# Généralisation de la supergravité à 11 dimensions avec les invariants d'Euler

Helvetica Physica Acta, Vol. 62 (1989) 427–435

0018-0238/89/040427-09$1.50 + 0.20/0


# Généralisation de la supergravité à 11 dimensions avec les invariants d'Euler

By Julio C. Fabris,*) et Richard Kerner

L.P.T.P.E., Université Pierre et Marie Curie, T16 E1, 4 Place Jussieu 75005 Paris, France

(4. X. 1988)

*Abstract.* The 11-dimensional supergravity proposed by Cremmer, Julia and Scherk can be generalized by adding Euler's invariants to the lagrangian. In this paper we investigate such a generalization comprising the invariants of second and of third order. In particular, we look for the solutions in form of the cartesian product of two homogeneous spaces. We show that the solutions exist which are products of Minkowskian 4-space with a 7-sphere. Next we discuss the stability properties of these solutions, and a possibility of the supersymmetrisation of the model.

*Résumé.* Le modèle de Supergravité à 11 dimensions de Cremmer, Julia et Scherk peut être généralisé par l'addition au lagrangien des invariants d'Euler. Dans cet article nous examinons les conséquences d'une telle généralisation, en ajoutant les invariants d'Euler de deuxième et de troisième degré. En particulier, nous cherchons des solutions sous forme de produit de deux espaces homogènes. Nous démontrons que parmi les solutions possibles, il y a des espaces de Minkowski en produit cartésien avec les sphères de dimension 7.

Nous discutons ensuite la stabilité de ces solutions et la possibilité de supersymétrisation du modèle.

## 1. Introduction

Les théories physiques et les modèles mathématiques qui supposent l'existence d'autres dimensions spatiales que les trois qui nous sont accessibles par l'expérience quotidienne, sont connues depuis assez longtemps [1, 2]. Elles ont été introduites sous l'influence de la Relativité Générale, décrivant les effets de la gravitation en termes purement géométriques, en vue d'unification d'autres champs avec le champ gravitationnel. La théorie de Kaluza et Klein en cinq dimensions fournit l'exemple le plus simple: on suppose que l'espace-temps total est de la forme $V_4 \times S^1$, et sa métrique est

$$g_{AB} = \left(\begin{array}{c|c} g_{\mu\nu} + g_{55}A_\mu A_\nu & g_{55}A_\mu \\ \hline g_{55}A_\nu & g_{55} \end{array}\right) \tag{1.1}$$

Cette théorie, sous sa forme plus générale connue sous le nom de théorie de Jordan-Thiry, réunit dans un seul et même tenseur $g_{AB}$ les trois champs à savoir le potentiel gravitationnel $g_{\mu\nu}$, électromagnétique $A_\mu$ et le champ scalaire $g_{55}$.

---

*) Boursier de Capes, Brésil; Departamento de Fisica e Quimica, Universidade Federal do Espirito Santo, Vitoria, Brésil.

Dans le cas le plus simple, en négligeant le champ scalaire $g_{55}$, c'est-à-dire en posant $g_{55} \equiv 1$, le lagrangian d'Einstein–Hilbert calculé à partir de la métrique (1.1) est égal à:

$$\overset{(5)}{R}\sqrt{|g_{AB}|} \sim (\overset{(4)}{R} - \tfrac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu})\sqrt{|g_{\mu\nu}|} \tag{1.2}$$

où l'on retrouve le lagrangien de la Relativité Générale avec le lagrangien du champ Maxwellien.

Le lagrangien d'Einstein–Hilbert semble être unique pour les raisons suivantes: il ne dépend que de quantités tensorielles (invariance par rapport aux difféomorphismes) et, sous variation, il aboutit à des équations différentielles d'ordre 2. Toute fonction non-linéaire de $R^{\lambda}_{\mu\nu\rho}$ aboutirait à des équations differentielles d'ordre plus élevé.

Il y a cependant une exception à cette régle: l'invariant de Gauss-Bonnet

$$I_2 = \sqrt{|g|}(R_{\mu\nu\lambda\rho}R^{\mu\nu\lambda\rho} - 4T_{\mu\nu}R^{\mu\nu} + R^2) \tag{1.3}$$

qui sous variation, ne fournit que des identités de Bach-Lanczos. Ceci est dù au fait que l'intégrale de $I_2$ sur un espace *compact* est proportionnelle à sa caractéristique d'Euler, qui est un invariant topologique de la variété. L'invariant de Gauss–Bonnet est un exemple particulier d'une série d'invariants construite de manière suivante:

$$I_m = \varepsilon^{B_1B_2, \ldots, B_{2m}}_{A_1A_2, \ldots, A_{2m}} R^{A_1A_2}_{B_1B_2}, \ldots, R^{A_{2m-1}A_{2m}}_{B_{2m-1}B_{2m}} \tag{1.4}$$

où $\varepsilon^{B_1, \ldots, B_{2m}}_{A_1, \ldots, A_{2m}}$ est le symbole de Levi-Civita généralisé, totalement antisymétrique en $(A_1, \ldots, A_{2m})$ et en $(B_1, \ldots, B_{2m})$.

Tous ces invariants (et ce sont les seuls!) conduisent à des équations différentielles d'ordre 2. Dans l'espace de dimension $D$, le dernier invariant de ce type est $I_{[D/2]}$; si $D$ est pair, alors $I_{D/2}$ est une forme fermée et sa variation aboutit à des identités; de même, l'intégrale sur un espace compact de dimension paire est proportionnelle à sa caractéristique d'Euler.

C'est seulement depuis quelques années que l'étude systématique des lagrangiens contenant ces invariants a été entreprise, notamment par J. Madore [3], F. Müller-Hoissen [4] et d'autres auteurs. En principe, toute théorie en plus de quatre dimensions devrait contenir, du moins dans la partie gravitationnelle, de tels invariants dans le lagrangien total. En outre, les résultats de la théorie des cordes semblent indiquer la présence de telles contributions dans le lagrangien effectif [5].

Dans ce travail, nous nous proposons d'étudier l'influence de termes de ce type dans le cadre de la supergravité à 11 dimensions.

## 2. Supergravité à 11 dimensions

La théorie dite de supergravité à 11 dimensions a été proposée par Cremmer, Julia et Scherk [6], en 1978. Elle a été l'objet d'un grand intérêt, puisqu'elle fournit un mécanisme naturel de compactification spontanée.

La particularité de 11 dimensions réside dans le fait qu'il est assez naturel d'y trouver la supersymétrie, c'est-à-dire l'invariance du lagrangien par rapport aux transformations de l'extension graduée du groupe de Poincaré. La condition nécessaire dans ce cas est d'avoir dans la théorie autant de degrés de liberté fermioniques que bosoniques. En dimension 11, on peut satisfaire une telle condition en considérant un seul champ de spin $\frac{3}{2}$, un champ de repères (équivalent à la métrique, ou le champ gravitationnel) et une 3-forme (tenseur totalement antisymétrique).

La compactification spontanée de ce modèle a été trouvée par Freund et Rubin [7], qui ont produit une solution sous forme de $V_4 \times S^7$: une variété pseudo-Riemannienne de dimension 4 en produit cartésien avec une sphère de dimension 7. Quelques années plus tard, Biran et al [8] ont démontré la stabilité de cette solution.

Ce qui rend cette théorie peu réaliste, c'est le fait que la variété $V_4$ est un espace de anti-de Sitter, dont la courbure est de même ordre que la courbure de la 7-sphère, que l'on suppose comparable à la courbure de Planck.

Voici la théorie de supergravité à 11 dimensions telle qu'elle a été proposée initialement [6]. Les champs sont les suivants: $(\mu, \nu, a, b = 1, 2, \ldots, 11)$

a) Un spineur-vecteur (champ de spin $\frac{3}{2}$) $\psi_\mu$, qui, compte tenu des conditions de jauge que l'on fixera, a 128 composantes indépendantes.
b) Un repère local, $V^a_\mu$, qui, une fois la jauge fixée, possède 44 composantes indépendantes
c) Pour rendre égaux les nombres de degrés de libertés fermioniques (128) et bosoniques, il nous faut encore 84 degrés de liberté bosoniques. Une 3-forme $A_{\mu\nu\lambda}$ transverse (vérifiant $\partial^\mu A_{\mu\nu\lambda} = 0$) a exactement 84 composantes indépendantes. La forme $A_{\mu\nu\lambda}$ généralise le potentiel du champ Maxwellien; le champ est une 4-forme $F_{\mu\nu\lambda\rho} = (dA)_{\mu\nu\lambda\rho}$.

Le lagrangien proposé par Cremmer et al. est le suivant

$$\begin{aligned}\mathscr{L} = &-\tfrac{1}{2}\sqrt{|g|}\, R - \bar{\psi}_\mu \Gamma^{\mu\rho\sigma} \tilde{D}_\rho \psi_\sigma + \tfrac{1}{24} F_{\mu\nu\lambda\rho} F^{\mu\nu\lambda\rho} \\ &+ \frac{\sqrt{2}}{192\sqrt{2}} \sqrt{g} (\bar{\psi}_\mu \Gamma^{\mu\nu\alpha\beta\gamma\delta} \psi_\nu + 12 \bar{\psi}^\alpha \Gamma^{\gamma\delta} \psi^\beta)(F_{\alpha\beta\gamma\delta} + \hat{F}_{\alpha\beta\gamma\delta}) \\ &+ \frac{\sqrt{2}}{(144)^2} \varepsilon^{\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4\beta_1\beta_2\beta_3\beta_4\nu\rho\lambda} F_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4} F_{\beta_1\beta_2\beta_3\beta_4} A_{\nu\rho\lambda}\end{aligned} \tag{2.1}$$

Ce lagrangien est invariant par rapport aux transformations supersymétriques qui mélangent entre elles les composantes fermioniques et bosoniques.

Ici $\tilde{D}_\mu$ est la dérivée covariante par rapport à la connexion

$$\tfrac{1}{2}(\omega^a_{\mu b} + \hat{\omega}^a_{\mu b}) \tag{2.2}$$

où $\omega^a_{\mu b}$ est la 1-forme de connexion christoffelienne, et

$$\hat{\omega}^a_{\mu b} = \omega^a_{\mu b} + \tfrac{1}{8} \bar{\psi}_\alpha \Gamma^{\alpha\beta a}_{\mu b} \psi_\beta \tag{2.3}$$

On note $\Gamma_\mu$ les matrices de Dirac dans 11 dimensions, et $\Gamma_{\mu\nu} = \frac{1}{2}(\Gamma_{\mu\nu} - \Gamma_{\nu\mu})$, etc. Finalement,

$$\hat{F}_{\mu\nu\rho\sigma} = F_{\mu\nu\rho\sigma} - \frac{3}{\sqrt{2}} \bar{\psi}_{[\mu}\Gamma_{\nu\rho}\psi_{\sigma]} \tag{2.4}$$

Le lagrangien (2.1) reste invariant (à une divergence près) sous la transformation suivante:

$$\delta V_\mu^a = -\frac{i}{\sqrt{2}} \bar{\varepsilon}\Gamma^a \psi_\mu \tag{2.5}$$

$$\begin{aligned} \delta\Psi_\mu &= \sqrt{2}\, D_\mu(\hat{\omega})\varepsilon + \frac{i}{144}(\Gamma_\mu^{\alpha\beta\gamma\delta} - 8\Gamma^{\beta\gamma\delta}\delta_\mu^\alpha)\varepsilon\hat{F}_{\alpha\beta\gamma\delta} \\ &= \sqrt{2}\, \hat{D}_\mu \varepsilon \end{aligned} \tag{2.6}$$

$$\delta A_{\mu\nu\lambda} = \tfrac{3}{2}\bar{\varepsilon}\Gamma_{[\mu\nu}\psi_{\lambda]} \tag{2.7}$$

Freund et Rubin ont étudié les solutions du secteur bosonique de cette théorie. Les équations de mouvement sont, dans ce cas,

$$R_{\mu\nu} - \tfrac{1}{2}g_{\mu\nu}R = -\tfrac{1}{48}(8F_{\mu\gamma\rho\sigma}F_\nu^{\gamma\rho\sigma} - g_{\mu\nu}F_{\lambda\gamma\rho\sigma}F^{\lambda\gamma\rho\sigma}) \tag{2.8}$$

$$F^{\mu\nu\lambda\gamma}_{;\mu} = -\frac{\sqrt{2}}{2(4!)}\varepsilon^{\alpha_1\cdots\alpha_8\nu\lambda\gamma}F_{\alpha_1\cdots\alpha_4}F_{\alpha_5\cdots\alpha_8} \tag{2.9}$$

La solution particulière recherchée résulte de la substitution suivante:

$$\begin{aligned} &F_{\mu\nu\lambda\gamma} = f\varepsilon_{\mu\nu\lambda\gamma} \qquad \mu, \nu, \ldots = 0, 1, 2, 3; \\ &F_{\mu\nu\lambda\gamma} = 0 \qquad \text{autrement} \end{aligned} \tag{2.10a}$$

Si l'on utilise l'hypothèse que l'espace à 11 dimensions se découple en deux espaces homogènes, on obtient un résultat remarquable: on a un espace de anti-de Sitter à quatre dimensions, qui contient la coordonnée temps, et un espace à sept dimensions compact qui est une 7-sphère. Les rayons de courbures de ces deux espaces sont donnés par [9]

$$K_4 = 2f^2/9 \tag{2.11a}$$

$$K_7 = -f^2/18 \tag{2.11b}$$

La stabilité de cette solution a été vérifiée par Biran et al (8) qui ont linéarisé le système (2.8), (2.9) et ont constaté l'absence de modes de propagation correspondant aux masses imaginaires (tachyons).

## 3. Généralisation du modèle

Dans cette théorie à 11 dimensions, on peut généraliser le secteur gravitationnel en ajoutant au lagrangien ci-dessus les invariants donnés par l'expression

(1.4). A première vue, dans notre cas, le lagrangien le plus général contiendrait tous ces invariants, jusqu'au cinquième. Cependant, Ishikawa [10] a démontré que lorsque l'espace à quatre dimensions est l'espace de Minkowski, les trois premiers invariants suffisent: en effet, les deux autres ne contribuent pas aux équations du champ.

Alors, nous généraliserons la théorie en adoptant le lagrangien suivant:

$$L' = L + \gamma I_2 + \lambda I_3 \tag{3.1}$$

où $L$ est l'ancien lagrangien, $I_2$ est l'invariant de Gauss Bonnet et $I_3$ est le troisième invariant de la série (1.4); $\gamma$ et $\lambda$ sont des paramètres dimensionnels.

Il est clair que la présence de ces nouveaux termes brise la supersymétrie du modèle. Pour l'instant, nous oublierons néanmoins ce fait, pour chercher l'influence de ces invariants sur les équations de champ. Nous retournerons plus tard à cette question.

Les équations du champ données par ce nouveau lagrangien, plus compliquées que les équations classiques, comprennent deux paramètres arbitraires $\lambda$ et $\gamma$. Les contributions des deuxième et troisième invariants aux équations du champ sont données dans la référence 2. Ici nous discuterons plutôt les solutions que l'on peut en obtenir, plus particulièrement celles qui se présentent sous la forme du produit de deux espaces homogènes: l'un à quatre et l'autre à sept dimensions. Les composantes non nulles du tenseur de Riemann sont alors:

$$R_{\mu\nu\lambda\gamma} = K_4(g_{\mu\lambda}g_{\nu\gamma} - g_{\mu\gamma}g_{\nu\lambda}) \qquad \mu, \nu, \lambda, \gamma = 0, 1, 2, 3; \tag{3.2a}$$

$$R_{\mu\nu\lambda\gamma} = K_7(g_{\mu\lambda}g_{\nu\lambda} - g_{\mu\gamma}g_{\nu\lambda}) \qquad \mu, \nu, \lambda, \gamma = 4, \ldots, 10. \tag{3.2b}$$

En outre, les seules solutions qui nous intéressent sont celles où l'espace à sept dimensions est compact ($K_7 < 0$).

On s'aperçoit d'abord que l'addition du seul terme de Gauss-Bonnet ne suffirait pas à obtenir les solutions désirées: si l'espace-temps à quatre dimensions est bien plat dans ce cas, par contre, l'espace interne est une pseudo-sphere. Pour trouver une configuration satisfaisante, il faudra donc que le lagrangien comprenne aussi le troisième invariant.

Dans l'hypothèse des deux espaces homogènes, si l'on utilise l'ansatz de Freund–Rubin, on obtient deux équations algébriques couplées, pour $K_4$ et $K_7$:

$$K_4 + 7K_7 - \gamma\{70K_7^2 + 42K_4K_7\} - \lambda\{280K_7^3 + 840K_7^2K_4\} = -f^2/6. \tag{3.3}$$

$$\begin{aligned} 2K_4 + 5K_7 - \gamma\{30K_7^2 + 2K_4^2 + 60K_4K_7\} \\ - \lambda\{40K_7^2 + 120K_4^2K_7 + 720K_7^2K_4\} = f^2/6. \end{aligned} \tag{3.4}$$

Dans ces équations $\gamma$, $\lambda$ et $f$ sont des paramètres libres mais on peut toujours fixer la valeur de l'un de ces paramètres. Ceci revient à fixer une échelle. Choisissons $f = 1$. Si l'espace quadridimensionnel est plat ($K_4 = 0$), nous avons pour $K_7$

$$K_7 = \frac{f^2}{21(1 - 5a)} \tag{3.5}$$

avec

$$a = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 20\gamma/21}}{10} \tag{3.6}$$

$$\lambda = \frac{(21)^2}{80} \frac{(3 - 25a)}{(1 - 5a)^2} \tag{3.7}$$

L'espace à sept dimensions est compact si $a > \frac{1}{5}$. D'autre part, son rayon de courbure peut prendre de très grandes valeurs ce qui fait l'intérêt du modèle. Nous ne discuterons pas toutes les solutions des équations (3.3) et (3.4), mais nous pouvons déjà avancer que ces équations admettent des solutions du type Freund–Rubin et du type de Sitter-sept-sphère.

## 4. La stabilité des solutions

L'étude de la stabilité dans la théorie de supergravité à 11 dimensions a été faite par plusieurs auteurs (voir les références 8, 11, 12 et 13). Ici, comme chez Biran et al., nous nous intéressons seulement au secteur bosonique. En linéarisant les équations de champ obtenues avec le duexième et le troisième invariant on peut définir les variables,

$$\delta g_{\mu\nu} = -h_{\mu\nu} \tag{4.1}$$

$$\delta A_{\mu\nu\lambda} = a_{\mu\nu\lambda} \tag{4.2}$$

On peut imposer 11 conditions de jauge sur $h_{\mu\nu}$ et 45 sur $a_{\mu\nu\lambda}$.

$$h^{Mi}_{;M} = h^{iM}_{;i} = h^M_M = 0 \tag{4.3a}$$

$$a^{MNP}_{;M} = a^{MNi}_{;M} = a^{Mij}_{;M} = 0 \tag{4.3b}$$

où $i, j = 0, \ldots, 3$ et $M, N, P = 4, \ldots, 10$.

La linéairsation conduit à sept équations, dont les expressions générales sont de la forme

$$\begin{aligned} A_1 h^K_{i;j;k} + A_2 h^K_{j;i;K} - A_3 h^\rho_{ij;\rho;} - A_4 h_{ij} - A_5 h_{;i;j} \\ + g_{ij}(A_6 h^\rho_{;\rho;} + A_7 h + A_8 h^{Kl}_{;K;l} + A_g h^{MN}_{;M;N}) = A_{10} g_{ij} t^K_{;K} \end{aligned} \tag{4.4}$$

$$\begin{aligned} B_1 h^P_{M;N;P} + B_2 h^P_{N;M;P} + B_3 h^\rho_{MN;\rho;} + B_4 h_{MN} + B_5 h_{;M;N} \\ + g_{MN}(B_6 h^\rho_{;\rho;} + B_7 h + B_8 h^{ij}_{;i;j} + B_g h^{MN}_{;M;N}) = B_{10} g_{MN} t^\rho_{;\rho} \end{aligned} \tag{4.5}$$

$$C_1 h^P_{M;P;i} + C_2 h^K_{i;K;M} + C_4 h_{Mi} + C_5 h_{M;i} = C_6 t_{i;M} + C_7 \eta_i^{Kls} a_{MKl,s} \tag{4.6}$$

$$D_1 t^K_{;K;i} + D_2 t^M_{i;M;} + D_3 h_{;i} = 0 \tag{4.7}$$

$$E_1 a^{Mij;\nu}_{;\nu} + E_2 a^{Mij} + E_3 \varepsilon^{Kijl} h^M_{K;l} = 0 \tag{4.8}$$

$$F_1 a^{MNi;\sigma}_{;\sigma} + F_l a^{MNi} = 0 \tag{4.9}$$

$$G_1 a^{MNP;\sigma}_{;\sigma} + G_2 a^{MNP} = G_3 \varepsilon^{QRSLMNP} a_{QRS;L} \tag{4.10}$$

où $t_K$ est donné par

$$a_{Kls} = \varepsilon_{Klsq} t^q / 3! \tag{4.11}$$

Les coefficients sont des fonctions données de $K_4$, $K_7$, $\gamma$ et $\lambda$. Nous devons à présent déterminer le spectre de masse des champs intervenant dans le système d'équations (4.4–4.10). Il y a en tout neuf champs, ce qui devient évident après le découplage des équations ci-dessus.

Pour déterminer le spectre des masses on utilise les harmoniques sphériques sur la sept-sphère,

$$\nabla^A \nabla_A y_{[\alpha_1 \cdots \alpha_p]} = -K_7\{l(l+6) - P\} y_{[\alpha_1 \cdots \alpha_p]};$$

$$l \geqslant 0 \quad \text{si} \quad p = 0 \quad \text{et} \quad l \geqslant 1 \quad \text{si} \quad p > 0; \tag{4.12}$$

$$\nabla^A \nabla_A y_{(MN)} = -K_7\{l(l+6) - 2\} y_{(MN)}; \qquad l \geqslant 2, \tag{4.13}$$

et les opérateurs de masse,

$$\eta_{;K}^{;k} - 2K_4 \eta = K_7 \lambda \eta - \text{spin } 0; \tag{4.14}$$

$$(\eta_{K;l} - \eta_{l;K})^{;l} = K_7 \lambda \eta - \text{spin } 1; \tag{4.15}$$

$$\eta_{ij;K;}^{K} - 2\eta_{K[i;j]}^{K} + 6K_4 \eta_{ij} = K_7 \lambda K_{ij} - \text{spin } 2. \tag{4.16}$$

Nous nous intéressons surtout au cas où $k_4 = 0$. L'étude complète de la stabilité, qui dépend évidemment des solutions de base, est en cours. Cependant, on peut déjà obtenir, sans connaître exactement ces solutions, des informations très importantes sur leur stabilité. Par exemple, les trois champs présents dans les équations (4.9) et (4.10) imposent la condition $k_7 < -\frac{1}{2}$ pour la stabilité. Alors quand l'espace quadridimensionnel est plat, les solutions ne pourront être stables que si le rayon de courbure de la sept-sphère est suffisamment grand.

## 5. La super-symétrisation du modèle

L'introduction de ces nouveaux invariants géométriques dans le lagrangien (2.1) en brise évidemment la super-symétrie: il est bien connu que déjà l'introduction de la constante cosmologique suffit à la détruire.

Pour rester dans le cadre d'une théorie de la super-gravité, il faut donc rétablir l'invariance du lagrangien relativement aux transformations super-symétriques locales.

C'est ce problème que nous étudions à présent, et nous pouvons déjà énoncer quelques résultats, qui s'avèrent encourageants pour l'obtention d'un lagrangien super-symétrique comprenant les invariants d'ordre supérieur $I_2$ et $I_3$. On peut en effet ajouter au lagrangien des termes de couplage du type:

$$W_2 = \bar{\psi}_\lambda \{\Gamma^{\lambda\rho\sigma\mu\nu}, \Gamma^{\alpha\beta}\} D_\rho \psi_6 R_{\mu\nu\alpha\beta} \tag{5.1a}$$

et

$$W_3 = \bar{\psi}_\lambda \{\{\Gamma^{\lambda\rho\tau\mu\nu\gamma\eta}, \Gamma^{\alpha\beta}\} \Gamma^{\kappa\sigma}\} D_\rho \psi_\tau \cdot R_{\mu\nu\alpha\beta} R_{\gamma\eta\kappa\sigma} \tag{5.1b}$$

Ce sont les seuls invariants contenant $\psi$, ses dérivées et le tenseur de Riemann, qui ont la dimension de $I_2$ et $I_3$, respectivement. Un calcul direct, bien que long, permet de vérifier que, sous variation supersymétrique (2.5), (2.6) et (2.7), l'adjonction de la combinaison

$$\gamma W_2 + \lambda W_3 \tag{5.2}$$

compense les terms venant de la combinaison $\gamma I_2 + \lambda I_3$ qui brisaient la supersymétrie. Cependant, la supersymétrisation du modèle n'est pas atteinte, puisque la combinaison (5.2) donne d'autres contributions sous la variation, à savoir, des termes de variation du type:

$$\bar{\varepsilon}\Gamma D\psi RF \tag{5.3}$$

Pour annuler cette contribution, il faut modifier davantage le lagrangien, en y ajoutant des termes du type

$$\bar{\psi}\Gamma\psi FR \quad \text{et} \quad FFR \tag{5.4}$$

Cette écriture symbolique peut représenter plusieurs combinaisons venant des contractions des indices indépendantes. L'introduction du dernier terme ($FFR$) modifie le secteur purement bosonique de la théorie, ce qui changera évidemment les résultats obtenus dans la première partie (excepté ceux qui concernent l'étude de la stabilité).

En tout état de cause, la construction d'un lagrangien supersymétrique comprenant les invariants $I_2$ et $I_3$ implique aussi les modifications de la loi de transformation (2.5) elle-même.

Elle devra contenir un terme dépendant de la constant dimensionnelle $\gamma$; en fait, on peut créer dix combinaisons linéairement indépendantes du type

$$\bar{\varepsilon}\Gamma FR \quad \text{ou} \quad \Gamma FR\varepsilon \tag{5.5}$$

En choisissant les coefficients de ces termes de façon judicieuse, on pourra rendre le lagrangien super-symétrique.

Les résultats finaux seront publiés ultérieurement.

REFERENCES

[1] Kaluza Th., Sitz Preuss Akad. *K1*, 966 (1921).
[2] Klein O., Z. Phys. *37*, 895 (1926).
[3] Madore J., Class. Quant. Grav. *3*, 361 (1986).
[4] Müller-Hoissen F., Phys. Lett. *163B*, 106 (1985).
[5] Zwiebach B., Phys. Lett. *156B*, 315 (1985).
[6] Cremmer E., Julia B. et Scherk J., Phys. Lett. *76B*, 409 (1978).
[7] Freund P. G. O. et Rubin M, Phys. Lett. *97B*, 233 (1980).
[8] Biran B., Casher A., Englert F., Rooman M. et Spindel P., Phys. Lett. *134B*, 179 (1984).
[9] Nous utilisons ici les conventions suivantes:
$R^{\alpha}_{\gamma\gamma\beta} = \partial_\gamma \Gamma^{\alpha}_{\beta\delta} - \partial_\delta \Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma} + \Gamma^{\alpha}_{\gamma\sigma}\Gamma^{\sigma}_{\beta\delta} - \Gamma^{\alpha}_{\delta\sigma}\Gamma^{\sigma}_{\beta\gamma}$
$R^{\alpha}_{\alpha\delta\beta} = R_{\delta\beta}$
$\eta_{\mu\eta} = (+, - - - -)$
Avec ces conventions $k_7 < 0$ représente une sept-sphère.

[10] ISHIKAWA K., Phys. Lett. *188B*, 186 (1987).
[11] CASHER A., ENGLERT F., NICOLAI H. et ROOMAN M., Nucl. Phys. *B243*, 173 (1984).
[12] YASUDA O., Ph D Thèse, Université de Tokyo (1986).
[13] KERNER R., CR Acad. Sc. Paris *300*, 479 (1985).