Über die Bedeutung der Funktion D_c in der Quantentheorie der Wellenfelder

Autor(en): **Fierz, M.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Helvetica Physica Acta**

Band (Jahr): **23 (1950)**

Heft VI-VII

PDF erstellt am: **28.03.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-112130

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

Über die Bedeutung der Funktion D_c in der Quantentheorie der Wellenfelder

von **M. Fierz**, Basel.

(24. VIII. 1950.)

Zusammenfassung. Die Stückelberg-Feynman'sche Funktion D_c wird physikalisch gedeutet. Mit Hilfe dieser Deutung wird die von HEISENBERG vorgeschlagene, konvergente Feldtheorie kritisch diskutiert.

Einleitung.

STUECKELBERG[1]) und FEYNMAN[2])[3]) haben gezeigt, dass in der Theorie quantisierter Felder die von STÜCKELBERG mit D_c bezeichnete Funktion eine ausgezeichnete Rolle spielt. Sie beschreibt z. B. in der Quantenelektrodynamik die Ausbreitung retardierter Wechselwirkungen zwischen Elektronen.

Die genannten Autoren haben mit Hilfe anschaulicher Überlegungen die Bedeutung dieser Funktion plausibel gemacht. Vor allem hat STUECKELBERG betont, dass nur sie Wirkungen darstellt, die durch ein Feld mit positiver Energie vermittelt werden. Da diese Funktion darum die kausale Abfolge der Ereignisse richtig beschreibt, nennt sie STÜCKELBERG „kausale D-Funktion" (causale).

Die Überlegungen beider Autoren sind sehr ähnlich und im wesentlichen auch zutreffend. Im einzelnen sind sie jedoch nicht völlig klar. Dies rührt vor allem daher, dass in den betreffenden Betrachtungen die Komplementarität der energetischen und der zeitlichen Verhältnisse nicht beachtet wird.

Sowohl STUECKELBERG wie FEYNMAN charakterisieren $D_c(x_2-x_1)$ dadurch, dass sie für $t_2 > t_1$ durch eine Funktion, die nur positive Frequenzen enthält, dargestellt werden kann, während die Darstellung für $t_2 < t_1$ nur negative Frequenzen enthält. Dadurch wird der Eindruck erweckt, man könne das Vorzeichen der Energieänderung, die ein Teilchen bei einem Prozess erleidet, angeben, wenn dieser Prozess in einem bestimmten Zeitpunkt $t_2 = t_1$ stattfinden soll. Das ist aber natürlich unmöglich. Die Folge davon ist, dass bei dieser Betrachtungsweise scheinbar Wirkungen auftreten, die sich mit Überlichtgeschwindigkeit ausbreiten.

$D_c(x)$ kann z. B. in der Form

$$D_c(x) = D_s(x) + \frac{i}{2} D_1(x)$$

geschrieben werden. Hier ist D_s die der Wellengleichung zugeordnete, symmetrische Green'sche Funktion und $D_1(x)$ die symmetrische Lösung der homogenen Wellengleichung. $D_1(x)$ verschwindet für raumartige x nicht, was den erwähnten Wirkungen entsprechen würde. Man muss jedoch beachten, dass der Zeitpunkt, in welchem ein Quantensprung stattfindet, im allgemeinen gar nicht genau festgelegt werden kann. Falls dies berücksichtigt wird, so kann D_c im Sinne Stückelbergs und Feynmans gedeutet werden, ohne dass man auf unphysikalische Aussagen stösst.

Es soll hier eine, wie mir scheint, korrekte Deutung der Funktion D_c gegeben werden.

Eine physikalische Deutung von D_c erweist sich als besonders nützlich, wenn man die Streumatrix, die aus einer allgemeinen, nicht mit Hilfe einer Hamiltonfunktion formulierbaren Theorie folgt, diskutieren will.

Wir werden hier die kürzlich von HEISENBERG[4]) vorgeschlagene, konvergente Theorie näher untersuchen. In dieser Theorie tritt in gewissen Matrixelementen der Streumatrix an Stelle von D_c die Funktion D_s auf. Mit Hilfe der Interpretation von D_c lässt sich einsehen, dass darum in Heisenbergs Theorie die Wechselwirkung teilweise durch Quanten negativer Energie vermittelt wird.

1. Um die Überlegungen nicht unnötig zu komplizieren, will ich mich auf die Diskussion der elektrodynamischen Wechselwirkung zwischen Elektronen beschränken. Man erkennt jedoch leicht, dass dieser Einschränkung keine grundsätzliche Bedeutung zukommt. Insbesondere ist es gleichgültig, ob die Teilchen, welche die Wirkung vermitteln, der Fermi- oder der Bose-Statistik genügen.

Wir betrachten ein Matrixelement, das der Møller'schen Wechselwirkung entspricht:

$$\text{const.} \int (dx)^4 \int (dy)^4 \, \bar{\psi}(x) \, \gamma_\mu \, \psi(x) \, D_c(x-y) \, \bar{\psi}(y) \, \gamma_\mu \, \psi(y) \quad (1.1)$$

Damit der Impulssatz die durch den Operator (1.1) beschriebenen Übergänge nicht beschränkt, wollen wir annehmen, dass sich die Elektronen in einem äusseren Felde bewegen, das streng berücksichtigt sein soll.

Die Funktion $D_c(x)$ in (1.1) wollen wir folgendermassen darstellen: Wir betrachten die Lösungen der inhomogenen Gleichungen

$$\Box f(x) = -\delta_{\pm}(x)\,^{*}) \tag{1.2}$$

wobei

$$\delta_{\pm}(x) = \frac{1}{2\pi}\,\delta(\vec{r})\int_0^{\infty} e^{\pm i\nu t}\,d\nu = \delta(\vec{r})\cdot\frac{1}{2}\left(\delta(t) \pm \frac{i}{\pi t}\right)$$

Die Gleichungen (1.2) kann man mit Hilfe retardierter oder avancierter Potentiale integrieren. Wir nennen diese Lösungen

$$D^{\pm}_{\substack{\text{ret}\\ \text{av}}} = \frac{1}{4\pi|\vec{r}|}\,[\delta_{\pm}(t)]_{\substack{\text{ret}\\ \text{av}}} = \frac{1}{4\pi|\vec{r}|}\,\delta_{\pm}(t \pm |\vec{r}|) \tag{1.3}$$

Hier ist

$$\delta_{\pm}(t) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty} e^{\pm i\nu t}\,d\nu$$

Jetzt gilt

$$D_c = D^{+}_{\text{ret}} + D^{-}_{\text{av}} \tag{1.4}$$

Der Vollständigkeit halber geben wir noch an, wie die übrigen D-Funktionen durch $D^{\pm}_{\substack{\text{av}\\ \text{ret}}}$ dargestellt werden können.

$$\left.\begin{aligned} D_s &= \frac{1}{2}\,(D^{+}_{\text{ret}} + D^{+}_{\text{av}} + D^{-}_{\text{ret}} + D^{-}_{\text{av}}) \\ D_0 &= D^{+}_{\text{ret}} - D^{+}_{\text{av}} + D^{-}_{\text{ret}} - D^{-}_{\text{av}} \\ D_1 &= \frac{1}{i}\,(D^{+}_{\text{ret}} - D^{+}_{\text{av}} - D^{-}_{\text{ret}} + D^{-}_{\text{av}}) \end{aligned}\right\} \tag{1.4}$$

Die Darstellung (1.4) von D_c ist von der sonst in der Literatur verwendeten verschieden. Sie erweist sich jedoch als zweckmässig, weil in der Quantentheorie der Felder, unabhängig von Spin und Statistik der Feldquanten, positive und negative Frequenzen in bestimmter Weise den Emissions- und Absorptionsoperatoren zugeordnet sind. Die Fourierkomponenten von $\psi(x)$ und $\overline{\psi}(x)$ sind nämlich Emissions- oder Absorptionsoperatoren, je nachdem die zugehörige Frequenz positiv oder negativ ist (N. B. Die Frequenz von $e^{i|\nu|t}$ bezeichnen wir als positiv).

Das hat zur Folge, dass die Fourierkomponenten des Operators $\psi\gamma_\mu\psi$ Übergängen, bei denen die Energie zu- oder abnimmt, zugeordnet sind, je nachdem die zugehörigen Frequenzen positiv oder negativ sind.

---

*) x bedeutet den Vierervektor (x, y, z, t), während $\vec{r}$ den räumlichen Vektor (x, y, z) bedeutet.

Wir betrachten jetzt den Operator

$$\int_{V_x} (dx)^4 \int_{V_y} (dy)^4 \bar{\psi}(x)\, \gamma_\mu \psi(x)\, D_c(x-y)\, \bar{\psi}(y)\, \gamma_\mu \psi_y(y) \qquad (1.5)$$

wobei V_x, V_y gewisse endliche, vierdimensionale Gebiete bedeuten, über die integriert wird. Der Operator (1.1) kann als Summe von Operatoren der Art (1.5) aufgefasst werden.

(1.5) beschreibt die elektromagnetische Wirkung eines Elektronenüberganges im Gebiete V_x auf einen Übergang im Gebiet V_y.

Falls die zeitliche Ausdehnung des Gebietes V_x hinreichend gross ist, kann man das Vorzeichen der Energieänderung, die mit dem Übergange in V_x verbunden ist, festlegen. Nimmt die Energie beispielsweise ab, so entspricht dies physikalisch der Emission eines Lichtquants. Dieses wird hernach im Gebiete V_y absorbiert werden. Daher muss man erwarten, dass die diesem Falle entsprechenden Matrixelemente von (1.5) nur dann nicht verschwinden, wenn das Gebiet V_y später liegt als V_x. Da V_x und V_y eine gewisse zeitliche Ausdehnung haben, so ist diese Aussage so zu verstehen, dass es in V_x Punkte geben muss, die durch einen in die Zukunft weisenden Lichtstrahl mit Punkten in V_y verbunden werden können. Die Wirkung von V_x auf V_y muss somit durch das retardierte Potential beschrieben werden. Wenn andererseits die Energie in V_x zunimmt, so muss das avancierte Potential die Wirkung von V_x auf V_y beschreiben, oder, was auf dasselbe herausläuft, es muss eine retardierte Wirkung von V_y auf V_x auftreten. Diese Koppelung der Vorzeichen der Energieänderung bei Elektronenübergängen und ihrer zeitlichen Reihenfolge ist charakteristisch für eine Theorie, bei der die Wechselwirkung durch Felder mit positiver Energie vermittelt wird.

Die Darstellung von D_c gemäss (1.4) zeigt nun, dass der Operator (1.5) die beschriebenen Eigenschaften besitzt.

Wir wollen z. B. den Fall betrachten, dass in V_x ein Übergang stattfinde, bei welchem die Elektronenenergie im Mittel um $h\nu_0$ abnimmt. Das Gebiet, V_x liege bei $t = 0$ und habe eine Ausdehnung der Grössenordnung T. Wir setzen dementsprechend in (1.5) für $\bar{\psi}(x)\, \gamma_\mu \psi(x)$ die Funktion

$$\varrho_\mu(\vec{x})\, e^{-i\nu_0 t - \frac{t^2}{T^2}} \qquad (1.6)$$

ein, wobei wir bei der Integration über $(dx)^4$ über alle Zeiten integrieren können.

Da die Energieänderung des betrachteten Prozesses negativ sein soll, darf (1.6) keine positiven Frequenzen enthalten. Das ist dann mit grosser Näherung erfüllt, wenn

$$\nu_0 T \gg 1 \tag{1.7}$$

Die Energieänderung selber ist dann wohl bestimmt. Integriert man nun über t, so liefert nur der Anteil D^+_{ret} von D_c einen Beitrag und man erhält

$$\int_{v_x} (dx)^3 \int_{V_y} (dy)^4 \varrho_\mu(\vec{x}) \frac{1}{4\pi |\vec{r}|} e^{i\nu_0 (t_y - |\vec{r}|)} e^{-\frac{|t_y - |\vec{r}||^2}{T^2}} \bar{\psi}(y) \gamma_\mu \psi(y) \tag{1.8}$$

Hier ist $|\vec{r}| = |\vec{x} - \vec{y}|$ und v_x ist ein dreidimensionales Volumenelement.

Der Faktor $e^{-\frac{(t_y - |r|)^2}{T^2}}$ beschreibt das „kausale" Verhalten. Er ist nur dann merklich von Null verschieden, wenn $t_y \sim |\vec{r}|$ mit einem Spielraum $\pm T$, was der Dauer des Prozesses in v_x entspricht.

Wenn das Gebiet V_y wirklich später als V_x liegen soll, dann muss $t_y > T$ sein. Dann ist $|\vec{r}|\, \nu_0 \gg 1$ und man befindet sich in der Wellenzone des in v_x stattfindenden Übergangs. In dieser kann das durch die Elektronen in V_y erzeugte Feld als freies Lichtfeld aufgefasst werden. Die Deutung der Wechselwirkung mit Hilfe der Vorstellung von emittierten und nachher absorbierten Lichtquanten ist deshalb in diesem Falle sicher sinnvoll. Zugleich wird es dann möglich, indem man die Lichtquanten explicite in die Theorie einführt, den Energiesatz für den Emissionsprozess und den Absorptionsprozess einzeln zu erfüllen.

Falls in der Streumatrix an Stelle von D_c eine andere Green'sche Funktion auftritt, die auch D^+_{av} und D^-_{ret} enthält, so kann der Energiesatz für die einzelnen Übergänge nur erfüllt werden, wenn man Quanten negativer Energie einführt. Will man hierauf verzichten, so wird der Energiebegriff viel weiter eingeschränkt, als dies durch die Komplementarität von Energie und Zeit schon in der Quantentheorie der Fall ist.

Das von Stückelberg verwendete Kausalitäts-Postulat ist somit mit der Forderung gleichwertig, dass die Beschreibung des energetischen Ablaufs der Prozesse nur durch die Komplementarität von Energie und Zeit beschränkt sein soll, und dass die Wechselwirkung durch Quanten positiver Energie vermittelt werde.

2. Heisenberg[4]) hat kürzlich eine konvergente Feldtheorie zur Diskussion gestellt. Diese Theorie ist jedoch nicht „kausal" in dem soeben beschriebenen Sinne. Auf Grund unserer Betrachtungen kann man dies sofort erkennen.

Ich möchte zuerst kurz die Grundlagen dieser Theorie in etwas vereinfachter Form zusammenfassen.

Man betrachte eine hinreichend grosse Zahl von Spinorfeldern ψ_k denen die Massen $\varkappa_k$ zugeordnet sind. Diese quantisiere man in der üblichen Weise. Auch die Feldenergie soll einfach durch die Summe der Energien der Felder gegeben sein. Um diese Felder zu koppeln, mache man folgenden Ansatz:

Man bildet zuerst

$$\Psi = \sum_k C_k \psi_k; \; \overline{\Psi} = \sum_k C_k \overline{\psi}_k \tag{2.1}$$

$\overline{\Psi}$ ist nicht im gewöhnlichen Sinne zu Ψ konjugiert, weil die C_k teilweise imaginär sein sollen.

Zufolge der Vertauschungsrelationen der ψ_k gilt

$$\{\overline{\Psi}(x), \Psi(y)\} = \frac{1}{i} \sum_k C_k^2 S_k(x-y) = S_0^R(x-y) \tag{2.2}$$

Dabei ist $S_k(x)$ die D_0 entsprechende Spinorfunktion, welche der Masse $\varkappa_k$ zugeordnet ist. Über die C_k^2 verfüge man so, dass $S_0^R(x)$ regulär ist. Das ist möglich, wenn die C_k^2 auch negativ sein dürfen.

Jetzt führe man die nicht hermitesche Grösse

$$H(x) = A\left(\overline{\Psi}(x), \Psi(x)\right)\left(\overline{\Psi}(x), \Psi(x)\right) \tag{2.3}$$

ein, mit deren Hilfe man die nicht unitäre Matrix T

$$T = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i)^n}{n!} \int (dx_1)^4 \cdots \int (dx_n)^4 \, P[H(x_1) \cdots H(x_n)] \tag{2.4}$$

bildet. P ist der von Dyson eingeführte Operator, der die chronologische Reihenfolge der Faktoren $H(x_k)$ in (2.4) festlegt. Zufolge der Annahme über die C_k^2 ist T sicher regulär, kann aber nicht als Streumatrix interpretiert werden, weil $H(x)$ nicht hermitesch ist und daher keiner Hamiltonfunktion entsprechen kann.

Man bilde nun die unitäre Matrix

$$S = T(T^*T)^{-1/2} = (TT^*)^{-1/2}T \tag{2.5}$$

welche Heisenberg als Streumatrix interpretiert*). (Falls $H(x)$ hermitesch ist, ist $T = S$.)

*) Die Idendität der beiden Ausdrücke (2.5) für S hat Heisenberg in einer noch nicht veröffentlichten Arbeit bewiesen, in welche ich durch Vermittlung von Prof. Pauli Einblick hatte.[5])

In T ist die chronologische Reihenfolge der Faktoren $H(x)$ gewahrt, so dass hier in den Matrixelementen die „kausale" Funktion $S_c(x)$ erscheint, die D_c entspricht. In S ist dagegen die chronologische Reihenfolge der Faktoren zerstört, so dass hier auch andere Green'sche Funktionen als $S_c(x)$ auftreten.

Entwickelt man S nach A, so erhält man in 2. Näherung (Terme in A^2):

$$S_{(2)} = -\frac{A^2}{2}\int (dx_1)^4 \int (dx_2)^4 P[\mathfrak{H}(x_1), \mathfrak{H}(x_2)] + \frac{A^2}{2}\int (dx_1)^4 \int (dx_2)^4 \varepsilon(x_1 - x_2)\left(\mathfrak{J}(x_1), \mathfrak{J}(x_2)\right) \qquad (2.6)$$

Dabei sind $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{J}$ Real- und Imaginärteil von H:

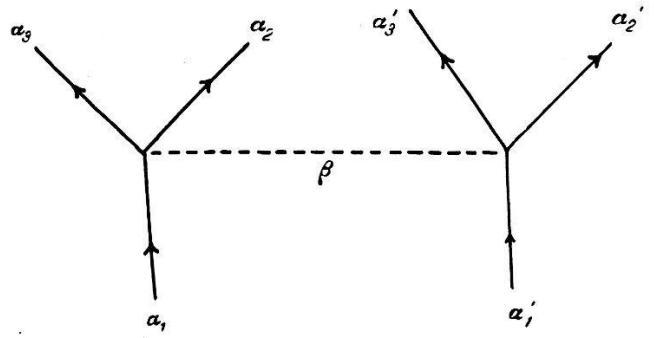
$$\mathfrak{H} = \frac{1}{2}(H + H^*); \qquad \mathfrak{J} = \frac{1}{2i}(H - H^*) \qquad (2.7)$$

$\varepsilon(x)$ ist gleich ± 1, je nachdem $t = x_4 \lessgtr 0$ ist.

Um (2.6) zu diskutieren, führen wir folgende Bezeichnung ein: Man nenne Teilchen, die gemäss (2.1) zu $C_k^2 > 0$ gehören, α-Teilchen, diejenigen, die zu $C_k^2 < 0$ gehören, β-Teilchen.

$\mathfrak{H}$ beschreibt dann Prozesse, bei denen je eine gerade Anzahl α- und β-Teilchen miteinander reagieren, während $\mathfrak{J}$ solche Prozesse beschreibt, bei denen diese Zahlen ungerade sind. Offenbar ist der 2. Term in (2.6) kritisch.

In ihm sind Matrixelemente enthalten, die durch das folgende „Graph" charakterisiert werden können.



Diese Matrixelemente haben die Gestalt

$$\text{const.}\int (dx)^4 \int (dx')^4 \psi^+_{\alpha_2'}(x')\,\psi^+_{\alpha_3'}(x')\,\psi^+_{\alpha_2}(x)\,\psi^+_{\alpha_3}(x)\,\varepsilon(x-x') \cdot S_\beta(x-x')\,\psi^-_{\alpha_1}(x)\,\psi^-_{\alpha_1'}(x') \qquad (2.8)$$

Hier sind die ψ^+ die den α-Teilchen entsprechenden Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren. $S_\beta(x - x')$ ist die in den V. R. auf-

tretende, dem betreffenden α-Teilchen zugeordnete Funktion. Sie kann im Sinne von (1.4), (1.4′) dargestellt werden, und es gilt

$$\varepsilon(x)\, S_\beta(x) = \frac{1}{2}\,(S^+_{\mathrm{ret}} + S^+_{\mathrm{av}} + S^-_{\mathrm{ret}} + S^-_{\mathrm{av}}) \tag{2.9}$$

Deutet man diese Funktion so, wie dies im 1. Abschnitt geschehen ist, so entsprechen S^-_{ret}, S^+_{av} Wirkungen, die durch Quanten negativer Energie vermittelt werden.

Die Streumatrix enthält allerdings keine Matrixelemente, bei denen solche Quanten in den Endzuständen auftreten. Sie werden schliesslich immer absorbiert. Diese Absorption kann jedoch erst nach sehr langer Zeit eintreten, so dass man den Quanten negativer Energie wohl doch physikalische Existenz zuschreiben muss.

Jedenfalls unterscheidet sich HEISENBERGS Theorie nicht nur dann von der üblichen Hamilton-Theorie, wenn sich die Teilchen bis zu Abständen der „universellen Länge" nahekommen, wie dies HEISENBERG auf S. 258 seiner Arbeit behauptet. Teilchen, die einen beliebig grossen, zeitartigen Abstand haben, üben vielmehr Wirkungen aufeinander aus, die nur mit Hilfe von Quanten negativer Energie physikalisch gedeutet werden können. Dieser Umstand führt dazu, dass uns die von HEISENBERG versuchte Lösung des Divergenzenproblems in der Theorie quantisierter Felder nicht befriedigend erscheint. Der Grund für das Versagen der heutigen Feldtheorie liegt doch wohl darin, dass man von ungekoppelten Feldern ausgeht, die hinterher durch einen Ansatz für die Wechselwirkung gekoppelt werden. Dieses Vorgehen ist sowohl vom logischen wie auch vom physikalischen Standpunkte aus unbefriedigend. Es wird jedoch auch von HEISENBERG befolgt.

Zum Schluss möchten wir darauf hinweisen, dass eine Theorie vom eben diskutierten Typus nicht notwendig mit Teilchen vom Spin $\frac{1}{2}$ aufgebaut werden muss.

Man kann neben dem Feld Ψ, das gemäss (2.1) gebildet ist, noch ein Vektorfeld

$$\Phi_\mu = \sum_l b_l\, \varphi^{(l)}_\mu; \qquad \bar{\Phi}_\mu = \sum_l b_l\, \bar{\varphi}^{(l)}_\mu$$

einführen, wobei man wieder über die b_l^2 geeignet verfügt. Mit Hilfe der Koppelung

$$H = B\,(\bar{\Psi}\,\gamma_\mu\,\Psi)\,\Phi_\mu$$

kann man, wie HEISENBERG, eine reguläre Matrix T bilden und aus ihr die Streumatrix S. Nennt man diejenigen Felder, für die c_l^2

und b_l^2 negativ sind wieder β-Felder, so gewinnt man im limes, in welchem die Massen der β-Quanten gegen unendlich gehen, eine regularisierte Theorie vom Typus der Elektrodynamik.

Basel, Seminar für theoretische Physik der Universität.

Nachtrag bei der Korrektur:

1. Ich hatte in Princeton Gelegenheit, mit Prof. HEISENBERG die hier gegen seine Theorie erhobenen Einwände zu diskutieren. Dabei hat sich folgendes ergeben: in meinen Betrachtungen ist implicite vorausgesetzt, dass die Matrix $S(t)$, welche den Zustand zur Zeit t beschreibt, wenn dieser zur Zeit $t = 0$ gegeben ist, die Gruppeneigenschaft $S(t)\, S(t') = S\,(t + t')$ besitze. HEISENBERG hoffte, dass seine Matrizen $S(t) = T(t)\,(T^*(t)\, T(t))^{-½}$ wenigstens annähernd eine Gruppe bilden, wenn t und t' gross gegen die „kleinste Zeit" τ sind. Unsere Betrachtung zeigt aber, dass dies nicht zutrifft, wie gross auch t und t' gewählt werden. Die Matrizen $S(t)$ würden vielmehr nur dann eine Gruppe bilden, wenn man Quanten negativer Energie explizite in die Theorie einführt.

2. Herr Dr. R. JOST macht mich darauf aufmerksam, dass die Theorie „vom Typus der Elektrodynamik", auf die am Ende dieser Arbeit hingewiesen wird, nicht eichinvariant ist, weil der Strom $(\bar{\Psi}\gamma_\mu \Psi)$ keiner Kontinuitätsgleichung genügt. Somit lässt sich Heisenbergs Ansatz auch nicht als formales Hilfsmittel verwenden, um eine Theorie zu „regularisieren".

Literatur.

[1]) Siehe D. RIVIER, Helv. Phys. Acta **22**, 265 (1949). Daselbst weitere Literatur.
[2]) R. P. FEYNMAN, Phys. Rev. **76**, 769 (1949). Siehe auch
[3]) F. J. DYSON, Phys. Rev. **75**, 486, 1736 (1949).
[4]) W. HEISENBERG, Zsch. f. Naturf. **5a**, 251 (1950).
[5]) W. HEISENBERG, Zschr. f. Naturf. **5a**, 367 (1950).