Einfluss von böenartigem Wind auf die Geschossbahn

von **Raymund Sänger.**

(12. X. 1949.)

---

1. Einleitung und Problemstellung.

Schon seit geraumer Zeit ist in der Ballistik der Artilleriegeschosse versucht worden, den Windeinfluss auf das fliegende Geschoss zu erfassen, wobei in erster Linie das Ziel verfolgt wurde, den Einfluss des Windes an den Schiesselementen wenigstens so weit zu korrigieren, dass das Geschoss die im Ausmass der Streuung definierte Nachbarschaft des Zieles erreicht. Die Flugbahnkarten führen zu diesem Zweck Angaben über die Korrektur der Schiesselemente für den Spezialfall eines längs der gesamten Flugbahn örtlich und zeitlich konstanten Windes, d. h. eines sogenannten homogenen Windes. Dieser Idealfall eines homogenen Windes ist in Wirklichkeit nie erfüllt. Der Ballistiker ersetzt daher den längs der Flugbahn veränderlichen tatsächlichen Wind durch einen fiktiven homogenen Wind, den er als ballistischen Wind bezeichnet und der dieselbe Treffpunktverlegung im Mündungshorizont bewirkt wie der tatsächliche Wind. Wie dieser ballistische Wind exakt zu berechnen ist, könnte uns heute die ballistische Störungstheorie genau formulieren; doch wäre dieses Vorgehen sehr verwickelt und unbrauchbar für die Artilleriepraxis. Es müssen daher Näherungsverfahren gesucht werden, die in der Handhabung vor allem bequem und dennoch verträglich sind mit den Anforderungen an die Feuerwirkung.

Eine weitgehende Vereinfachung bringt die Annahme, dass der Wind nach Grösse und Richtung nur von der Höhenkoordinate z abhängig sei. Damit wird a priori der Einfluss von Vertikalströmungen der Luft, der in der Regel von sehr geringem Ausmass ist, unberücksichtigt gelassen und zudem postuliert, dass der Wind auf Entfernungen wie sie bei Geschossflugbahnen auftreten, weder von der geographischen Breite noch Länge abhängig ist. Dies sagt aus, dass der Bewegungszustand der Luft in Punkten gleicher Höhe des aufsteigenden wie des absteigenden Astes der Flugbahn derselbe ist und dass daher mindestens während der Flugdauer der Wind keine zeitliche Veränderlichkeit aufweisen darf. In der Tat zeigen

Radiosondenmessungen, die gleichzeitig an verschiedenen Orten vorgenommen werden, dass der Bewegungszustand der Luft in grosser Höhe immer mehr und mehr jeden lokalen Charakter verliert, nur auf grosse Entfernungen einer Breiten- und Längenabhängigkeit unterworfen ist und auch zeitlich mindestens während eines Vielfachen der Geschossflugzeit invariabel bleibt. Von grossem Vorteil wirkt sich aus, dass der Einfluss auf die Geschossbahn nur bei grossen Flugzeiten merklichen Ausmasses ist und grosse Flugzeiten aber grosse Flughöhen bedingen, weshalb das Geschoss, gerade wenn die Möglichkeit einer merklichen Beeinflussung der Flugbahn durch Wind besteht, sich während des weitaus grössten Teiles der Flugzeit in Luftschichten bewegt, deren Bewegungszustand wohl definiert und bekannt ist.

In der Praxis wird der ballistische Wind des öftern nach dem Ansatz KRITZINGER[1]) berechnet, nach welchem der Einfluss einer horizontal bewegten Luftschicht gleich ist dem Produkt aus Windstärke w_i und Verweilszeit τ_i des Geschosses in der Schicht. Der ballistische Wind w_{ball} ergibt sich damit schlechthin als Summe aller dieser Produkte der vom Geschoss durchwanderten Luftschichten dividiert durch die Gesamtflugzeit T[2]), d. h.

$$w_{\text{ball}} = \frac{\Sigma w_i \tau_i}{T} . \tag{1}$$

Erst in jüngster Zeit ist durch störungstheoretische Überlegungen zu zeigen versucht worden, wie weit der Ansatz KRITZINGER den schiesstechnischen Anforderungen genügen kann. Es ergibt sich, dass der nach (1) berechnete ballistische Wind zu Korrekturwerten der Schiesselemente führt, die jedenfalls für Ziele in der Nachbarschaft des Mündungshorizontes den Einfluss des Längswindes auf die Geschossbahn in der Grössenordnung richtig erfassen, währenddem sich dieses Vorgehen bezüglich des Querwindeinflusses als problematischer erweist.

---

[1]) H. KRITZINGER, Schuss und Schall bei Wetter und Wind, Leipzig 1918.

[2]) Da der zeitliche Gang der Höhenkoordinate z eines Geschosses in vielen Fällen praktisch unabhängig ist vom Kaliber und der Geschossart, erlaubt uns der Ansatz KRITZINGER, den ballistischen Wind — unberührt von den sich später stellenden Feueraufträgen — schon zum vorneherein zu berechnen, indem derselbe für verschiedene Scheitelhöhenintervalle ermittelt und angegeben wird. Erst die sich bei der Durchführung eines Feuerauftrages herausstellende Scheitelhöhe der Flugbahn bringt nachträglich die richtige Zuordnung zwischen ballistischem Wind, Geschütz, Geschossart und Ladung zustande. Gerade in der Möglichkeit des Vorausgebens der Werte des ballistischen Windes ohne jegliche Kenntnis des Feuerauftrages liegt unseres Erachtens der eminente Vorteil des Ansatzes KRITZINGER.

Es ist aber zu vergegenwärtigen, dass die oben erwähnten, mit Radiosonden ausgeführten Windmessungen bereits schon eine Mittelung darstellen, indem die stets vorhandenen Windböen, die sich der allgemeinen Fortbewegung der Luftmassen überlagern, ausgelöscht sind. Der Sondenballon vermag diesen überlagerten Wellenbewegungen zufolge seiner Trägheit nicht zu folgen und die Beobachtungsergebnisse sind von Haus aus vorteilhaft für die Artilleriezwecke vorbereitet, weil wir mit Recht vermuten, dass der Einfluss der Windböen in erster Linie nur Streuungseffekte hervorruft und im Mittel weder zu einer Treffpunktverlegung noch einer Flugzeitänderung führt.

Wir stellen uns die Aufgabe in der Ermittlung des Störungseinflusses der bewegten Luft auf die Geschossbahn der Existenz der Windböen, die sich in starken Schwankungen der Grösse der Windgeschwindigkeit Ausdruck verschafft, Rechnung zu tragen, und zu versuchen, den Einfluss des böenartigen Charakters der Luftbewegung formelmässig zu erfassen und abzuschätzen. Im mathematischen Ausdruck für den böenartigen Charakter der Luftbewegung werden wir allerdings von einer Höhenabhängigkeit der Windgeschwindigkeit absehen, um nicht unsere theoretischen Erörterungen noch weiter formal zu erschweren. Für die Windwellen werden wir denselben Ansatz benutzen, wie er auf dem Gebiete der artilleristischen Schallmessung herangezogen werden konnte, um zu zeigen, wie die Existenz der Windböen zu einer Streuung der Auswertungsergebnisse führt und die Genauigkeit des Verfahrens begrenzt[1]). In unserer Erörterung des Einflusses der Windwellen auf die Geschossbahn werden wir uns aber ausschliesslich auf das Studium der Treffpunktstreuung im Mündungshorizont beschränken und die zugehörigen Flugzeitänderungen als Begleiterscheinung von untergeordnetem Gewicht ausser acht lassen.

2. Einfluss von Längswindwellen auf die Lage des Treffpunktes.

Wir überlagern der allgemeinen, gleichförmigen Bewegung der Luftmasse eine Wellenbewegung, indem wir für die Windgeschwindigkeit

$$w_x(x,t) = w_0 + A \cos\left[\frac{2\pi}{T}\left(t - \frac{x}{u}\right) + \delta\right] \tag{2}$$

schreiben, worin A die Geschwindigkeitsamplitude, T die Periode, δ die Phase und u die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Windwellen bedeutet. Die Windgeschwindigkeit ist damit eine Funktion

[1]) R. Sänger, Artilleristische Schallmessung, Verlag Böniger, Zürich 1938, S. 45 und folgende.

der Abszisse x und der Zeit t geworden. Mit $A = 0$ erhalten wir den Fall des ort- und zeitunabhängigen homogenen Windes. In ähnlicher Weise, wie für Meereswellen abgeleitet werden konnte, sollen die durch (2) definierten Geschwindigkeitswellen einem Dispersionsgesetz in der Form

$$u = \frac{g}{2\pi} T \tag{3}$$

(g = Erdbeschleunigung) gehorchen. Berücksichtigen wir, dass für die Wellenlänge Λ allgemein die Beziehung

$$\Lambda = u \cdot T \tag{4}$$

gilt, so kann das Dispersionsgesetz in der Gestalt

$$u^2 = \frac{g}{2\pi} \Lambda \tag{5}$$

gegeben werden. Der Ansatz (2) stützt sich im wesentlichen auf die Beobachtungen mit empfindlichen, ortsfesten Böenmessern (x = konstant), denen wir entnehmen, dass die Periode T Werte von 3—60 sec. aufweisen kann und die Geschwindigkeitsamplitude A in extremen Fällen Werte bis 10 m/sec annimmt. In der nachstehenden Tabelle I sind die für vier Periodengrössen aus dem obigen Dispersionsgesetz sich ergebenden zugehörigen Werte der Wellengeschwindigkeit u und der Wellenlänge Λ zusammengestellt.

Tabelle I.

T	u	Λ
3 m	4.7 m/sec	14 m
10 m	15.6 m/sec	160 m
20 m	31.2 m/sec	620 m
60 m	93.6 m/sec	5600 m

Die der Periode T nach dem Dispersionsgesetz (3) zugeordneten Werte von Wellengeschwindigkeit und Wellenlänge stimmen verhältnismässig gut überein mit den Wahrnehmungen, welche bisweilen an Wasseroberflächen und ausgedehnten Kornfeldern, über welche Windwellen hinwegstreichen, gemacht werden können; Erscheinungen, die von der Existenz dieser Windwellen in anschaulichster Weise Zeugnis ablegen.

In der formelmässigem Behandlung des Störungseinflusses der Windwellen auf die Lage des Treffpunktes werden wir uns an die Darstellung halten, wie sie der Verfasser in seiner kürzlich erschienenen Monographie „Ballistische Störungstheorie“ verwendet hat[1]). So schreiben wir für die durch einen variablen Wind verursachte Treffpunktverlegung

$$\Delta x_E = -\int_0^E w_x(x,t) \frac{dW_x(a,E)}{dt}\, dt, \tag{6}$$

worin die Funktion $W_x(a, E)$ durch den Ausdruck

$$W_x(a,E) = t_E - t_A + Z(a,E)\frac{tg\,\delta_a}{v_a} - G(a,E)\frac{\cos\delta_a}{v_a} \tag{7}$$

bestimmt ist[2]) und die Zeit t als unabhängige Variable angesprochen wird. Die im Ausdruck (7) auftretenden Funktionen $Z(a, E)$ und $G(a, E)$ bedeuten die ballistischen Stosskoeffizienten, die das Ausmass der Treffpunktverlegung bei einer Störung der Geschwindigkeit v_a und des Neigungswinkels ϑ_a im Punkt a der Flugbahn festlegen[3]).

Berücksichtigen wir jetzt, dass der Wind der Gleichung (2) gehorchen muss, so erhalten wir durch Einsetzen von (2) in (6) für die durch ihn bewirkte Treffpunktverlegung

$$\Delta x_E = w_0 W_x(0,E) - A\int_0^E \cos\left[\frac{2\pi}{T}\left(t - \frac{x}{u}\right) + \delta\right]\frac{dW_x}{dt}\, dt. \tag{8}$$

Das erste Glied der rechten Seite von (8) stellt die durch den homogenen Längswind w_0 verursachte Treffpunktverlegung dar, wobei $W_x(0, E)$ die Verschiebung für den Wind von der Grösse 1 m/sec bedeutet. Dieses erste Glied interessiert uns im weitern nicht besonders, währenddem das zweite Glied der rechten Seite, das die durch die Windwellen verursachte Verschiebung wiedergibt, unser volles Augenmerk in Anspruch nimmt. Indem wir für das Integral

---

[1]) R. Sänger, Ballistische Störungstheorie, Verlag Birkhäuser, Basel, 1949, S. 143—144, Formeln (8.1) und (8.2).

[2]) Für e haben wir den Buchstaben E gesetzt, um darzutun, dass die Treffpunktverlegung im Mündungshorizont gesucht wird. Ferner haben wir durch Aufnahme von t in $W_x(x, t)$ angedeutet, dass der Wind auch zeitlich veränderlich ist. Im weitern ist unserem Zweck angepasster, die Funktion W in gewöhnlichen Variablen und nicht in Cranz-Rothe-Variablen auszudrücken. (7) folgt aber sofort aus (8.2) der Monographie, mit Rücksicht auf die Transformationsgleichungen

$$e^{u_a} = v_a, \quad \mathrm{Sin}\,\Theta_a = tg\,\delta_a \text{ oder } \mathrm{Cos}\,\Theta_a = \frac{1}{\cos\delta_a},$$

δ = Neigungswinkel der Flugbahntangente gegen die Horizontale.

[3]) Siehe Ballistische Störungstheorie, l. c., S. 19; Formel (2.11) in Cranz-Rothe-Variablen ausgedrückt.

in (8), das die Verschiebung des Treffpunktes für die Einheitsamplitude der Windwellen wiedergibt und als *Einheitsverschiebung der Längswindwellen* bezeichnet wird

$$J_x(0,E) = \int_0^E \cos\left[\frac{2\pi}{T}\left(t - \frac{x}{u}\right) + \delta\right] \frac{dW_x}{dt}\, dt \tag{9}$$

setzen, schreibt sich die totale Treffpunktverlegung in der Form

$$\Delta x_E = w_0 W_x(0,E) - A\, J_x(0,E). \tag{10}$$

Das Integral $J_x(0, E)$ repräsentiert sich als Funktion der Flugzeit t, mit den beiden Parametern T und δ. Die Abszisse x im Argument der Cosinusfunktion stellt die Geschossabszisse dar, die als Funktion der Zeit t betrachtet werden muss. Windperiode T und

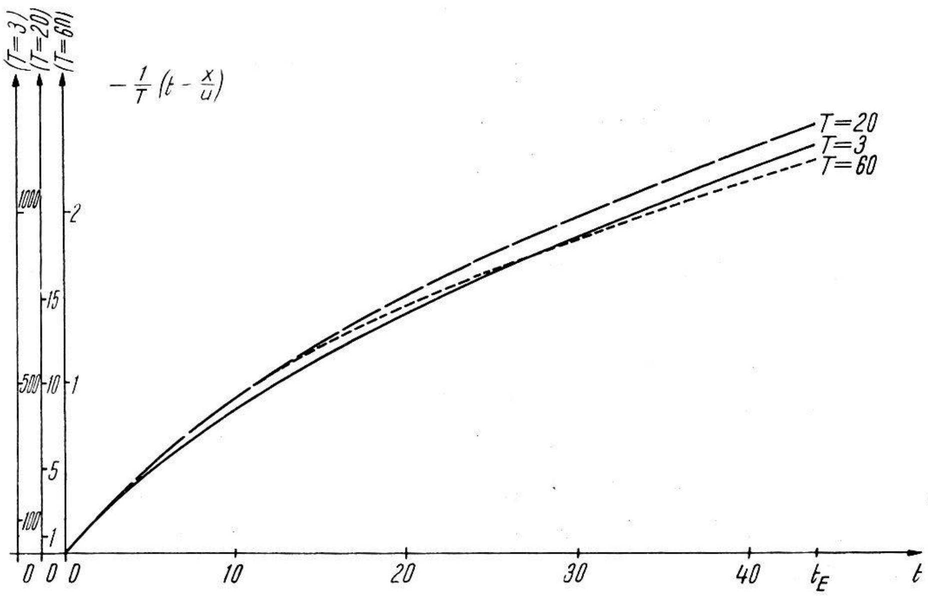

Fig. 1.

$-\dfrac{1}{T}\left(t - \dfrac{x}{u}\right)$ als Funktion von t (sec).

Windphase δ beeinflussen massgeblich den Wert der Einheitsverschiebung $J_x(0, E)$ und bringen auf dem Wege über die trigonometrische Funktion den streuenden Charakter der Treffpunktverschiebung zur Geltung.

Wenn wir jetzt daran gehen, das Integral $J_x(0, E)$ auszuwerten, so haben wir uns zunächst auf eine bestimmte Flugbahn festzulegen; an eine geschlossene Lösung ist in Anbetracht des Cosinusargumentes nicht zu denken, auch dann nicht, wenn wir die Flugbahn durch einen einfachen Ausdruck approximieren würden. Wir wählen als Flugbahn ein Beispiel aus der oben zitierten Monographie des Verfassers, und zwar das Beispiel STANKE[1]) das einer Elevation von 22° entspricht und für welche bereits merkliche Windeinflüsse erwartet werden können.

In Fig. 1 ist der Verlauf der Grösse $-\frac{1}{T}\left(t-\frac{x}{u}\right)$ wie er sich aus den von STANKE gegebenen Tabellen ergibt, für drei Werte der Windperiode ($T = 3$, 20, 60 sec) dargestellt, wobei der Masstab diesen drei Parameterwerten angepasst ist. Indem wir hernach den in Fig. 1 illustrierten Verlauf der Grösse $\frac{1}{T}\left(t-\frac{x}{u}\right)$ unserer Auswertung des Integrals $J_x(0, E)$ zugrunde legen, lassen wir uns eine kleine Vernachlässigung zu Schulden kommen, weil wir schlechthin für die Geschossabszisse x und nicht $x_t + \Delta x_t$ gesetzt haben, wo Δx_t die

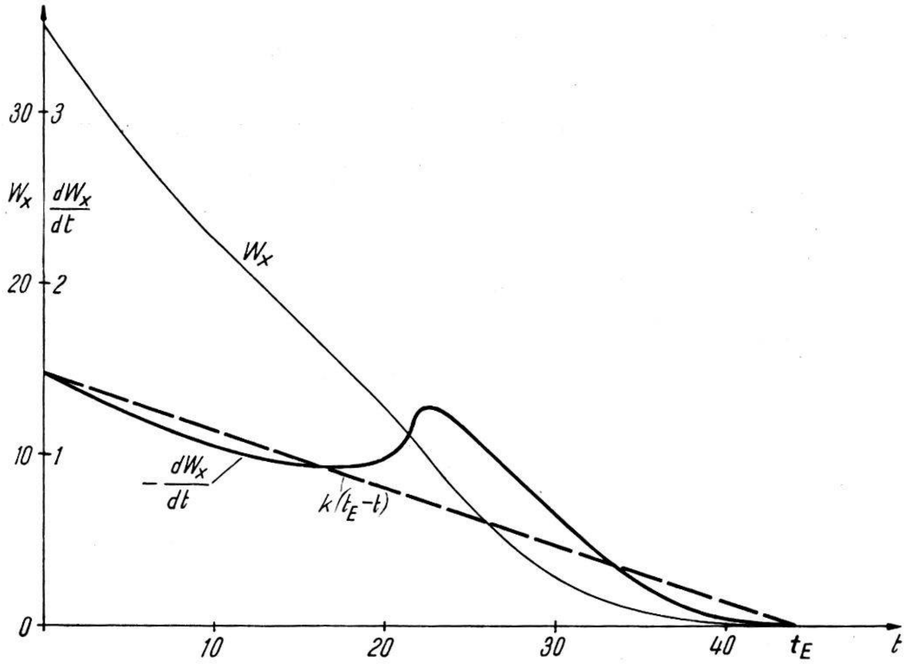

Fig. 2.

Der zeitliche Verlauf der Funktionen $W_x(a, E)$ und $\frac{dW_x(a, E)}{dt}$.

durch den Wind zur Zeit t verursachte Verschiebung bedeutet. Doch sind insbesondere für $w_0 = 0$ diese Verschiebungen gemessen zur Abszissengrösse x sehr klein und die Vernachlässigung in jeder Beziehung verträglich mit unserem Vorhaben.

Fig. 2 illustriert den zeitlichen Verlauf der Funktion $W_x(a, E)$, wie er sich nach (7) aus den von STANKE tabellierten Stosskoeffizienten Z und G ergibt, ferner den aus diesem folgenden zeitlichen Gang der Funktion $\frac{dW_x(a, E)}{dt}$, der durch graphische Differentiation

[1]) P. STANKE, Wehrtechnische Monatshefte **42**, 560, 1938; **43**, 35, 63, 1939.

ermittelt wurde. Ferner ist die Gerade $k(t_E - t)$ eingetragen, mit welcher die Funktion $\frac{dW_x}{dt}(t)$ weiter unten genähert werden soll.

Schliesslich folgt in Fig. 3 bzw. 4 die graphische Darstellung des Integranden

$$\cos\left[\frac{2\pi}{T}\left(t - \frac{x}{u}\right) + \delta\right] \frac{dW_x(a, E)}{dt}$$

des Integrals $J_x(0, E)$ als Funktion der Zeit t, zusammen mit der

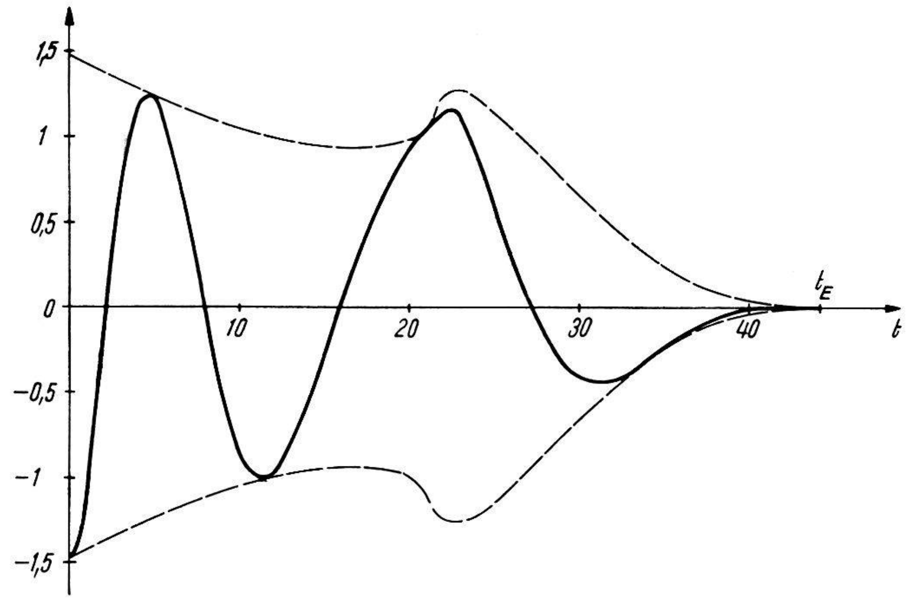

Fig. 3.
Zeitlicher Verlauf des Integranden
$\cos\left[\frac{2\pi}{T}\left(t - \frac{x}{u}\right)\right] \frac{dW_x(a, E)}{dt}$ für $T = 60$ sec

Umhüllungskurve $\frac{dW_x(a, E)}{dt}$, und zwar für die Windperiode $T = 60$ sec und für die Windphase $\delta = 0$, bzw. $\delta = -\frac{\pi}{2}$ [1]). Die graphische Integration liefert für die beiden Fälle $J_x(0, E) = 1{,}8$ sec. bzw. $-1{,}9$ sec, d. h. die durch die Windwellen *bewirkte Treffpunktverlegung* beträgt demnach $\Delta x_E = 1{,}8 \text{ sec} \cdot A$ bzw. $-1{,}9 \text{ sec} \cdot A$ ($A = 0$ bis 10 m/sec).

Brächten wir den zeitlichen Gang des Integranden

$$\cos\left[\frac{2\pi}{T}\left(t - \frac{x}{u}\right) + \delta\right] \frac{d\,W_x(a, E)}{dt}$$

auch für kleinere Windperioden als $T = 60$ sec zur Darstellung, so würden wir im Charakter ähnliche Figuren erhalten, allerdings mit

[1]) Der Integrand lautet mit δ eingesetzt $\cos\left[\frac{2\pi}{T}\left(t - \frac{x}{u}\right)\right] \frac{dW_x(a, E)}{dt}$ bzw. $\sin\left[\frac{2\pi}{T}\left(t - \frac{x}{u}\right)\right] \frac{dW_x(a, E)}{dt}$.

zahlenmässig vermehrten Pendelungen des Integrandenwertes um die x-Achse, die aber alle innerhalb der Umhüllungskurve $\frac{dW_x(a, E)}{dt}$ verliefen. Die nachherige Integration ergäbe Werte der Einheitsverschiebung $J_x(0, E)$ der Windwellen, die notwendigerweise wesentlich kleiner ausfallen würden als für $T = 60$ sec und praktisch jede Bedeutung einbüssten.

Wir wollen diese Aussage noch durch eine Näherungsrechnung stützen und setzen im Argument des Cosinus genähert

$$\frac{1}{T}\left(t - \frac{x}{u}\right) = \frac{N}{t_E} \cdot t\,. \tag{11}$$

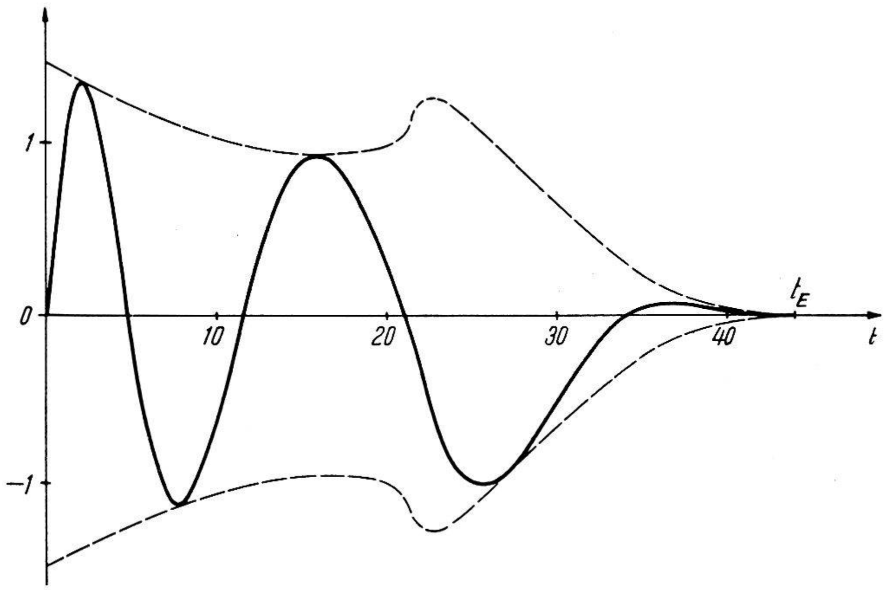

Fig. 4.

Zeitlicher Verlauf des Integranden

$$\sin\left[\frac{2\pi}{T}\left(t - \frac{x}{u}\right)\right] \frac{dW_x(a, E)}{dt} \quad \text{für } T = 60 \text{ sec}$$

N bestimmen wir indem wir berücksichtigen, dass für $t = t_E$ Gleichung (11) ebenfalls zu Recht bestehen muss, d. h.

$$N = \frac{1}{T}\left(t_E - \frac{x_E}{u}\right). \tag{12}$$

Wir haben damit die Anzahl der Pendelungen des Integranden

$$\cos\left[\frac{2\pi}{T}\left(t - \frac{x}{u}\right) + \delta\right] \frac{dW_x(a, E)}{dt}$$

um die x-Achse, die verschiedener, genauer ausgedrückt, wachsender Periode sind, ersetzt durch eine gleiche Zahl N von Pendelungen, die aber alle gleichperiodig sind.

Indem wir im weitern die Funktion $\frac{dW_x(a, E)}{dt}$ noch durch die bereits oben erwähnte Gerade $k(t_E - t)$ approximieren, wobei in unserem Beispiel $k = 0{,}0336 \text{ sec}^{-1}$ ist, lautet das Integral $J_x(0, E)$, das die Einheitsverschiebung der Windwellen anzeigt

$$J_x(N, \delta) = k \int_0^{t_E} (t_E - t) \cos\left[2\pi \frac{N}{t_E} t + \delta\right] dt. \tag{13}$$

Durch Integration, die sich hier in geschlossener Form durchführen lässt, folgt schliesslich als Abschätzung für die Einheitsverschiebung

$$J_x(N, \delta) = \frac{k t_E^2}{2\pi N}\left[-\sin\delta - \frac{1}{2\pi N}\cos(2\pi N + \delta) + \frac{1}{2\pi N}\cos\delta\right] \tag{14}$$

d. h. die Einheitsverschiebung der Windwellen nimmt mindestens umgekehrt proportional zur Anzahl N der Pendelungen des Integranden um die x-Achse ab. Die folgende Tabelle II, in der für vier Werte der Windperiode T die zugehörigen Werte von N aufgeführt sind (im Beispiel Stanke ist $x_E = 17085\ m$, $t_E = 44{,}11$ sec), zeigt wie ausgesprochen schnell die Zahl dieser Pendelungen mit abnehmendem T zunimmt, so dass bei Windperioden $T < 60$ sec in der Tat das Integral $J_x(0, E)$ mit abnehmender Periode praktisch rasch verschwindet und damit die Windwellen jeden Einfluss auf die Lage des Treffpunktes verlieren.

Tabelle II.

T	N
3 sec	1200
10 sec	105
20 sec	25.2
60 sec	2.31

Anzahl der Pendelungen des Integranden.

Um zu zeigen, dass unsere Abschätzung (14) für die Einheitsverschiebung $J_x(0, E)$ wenigstens grössenordnungsmässig zum richtigen Wert führt, berechnen wir die sich aus (14) für $T = 60$ sec ($N = 2{,}31$) ergebenden Werte und finden für $\delta = 0$ bzw. $\delta = -\frac{\pi}{2}$ $J_x(N, \delta) = +\,0{,}43$ sec bzw. $-\,4{,}8$ sec, d. h. Werte die mit den oben berechneten genauen Werten im Rahmen unserer Näherung verträglich sind.

Wir stellen abschliessend fest, dass böenartiger Längswind nur insofern einen Beitrag an die Längenstreuung liefern kann, als die Perioden der Windwellen die maximal möglichen Höchstwerte ($T = 60$ sec) aufweisen und die Geschwindigkeitsamplituden A der Windwellen ebenfalls Höchstwerte ($A = 10$ m/sec) annehmen. Aber auch dann stellen die zu erwartenden Treffpunktverlegungen $\Delta x_E = A \cdot J_x(0, E)$ nur einen verhältnismässig kleinen Bruchteil der gesamten empirisch bekannten Längenstreuung[1]) dar.

3. Einfluss von Querwindwellen auf die Lage des Treffpunktes.

Der formelmässige Ausdruck für einen böenartigen Querwind gegen die Flugbahn lautet, in Analogie zu (2),

$$w_y\,(y,t) = w_0 + A \cos\left[\frac{2\pi}{T}\left(t - \frac{y}{u}\right) + \delta\right]. \tag{15}$$

Ferner hätte die der Gleichung (6) entsprechende Störungsgleichung die Form

$$y_E = -\int_0^E w_y\,(y,t)\,\frac{d W_y(a,E)}{dt}\,dt, \tag{16}$$

worin

$$W_y\,(a,E) = t_E - t_a - \frac{x_E - x_a}{v_a \cos\delta_a} \tag{17}$$

bezeichnet und y_E die durch den Wind bewirkte seitliche Abtrift von der anfänglichen Flugbahnebene bedeutet. Leider erweist sich der beim Längswind begangene Weg hier als unmöglich, indem wir den funktionellen Zusammenhang zwischen der Abtrift y und der Zeit t nicht ohne weiteres kennen, weil das Austreten des Geschosses aus der Flugbahnebene erst durch den Windeinfluss zustande kommt. Wir sind daher genötigt, direkt von der Differentialgleichung der Geschossbewegung in der y-Richtung auszugehen; etwa in (15) die Koordinate y als die durch den homogenen Wind w_0 verursachte Abtrift y_I zum vorneherein anzusprechen, würde uns keinen merklichen Vorteil bringen, weil auch dies zur Voraussetzung hätte, dass die Differentialgleichung der seitlichen Geschossbewegung wenigstens für den Spezialfall des homogenen Windes bereits integriert ist.

Die Bewegungsgleichung des Geschosses in der y-Richtung können wir in der Form

$$\frac{dy^2}{dt^2} = \left(w_y - \frac{dy}{dt}\right)\cdot\frac{b}{v} \tag{18}$$

---

[1]) Die 50% Längenstreuung ist in unserem Beispiel ca. 150 m anzunehmen.

geben, worin b die Verzögerung des Geschosses bezüglich der eigentlichen normalen Flugbahnbewegung bedeutet. Betreffend der Herleitung der Gleichung verweisen wir wiederum auf die bereits oben zitierte Monographie des Verfassers[1]). Führen wir den Ausdruck (15) für die Windwellen in (18) ein, so erhalten wir für die Differentialgleichung der seitlichen, durch den Bewegungszustand der Luft bewirkten Geschossbewegung

$$\frac{dy^2}{dt^2} + \frac{b}{v}\frac{dy}{dt} - \frac{b}{v} w_0 - A\frac{b}{v}\cos\left[\frac{2\pi}{T}\left(t - \frac{y}{u}\right) + \delta\right] = 0 \cdot \qquad (19)$$

$\frac{b}{v}$ ist hier als bekannte Funktion der Zeit (normale Flugbahnbewe-

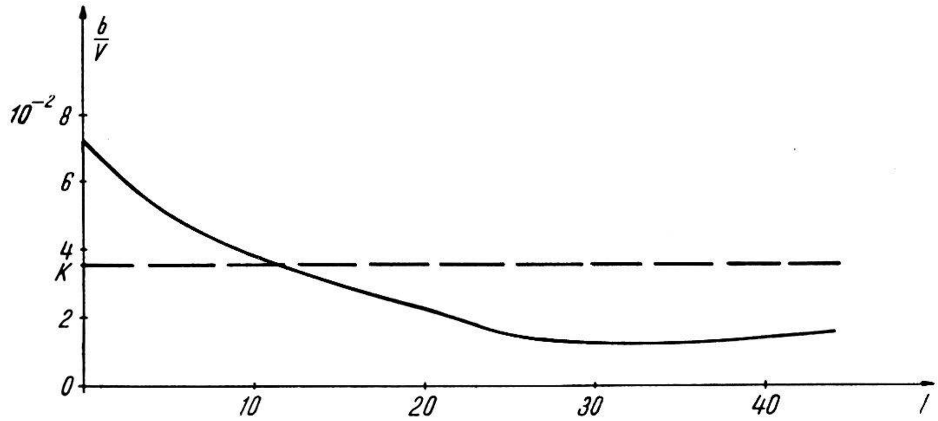

Fig. 5.

$\frac{b}{v}$ als Funktion der Zeit.

gung) zu betrachten, wie sie für das Beispiel STANKE in Fig. 5 wiedergegeben ist.

Die Integration der Bewegungsgleichung (19) wird uns beträchtliche Mühe kosten, solange uns nicht moderne elektronische Rechenmaschinen zur Verfügung stehen. Wir wollen aber von einer exakten Integration von (19) Umgang nehmen und eine Abschätzung des Querwindwelleneinflusses vornehmen, indem wir

1. $\frac{b}{v}$ als konstant annehmen und die Konstante gleich einem zweckmässigen Mittelwert $k \simeq 0{,}036\ \text{sec}^{-1}$, wie er in Fig. 5 eingezeichnet ist, setzen.

---

[1]) Gemäss Formel (7.24) auf S. 127 gilt für die seitliche Geschossbewegung die Differentialgleichung

$$\frac{dy^2}{dt^2} = \left(w_y - \frac{dy}{dt}\right)\frac{c(z)\,f(v,a)}{v}$$

(a = Schallgeschwindigkeit), wobei

$$c(z)\,f(v,a) = c(z)\,v^2\cdot\psi\left(\frac{v}{a}\right)$$

nichts anderes als die Geschossverzögerung b bedeutet.

2. versuchsweise in Anlehnung an den Fall der Längswindwellen die Näherung

$$\frac{1}{T}\left(t-\frac{y}{u}\right)=\frac{N}{t_E}\,t=\frac{h}{2\pi}\,t \tag{20}$$

postulieren $\left(N=\frac{h}{2\pi}\,t_E\right)$, worin h als Konstante angesprochen sein will. Selbstverständlich soll (20) auch für $t=t_E$ bestehen.

Mit $\frac{b}{v}=k$ und dem Postulat (20) nimmt die Differentialgleichung der seitlichen Geschossbewegung die vereinfachte Form

$$\frac{d y^2}{d t^2}+k\frac{d y}{d t}-k\,w_0-A\,k\cos\left[h\,t+\delta\right]=0 \tag{21}$$

an. Die Integration liefert für die gesuchte seitliche, durch den Wind verursachte Abtrift den Ausdruck

$$\begin{aligned} y=&\left\{\frac{A}{h^2+k^2}\left[h\sin\delta+k\cos\delta\right]+\frac{w_0}{k}\right\}e^{-kt}\\ &+\frac{A\,k}{h\,(h^2+k^2)}\left[-h\cos\left(h\,t+\delta\right)+k\sin\left(h\,t+\delta\right)\right]\\ &+w_0\,t-\frac{w_0}{k}-\frac{A}{h}\sin\delta\,. \end{aligned} \tag{22}$$

Mit $A=0$ erhalten wir aus (22) die durch den *homogenen Seitenwind* w_0 *hervorgerufene Abtrift*

$$y_I=\left[t-\frac{1}{k}\left(1-e^{-kt}\right)\right]w_0\,. \tag{23}$$

Es ist dies genau dieselbe Gleichung, die wir durch direkte Integration der Gleichung (21), in der wir zuvor $A=0$ gesetzt hätten, erhielten, und welche Gleichung mit $A=0$ vollständig unberührt von unserem Postulat (20) ist. Im weitern verlangen wir, dass die Konstante h (bzw. N) aus der Beziehung (20) dadurch bestimmt werden soll, dass für $t=t_E$ die Seitenkoordinate $y=y_I$, d. h. gleich der durch den homogenen Wind allein verursachten Abtrift gesetzt und angenommen wird, dass die durch die Windwellen selber bewerkstelligte seitliche Treffpunktverlegung y_{II} im Argument der Cosinusfunktion in (19) von nur untergeordneter, zu vernachlässigender Bedeutung ist. Für diese *Abtrift* y_{II}, *für welche die Windwellen allein verantwortlich sind,* erhalten wir, wenn wir (23) von (22) in Abzug bringen und folgerichtig für t noch t_E schreiben

$$y_{II}=A\cdot J_y\,(h,\delta)\,, \tag{24}$$

wobei die *Einheitsabtrift* J_y gegeben ist durch

$$J_y(h, \delta) = \frac{1}{h^2+k^2}[h \sin \delta + k \cos \delta]\, e^{-k t_E}$$

$$+ \frac{k}{h(h^2+k^2)}[-h \cos(h t_E + \delta) + k \sin(h t_E + \delta)]$$

$$- \frac{1}{h} \sin \delta\,. \tag{25}$$

Wir wollen diese Abtrift noch für zwei ausgezeichnete Werte der Windphase δ, nämlich $\delta = 0$ bzw. $-\frac{\pi}{2}$ geben. So folgt aus (25) für $\delta = 0$

$$J_y(h, 0) = \frac{k}{h^2+k^2}\left[e^{-k t_E} - \cos h\, t_E + \frac{k}{h} \sin h\, t_E\right], \tag{25a}$$

bzw. für $\delta = -\frac{\pi}{2}$

$$J_y\left(h_1 - \frac{\pi}{2}\right) = -\frac{h}{h^2+k^2}\left[e^{-k t_E} + \frac{k}{h} \sin h\, t_E + \frac{k^2}{h^2} \cos h\, t_E\right] + \frac{1}{h}\,. \tag{25b}$$

Wiederum werden je nach der Phasenlage δ der Windwellen, die sich ergebenden seitlichen Treffpunktverschiebungen verschieden ausfallen. Da auch die Grösse h, die gemäss Gleichung (20) auf eine Änderung der Windperiode T, auch implizit über die Windwellengeschwindigkeit u, empfindlich ist, müssen wir vermuten, dass die Werte der seitlichen Abtrift stark streuen und so zum Gesamtbild der an Artilleriegeschossen beobachteten Seitenstreuung beitragen. Mit Rücksicht auf den streuenden Charakter von J_y ist es daher angebracht, den quadratischen Mittelwert

$$\bar{J}_y = \sqrt{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} J_y^2(h, \delta)\, d\delta}$$

für das gesamte Intervall 0 bis 2π der Windphase δ zu ermitteln. Mit (25) erhalten wir für das Quadrat des Mittelwertes

$$\bar{J}_y^2 = \frac{1}{h^2+k^2}\left[\frac{1}{2}(1 - e^{-k t_E})^2 - \frac{k}{h}(1 - e^{-k t_E}) \sin h\, t_E + \frac{k^2}{h^2}(1 - \cos h\, t_E)\right]. \tag{26}$$

Um über die Grössenordnung der zufolge der Existenz der Windwellen nach (24) und (25) zu erwartenden seitlichen Treffpunktverschiebung y_{II} eine Vorstellung zu haben, wollen wir abschliessend noch für vier verschiedene Werte der Windperiode T die sich ergebenden Werte von y_{II} berechnen, wobei wir für die Festsetzung von k einen homogenen Seitenwind von der Grösse $w_0 = 10$ m/sec annehmen und k so dimensionieren, dass sich aus (23) mit $t = t_E =$

44,1 sec die Abtrift $y_I = 220$ m ergibt. Diese durch homogenen Wind verursachte Abtrift y_I ist so gewählt, wie sie nach der strengen Störungstheorie für das Beispiel STANKE folgt; für k finden wir auf diese Weise den schon oben erwähnten Wert von 0,036 sec^{-1}. Aus (20) berechnen sich damit die in der nachstehenden Tabelle III aufgezählten Werte von h und N, aus denen sich mit Hilfe der Beziehung (25) bzw. (25a) oder (25b) für die beiden Phasen $\delta = 0$ und $\delta = -\frac{\pi}{2}$ die ebenfalls aufgeführten Werte von J_y ergeben. Die letzte Kolonne der Tabelle III enthält die mit Hilfe der Formel (26) berechneten quadratischen Mittelwerte $\bar{J}_y$ der seitlichen Einheitsabtrift. (Auch $w_0 = 0$ wäre zulässig, in welchem Falle mit $y = 0$, $t = t_E$, nach (20) h schlechthin gleich $\frac{2\pi}{T}$ resultierte.)

Tabelle III.

T	h	N	J_y $\delta = 0$	J_y $\delta = -\frac{\pi}{2}$	$\bar{J}_y$
3 sec	-0.128 sec^{-1}	$-0{,}90$	-1.56 sec	-7.1 sec	5.1 sec
10 sec	0.427 sec^{-1}	3,00	-0.16 sec	$+1.8$ sec	1.3 sec
20 sec	0.264 sec^{-1}	1,85	-0.26 sec	$+3.4$ sec	2.4 sec
60 sec	0.099 sec^{-1}	0,69	$+0.66$ sec	$+11.7$ sec	8.3 sec

Unter Berücksichtigung, dass $y_{II} = A \cdot J_y$ und A unter Umständen Werte bis 10 m/sec aufweist, entnehmen wir der Tabelle III, dass die durch bögen Wind verursachte Seitenstreuung ein massgebender Teil der beim Schiessen beobachteten Gesamtseitenstreuung (Grössenordnung 30 m)[1]), für welche anderseits auch die Geschosspendelungen verantwortlich sind, ausmachen kann. Allerdings wollen wir nicht verhehlen, dass unsere Berechnungen des Seitenwindwellen-Einflusses wirklich nur eine grobe Schätzung darstellen und höchstens die Grössenordnung der Treffpunktverschiebung geben können. Wir glauben aber, so betrachtet, kommt ihnen doch eine angemessene reelle Bedeutung zu. Doch wollen wir festhalten, dass uns erst die exakte Integration der Differentialgleichung (19), über die seitliche Geschossbewegung, den gewünschten zuverlässigen Aufschluss über den Anteil der Windwellen an der Gesamtseitenstreuung bringen kann.

Zusammenfassend können wir daher aussagen: Während böenartiger Längswind nur zum geringsten Teil für die beim Artillerie-

[1]) 50% Seitenstreuung.

schiessen beobachtete Längenstreuung verantwortlich gemacht werden kann und meistens sogar von verschwindendem Gewicht ist, besteht die Möglichkeit, dass böenartiger Querwind massgeblich die beobachtete Seitenstreuung, die gegenüber der Längenstreuung allerdings merklich kleinere Beträge aufweist, bestimmt und so in vielen Fällen, neben der Geschosspendelung, die Hauptursache der Seitenstreuung darstellen kann.

Der Verfasser möchte Herrn dipl. Math. E. Roth für seine Mitarbeit, insbesondere für die numerischen Auswertungen, bestens danken.

Eidg. Technische Hochschule, Zürich
Institut für technische Physik.