\phi^{\text{loc}}(\Omega, \mathcal{C})\},$$

et de même l'espace $H_\phi^{\text{loc}}(\Omega, \mathcal{M}_l(\mathcal{C}))$, où $\mathcal{M}_l(\mathcal{C})$ désigne l'ensemble des matrices $l \times l$ à coefficients complexes.

On dit que $u = 0$ dans $H_\phi^{\text{loc}}(\Omega, \mathcal{C})$ s'il existe $\varepsilon > 0$ tel que:

$$|u(z, \lambda)| \leq C e^{\lambda(\phi(z) - \varepsilon)}.$$

Lorsque $\phi = 0$, on parle de l'ensemble des symboles analytiques.

On peut définir une classe globale $H_\phi(\Omega, \mathcal{C}^l)$ en utilisant un recouvrement de Ω par des ouverts Ω_β . Un élément formel u de $H_\phi(\Omega, \mathcal{C}^l)$ est défini par la donnée des représentants locaux $u_\beta \in H_\phi^{\text{loc}}(\Omega_\beta, \mathcal{C}^l)$ vérifiant $u_\beta = u_{\beta'}$ dans $H_\phi^{\text{loc}}(\Omega_\beta \cap \Omega_{\beta'})$.

Si $a_k(z)$, $k = 0, 1, 2, \dots$ est une suite de fonctions holomorphes sur Ω à valeurs dans $\mathcal{C}$ [respectivement dans $\mathcal{C}^l$ et $\mathcal{M}_l(\mathcal{C})$] telles que pour tout $\tilde{\Omega} \subset\subset \Omega$, on ait:

$$|a_k(z)| \leq (C_{\tilde{\Omega}})^{k+1} k^k, \quad k \in \mathbb{N}, \quad z \in \tilde{\Omega},$$

alors on peut définir (cf [11, Exemple 1.1]) un symbole analytique formel sur Ω en associant à tout ouvert $\tilde{\Omega} \subset\subset \Omega$ le symbole:

$$a_{\tilde{\Omega}} = \sum_{k=0}^{\lambda/eC_{\tilde{\Omega}}} a_k(z) \lambda^{-k}.$$

On dit que a est un *symbole analytique calssique* et on écrit:

$$a(z, \lambda) \sim \sum_{k=0}^{\infty} a_k(z) \lambda^{-k}.$$

Soit maintenant $(x_0, \xi_0) \in T^*(\mathbb{R}^n) - \{0\}$ et $\phi(x, \alpha)$ une fonction analytique définie dans un voisinage de $(x_0, (x_0, \xi_0))$ telle que:

$$\phi(\alpha_x, (\alpha_x, \alpha_\xi)) = 0, \quad \partial_x \phi(\alpha_x, (\alpha_x, \alpha_\xi)) = \alpha_\xi \quad (114)$$

$$\Im \phi(x, (\alpha_x, \alpha_\xi)) \geq C |x - \alpha_x|^2 \quad \text{pour } x, \alpha \text{ réels.} \quad (115)$$

Soit $a(x, \alpha, \lambda)$ un symbole analytique classique à valeurs dans $\mathcal{C}$ défini et inversible dans un voisinage de $(x_0, (x_0, \xi_0))$.

Définition [[11, Définition 6.1]

Soit $u \in \mathcal{D}'(X \times \mathbb{R}^{+*}, \mathcal{C})$, où X est un ouvert contenant x_0 . On dit que ξ_0 n'est pas dans l'ensemble de fréquences analytiques de u en x_0 si:

$$\int e^{i\lambda\phi(x, \alpha)} a(x, \alpha, \lambda) \chi(x) \overline{u(x)} dx \quad (116)$$

est à décroissance exponentielle lorsque $\lambda \rightarrow \infty$, uniformément pour α dans un voisinage réel de (x_0, ξ_0) (Ici, $\chi \in C_0^\infty(X)$ est une troncature valant 1 près de x_0).

De même, on dit que ξ_0 n'est pas dans l'ensemble de fréquence analytique de $u \in \mathcal{D}'(X, \mathcal{C}^l)$ en x_0 si ξ_0 n'est pas une fréquence analytique de chacune des l composantes de u en x_0 .

On peut montrer que cette définition ne dépend ni du choix de la troncature χ ni du choix du symbole analytique classique inversible a ni du choix d'une phase ϕ vérifiant (114, 115).

Soit $u \in \mathcal{D}'(X, \mathcal{C})$. Soit C l'ensemble des (x, ξ) de $T^*X - \{0\}$ tels que ξ n'est pas une fréquence analytique de u en (x, ξ) . Par définition, l'ensemble des fréquences analytiques de u est l'ensemble:

$$WF_a(u) = T^*(X) - \{0\} - C. \quad (117)$$

De même, on définit $WF_{a,l}(u)$ pour une distribution $u \in \mathcal{D}'(X, \mathcal{C}^l)$.

Remarque 21 La notation WF_a a été choisie par analogie au front d'onde analytique. En effet, si u ne dépend pas de λ , $WF_a(u)$ est le front d'onde analytique de u .

Soit D un opérateur différentiel à coefficient matriciels $l \times l$ analytiques et de symbole principal inversible en (x_0, ξ_0) . On montre alors l'équivalence:

$$(x_0, \xi_0) \in WF_{a,l}(Du) \Leftrightarrow (x_0, \xi_0) \in WF_{a,l}(u). \quad (118)$$

Dans la suite, on ne supposera plus que $D(x_0, \xi_0)$ est elliptique.

A.2 Propagation des singularités analytiques.

Dans cette section, on suppose au contraire que $D(x_0, \xi_0)$ n'est pas inversible. On va voir qu'on peut quand même donner un résultat sur $WF_{a,l}(u)$ dans certains cas.

Soit P un opérateur matriciel $l \times l$, différentiel, à coefficients analytiques et de symbole principal diagonal:

$$p(x, \xi).I_l, \quad \text{tel que } p(x_0, \xi_0) = 0.$$

On a le:

Théorème 22 On suppose que H_p admet une courbe intégrale réelle:

$$\gamma : [-a, a] \rightarrow T^*X - 0,$$

telle que $\gamma(0) = (x_0, \xi_0)$.

Si $u \in \mathcal{D}'(X, \mathcal{C}^l)$ et si:

$$WF_{a,l}(Pu) \cap \gamma([-a, a]) = \emptyset, \quad (119)$$

- ou bien $\gamma([-a, a]) \subset WF_{a,l}(u)$,
- ou bien $\gamma([-a, a]) \cap WF_{a,l}(u) = \emptyset$.

Preuve.

On reprend la preuve du [11, Théorème 9.1]. Il suffit essentiellement d'y remplacer $\mathcal{C}$ par $\mathcal{C}^l$. La méthode utilisée est "l'optique géométrique".

Pour $\alpha = (\alpha_x, \alpha_\xi)$, soit:

$$v(x, \alpha, \lambda) = e^{i\lambda\phi(x, \alpha)} v_0, \quad \phi(x, \alpha) = (x - \alpha_x)\alpha_\xi + i\frac{(x - \alpha_x)^2}{2}, \quad v_0 \in \mathcal{C}^l - \{0\}. \quad (120)$$

Soit m l'ordre de l'opérateur P . Définissons:

$$Q(x, \tilde{D}_x, \lambda) = \lambda^{-m} P^*(x, D_x), \quad \tilde{D}_x = \frac{1}{\lambda} D_x.$$

L'opérateur Q a pour symbole principal:

$$q(x, \xi).I_l = \overline{p(x, \xi)}.I_l.$$

On cherche à construire une approximation de

$$w(t, x, \alpha, \lambda) = e^{-it\lambda Q}(v(x, \alpha, \lambda))$$

pour α proche de (x_0, ξ_0) et pour $t \in [-a, a]$. On aura ainsi, à des exponentiellement petits près:

$$-\partial_t(w(t, \cdot, \alpha, \lambda)|u)_{L^2} \equiv \lambda^{1-m}(P^*v|u)_{L^2} \equiv \lambda^{1-m}(w(t, \cdot, \alpha, \lambda)|Pu)_{L^2}, \quad (121)$$

d'où l'on déduira que:

$$-\partial_t(w(t, \cdot, \alpha, \lambda)|u)_{L^2} \equiv 0, \quad (122)$$

puisque $WF_{a,l}(Pu) \cap \gamma([-a, a]) = \emptyset$. Enfin, on verra qu'il est facile de se convaincre que (122) donne le Théorème 22.

On cherche donc à résoudre approximativement:

$$\begin{cases} (\tilde{D}_t + Q)w &= 0 \\ w(0, x, \alpha, \lambda) &= v(x, \alpha, \lambda) \end{cases} \quad (123)$$

On procède par la méthode d'optique géométrique. Commençons par chercher la phase de w . Soit $\phi(t, x, \alpha)$ la solution locale de l'équation:

$$\partial_t \phi + q(x, \nabla_x \phi) = 0, \quad \phi(0, x, \alpha) = \phi(x, \alpha). \quad (124)$$

Puisque le symbole principal de P est diagonal, le symbole principal de P^* est $\bar{p}$, le conjugué de p . Or γ est une bicaractéristique *réelle* de p , donc aussi de $\bar{p}$. On a donc pour $\alpha = \alpha_0 = (x_0, \xi_0)$, $(x_t, \xi_t) = \gamma(t)$ et a assez petit:

$$\varphi(t, x_t, \alpha) = 0, \quad \nabla_x \varphi(t, x_t, \alpha) = \xi_t, \quad \Im \nabla_{xx}^2 \varphi(t, x_t, \alpha) >> 0. \quad (125)$$

Lorsque α est proche de α_0 , $\varphi(t, \cdot, \alpha)$ est une petite perturbation de $\varphi(t, \cdot, \alpha_0)$, donc le minimum de $\Im\varphi(t, \cdot, \alpha)$ est proche de 0 et est atteint en un point $\tilde{x}_t(\alpha)$ proche de x_t . De plus,

$$\tilde{\xi}_t = \nabla_x \varphi(t, \tilde{x}_t(\alpha), \alpha)$$

est proche de ξ_t .

De ces constatations et du fait qu'un voisinage de la géodésique $\gamma([-a, a])$ n'est pas dans l'ensemble de fréquences analytiques de Pu , on déduit facilement que, modulo un exponentiellement petit:

$$\int e^{i\lambda\varphi(t, x, \alpha)} \overline{Pu(x)} \equiv 0. \quad (126)$$

On cherche maintenant w sous la forme:

$$w(t, x, \alpha, \lambda) = a(t, x, \alpha, \lambda) e^{i\lambda\varphi(t, x, \alpha, \lambda)}, \quad \text{où } a \sim \sum_{k=0}^{\infty} a_k(t, x, \alpha) \lambda^{-k}$$

est à trouver parmi les symboles analytiques classiques. Le système (123) donne la suite d'équations de transport:

$$\left\{ \begin{array}{ll} La_0 = 0, & a_0|_{t=0} = v_0, \\ La_1 + f_1(a_0) = 0, & a_1|_{t=0} = 0, \\ & \vdots \\ La_k + f_k(a_0, \dots, a_{k-1}) = 0, & a_k|_{t=0} = 0, \\ & \vdots \end{array} \right., \quad (127)$$

où:

- $L = (\partial_t + \nabla_x q(x, \nabla_x \varphi) \cdot \partial_x) \cdot I_l + s(x, \alpha)$ est l'opérateur de transport ($s(x, \alpha)$ est une matrice carrée d'ordre l à coefficients analytiques),
- $f_k(a_0, \dots, a_{k-1})$ est une expression linéaire à coefficients analytiques de dérivées d'ordre quelconque de $a_0, \dots, a_{k-1}$.

On peut résoudre ces équations successivement dans un domaine complexe indépendant de k . En appliquant le Théorème 23, on montrera que les a_k vérifient les estimations qui permettent d'affirmer que a est un symbole analytique. Admettons-le pour l'instant.

Notons donc encore par $a(t, x, \alpha, \lambda)$ une réalisation de ce symbole analytique classique et soit $w = ae^{i\lambda\varphi}$. Alors $(\tilde{D}_t + Q)w$ est à décroissance exponentielle uniforme d'après le système (123) et $w(0, x, \alpha, \lambda) = v(x, \alpha, \lambda)$ d'après le système (127).

Quitte à multiplier u par une troncature, on peut supposer que le support de u est proche de x_0 . Alors, les égalités (121) sont vraies modulo des termes à décroissance exponentielle et l'égalité (126) entraîne bien (122).

En intégrant (122) par rapport à t , on montre que pour tout $t_0 \in [-a, a]$:

$$(v(\cdot, \alpha, \lambda)|u) \equiv (w(t_0, \cdot, \alpha, \lambda)|u). \quad (128)$$

On en déduit l'alternative du Théorème 22.

Il nous reste à montrer que les équations de transport (127) admettent une solution analytique.

Soit $P(x, \tilde{D}_x, \lambda)$ un opd analytique, formel, classique, d'ordre 0, défini près de (x_0, ξ_0) , de symbole principal diagonal $p.I_l$, vérifiant:

$$p(x_0, \xi_0) = 0, \quad \nabla_\xi p(x_0, \xi_0) \neq 0.$$

Soit φ une fonction holomorphe définie près de x_0 telle que:

$$p(x, \nabla_x \varphi(x)) = 0, \quad \nabla_x \varphi(x_0) = \xi_0. \quad (129)$$

Soit $H \subset \mathcal{C}^n$ une hypersurface complexe passant par x_0 et telle que:

$$\nabla_\xi p(x_0, \xi_0) \cdot \nabla_x \text{ est transverse à } H \text{ en } x_0.$$

Après un changement de variable, on se ramène au cas où $x_0 = 0$ et où H a pour équation $x_n = 0$. On note encore $x = (x', x_n)$.

On a alors le:

Théorème 23 Soient $v(x, \lambda)$ et $\tilde{u}(x', \lambda)$ des symboles analytiques formels classiques d'ordre 0 à valeurs dans $\mathcal{C}^l$, définis près de $x = 0_{\mathcal{C}^n}$ et de $x' = 0_{\mathcal{C}^{n-1}}$.

Alors, il existe un symbole u dans la même classe tel que:

$$\lambda e^{-i\lambda\varphi} P e^{i\lambda\varphi} u = v, \quad u|_H = \tilde{u}. \quad (130)$$

La preuve de ce Théorème est tout à fait analogue à celle du [11, Théorème 9.3] à laquelle on renvoie.

Pour conclure la preuve du Théorème 22, il nous faut encore vérifier que le système (123) satisfait aux hypothèses du Théorème 23.

Le temps t joue le rôle de la variable x_n du théorème. L'hypersurface H a pour équation $x_n = 0$. L'opd $P(x, \tilde{D}_x, \lambda)$ est ici:

$$\tilde{D}_{x_n} + Q(x', \tilde{D}_{x'}, \lambda),$$

dont le symbole principal est:

$$p(x, \xi) = (\xi_n + q(x', \xi')).I_l.$$

Dans notre cas, il faut considérer α_x comme un paramètre dans la définition (120) et α_ξ comme ξ' . On a $\gamma(0) = (x'_0, \xi'_0)$ et $(x_0)_n = 0$, $(\xi_0)_n = 0$. En ce point, on vérifie que:

- $q(x'_0, \xi'_0) = \overline{p(\gamma(0))} = 0$,⁵ il faudra encore s'assurer que le champ hamiltonien ne s'annule pas,
- D'après (124, 120),

$$\nabla_{x'} \varphi(x', x_n = 0) = \xi', \quad \partial_{x_n} \varphi(x', x_n = 0) = -q(\gamma(0)) = 0,$$

d'où la deuxième partie de l'hypothèse (129).

⁵Ici p désigne le symbole principal de l'opérateur P du Théorème 22.

La première partie de l'hypothèse (129) est satisfaite en vertu de l'équation (124). De plus le champ:

$$\nabla_{\xi}(\xi_n + q(x', \xi'))(\gamma(0)).\nabla_x = \nabla_{\xi'} p.\nabla_{x'} + \partial_{x_n}$$

est transverse à H en x_0 et non nul. Ainsi, le champ hamiltonien ne s'annule pas.

Toutes les hypothèses du Théorème 23 sont donc satisfaites. Ceci conclut la preuve du Théorème 22.

B Fin de la preuve de la Proposition 9.

Dans la proposition (9), on étudiait une fonction résonnante v_j dans un voisinage Ω_1 de la projection $\pi_x(\gamma([-s_1, 0]))$ sur $\mathbb{R}_x^3$ d'une bicaractéristique $\gamma([-s_1, 0])$ du symbole $p^+(x, \xi)$. On notait χ_0 une troncature à support dans Ω_1 et valant 1 sur Ω_0 un voisinage de $\pi_x(\gamma([-s_1, 0]))$ tel que $\Omega_0 \subset\subset \Omega_1$.

La bicaractéristique issue de $\gamma(0)$ ne rencontrait pas les points de type 1 (i.e. les points du bord de l'île situés à une distance d'Agmon S_0 du puits P), on avait donc:

$$\chi_0 v_j = O_{\varepsilon} \left(e^{-\frac{(S_0 - \varepsilon)}{h}} \right). \quad (131)$$

On savait de plus que pour une transformée de FBI T adaptée à Λ_0 , il existait $\beta > 0$ tel que:

$$T\chi_0 v_j = O \left(e^{-\frac{S_0 + \beta}{h}} \right) \quad (132)$$

uniformément dans un voisinage de $\gamma(-s_1)$. Enfin,

$$(D(h) - \mu_j)\chi_0 v_j = [D, \chi_0]v_j + O \left(e^{-2\frac{S_0}{h}} \right). \quad (133)$$

L'Equation (133) entraîne:

$$(D_{-V}(h) + \mu_j)(D(h) - \mu_j)(\chi_0 v_j) = w + O \left(e^{-2\frac{S_0}{h}} \right), \quad (134)$$

où w est une fonction de support disjoint de Ω_0 . Si l'on calcule l'opérateur composé, on obtient:

$$P := (D_{-V} + \mu_j)(D_V - \mu_j) = -\Delta + 1 - (V - \mu_j)^2 + h \sum_{j=1}^3 \alpha_j D_j V,$$

et on s'aperçoit que P est un opérateur du type de ceux étudiés dans cet appendice. Son symbole principal est en effet diagonal, puisque $\mu_j = O(h)$, il vaut:

$$(\xi^2 + 1 - V^2(x)).I_4 = p^+ p^- .I_4 = p.I_4. \quad (135)$$

On rappelle de la Remarque 10 que la bicaractéristique issue du point $Q = \pi_x(\gamma(0))$ (de type 2) pour p est la bicaractéristique de p^+ issue de Q donc γ .

On se retrouve ainsi dans une situation analogue à celle du Théorème 22 à condition de remplacer la fonction u par $e^{\frac{S_0}{h}} \chi_0 v_j$ et de changer la phase ϕ en la phase de la transformée FBI adaptée à Λ_0 . L'Equation (134) est équivalente à l'hypothèse (119) du Théorème 22,

alors que l'Equation (132) est l'équivalent de l'absence de "front d'onde analytique" en un point de la bicaractéristique (en $\gamma(-s_1)$ ici).

On reprend donc la preuve du Théorème 22, mais on remplace "être à décroissance exponentielle" par "être un $O(e^{-(S_0+\delta)/h})$ pour un réel $\delta > 0$ ".

On rappelle que $\lambda = \frac{1}{h}$. Ainsi, en notant $Q(x, \tilde{D}_x, \lambda) = \lambda^{1-m} P^*(x, D_x)$ où $m = 2$ est l'ordre de P , on cherche w tel que:

$$\begin{cases} (\tilde{D}_t + Q)w = 0 \\ w(0, x, \alpha, \lambda) = v(x, \alpha, \lambda) \end{cases},$$

où $v(x, \alpha, \lambda) = e^{i\lambda\phi(x, \alpha)}$ est l'exponentielle de la phase ϕ de la transformée de *FBI T* adaptée à $\Lambda_0 = \mathbb{R}^6$:

$$\phi(x, \alpha) = (x - \alpha_x)\alpha_\xi + i\lambda(\alpha)(\alpha_x - x)^2.$$

L'Hypothèse (134) entraîne alors l'équivalent de (126):

$$(w(t, \cdot, \alpha, \lambda)|Pv_j(\cdot, \lambda))_{L^2} = O(e^{-2\lambda S_0}),$$

alors que:

$$\begin{aligned} & (w(0, \cdot, \alpha, \lambda)|v_j(\cdot, \lambda))_{L^2} = \\ & = \int_{s_1}^0 \partial_t(w(t, \cdot, \alpha, \lambda)|v_j(\cdot, \lambda))_{L^2} + (w(-s_1, \cdot, \alpha, \lambda)|v_j(\cdot, \lambda))_{L^2} + O(e^{-\lambda(S_0+\delta)}) \\ & = \int_{s_1}^0 \lambda(Qw(t, \cdot, \alpha, \lambda)|v_j(\cdot, \lambda))_{L^2} + (w(-s_1, \cdot, \alpha, \lambda)|v_j(\cdot, \lambda))_{L^2} + O(e^{-\lambda(S_0+\delta)}) \\ & = \int_{s_1}^0 \lambda(w(t, \cdot, \alpha, \lambda)|Pv_j(\cdot, \lambda))_{L^2} + (w(-s_1, \cdot, \alpha, \lambda)|v_j(\cdot, \lambda))_{L^2} + O(e^{-\lambda(S_0+\delta)}) \\ & = O(e^{-2\lambda S_0}) + O(e^{-\lambda(S_0+\beta)}) + O(e^{-\lambda(S_0+\delta)}), \end{aligned}$$

en appliquant aussi (132).

Finalement, $(w(0, \cdot, \alpha, \lambda)|v_j(\cdot, \lambda))_{L^2}$ est bien à décroissance exponentielle devant $e^{-\lambda S_0}$. En utilisant l'estimation (131) et l'inverse à gauche S de T construit dans [8, Section 1.f], on conclut que:

$$v_j = O(e^{-\lambda(S_0+\delta)})$$

pour un réel $\delta > 0$ dans un voisinage de $\pi_x \gamma(0)$.

Remerciements.

Je remercie B.Helffer de m'avoir proposé de généraliser ses résultats pour l'opérateur de Schrödinger à l'opérateur de Dirac. Son aide fut précieuse pour mettre au point les preuves de cet article. Je remercie également J.Sjöstrand pour de fructueuses discussions sur ce sujet.

Références

- [1] B. Helffer and A. Martinez. Comparaison entre les diverses notions de résonances. *Helvetica Physica Acta*, 60:992–1003, 1987.
- [2] B. Helffer and D. Robert. Calcul fonctionnel pour la transformée de Mellin et applications. *Journal of functional Analysis*, 53(3):246–268, October 1983.

- [3] B. Helffer and J. Sjöstrand. Multiple wells in the semi-classical limit-I. *Communication in Partial Differential Equations*, 9(4):337–408, 1984.
- [4] B. Helffer and J. Sjöstrand. Résonances en limite semi-classique. *Mémoires de la SMF*, 114(3), 1986.
- [5] B. Helffer and J. Sjöstrand. Analyse semi-classique pour l'équation de Harper-II. *Mémoire de la SMF*, 34(116(4)), 1988.
- [6] V. Ivrii. Semi-classical microlocal analysis and precise spectral asymptotics. *Preprint de l'Ecole Polytechnique*, 1991.
- [7] A. Mohamed and B. Parisse. Approximation des valeurs propres de certaines perturbations singulières de l'opérateur de Dirac. *Annales de l'Institut Henri Poincaré, Physique Théorique*, 56(2), 1992.
- [8] B. Parisse. Résonances pour l'opérateur de Dirac. *Helvetica Physica Acta*, 64:557–591, 1991.
- [9] B. Parisse. *Résonances pour l'opérateur de Dirac*. PhD thesis, Université de Paris-Sud, ORSAY, 1992.
- [10] P. Seba. The complex scaling method for Dirac resonances. *Lett. Math. Phys.*, 16(1):51–59, 1988.
- [11] J. Sjöstrand. Singularités analytiques microlocales. *Collection Astérisque*, 95, 1982.
- [12] X.-P. Wang. Puits multiples pour l'opérateur de Dirac. *Annales de l'I.H.P, Physique Théorique*, 43(3):269–319, 1985.