

Une série divergente en représentation intermédiaire

Autor(en): **Petermann, A.**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **Helvetica Physica Acta**

Band (Jahr): **26 (1953)**

Heft VII-VIII

PDF erstellt am: **21.09.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-112435>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Une serie divergente en representation intermediaire

par **A. Petermann.**

Institut de Physique de l'Université, Genève (Suisse)*.

(18 VI 1953.)

Summary. Using Dyson's intermediate representation which was successfully applied to the Φ^3 field theory in order to remove series-divergencies, it is shown that, for a given normal product, the irreducible graphs of a Φ^4 theory are leading to a still divergent series.

I. Introduction.

L'élimination des divergences ultraviolettes par les procédés de renormalisation a distingué, parmi les divers modèles de théories de champs, trois classes, selon que la constante de couplage correspondante:

- a) possède la dimension de l'inverse d'une longueur;
- b) est sans dimension;
- c) a les dimensions d'une longueur.

Ces trois classes de théories portent couramment les noms respectifs de théories superrenormalisables, renormalisables et non-renormalisables, ceci en considération du succès que les procédés de renormalisation ont remportés dans l'élimination des infinités.

Cette distinction semble également devoir jouer un rôle dans la résolution d'une autre difficulté, plus récemment découverte, celle de la divergence des séries de la théorie de perturbation. Il y a peu de temps, en effet, dans des travaux effectués indépendamment, HURST¹⁾, THIRRING²⁾ et l'auteur³⁾ ont mis en évidence cette divergence pour des modèles du type Φ^3 ou $\Phi^2\varphi$ couplant des champs scalaires et appartenant de ce fait à la classe a) définie ci-dessus. Ces auteurs ont de plus signalé que des conclusions identiques, quant à la convergence, pouvaient certainement s'étendre à des modèles du type Φ^4 (classe b)) ou plus généralement encore du

*) Recherche subventionnée par la Commission Suisse d'énergie Atomique.

type Φ^n ($n > 4$, classe c), etc.). A première vue, et sans qu'il soit possible pour l'instant d'étendre l'investigation à des cas spinoriels, il semblait donc, qu'indépendamment de la classe, le développement de la théorie de perturbation conduisait à des séries divergentes.

Or, tout récemment, J. HAMILTON⁴), adoptant la représentation intermédiaire de DYSON⁵) *) de préférence à la représentation d'interaction, parvenait à montrer, pour un modèle Φ^3 , que les opérateurs de cette représentation pouvaient s'exprimer en terme de séries convergentes, pour autant que $\Gamma \neq 0$.

Il devenait intéressant dès lors de voir si ce résultat était généralisable à n'importe quel modèle de théorie, et spécialement à ceux de la classe b) à laquelle appartiennent les théories physiquement intéressantes.

Le but de ce travail est d'examiner une théorie simple de b) introduite par MATTHEWS⁶) et de montrer que la contribution à l'opérateur de champ Φ_g des diagrammes irréductibles, pour un produit normal donné, est une série divergente, quelle que soit la valeur de la constante de couplage.

Au § 2, un bref rappel des notions nécessaires à la compréhension de la représentation intermédiaire est esquissé.

Le § 3 est alors consacré à l'évaluation d'une classe particulière de diagrammes irréductibles de la $(2n-2)$ ie approximation, pour un certain produit normal figurant dans le développement de l'opérateur de champ Φ_g en ses constituants normaux. Tandis que la contribution individuelle est asymptotiquement :

$$(\text{Const})^n \lambda^{2n-2} \cdot n^{-11} \cdot \Gamma^{-3} \cdot T_4, \quad (1.2)$$

(T_4 : nombre positif)

leur nombre est $O(n!)$ et ils fournissent un terme général de série dont le comportement asymptotique est

$$(\text{Const})^n \cdot n^n \cdot \lambda^{2n}. \quad (1.3)$$

*) Essentiellement, la représentation intermédiaire se distingue de celle d'interaction par la modification suivante de la densité d'interaction :

$$h(x', \lambda) \rightarrow h_g(x', x, \lambda) = h_g(x', \lambda g(t-t')) \quad (1.1)$$

où les conventions de notation suivantes ont été faites: l'index g caractérise la représentation intermédiaire; λ est la constante de couplage, x un point fixe. $g(a)$ est une fonction de a définie pour $a \geq 0$, transformée de LAPLACE d'une fonction $G(\Gamma, \Gamma')$, avec $\Gamma = \text{constante} \geq 0$. La représentation intermédiaire adoptée par HAMILTON est caractérisée par le choix $G(\Gamma, \Gamma') = \delta(\Gamma - \Gamma')$. Voir formules (2.4) et (3.1).

Les diagrammes irréductibles négligés ont tous une contribution positive et ne font qu'aggraver cette divergence.

La discussion de ce résultat occupe le § 4. Elle fait ressortir le rôle privilégié que jouent, en représentation intermédiaire, les théories superrenormalisables qui sont les seules à donner des résultats convergents. Par contre, la divergence de série semble plus intimement liée aux théories renormalisables, pour lesquelles la représentation intermédiaire donne des résultats aussi divergents que celle d'interaction.

2. La représentation intermédiaire.

Introduite par DYSON, la représentation intermédiaire se propose le calcul d'opérateurs $\Phi_g(p)$ donnés par

$$\Phi_g(p) = (2\pi)^{-4} \int \Phi_g(x) e^{-i(px)} dx, \quad (2.1)$$

$\Phi_g(x)$ se déduisant de l'opérateur correspondant $\Phi(x)$ de la représentation d'interaction au moyen de

$$\Phi_g(x) = S^{-1}(t) \Phi(x) S(t) \quad (2.2)$$

où

$$S(t) = \sum_{n=0}^{\infty} (i)^n (n!)^{-1} \int_{-\infty}^t dx_1 \dots \int_{-\infty}^t dx_n P(h_g(x, x_1), h_g(x, x_2) \dots h_g(x, x_n)). \quad (2.3)$$

La densité d'interaction $h_g(x, x')$, fonction des deux points x et x' est obtenue généralement de la densité $h(x')$ de la représentation d'interaction en adjoignant en cofacteur de la constante de couplage λ la fonction $g(t-t')$ définie pour $a \geq 0$ par :

$$g(a) = \int_0^{\infty} G(\Gamma') e^{-i\Gamma'a} d\Gamma' \quad (2.4)$$

avec les conditions :

$$g(0) = 1; \quad g(a) \rightarrow 0 \text{ si } a \rightarrow \infty.$$

De plus, $G(\Gamma)$ ne peut avoir de singularités plus fortes que celles d'une fonction δ pour un spectre discret de valeurs de Γ . Ainsi, par exemple, à la densité d'interaction :

$$h(x') = \lambda \Phi^4(x') \quad (2.5)$$

de la représentation d'interaction, correspond, en représentation intermédiaire :

$$h_g(x, x') = \lambda g(t - t') \Phi^4(x'). \quad (2.6)$$

De (2.1), (2.2) et (2.3), le calcul de $\Phi_g(p)$ se ramène donc à celui de :

$$\Phi_g(p) = (2\pi)^{-4} \sum_{n=0}^{\infty} (i)^n (n!)^{-1} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i(px)} dx \int_{-\infty}^{+\infty} dx_1 \dots \int_{-\infty}^{+\infty} dx_n S_g, \quad (2.7)$$

$$S_g = \sum_{\text{Perm}} \theta(x - x_1) \theta(x_1 - x_2) \dots \theta(x_{n-1} - x_n) \cdot [h_g(x, x_n), [\dots [h_g(x, x_1), \Phi(x)] \dots]], \quad (2.8)$$

\sum étant étendue aux $n!$ permutations des points $x_1 \dots x_n$. Dans l'exemple (2.6) que nous retenons pour fixer les idées, chacun des 2^n produits du multiple commutateur de (2.8) comporte en particulier un produit Π_g de n fonctions g . Au moyen de la représentation (2.4), on obtient :

$$\Pi_g = \int_0^{\infty} G(\Gamma_1) d\Gamma_1, \dots \int_0^{\infty} G(\Gamma_n) d\Gamma_n e^{[\Gamma_1(x-x_1) + \dots + \Gamma_n(x-x_n)]} \quad (2.9)$$

où chaque Γ_i provenant de (2.4) est considéré comme un quadri-vecteur à direction temporelle :

$$\Gamma_i = (0, 0, 0, \Gamma_i).$$

$\Phi_g(p)$ est tout d'abord développé en constituants normaux $M \cdot N[\Phi]$ selon les règles de WICK généralisées par DYSON pour les commutateurs multiples. Ces constituants normaux peuvent être énumérés au moyen de diagrammes de FEYNMAN G à $n+1$ points : x_1, \dots, x_n, x . Le coefficient M du produit normal $N[\Phi]$ est une somme sur tous les graphes dont les lignes extérieures sont adéquates au produit N .

Les règles pratiques de calcul pour la contribution $M(G)$ de G à M ont été établies en détail⁷⁾ et ne seront ici que résumées :

1° On considère tout d'abord l'expression (2.7) où S_g de (2.8) est simplement remplacé par

$$P(h(x_1), \dots, h(x_n), \Phi(x)), \quad (2.10)$$

produit chronologique habituel.

2° Partant du point x dans le diagramme G , on double un trajet connecté et simplement connecté (sans boucle fermée) en définissant ainsi un sens positif sur ce trajet double, à savoir celui que l'on suit en s'éloignant de x . Indépendamment du doublage, chaque ligne du diagramme possède une direction inhérente spécifiée par une flèche. On peut alors définir pour chaque ligne double un index η égal à ± 1 selon que la flèche est dirigée dans le sens négatif ou non.

3° Pour chaque ligne doublée un quadrivecteur Δ est défini, qui est la somme des Γ correspondant à tous les points x_i du trajet doublé qui sont situés en avant d'elle dans le sens positif.

4° $M(G)$ étant analytiquement représenté par une intégrale du type:

$$M(G) = A \int_{-\infty}^{+\infty} dk_{n+1} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} dk_b \cdot F(k_{n+1} \dots k_b), \quad (2.11)$$

chaque ligne non doublée du diagramme contribue à F par un facteur:

$$(k_a^2 + \varkappa^2)^{-1}; \quad a = n+1, \dots, b, \quad (2.12)$$

chaque ligne doublée par:

$$[(\eta_j(-q_j - u_j + i\Delta_j))^2 + \varkappa^2]^{-1}; \quad j = 1, \dots, n. *) \quad (2.13)$$

Le calcul des intégrales auxquelles on est conduit par ces règles peut se faire au sens de FEYNMAN, en considérant les quantités $(i\Delta_j)$ comme des nombres réels et \varkappa plus grand que toute combinaison des moments externes et des $(i\Gamma)$. Le résultat est alors une fonction analytique de \varkappa et des Γ_i . En maintenant \varkappa grand, les Γ_i sont ensuite variés continûment de leurs valeurs imaginaires pures à des valeurs réelles; puis \varkappa est amené à sa valeur physique. Ce prolongement analytique sert à définir $M(G)$.

*) $\Delta_j = \sum_i \theta_T(x_j, x_i) \Gamma_i$
 $u_j = \sum_i \theta_T(x_j, x_i) t_i$
 $q_j = \sum_a [\theta_T(x_i, x_a'') - \theta_T(x_j, x_a')] k_a$.

x_a', x_a'' sont les deux points extrémités de la ligne portant le moment k_a , la flèche de direction pointant de x_a'' vers x_a' .

$\theta_T(x_1, x_2) = \begin{cases} 1 & \text{si } x_1 = x_2 \text{ ou si } x_1 \text{ est situé plus avant que } x_2 \text{ sur le trajet doublé;} \\ 0 & \text{autrement.} \end{cases}$

3. Evaluation d'intégrales de la $(2n - 2)^{ie}$ approximation.

Partant d'une densité d'interaction

$$h_g(x, x') = \lambda g(t - t') \Phi^4(x') = \lambda e^{-\Gamma(t-t')} \Phi^4(x'), \quad (3.1)$$

nous nous proposons maintenant d'évaluer toute une classe d'intégrales. Elles proviennent de diagrammes irréductibles contribuant au constituant normal M de l'opérateur Φ_g , relatif à la collision de six mésons. Un diagramme de cette classe est illustré par la figure 1. Les autres diagrammes de la classe envisagée se déduisent de la figure 1 par permutation des $(n - 4)$ points $x_2 \dots x_{n-2}$ et sont par conséquent au nombre de $(n-4)!$

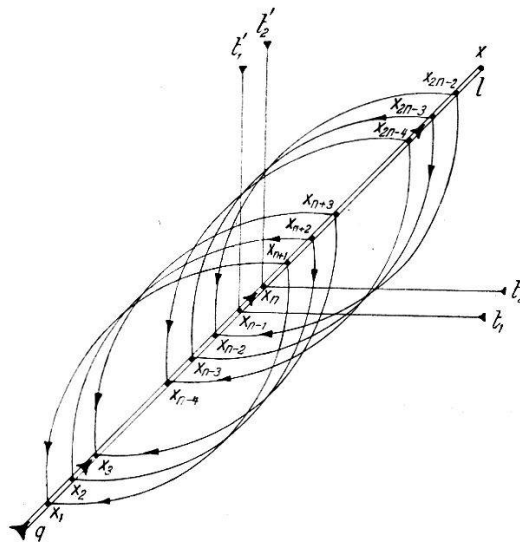


Fig. 1.

Diagramme de FEYNMAN doublé fournissant une contribution à M , cofacteur du produit normal $N(\Phi(q) \Phi(t_1) \Phi(t_1') \Phi(t_2) \Phi(t_2'))$ dans le développement de $\Phi_g(p)$.

Le passage d'un diagramme donné à l'intégrale correspondante de l'espace de FOURIER s'effectue au moyen du formalisme de FEYNMAN-DYSON tel que nous l'avons rappelé dans DP*). L'expression paramétrique

$$a^{-n} b^{-1} = n \int_0^1 x^{n-1} (ax + b(1-x))^{-n-1} dx$$

est utilisée pour rendre compacts les dénominateurs, tandis que les intégrales sur les variables de base sont effectuées à l'aide de:

$$\int \frac{(dk)}{(ak^2 + L)^n} = \frac{i\pi^2}{a^2(n-1)(n-2)L^{n-2}}.$$

*) DP. désignera par la suite la référence ³⁾ de la bibliographie.

Dès lors, au diagramme de la figure 1 correspondra l'expression :

$$J_{1,2\dots n-2} = \alpha^{n-1} (4\pi)^{7-3n} [l^2 + \kappa^2]^{-1} \int_0^1 dx_1 \dots \int_0^1 dx_n \times \\ \times \int_0^1 dv_2 \dots \int_0^1 dv_{n-2} \int_0^1 dw_2 \dots \int_0^1 dw_{n-2} \int_0^1 dz_1 \dots \int_0^1 dz_{n-2} \cdot k_{1,2\dots n-2}, \quad (3.2)$$

avec :

$$k_{1,2\dots n-2} = x_2 x_3^2 \dots x_n^{n-1} v_2^{n-3} \dots v_{n-2} w_2^{n-2} \dots w_{n-2}^2 z_1^{n-2} \dots z_{n-2} G_{1,2\dots n-2};$$

$$G_{1,2\dots n-2} = \prod_{m=2}^{n-2} (1 - v_m w_m (1 - a'_{(m-2)mm}))^{-2} \prod_{k=1}^{n-2} (1 - z_k (1 - a_{(k-1)kk}))^{-2} \cdot E_{1,2\dots n-2};$$

$$E_{1,2\dots n-2} = [q^2 a'_{(n-3)1,1} + (t_1 + t_1')^2 a'_{(n-3)n-1,n-1} + \\ + (t_2 + t_2')^2 a_{(n-3)n,n} + 2(q_1(t_1 + t_1')) b'_{(n-3)1,n-1} + \dots \\ + (i\Gamma)^2 (2n-3)^2 a'_{(n-3)\Gamma\Gamma} + \dots + 2(q(i\Gamma)) \times \\ \times (2n-3) b'_{(n-3)1,\Gamma} + \kappa^2]^{-1};$$

$$\alpha = \lambda^2 (4\pi)^{-1}.$$

Les coefficients $a_{()}$, $b_{()}$, $a'_{()}$, $b'_{()}$, sont des expressions algébriques en les paramètres de FEYNMAN x_i , v_i , w_i , z_i qui se construisent par récurrence de la façon suivante :

$$\left. \begin{aligned} a_{(0)mm} &= x_{n-m+1} \dots x_n (1 - x_{n-m+1} \dots x_n) \\ b_{(0)kl} &= \begin{cases} x_{n-k+1} \dots x_n (1 - x_{n-l+1} \dots x_n); & k > l. \\ x_{n-l+1} \dots x_n (1 - x_{n-k+1} \dots x_n); & k < l. \end{cases} \\ a_{(k)mm} &= w_{k+1} \left[1 - v_{k+1} (1 - a'_{(k-1)mm}) - \frac{w_{k+1} (1 - v_{k+1} (1 - b'_{(k-1)m,k+1}))^2}{1 - v_{k+1} w_{k+1} (1 - a'_{(k-1)k+1,k+1})} \right] \\ b_{(k)lm} &= w_{k+1} \left[1 - v_{k+1} (1 - b'_{(k-1)lm}) - \frac{w_{k+1} (1 - v_{k+1} (1 - b'_{(k-1)l,k+1})) (1 - v_{k+1} (1 - b'_{(k-1)m,k+1}))}{1 - v_{k+1} w_{k+1} (1 - a'_{(k-1)k+1,k+1})} \right] \\ a'_{(k)mm} &= z_{k+1} \left[a_{(k)mm} - \frac{z_{k+1} b_{(k)m,k+1}^2}{1 - z_{k+1} (1 - a_{(k)k+1,k+1})} \right] \\ b'_{(k)lm} &= z_{k+1} \left[b_{(k)lm} - \frac{z_{k+1} b_{(k)m,k+1} b_{(k)l,k+1}}{1 - z_{k+1} (1 - a_{(k)k+1,k+1})} \right]. \end{aligned} \right\} (3.3a)$$

$$\left. \begin{aligned}
a_{(0)GF} &= \frac{x_n}{n} [(2n-1)x_1 \dots x_{n-1} + (2n-3)x_2 \dots x_{n-1} + \dots + \\
&\quad + 3x_{n-1} + 1 - x_n (1 + x_{n-1} + x_{n-1}x_{n-2} + \dots + x_{n-1} \dots x_1)^2] \\
b_{(0)Gi} &= \frac{x_n}{n} [(ix_{n-1} \dots x_{n-i+1} + x_{n-1} \dots x_{n-i} + x_{n-1} \dots x_{n-i-1} + \dots \\
&\quad + x_{n-1} \dots x_1) - x_n \dots x_{n-i+1} (1 + x_{n-1} + x_{n-1}x_{n-2} + \dots \\
&\quad + x_{n-1} \dots x_1)] \\
a_{(k)GF} &= w_{k+1} \left[\left(1 - v_{k+1} \left(1 - \left(\frac{n+k-1}{n+k} \right)^2 a'_{(k-1)GF} \right) \right) - \right. \\
&\quad \left. - \frac{w_{k+1} \left(1 - v_{k+1} \left(1 - \left(\frac{n+k-1}{n+k} \right) b'_{(k-1)k+1, G} \right)^2 \right)}{1 - v_{k+1} w_{k+1} (1 - a'_{(k-1)k+1, k+1})} \right] \\
b_{(k)Gi} &= w_{k+1} \left[\left(1 - v_{k+1} \left(1 - \frac{n+k-1}{n+k} b'_{(k-1)Gi} \right) \right) \right. \\
&\quad \left. - \frac{w_{k+1} \left(1 - v_{k+1} \left(1 - \frac{n+k-1}{n+k} b'_{(k-1)G, k+1} \right) \right) (1 - v_{k+1} (1 - b'_{(k-1)l, k+1}))}{1 - v_{k+1} w_{k+1} (1 - a'_{(k-1)k+1, k+1})} \right] \\
a'_{(k)GF} &= z_{k+1} \left[a_{(k)GF} - \frac{z_{k+1} b^2_{G, k+1}}{1 - z_{k+1} (1 - a_{(k)k+1, k+1})} \right] \\
b'_{(k)Gi} &= z_{k+1} \left[b_{(k)Gi} - \frac{z_{k+1} b_{(k)G, k+1} b_{(k)l, k+1}}{1 - z_{k+1} (1 - a_{(k)k+1, k+1})} \right].
\end{aligned} \right\} (3.3b)$$

On va dès maintenant rechercher une borne inférieure pour la partie imaginaire de $J_{1,2 \dots n-2}$.

Ecrivait $E_{1,2 \dots n-2}$ de (3.2) sous la forme:

$$E_{1,2 \dots n-2} = [R - iJ]^{-1} = (R + iJ) (R^2 + J^2)^{-1}, \quad (3.4)$$

avec

$$\left. \begin{aligned}
a) \quad R &= q^2 a'_{(n-3)1,1} + (t_1 + t'_1)_2 a'_{(n-3)n-1, n-1} + \dots + (2n-3)^2 \times \\
&\quad \times (i\Gamma)^2 a'_{(n-3)GF} + \varkappa^2; \\
b) \quad J &= 2(2n-3) \Gamma (q_4 b'_{(n-3)1, G} + (t_1 + t'_1)_4 b'_{(n-3)n-1, G} + \\
&\quad + (t_2 + t'_2)_4 b'_{(n-3)n, G}),
\end{aligned} \right\} (3.5)$$

on remarque que:

1° $R^2 + J^2 > 0$ en tous points des chemins d'intégration.

2° $J \geq 0$ pour $q_2, (t_1 + t'_1)_4, (t_2 + t'_2)_4$ tous positifs. En effet, les coefficients $b'_{(n-3)G, j}$ sont tous positifs comme le montre l'argument suivant: au lieu d'écrire que $\Gamma_1 = \Gamma; \Gamma_1 + \Gamma_2 = 2\Gamma; \dots, \Gamma_1 + \dots + \Gamma_m = m\Gamma$, on conserve la notation Γ_m jusqu'à l'expression finale de $J_{1,2 \dots n-2}$. De plus, on assimile pour un instant les $(i\Gamma_m)$ à des quadri-vecteurs dont les composantes sont des nombres réels, soit, à des moments extérieurs supplémentaires; dans ces conditions, les

coefficients $a'_{(n-3) \Gamma_m, \Gamma_m}$, $b'_{(n-3) \Gamma_m, i}$ apparaissant dans $E_{1,2\dots n-2}$ sont positifs. En effet, il ne doit pas exister de processus réels tant que

$$-(\Sigma \text{ Moments})^2 < \varkappa^2, \tag{3.6}$$

condition pour laquelle il est nécessaire que les $a_{(n-3) \Gamma_m, \Gamma_m}$, etc., soient positifs. Alors en restituant à $(i \Gamma_m)$ la valeur $(im \Gamma)$, on voit que l'on a par exemple:

$$b'_{(n-3) 1 \Gamma} = \sum_{i=1}^{2n-3} b'_{(n-3) \Gamma_{i,1}} \cdot \geq 0. \tag{3.7}$$

Une démonstration directe de la positivité des $a'_{(\cdot) \Gamma \dots}$ et $b'_{(\cdot) \Gamma \dots}$ peut du reste être fournie en utilisant le schéma de l'appendice I de DP.

Dans ces conditions, l'intégrand est positif sur tous les chemins d'intégration, les $a_{(\cdot)}$, $a'_{(\cdot)}$ figurant dans $G_{1,2\dots n-2}$ étant bornés par $0 \leq a_{(\cdot)} < 1$.

On emploie alors une formule de la moyenne du type:

$$\int_a^b f(x) dx \geq (b-a) [\text{Minimum de } f(x) \text{ sur l'intervalle } a \rightarrow b],$$

$$b > a; f(x) \geq 0 \text{ pour } a \leq x \leq b,$$

qui fournit pour (3.2):

$$\mathcal{J}(J_{1,2\dots n-2}) \geq \frac{\alpha^{n-1}}{(4\pi)^{3n-7}} [l^2 + \varkappa^2]^{-1} (1/n^2 - 1/n^3)^{4n-8} [\text{Minimum de } \mathcal{J}(k_{1,2\dots n-2}) \text{ sur les intervalles de } 1 - 1/n^2 \rightarrow 1 - 1/n^3]. \tag{3.8}$$

Laissant à une discussion ultérieure le terme $E_{1,2\dots n-2}$, on peut chercher le minimum de $k'_{1,2\dots n-2}$ pour lequel $E_{1,2\dots n-2}$ serait provisoirement remplacé par 1.

Le § 3 de DP est en grande partie consacré au calcul de la borne supérieure des $a_{(\cdot)mm}$. Dans les intervalles $(1 - 1/n^2) \rightarrow (1 - 1/n^3)$ pour chaque variable, cette dernière est trouvée inférieure à $3/n^2$. En se reportant à (3.3a), les $a_{(\cdot)}$ et $b_{(\cdot)}$ étant compris entre 0 et 1, on voit facilement que, par exemple:

$$a'_{(k)m,m} \leq a_{(k)mm} \leq 3/n^2; k = m - 1, m - 2, \tag{3.9}$$

et ainsi:

$$G'_{1,2\dots n-2} \geq \left(\frac{n^2}{5}\right)^{4n-10}, \tag{3.10}$$

ce qui entraîne pour k' :

$$k'_{1,2\dots n-2} \geq n^{8n-20} 25^{5-2n} e^{-4n}, \tag{3.11}$$

et permet d'écrire, au lieu de (3.8) :

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{J}(J_{1,2\dots n-2}) &\geq \frac{\alpha^{n-1}}{(4\pi)^{3n}} [l^2 + \kappa^2]^{-1} e^{-4n} n^{-4} [\text{Minimum} \\ \mathcal{J}(E_{1,2\dots n-2}) &\text{ sur les intervalles } (1-1/n^2) \rightarrow (1-1/n^3) \\ &\text{ pour chaque variable}]. \end{aligned} \right\} \quad (3.12)$$

Maintenant, en tenant compte de (3.4), (3.5a) et (3.5b) :

$$\begin{aligned} \text{Min } \mathcal{J}(E_{1,2\dots n-2}) &= \frac{\text{Min } J}{\text{Max } (R^2 + J^2)} = \frac{2(2n-3) \Gamma T_4}{(2n-3)^4 \Gamma^4 4 n^4} \cong \\ &\cong T_4 \Gamma^{-3} n^{-7}, \quad *) \end{aligned} \quad (3.13)$$

où T_4 est un nombre positif (2e remarque page 738). La borne désirée pour (3.2) est alors fournie par

$$\mathcal{J}(J_{1,2\dots n-2}) \geq \frac{\alpha^{n-1}}{(4\pi)^{3n}} [l^2 + \kappa^2]^{-1} e^{-4n} n^{-11} T_4 \Gamma^{-3}. \quad (3.14)$$

Les intégrales que l'on déduit des diagrammes construits à partir de la figure 1 par les $(n-4)!$ permutations des points $x_2 \dots x_{n-2}$, conduisent à une borne du même type que (3.14) pour leur partie imaginaire. En effet, rien n'est changé dans l'évaluation du déterminant: $G'_{1,2\dots n-2}^{**}$; de plus, le nombre d'intégrations auxiliaires, les constantes numériques, le signe, subsistent sans modification et le minimum de $\mathcal{J}(E_{a,b\dots})$ s'évalue comme en (3.13), avec un résultat identique.

Ainsi, la contribution au développement des $(n-4)!$ diagrammes envisagés est asymptotiquement exprimée par :

$$\mathcal{J}(M_{n-1}) \geq u_{n-1} \cong \alpha^{n-1} (\text{Const})^n T_4 \Gamma^{-3} n^{n-15}, \quad (3.15)$$

qui est le terme général d'une série divergente.

Il existe encore d'autres diagrammes irréductibles à mêmes lignes externes que celui de la figure 1 et que nous n'avons pas discutés; ici encore, on peut montrer que leur partie imaginaire est de signe constant, à savoir le même que pour les intégrales évaluées au cours de ce paragraphe. On peut donc trouver, pour tous les diagrammes irréductibles de l'effet étudié, une minorante qui donne lieu à une série divergente.

*) Le théorème: $b'_{(n-3)\Gamma}, n > 1/4 n^4$ sur les intervalles $(1-1/n^2)$ à $(1-1/n^3)$ utilisé dans l'évaluation de (3.13) n'est pas démontré ici. La preuve en est assez simple mais comporte un algèbre long et fastidieux. Elle se déduit des lemmes de l'Appendice I de DP. étendus aux coefficients a'_0 et b'_0 dont les indices peuvent être Γ .

***) Démonstration essentiellement due à HURST et THIRING (loc. cit.).

4. Discussion.

Toutes les théories de la classe b), renormalisables, comportent de ce fait même une difficulté que ne présentent pas celles de la classe a) (superrenormalisables) dans le calcul des intégrales: les divergences ultraviolettes. Alors que dans le cas de deux champs scalaires en interaction scalaire, un seul type de diagramme (self-énergie de seconde approximation) conduit à une telle difficulté, les modèles b) ont à la résoudre en toute approximation; et ceci non seulement pour les self-énergies, mais pour les «vertex parts» à trois et même quatre branches. Ce qui implique en particulier la séparation des divergences d'empiètement et complique considérablement la discussion quand elle ne la rend pas impossible. Le fait, par exemple, que les «vertex parts» de la théorie $g\Phi^3$ ne sont jamais divergents a permis à THIRRING²⁾ d'adopter une jauge de renormalisation⁸⁾ dans laquelle on n'effectue pas de renormalisation de vertex. Celle des self-énergies est alors aisée à accomplir. Par contre, les théories b) doivent extraire, par soustraction, une partie finie des vertex divergents, ce qui détruit, dans les diagrammes réductibles en terme de vertex, l'unicité de signe et ne permet plus, par là, de lever l'éventualité d'une convergence conditionnelle. Pour peu probable que soit cette dernière, elle n'est néanmoins pas exclue et nous n'avons eu par conséquent, au cours de ce travail, aucune prétention de prouver la divergence d'une théorie Φ^4 renormalisée, pas plus que cela n'a été fait dans tout autre cas*). Nous n'avons tenu qu'à donner un exemple de série divergente en représentation intermédiaire et, plus spécialement, à mettre en évidence l'inefficacité complète du procédé Γ pour la classe b). Les résultats sont éloquents:

En représentation d'interaction et utilisant la même méthode d'évaluation, la série des termes discutés dans ce travail est minorée par:

$$S_i \geq \sum_n^{\infty} (\text{Const})^n \lambda^{2n-2} n^{-4} z^{-2} (n-4)! \quad (4.1)$$

alors que le module de la même série en représentation intermédiaire est borné par l'expression:

$$|S_r| \geq \sum_n^{\infty} (\text{Const})^n \lambda^{2n-2} n^{-11} T_4 \Gamma^{-3} (n-4)! \quad (4.2)$$

*) Il est à noter que même pour une théorie Φ^3 , la possibilité subsiste de trouver une jauge telle que la série converge pour toutes valeurs finies des moments externes. En effet, l'avoir montré pour une jauge particulière (THIRRING) n'implique pas que cela soit vrai pour une autre, étant donnée l'importance que joue l'ordre des termes dans une série non absolument convergente.

dont évidemment la forme asymptotique est équivalente à celle de (4.1).

Comme nous l'annonçons donc, le succès de la représentation intermédiaire en classe a) est spécifique de cette dernière, et non généralisable aux théories renormalisables qui, elles seules, ont pourtant un intérêt physique direct. Il nous semble que la situation serait même empirée en classe c). Mais ceci sort du cadre que nous nous sommes fixé dans ces pages.

Pour terminer, nous tenons à remercier M. le Professeur W. PAULI ainsi que le Dr W. THIRRING pour nous avoir signalé le résultat de J. HAMILTON.

Bibliographie.

- 1) C. A. HURST, Proc. Cambridge. Phil. Soc. **48**, 625 (1952).
 - 2) W. THIRRING, Helv. Phys. Acta **26**, 33 (1953).
 - 3) A. PETERMANN, Archives des Sciences Genève **6**, 5 (1953) (DP). Phys. Rev. **89**, 1160 (1953).
 - 4) J. HAMILTON, Proc. Camb. Phil. Soc. **49**, 642 (1953).
 - 5) F. J. DYSON, Proc. Roy. Soc. **A 207**, 395 (1951). Phys. Rev. **82**, 428 (1951); **83**, 608 (1951).
 - 6) P. T. MATTHEWS, Phil. Mag. **41**, 185 (1950).
 - 7) F. J. DYSON, Phys. Rev. **83**, 608 (1951).
 - 8) Voir A. THELLUNG, Helv. Phys. Acta **25**, 307 (1952). A. PETERMANN, Helv. Phys. Acta **26**, 291 (1953).
-