# Apropos des divergences en théorie des champs quantifiés

Autor(en): **Stueckelberg, E.C.G. / Rivier, D.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Helvetica Physica Acta**

Band (Jahr): **23 (1950)**

Heft [3]: **Supplementum 3. Internationaler Kongress über Kernphysik und Quantenelektrodynamik**

PDF erstellt am: **28.03.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-422249

**Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

**Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

**http://www.e-periodica.ch**

# A propos des divergences en théorie des champs quantifiés

par **E. C. G. Stueckelberg** et **D. Rivier,** Genève.

Comme nous le montrons ailleurs[1]), la causalité impose à la matrice $S$ qui décrit l'évolution d'un système une structure bien déterminée: lorsqu'on développe celle-ci suivant les opérateurs de translation dans l'espace des quanta, les coefficients $S^{(i)}[\tau''; u''\cdot\cdot/\tau'; u'\cdot\cdot]$ sont des intégrales multiples où n'apparaissent, à côté des champs liés à un seul point de l'espace temps, que les fonctions*):

$$D^c(x/y) = D^s(x/y) + \frac{i}{2} D^1(x/y) \quad x \neq y \tag{1}$$

Formellement, cette structure est aussi celle que l'on obtient par intégration invariante de l'équation différentielle[2]) d'évolution du système à la différence suivante près: tandis que l'intégration conduit à une expression à première vue déterminée pour la matrice $S$, la construction causale de $S$ laisse une certaine indétermination pour le noyau intégral formé des fonctions $D^c(x/y)$: en effet, de la manière dont ces fonctions sont introduites, il n'est pas possible de leur fixer a priori une valeur au point $x = y$. Cela est essentiel: en effet, si l'on défini aussi en $x = y$ la fonction $D^c(x/y)$ par (1) comme *doit* le faire l'intégration de l'équation différentielle, on est alors conduit à des coefficients $S^{(i)}[\ldots]$ qui divergent en général. Par contre, l'indétermination de la fonction $D^c(x/y)$ au point $x = y$ permet une détermination a posteriori des noyaux intégraux qui conduisaient dans la théorie différentielle à des divergences; cette définition est univoque et donne une valeur finie aux coefficients $S[\ldots]$. Comme nous allons le montrer, il subsiste après cela dans ces coefficients un certain arbitraire; mais celui-ci peut être partiellement éliminé par des considérations physiques.

Le procédé de définition des noyaux intégraux $\Delta^c(x/y)$ est appuyé sur le fait que les divergences proviennent essentiellement des singularités non intégrables des produits de fonctions $D^c(x/y)$, situées aux points $x = y$. Il est alors indiqué de définir les noyaux «vrais» à partir de ceux que donne l'intégration en leur ôtant leurs singularités non intégrables. On y parvient d'abord par l'utilisation

*) Pour les notations, voyez le second travail cité sous [2]).

d'un opérateur $\vartheta$ tel que $\vartheta\, \Delta^c(x/y)$ soit intégrable. Il suffit de prendre pour $\vartheta$ la multiplication par la fonction:

$$\vartheta^{(n)}(iz) = a_{\alpha_1 \ldots \alpha_n} (iz^{\alpha_1}) \cdots (iz^{\alpha_n}) \tag{2}$$

où $z^{\alpha_i} = x^{\alpha_i} - y^{\alpha_i}$, avec sommation de 1 à 4 sur les indices vectoriels $\alpha_1 \ldots \alpha_n$, et où $n$ dépend de l'acuité de la singularité. Puis, pour conserver au résultat sa signification, il est nécessaire de multiplier la valeur de l'intégrale par un opérateur $\vartheta_s$ qui doit se réduire, dans le domaine où $\Delta^s(x/y)$ est intégrable, à l'inverse de $\vartheta$.

La réalisation de ces opérations est simple dans l'espace de FOURIER; si nous écrivons (en prenant pour fixer les idées un terme du deuxième ordre):

$$S^{(2)}(\varphi''/\varphi') = \int (dx'')^4 \varphi''(x'')\, \boldsymbol{\Delta}^c \varphi'(x'') \tag{3}$$

où:

$$\boldsymbol{\Delta}^c \varphi'(x) = \frac{1}{2} \int (dx)^4 \left(D^c(x/y)\right)^2 \varphi'(y)$$

il suffit d'étudier*):

$$\boldsymbol{\Delta}^s \varphi(x) = \int (dy)^4 \Delta^s(x/y)\, \varphi(y) \tag{4}$$

où:

$$\Delta^s(x/y) = \frac{i}{4} (D^1 D^s + D^s D^1)(x-y)$$

qui s'écrit dans l'espace de FOURIER:

$$\boldsymbol{\Delta}^s \varphi(x) = (2\pi)^{-3/2} \int dV(\vec{k})\, \Delta^s(k)\, e^{ikx} \psi(\vec{k}) \tag{5}**)$$

avec:

$$\Delta^s(k) \sim \frac{i}{4} (2\pi)^{-3} \int (dp)^4 \left[ \frac{\delta(p^2 + \varkappa^2_u)}{(k^2-p)^2 + \varkappa^2_u} + \frac{\delta((k-p)^2 + \varkappa^2_u)}{p^2 + \varkappa^2_u} \right] \tag{6}$$

ou encore, en utilisant un algorithme dû à M. SCHWINGER[3]) et en effectuant la translation[4]) $p^\alpha \to p^\alpha + uk^\alpha$

$$\Delta^s(k) \sim \int (dp)^4 \Delta^s(k^2, p^2) \tag{6a}$$

avec:

$$\Delta^s(k^2, p^2) \sim -\frac{i}{4} (2\pi)^{-3} \int_0^1 du\, \delta'[p^2 + (\varkappa^2 + (u - u^2) k^2)] \tag{7}$$

---

*) Nous nous limitons au cas où $\tau''$ et $\tau'$ dans $S^2[\tau''\, \varphi''/\tau'\, \varphi']$ sont des surfaces à l'infini: $\tau'' = -\tau' = x^{4''} = \infty$.

**) $\psi(\vec{k})$ est la composante de FOURIER du paquet d'ondes $\varphi(x)$.

En lieu et place de l'intégrale (6a) qui *diverge* en général, comme c'est le cas ici, nous écrivons alors:

$$\Delta^s(k^2) = \underbrace{\int_0^{(k^2)} d(k^2) \ldots \int_0^{k^2} d(k^2)}_{(n)} \int (dp)^4 \cdot \left(\frac{\partial}{\partial (k^2)}\right)^n \Delta^s(k^2, p^2) \qquad (8)$$

où $n \geqslant 0$ est le plus petit entier tel que:

$$\int (dp)^4 \left(\frac{\partial}{\partial (k^2)}\right)^n \Delta^s(k^2, p^2) \qquad (9)$$

ait un sens.

La vraie valeur du noyau $\Delta^s(k^2)$ est donc:

$$\Delta^s(k^2) = \Delta^s_{\text{déf}}(k^2) + b_0 + b_1 k^2 + \cdots b_{n-1} k^{2(n-1)} \qquad (10)$$

où $\Delta^s_{\text{déf}}(k^2)$ est une fonction parfaitement définie de $k^2$. Il s'introduit donc $n$ constantes arbitraires $b_i$ et dans l'espace $x$, $\Delta^s(x/y)$ n'est définie qu'à la série:

$$b_0 \delta(x-y) + b_1 \Box \delta(x-y) + \cdots b_{n-1} \Box^{(n-1)} \delta(x-y) \qquad (11)$$

près, faisant apparaître des singularités intégrables à l'origine $x - y = 0$. Dans l'exemple choisi (6), on a $n = 1$ et:

$$\Delta^s_{\text{déf}}(k^2) = \frac{1}{32\, i\, \pi^2} \left[\text{Log } \varkappa^2 \left(\frac{\alpha+1}{\alpha-1}\right)^\alpha - 2\right] \qquad \alpha^2 = 1 + \frac{4\varkappa^2}{k^2}$$

Nous avons étudié avec cette méthode les termes de seconde approximation et en partie ceux de la troisième. On peut brièvement résumer les résultats de la manière suivante:

Toutes les divergences dues à la limite supérieure infinie de $k$ (catastrophe ultraviolette) disparaissent. Grâce aux constantes arbitraires $b_i$, dans l'approximation du *deuxième* ordre le terme appelé énergie propre ou masse propre du photon (ou du méson) peut être annulé (dans le cas du photon, il suffit pour cela de poser nulle une des constantes). Dans la même approximation, il est possible d'éviter une renormalisation de la charge: la charge induite $\Delta e$ peut être annullée. Notons encore à propos de la deuxième approximation que le courant induit satisfait à l'équation de continuité, à moins que le potentiel inducteur soit lui-même induit par un courant ne satisfaisant pas à l'équation de continuité, cas offrant, semble-t-il, peu d'intérêt.

En *troisième* approximation et dans le cas de l'électrodynamique, l'étude du rapport des coefficients des opérateurs de mo-

ment intrinsèque $S^{\alpha\beta}$ et de moment orbital $L^{\alpha\beta}$ dans la matrice $S$ montre que ce rapport, qui vaut $g_0 = 2$ en première approximation, s'écrit*):

$$g = g_0 + 2\,\varkappa_u\,\frac{\mu}{e}$$

où:

$e = \varepsilon\,(1 + a\,\varepsilon^2)$ charge de l'électron «renormalisée»

$\varkappa_u =$ masse de l'électron

$$\mu = \frac{1}{2\,\pi\,\varkappa_u}\,\varepsilon^3$$

$a$ est arbitraire; on obtient donc:

$$g = 2 + \frac{\varepsilon^2}{\pi}\,[1 - \varepsilon^2\,(a + \cdots)] \tag{13}$$

$\varepsilon^2\,a \ll 1$ est nécessaire pour conserver un sens à un développement en $\varepsilon$. Donc, limité à $\varepsilon^2$, notre résultat, qui coïncide avec celui de M. SCHWINGER[5]), est indépendant d'une renormalisation de la charge.

*Références.*


[1]) E. C. G. STUECKELBERG et D. RIVIER, H. P. A. **23**, 215 (1950).

[2]) Par exemple A. HOURIET et A. KIND, H. P. A. **22**, 319 (1949); D. RIVIER, H. P. A. **22**, 265 (1949).

[3]) J. SCHWINGER, Phys. Rev. **75**, 651 (1949).

[4]) Due aussi à M. SCHWINGER.

[5]) J. SCHWINGER, Phys. Rev. **76**, 790 (1949).


*) Nous remercions M. T. GREEN qui nous a aidé dans l'évaluation du facteur $\mu$.