

# Klassische Theorie der Streuung geladener Mesonen

Autor(en): **Fierz, Markus**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **Helvetica Physica Acta**

Band (Jahr): **14 (1941)**

Heft IV

PDF erstellt am: **21.09.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-111181>

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

## Klassische Theorie der Streuung geladener Mesonen

von Markus Fierz.

(15. V. 1941.)

Das Wellenfeld, durch welches geladene Mesonen beschrieben werden, ist bekanntlich komplex. Dabei ist wegen der Eichinvarianz (Ladungserhaltung) die Phase des Wellenfeldes keine physikalisch messbare Grösse. Man könnte deshalb bezweifeln, ob unter diesen Umständen eine klassische Behandlung eines derartigen Feldes sinnvoll ist; BHABHA<sup>1)</sup> hat Bedenken in dieser Richtung geäussert. In der vorliegenden Arbeit soll aber gezeigt werden, dass trotzdem eine solche Theorie möglich ist. Die Ladung der schweren Teilchen ist in einer solchen Theorie natürlich nicht quantisiert, d. h. sie hat kontinuierliche Werte, wie dies z. B. auch für die  $z$ -Komponente eines Spin-Moments in der entsprechenden klassischen Theorie gilt. Die Behandlung der Ladung des schweren Teilchens in unserem Falle ist überhaupt ganz analog zu BHABHA's<sup>2)</sup> Behandlung des Spin in seiner klassischen Theorie von Teilchen mit Spin.

In der klassischen Theorie ist es dabei zwanglos möglich, die Strahlungsdämpfung zu berücksichtigen, und zwar nach der Methode, die zuerst DIRAC<sup>3)</sup> in seiner klassischen Elektronentheorie angegeben hat.

Bekanntlich bereitet dies in der Quantentheorie Schwierigkeiten, da sich hier die Divergenzen dieser Theorie bemerkbar machen.

Wir wollen in dieser Arbeit die vektorielle Mesontheorie untersuchen, und zwar in der Näherung, dass das schwere Teilchen ruht. Die Wechselwirkung der Mesonen mit diesem Teilchen soll quasi-elektrisch sein, d. h. die von YUKAWA eingeführte Koppelungskonstante  $g_2$  setzen wir Null. Im Gegensatz zur Theorie ungeladener Felder liefert die Mesontheorie auch in diesem Grenzfall eine Streuung der Mesonen an schweren Teilchen, die zudem, falls man die Strahlungsdämpfung unberücksichtigt lässt, mit der Frequenz  $\omega$  des gestreuten Feldes anwächst. Gestreut wird nur der, im Ruhesystem des schweren Teilchens longitudinale Feldanteil, während das transversale Mesonfeld vom schweren Teilchen nicht beeinflusst wird.

Wir werden zeigen, dass die klassische Theorie Formeln für den Streuquerschnitt liefert, die sich nur durch den Einfluss der Strahlungsdämpfung von den quantentheoretischen Formeln unterscheiden. Die Strahlungsdämpfung hat dabei zur Folge, dass für hohe Frequenzen  $\omega$  des Mesonfeldes die Querschnitte wie  $1/\omega^2$  abfallen\*).

§ 1. Wir betrachten zuerst die quantisierte Mesontheorie, und zwar in derjenigen Form, in welcher nur die quasielektrische Koppelungskonstante  $g_1$  von Null verschieden ist. Im Grenzfall, in welchem das schwere Teilchen, mit welchem eine Wechselwirkung stattfindet, ruht, kann in dessen Ruhssystem das Mesonfeld in einen longitudinalen und einen transversalen Teil aufgespalten werden, die voneinander unabhängig sind. Der transversale Teil hat keine Wechselwirkung mit dem schweren Teilchen. Wir interessieren uns daher nur für den longitudinalen Teil. Zur Beschreibung des Feldes verwenden wir die von FRÖHLICH, HEITLER und KEMMER<sup>4)</sup> eingeführte, komplexe Grösse  $\psi_k = -\mu \chi_{0k}$  (l. c. S. 519 Formel (18)), die im wesentlichen gleich der quasielektrischen Feldstärke ist. Da  $\psi_k$  ein longitudinaler Vektor ist, d. h.  $\text{rot } \vec{\psi} = 0$ , kann er aus einem skalaren Potential abgeleitet werden. Wir setzen

$$\psi_k = \frac{\partial z}{\partial x_k} \quad (1.1)$$

Mit Hilfe von  $z$  kann die Energie des betrachteten Systems wie folgt geschrieben werden:

$$\begin{aligned} \bar{H} = \frac{1}{4\pi} \int dV \left\{ \Delta z \Delta z^* + \sum_{k=1}^3 \left( \mu^2 \frac{\partial z}{\partial x_k} \frac{\partial z^*}{\partial x_k} + \frac{\partial \dot{z}}{\partial x_k} \frac{\partial \dot{z}^*}{\partial x_k} \right) \right\} \\ + g \{ (\tau^* \Delta z)_{x=0} + (\tau \Delta z^*)_{x=0} \} + M(\tau_\zeta) \end{aligned} \quad (1.2)$$

Die Masseneinheiten sind so gewählt, dass  $\hbar = c = 1$ .  $g$  hängt mit der von YUKAWA<sup>5)</sup> eingeführten Grösse  $g_1$  durch die Formel  $g = g_1/\mu$  zusammen.  $\mu$  ist die Masse des Mesons.  $\tau$  ist der Operator, der die Ladungszustände des schweren Teilchens ändert.  $M(\tau_\zeta)$  ist dessen Masse, die von seinem, durch  $\tau_\zeta$  beschriebenen Ladungszustand abhängt. Das schwere Teilchen soll hierbei im Koordinatenursprung ruhen.

\* ) Wie LANDAU (Journal of Phys. U.S.S.R. II. 1940, S. 483) bemerkt hat, sollte dies auch in der Quantentheorie gelten. Dabei stützt er sich auf die Formel von BREIT und WIGNER für die Streuung von Neutronen (BETHE, Rev. Mod. Phys. 9. 115 (1937)).

Für  $z$  gelten die Vertauschungsrelationen

$$[\dot{z}^*(\vec{x}), z(\vec{x}')] = \frac{1}{i} \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \quad (1.3)$$

Mit ihrer Hilfe und mittels der allgemeinen Regel,

$$\frac{1}{i} \dot{f} = [\bar{H}, f] \quad (1.4)$$

die für jede, die Zeit nicht explicite enthaltende Grösse gilt, folgt für  $z$  die Wellengleichung

$$\Delta z - \ddot{z} = \mu^2 z - 4\pi g \tau \delta(\vec{x})$$

Wenn die Matrices von  $\tau$  und  $\tau_\xi$  gegeben sind, folgt ihr zeitliches Verhalten ebenso aus (1.4).

Für  $\tau$ ,  $\tau_\xi$  sind in der Hauptsache zwei Ansätze behandelt worden:

I. Der ursprüngliche Ansatz von YUKAWA betrachtet zwei Ladungszustände des schweren Teilchens (Proton, Neutron). Dabei wird für die  $\tau$  folgender Ansatz gemacht

$$\tau = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \tau^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \tau_\xi = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & -1/2 \end{pmatrix}$$

Wenn man zu hermiteschen Operatoren übergeht gemäss

$$\tau = \tau_\xi + i \tau_\eta$$

so können die drei Grössen  $\vec{\tau}$  als Vektor in einem Ladungsraum aufgefasst werden. Ihre Matrizen sind Pauli'sche Spinmatrizen. Das Quadrat dieses Vektors ist dann mit der Hamiltonfunktion vertauschbar, also eine Konstante.

$$\vec{\tau}^2 = \frac{1}{2} (\tau \tau^* + \tau^* \tau) + \tau_\xi^2 = \tau_\xi^2 + \tau_\eta^2 + \tau_\xi^2 = \text{const.} \quad (\text{I } 1)$$

II. Man betrachte nach HEITLER<sup>6</sup>), BHABHA<sup>1</sup>) und WENTZEL<sup>7</sup>) unendlich viele Ladungszustände. Für die Matrixelemente von  $\tau$ ,  $\tau_\xi$  wird folgender Ansatz gemacht

$$(n | \tau_\xi | n') = n \delta_{nn'}; \quad (n | \tau | n+1) = 1, \quad \text{alle anderen Matrixelemente} = 0 \\ n = (0, \pm 1, \pm 2 \dots)$$

Für  $\vec{\tau}^2 = \tau \tau^* + \vec{\tau}^2$  findet man in diesem Fall

$$(n | \vec{\tau}^2 | n') = (n^2 + 1) \delta_{nn'}$$

Diese Gleichungen können wir auch so schreiben:

$$\vec{\tau}^2 = \tau_\xi^2 + 1; \quad \tau \tau^* = 1 \quad (\text{II } 1)$$

Die Ansätze I. und II. sind im wesentlichen durch die beiden Ausdrücke für  $\vec{\tau}^2$  bestimmt.

Damit sind die Grundgleichungen für eine quantentheoretische Behandlung des Problems gegeben.

§ 2. Wir wollen jetzt die, obiger Theorie korrespondierende klassische Theorie entwickeln.

Wir behalten die Bewegungsgleichung für  $z$ , die aus (1.2) (1.3) (1.4) folgt, bei:

$$\Delta z - \ddot{z} = \mu^2 z - 4 \pi g \tau \delta(\vec{x}) \quad (2.1)$$

Die Gleichung wird durch

$$z = z^a + z^s, \quad z^s = g \frac{\tau_{\text{ret}}}{r} \quad (2.2)$$

gelöst, wo  $z^a$  der homogenen Wellengleichung genügt.  $z^a$  heissen wir das äussere Feld.  $\tau_{\text{ret}}$  ist wie folgt definiert: Sei

$$\tau(t) = \int d\nu \tau(\nu) e^{i\nu t},$$

so ist

$$\tau_{\text{ret}} = \int d\nu \tau(\nu) e^{i\nu t - ikr}$$

wobei

$$k = \begin{matrix} + \\ \sqrt{\nu^2 - \mu^2} \end{matrix} \text{ für } \nu > \mu; \quad k = -i \begin{matrix} + \\ \sqrt{\mu^2 - \nu^2} \end{matrix} \text{ für } \nu < \mu \quad (2.3)$$

Das durch  $\tau$  ausdrückbare Feld  $z^s$  heissen wir das Eigenfeld. Wir müssen jetzt Bewegungsgleichungen für  $\tau$  und  $\tau_\zeta$  aufstellen. Diese sind, wie wir zeigen werden, durch die Forderung der Energie- und Ladungserhaltung weitgehend bestimmt.

Es ist für das Folgende bequem, anstelle der komplexen Grössen  $\tau$  und  $z$  reelle Grössen einzuführen, indem wir jene in Real- und Imaginärteil aufspalten:

$$z = z_\xi + i z_\eta, \quad \tau = \tau_\xi + i \tau_\eta$$

Es ist zweckmässig,  $\tau_\xi$ ,  $\tau_\eta$ ,  $\tau_\zeta$  als Vektor in einem Ladungsraum  $(\xi, \eta, \zeta)$  aufzufassen. Bei Drehungen um die  $\zeta$ -Achse bleiben alle physikalischen Grössen ungeändert; hierin besteht die Eichinvarianz der Theorie. Ebenso ist  $z$  ein Vektor in diesem Raume mit den Komponenten  $(z_\xi, z_\eta, 0)$ , die aber noch Funktionen der Ortskoordinaten sind.

Die Energiedichte  $H$  und der Energiestrom  $\vec{T}$  des Mesonfeldes können dann wie folgt geschrieben werden:

$$H = \frac{1}{4\pi} \sum_{\alpha=\xi, \eta} \left\{ (\Delta z_\alpha)^2 + \sum_{k=1}^3 \left[ \left( \frac{\partial \dot{z}_\alpha}{\partial x_k} \right)^2 + \mu^2 \left( \frac{\partial z}{\partial x_k} \right)^2 \right] \right\} \quad (2.4)$$

$$T_k = -\frac{1}{2\pi} \sum_{\alpha} \Delta z_\alpha \frac{\partial \dot{z}_\alpha}{\partial x_k}$$

Diese Ausdrücke sollen im ganzen Raume, ausser für  $\vec{x} = 0$ , dem Ort des schweren Teilchens, gelten. Es gilt, ausgenommen für  $\vec{x} = 0$  zufolge (2.1) die Kontinuitätsgleichung

$$\operatorname{div} \vec{T} + \dot{H} = 0$$

Strom- und Ladungsdichte des Mesonfeldes haben die Gestalt

$$\begin{aligned} \rho &= \frac{1}{2\pi} \sum_k \left\{ \frac{\partial \dot{z}_\xi}{\partial x_k} \frac{\partial z_\eta}{\partial x_k} - \frac{\partial \dot{z}_\eta}{\partial x_k} \frac{\partial z_\xi}{\partial x_k} \right\} \\ j_k &= \frac{1}{2\pi} \left\{ \frac{\partial z_\xi}{\partial x_k} \Delta z_\eta - \frac{\partial z_\eta}{\partial x_k} \Delta z_\xi \right\} \end{aligned} \quad (2.5)$$

Auch hier gilt die Kontinuitätsgleichung

$$\operatorname{div} \vec{j} + \dot{\rho} = 0$$

$\rho$  und  $j$  lassen sich als  $\zeta$ -Komponenten eines Vektorprodukts im  $(\xi, \eta, \zeta)$ -Raum auffassen:

$$\begin{aligned} \rho &= \frac{1}{2\pi} \sum_k \left[ \frac{\partial \dot{z}}{\partial x_k} \times \frac{\partial z}{\partial x_k} \right]_\zeta \\ j_k &= \frac{1}{2\pi} \left[ \frac{\partial z}{\partial x_k} \times \Delta z \right]_\zeta \end{aligned} \quad (2.6)$$

Um die Bewegungsgleichungen für  $\vec{\tau}$  zu erhalten, betrachten wir, analog wie DIRAC in seiner klassischen Elektronentheorie, den Energie- und Ladungsstrom, der aus einer Kugel vom Radius  $r$  um das schwere Teilchen, also um den Nullpunkt, austritt. Im limes  $r = 0$  sind dann diese Grössen gleich der Energie bzw. Ladungsänderung des schweren Teilchens. Die bei der Rechnung auftretenden, im limes  $r = 0$  singulären Terme können wie in der Elektronentheorie subtrahiert werden, da sie die Gestalt totaler zeitlicher Ableitungen haben.

Wir betrachten zuerst den Ladungsstrom durch die Kugeloberfläche. Die Ladung im Kugelinnern heissen wir  $P$ . Dann lautet die Kontinuitätsgleichung

$$-\dot{P} = \frac{1}{2\pi} \int \left[ \frac{\partial z}{\partial r} \times \Delta z \right]_\zeta r^2 d\Omega \quad (2.7)$$

Das Integral ist über die Oberfläche der Kugel vom Radius  $r$  zu erstrecken.

Im Integral setzen wir für  $z$  die Lösung (2.2) ein, und entwickeln  $z^s$  nach Potenzen von  $r$ . Wir finden:

$$\frac{\partial z^s}{\partial r} = -\frac{g}{r^2} \tau + \text{Größen der Ordnung } r^0$$

$$\Delta z^s = -\frac{g}{r} \int k^2 \tau(\nu) e^{i\nu t} d\nu + ig \int k^3 \tau(\nu) e^{i\nu t} d\nu \\ + \text{Größen der Ordnung } r$$

$$k = \sqrt{\nu^2 - \mu^2} \text{ für } \nu > \mu, \quad k = -i \sqrt{\mu^2 - \nu^2} \text{ für } \nu < \mu$$

Zur Abkürzung setzen wir

$$-i \int k^3 \tau(\nu) e^{i\nu t} d\nu = \tau'''$$

für  $\nu \gg \mu$  ist  $\tau''' \sim \ddot{\tau}$ .

Weiter ist

$$\int k^2 \tau(\nu) e^{i\nu t} d\nu = -\ddot{\tau} - \mu^2 \tau$$

Also ist

$$\Delta z^s = \frac{g}{r} (\ddot{\tau} + \mu^2 \tau) + g \tau''' + \dots$$

Diese Entwicklungen setzen wir in (2.7) ein, und nehmen nur Terme mit, die für  $r = 0$  nicht verschwinden. So erhalten wir

$$\dot{P} = 2g [\tau \times \Delta z^a]_{\zeta} - 2g^2 [\tau \times \tau''']_{\zeta} + \frac{2g^2}{r} [\tau \times \ddot{\tau}]_{\zeta} \quad (2.8)$$

Der singuläre Term in (2.8) ist ein totaler Differentialquotient, nämlich

$$[\tau \times \ddot{\tau}]_{\zeta} = \frac{d}{dt} [\tau \times \dot{\tau}]$$

Wir setzen daher

$$P = \tau_{\zeta} + \frac{2g^2}{r} [\tau \times \dot{\tau}] \quad (2.9)$$

und erhalten für die Ladung  $\tau_{\zeta}$  des schweren Teilchens die Gleichung

$$\dot{\tau}_{\zeta} = 2g [\tau \times (\Delta z^a - g \tau''')]_{\zeta} \quad (2.10)$$

Jetzt berechnen wir in analoger Weise den Energiestrom, der aus der Kugel vom Radius  $r$  austritt. Die in der Kugel enthaltene Energie sei  $E$ . Dann lautet die Kontinuitätsgleichung

$$-\dot{E} = -\frac{1}{2\pi} \sum_{\alpha} \int \left( \frac{\partial \dot{z}_{\alpha}}{\partial r}, \Delta z_{\alpha} \right) r^2 d\Omega \quad (2.11)$$

Setzen wir wieder für  $z^s$  unsere Entwicklungen ein, so erhalten wir

$$-\dot{E} = 2g \sum_{\alpha=\xi, \eta} \dot{\tau}_\alpha \left( \Delta z_\alpha^a - g \tau_\alpha'' + \frac{g}{r} (\mu^2 \tau_\alpha + \ddot{\tau}_\alpha) \right)$$

Wieder sind die Terme  $\sim 1/r$  totale Ableitungen:

$$\dot{\tau}_\alpha (\mu^2 \tau_\alpha + \ddot{\tau}_\alpha) = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\mu^2 \tau_\alpha^2 + \dot{\tau}_\alpha^2)$$

Deshalb setzen wir

$$E = M(\tau_\zeta) - \frac{g^2}{r} \sum_{\alpha=\xi, \eta} (\mu^2 \tau_\alpha^2 + \dot{\tau}_\alpha^2)$$

Die Gleichung für die Masse  $M(\tau_\zeta)$  des schweren Teilchens lautet dann

$$\dot{M} = \frac{dM}{d\tau_\zeta} \dot{\tau}_\zeta = -2g \sum_{\alpha=\xi, \eta} \dot{\tau}_\alpha (\Delta z_\alpha^a - g \tau_\alpha'') \quad (2.12)$$

Die Bewegungsgleichungen für  $\tau_\xi$  und  $\tau_\eta$  können nun angegeben werden, wenn  $\tilde{\tau}^2 = 2f(\tau_\zeta)$  gegeben ist. (Dass  $\tilde{\tau}^2$  nur von  $\tau_\zeta$  abhängen kann, ist eine Folge der Eichinvarianz.) Differenzieren wir nämlich diese Beziehung nach der Zeit, so erhalten wir

$$\frac{df}{dt} = \frac{df}{d\tau_\zeta} \dot{\tau}_\zeta = \sum_\alpha \tau_\alpha \dot{\tau}_\alpha \quad (2.13)$$

Durch Elimination von  $\dot{\tau}_\xi$  aus (2.12) und (2.13) folgt

$$\left\{ \tau_\xi \frac{dM}{d\tau_\zeta} + R_\xi \left( \frac{df}{d\tau_\zeta} - \tau_\zeta \right) \right\} \dot{\tau}_\zeta = \dot{\tau}_\eta (\tau_\eta R_\xi - \tau_\xi R_\eta)$$

Dabei wurde zu Abkürzung gesetzt:

$$R_\alpha = 2g (\Delta z_\alpha^a - g \tau_\alpha'')$$

Beachten wir (2.10) so folgt

$$\dot{\tau}_\eta = R_\xi \left( \tau_\zeta - \frac{df}{d\tau_\zeta} \right) - \tau_\xi \frac{dM}{d\tau_\zeta} \quad (2.14)$$

Ebenso folgt

$$\dot{\tau}_\xi = -R_\eta \left( \tau_\zeta - \frac{df}{d\tau_\zeta} \right) + \tau_\eta \frac{dM}{d\tau_\zeta} \quad (2.15)$$

Die Gleichungen (2.10) (2.14) (2.15) enthalten nur noch das äussere Feld  $z^a$ . Die Wirkung des Eigenfeldes  $z^s$  auf die zeitliche Änderung der  $\tau$  ist durch die Dämpfungsterme proportional  $g^2 \tau'''$  beschrieben.



Wir wollen jetzt noch die Gleichungen anschreiben, wenn für  $\vec{\tau}^2$  die in § 1 unter I. und II. angegebenen speziellen Ausdrücke eingesetzt werden. Mit der Abkürzung

$$\vec{R} = \left( 2g (\Delta z_{\xi}^a - g \tau_{\xi}'''); 2g (\Delta z_{\eta}^a - g \tau_{\eta}'''); \frac{dM}{d\tau_{\zeta}} \right)$$

erhalten wir folgende zwei Gleichungssysteme:

$$f = \text{const.} \quad (\text{I}_1)$$

$$\dot{\vec{\tau}} = [\vec{\tau} \times \vec{R}] \quad (\text{I}_2)$$

$$f = \frac{1}{2} (\tau_{\xi}^2 + 1) \quad (\text{II}_1)$$

$$\left. \begin{aligned} \dot{\tau}_{\xi} &= R_{\zeta} \tau_{\eta} \\ \dot{\tau}_{\eta} &= -R_{\zeta} \tau_{\xi} \\ \dot{\tau}_{\zeta} &= \tau_{\xi} R_{\eta} - \tau_{\eta} R_{\xi} \end{aligned} \right\} \quad (\text{II}_2)$$

§ 3. Mittelst der Gleichungen (I<sub>2</sub>) bzw. (II<sub>2</sub>) wollen wir jetzt die Streuung einer ebenen Mesonwelle an einem schweren Teilchen berechnen. Dabei nehmen wir an, dass die Intensität der Mesonwelle so gering sei, dass  $\vec{\tau}$  kleine Schwingungen um eine Ruhelage ausführt.

$$\text{Fall I.} \quad \left( \frac{dM}{d\tau_{\zeta}} = 0 \right)$$

Wir nehmen an, das schwere Teilchen sei im Protonenzustand (oder auch im Neutronenzustand). In diesem Falle werden nämlich die Gleichungen besonders einfach. Auch entspricht diese Annahme derjenigen, die gewöhnlich in der Quantentheorie gemacht wird. Wir setzen demgemäss:

$$\begin{aligned} \vec{\tau} &= \vec{\tau}_0 + \vec{\tau}_1 \\ \tau_{0\zeta} &= \frac{1}{2}, \quad \tau_{0\xi} = \tau_{0\eta} = 0 \end{aligned}$$

$\vec{\tau}_1^2$  soll stets gegen  $\vec{\tau}_1$  vernachlässigt werden können, da  $\vec{\tau}_1$  proportional zu  $z_0$  sein soll. Das Feld  $z^a(\vec{x})$  soll geladen sein, wir setzen deshalb

$$z_{(0)}^a = z_0 e^{i\omega t}; \quad (z_0 \text{ sei reell}); \quad \Delta z_{(0)}^a = -k^2 z_0 e^{i\omega t} \text{ wobei } k^2 = \omega^2 - \mu^2$$

Den Massenunterschied zwischen Proton und Neutron wollen wir vernachlässigen, setzen also

$$\frac{dM}{d\tau_{\zeta}} = R_{\zeta} = 0.$$

Für  $\tau_\xi$  und  $\tau_\eta$  gelten dann die Gleichungen

$$\begin{aligned}\dot{\tau}_\xi &= 2 g \tau_\zeta k^2 z_0 \sin \omega t + 2 g^2 \tau_\zeta \tau_\eta''' \\ \dot{\tau}_\eta &= -2 g \tau_\zeta k^2 z_0 \cos \omega t - 2 g^2 \tau_\zeta \tau_\eta'''\end{aligned}\quad (3.1)$$

Machen wir jetzt den Ansatz

$$\tau_\xi = \tau_{1\xi}, \quad \tau_\eta = \tau_{1\eta}, \quad \tau_\zeta = \frac{1}{2} + \tau_{1\zeta}$$

so ergeben die Gleichungen (3.1), indem wir  $z_0^2$  vernachlässigen

$$\dot{\tau}_1 = -i e^{i\omega t} g k^2 z_0 - i g^2 \cos \vartheta \tau_1''' \quad (3.2)$$

Dabei ist

$$\tau_1 = \tau_{1\xi} + i \tau_{1\eta}$$

Wir setzen

$$\begin{aligned}\tau_1 &= c \cdot e^{i\omega t} \\ \tau_1''' &= -i k^3 c e^{i\omega t}\end{aligned}$$

und erhalten für  $c$  die Gleichung

$$\begin{aligned}i \omega c &= -i g \frac{k^2}{\omega} z_0 - k^3 g^2 c \\ c &= -g \frac{k^2}{\omega} z_0 \cos \varphi e^{i\varphi}\end{aligned}$$

wobei

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{k^3}{\omega} g^2$$

$\varphi$  ist die Phasenverschiebung von  $\tau_1$  gegen  $\Delta z^a$ . Für den Streustrom durch die Kugeloberfläche um den Koordinatenursprung erhalten wir daher, zufolge (2.2), (2.3)

$$j^s = 2 g^4 z_0^2 \cos^2 \varphi \frac{k^7}{\omega^2}$$

Der einfallende Strom ist gleich

$$j_0 = \frac{1}{2\pi} k^3 z_0^2$$

Daher wird der Wirkungsquerschnitt

$$\begin{aligned}\Phi_{\text{I}} &= 4\pi g^4 \frac{k^4}{\omega^2} \cos^2 \varphi = \frac{4\pi}{k^2} \sin^2 \varphi \\ \cos^2 \varphi &= \frac{1}{1 + g^4 \frac{k^6}{\omega^2}}\end{aligned}\quad (3.3)$$

Falls man die Dämpfung vernachlässigt, d. h.  $\cos^2 \varphi = 1$ , so ist der von uns abgeleitete Wirkungsquerschnitt identisch mit demjenigen, den HEITLER<sup>3)</sup> mit Hilfe der quantisierten Mesentheorie abgeleitet hat. (Unsere Konstante  $g$  hängt mit der Heitler'schen durch die Gleichung  $g^2 = \frac{g_H^2}{\mu^2}$  zusammen.) Für kleine  $k$  wächst  $\Phi$  mit wachsendem  $k$  an, für  $g^4 \frac{k^6}{\omega^2} \gg 1$  wird jedoch durch die Strahlungsdämpfung ein Abfallen des Wirkungsquerschnittes hervorgerufen, es gilt dann

$$\Phi_1 \sim \frac{4\pi}{k^2}$$

Setzt man mit HEITLER  $\mu^2 g^2 \sim 1/6$ , so erreicht  $\Phi_1$  für  $k \sim 2,6 \mu$  seinen grössten Wert. Dieser maximale Querschnitt ergibt sich mit  $1/\mu = 2 \cdot 10^{-13}$  cm zu  $4 \cdot 10^{-26}$  cm<sup>2</sup>. Ein Streuquerschnitt dieser Grösse ist aber immer noch unvereinbar mit den experimentellen Daten über die Streuung der harten Komponente der Höhenstrahlung. Die Strahlungsdämpfung ist also nicht genügend wirksam, um die Theorie mit den Experimenten in Übereinstimmung zu bringen.

Wir wollen jetzt noch den allgemeineren Fall untersuchen, dass  $\tau_{0\xi}$  und  $\tau_{0\eta}$  von null verschieden sind. Setzen wir wieder  $z^a = z_0 e^{i\omega t}$ , dann lauten die Gleichungen (3.1) für  $\tau = \tau_\xi + i\tau_\eta$

$$\dot{\tau} = -2g i k^2 z_0 e^{i\omega t} - 2g^2 \tau'' \tau_\xi \quad (3.1 a)$$

$\dot{\tau}_\xi$  erfüllt die Gleichung

$$\begin{aligned} \dot{\tau}_\xi = 2g k^2 z_0 \tau_\eta \cos \omega t - 2g k^2 z_0 \tau_\xi \sin \omega t \\ + 2g^2 \tau_\xi'' \tau_\eta - 2g^2 \tau_\eta'' \tau_\xi \end{aligned} \quad (3.1 b)$$

Wir betrachten zuerst den Fall, dass das äussere Feld verschwindet, setzen also  $z_0 = 0$ .  $\tau$  ist dann nicht konstant, vielmehr gilt

$$\dot{\tau} = -2i g^2 \tau_\xi \tau''$$

Mit dem Ansatz  $\tau_\xi = \frac{1}{2} \cos \vartheta$ ,  $\tau = \frac{1}{2} \sin \vartheta e^{-i\lambda}$  folgt

$$\lambda = g^2 l^3 \cos \vartheta; \quad l = \sqrt{\mu^2 - \lambda^2}$$

Diese Gleichung für  $\lambda$  hat gerade eine reelle, positive Lösung, wobei  $\lambda < \mu$  ist. Dies müssen wir auch erwarten, da ja keine Ausstrahlung zustandekommen kann. Daher ist auch  $\tau_\xi$  proportional  $\tau_\xi''$ ,  $\tau_\eta$  proportional  $\tau_\eta''$  und die Gleichung für  $\tau_\xi$  liefert  $\dot{\tau}_\xi = 0$ , ist also durch unseren Ansatz erfüllt. Das von  $\tau$  erzeugte Feld  $z^s$  ist gleich

$$z^s = \frac{1}{2} \frac{\sin \vartheta}{r} e^{-i\lambda t - lr}$$

Dass dieses Feld nicht zeitlich konstant ist, ist im Hinblick auf die Kernkräfte bemerkenswert. Die gewöhnliche quantenmechanische Behandlung des Problems liefert kein Analogon zu diesem Resultat, da dort die Rückwirkung des Eigenfeldes auf  $\tau$  vernachlässigt wird ( $\lambda$  ist für  $\mu^2 g^2 \ll 1$  gleich  $g^2 \mu^3 \cos \vartheta$ ).

Nehmen wir nun an,  $z_0$  sei nicht null. Dann setzen wir  $\tau_\xi = \tau_{0\xi} + \tau_{1\xi}$ ,  $\tau = \tau_0 + \tau_1$  wobei  $\tau_{0\xi} = \frac{1}{2} \cos \vartheta$ ,  $\tau_0 = \frac{1}{2} \sin \vartheta e^{-i\lambda t}$ . Für  $\tau_1$  und  $\tau_{1\xi}$  erhalten wir aus (3.1 a) und (3.1 b) folgende Gleichungen

$$\dot{\tau}_{1\xi} = -g k^2 z_0 \sin \vartheta \sin (\omega + \lambda) t + g^2 \sin \vartheta \cos \lambda t (\tau_{1\eta}'''' - l^3 \tau_{1\eta}) \\ + g^2 \sin \vartheta \sin \lambda t (\tau_{1\xi}'''' - l^3 \tau_{1\xi})$$

$$\dot{\tau}_1 = -i g k^3 z_0 \cos \vartheta e^{i\omega t} - i g^2 \cos \vartheta \tau_1'''' - i g^2 l^3 \sin \vartheta e^{-i\lambda t} \tau_{1\xi}$$

Terme proportional  $z_0^2$ , d. h.  $\tau_1^2$ , wurden vernachlässigt. Wegen des Termes proportional  $e^{-i\lambda t} \tau_{1\xi}$  in der Gleichung für  $\dot{\tau}_1$  werden die Lösungen dieses Gleichungssystems ziemlich verwickelt. Es treten neben  $\omega$  auch Frequenzen  $\omega \pm n\lambda$  auf. Für  $k \gg l$  werden aber diese Zusätze unwesentlich, da dann  $\tau_1'''' \gg l^3 \tau_{1\xi}$  ist. Wenn wir daher in diesem Falle  $l^3$  gegen  $k^3$  vernachlässigen, können wir die Gleichung für  $\tau_1$  lösen. Wir finden, analog wie bei der Lösung von (3.2) einen Streuquerschnitt

$$\Phi = \frac{4\pi}{k^2} \sin^2 \varphi$$

wobei aber  $\text{tg } \varphi = (k^3/\omega) g^2 \cos \vartheta$  ist.

Fall II.

Die Gleichung für  $\tau_\xi + i\tau_\eta = \tau$  lautet

$$\dot{\tau} = -i \frac{dM}{d\tau_\xi} \tau \quad (3.4)$$

Sie lässt sich sofort integrieren.  $\tau\tau^*$  ist gemäss II<sub>1</sub> gleich 1.

$$\tau = e^{-i \int_0^t \frac{dM}{d\tau_\xi} dt}$$

Die Gleichung für  $\tau_\xi$  lautet somit

$$\dot{\tau}_\xi = 2g (\Delta z_\eta^a - g \tau_\eta''''') \cos \int_0^t \frac{dM}{d\tau_\xi} dt + 2g (\Delta z_\xi^a - g \tau_\xi''''') \sin \int_0^t \frac{dM}{d\tau_\xi} dt \quad (3.6)$$

Wir setzen  $\tau_\xi = \tau_\xi^0 + \tau_1 \cdot \frac{dM}{d\tau_\xi}$  entwickeln wir nach  $\tau_1$  und vernachlässigen wieder  $\tau_1^2$ .

$$\int_0^t \frac{dM}{d\tau_\xi} dt = \left( \frac{dM}{d\tau_\xi} \right)_{\tau_\xi^0} \cdot t + \left( \frac{d^2 M}{d\tau_\xi^2} \right)_{\tau_\xi^0} \int_0^t \tau_1 dt \equiv A t + B \int_0^t \tau_1 dt \quad (3.7)$$

Sei wiederum

$$z^a = z_0 e^{i\omega t}; \quad \omega > \mu$$

Wir machen nun die weitere Annahme

$$\omega \gg A, B; \quad \mu > A, B \quad (3.8)$$

und vernachlässigen  $A, B$  gegen  $\omega$ , falls diese Grössen als Faktoren auftreten.

Die Dämpfung spielt erst für  $\omega \gg \mu$  eine wesentliche Rolle. Deshalb ersetzen wir in (3.6)  $\tau'''$  durch  $\ddot{\tau}$ . Diese Vereinfachung hat wegen (3.8) zur Folge, dass nach (3.5) und (3.7) gilt:

$$\ddot{\tau}_\xi \sim B \ddot{\tau}_1 \tau_\eta = -B \ddot{\tau}_1 \sin \int_0^t \frac{dM}{d\tau_\xi} dt \quad (3.9)$$

$$\ddot{\tau}_\eta \sim -B \ddot{\tau}_1 \tau_\xi = -B \ddot{\tau}_1 \cos \int_0^t \frac{dM}{d\tau_\xi} dt$$

Damit erhalten wir aus (3.6) die vereinfachte Gleichung

$$\dot{\tau}_1 = -2gk^2 z_0 \sin \left( \omega t + \int_0^t \frac{dM}{d\tau_\xi} dt \right) + 2g^2 B \ddot{\tau}_1 \quad (3.10)$$

Mit dem Ansatz

$$\tau_1 = \text{Realteil} \left\{ c e^{i \left( \omega t + \int_0^t \frac{dM}{d\tau_\xi} dt \right)} \right\} \quad (3.11)$$

erhalten wir aus (3.10), indem wir (3.8) benützen:

$$i\omega c = 2igz_0 k^2 - 2g^2 B \omega^2 c$$

Daher

$$\begin{aligned} \tau_1 &= 2g z_0 \frac{k^2}{\omega} \cos \varphi \cos \left( \omega t + \int_0^t \frac{dM}{d\tau_\xi} dt + \varphi \right) \\ &\sim 2g z_0 \frac{k^2}{\omega} \cos \varphi \cos \{(\omega + A)t + \varphi\}; \quad \cos^2 \varphi = \frac{1}{1 + 4g^4 \omega^2 B^2} \end{aligned} \quad (3.12)$$

Weiter wird

$$\begin{aligned}\tau_{\xi} &= \cos \left\{ A t + 2 g z_0 \frac{k^2}{\omega^2} B \cos \varphi \sin [(\omega + A) t + \varphi] \right\} \\ \tau_{\eta} &= - \sin \left\{ A t + 2 g z_0 \frac{k^2}{\omega^2} B \cos \varphi \sin [(\omega + A) t + \varphi] \right\}\end{aligned}\quad (3.13)$$

Im Sinne unserer Näherung, soll  $2 g z_0 (k^2/\omega) B \ll 1$  sein. Wir können daher auch schreiben:

$$\begin{aligned}\tau_{\xi} &= \cos A t - 2 g z_0 \frac{k^2}{\omega^2} B \cos \varphi \sin [(\omega + A) t + \varphi] \sin A t \\ \tau_{\eta} &= - \sin A t - 2 g z_0 \frac{k^2}{\omega^2} B \cos \varphi \sin [(\omega + A) t + \varphi] \cdot \cos A t\end{aligned}\quad (3.13a)$$

Wegen  $A < \mu$  geben die Terme  $\cos A t$ ,  $\sin A t$  zu keiner Ausstrahlung Anlass. Rechnet man nun auf Grund (3.13a), mit Hilfe (2.2), (2.6) den Ladungs-Streustrom aus, so kommt in unserer Näherung null heraus, weil  $\tau_{\xi}$  und  $\tau_{\eta}$  in gleicher Phase schwingen. Der Energie-Streustrom ergibt sich jedoch, nach (2.4) zu

$$T_s = 8 g^4 z_0^2 \frac{k^7}{\omega^3} \cos^2 \varphi \cdot B^2 \cdot \cos^2 [(\omega + A) t + \varphi] \quad (3.14)$$

Mitteln wir dies über die Zeit und dividieren durch den einfallenden Energiestrom, so erhalten wir den Wirkungsquerschnitt

$$\begin{aligned}\Phi_{II} &= 8 \pi g^4 \frac{k^4}{\omega^4} \cos^2 \varphi \cdot B^2 \\ \cos^2 \varphi &= \frac{1}{1 + 4 g^4 \omega^2 B^2}\end{aligned}\quad (3.15)$$

Wir erhalten also einen ungeladenen Streustrom, während im Falle I. der Streustrom das Ladungsvorzeichen des einfallenden Mesonfeldes trägt. Dies stimmt mit dem Ergebnis der Quantentheorie überein. Für hohe Frequenzen fällt die Streuung wieder wie  $1/\omega^2$  ab.

HEITLER<sup>6)</sup> hat mittelst der quantisierten Theorie den Querschnitt

$$\Phi_H = 4 \pi g^4 \frac{k^4}{\omega^2} (\Delta M)^2 \quad (3.16)$$

gefunden, wobei  $\Delta M$  den Massenunterschied des Protons und des Teilchens der Ladung 2 bedeutet. Setzen wir etwa  $M(\tau_{\xi}) = \frac{1}{2} B \tau_{\xi}^2$ .

so wird  $\Delta M = \frac{3}{2} B$  und  $\Phi_H = \frac{2}{3} \Phi_{II}$ , falls man in (3.15)  $\cos \varphi = 1$  setzt. Bis auf Zahlfaktoren der Ordnung 1 stimmen daher die Querschnitte überein. Mehr kann aber auch nicht erwartet werden. Die Streuung verschwindet, falls  $\frac{dM}{d\tau_\xi} = 0$  ist, wie dies die Gleichungen  $II_2$  zeigen, da dann  $\tau_\xi$  und  $\tau_\eta$  konstant sind. In erster Näherung muss jedoch auch  $\frac{d^2 M}{d\tau_\xi^2} \neq 0$  sein, damit eine Streuung zustande kommt. Auch in dieser Beziehung stimmt unser Ergebnis mit der Quantentheorie überein<sup>7)</sup>.

Die von uns gegebene Theorie zeigt also eine weitgehende, korrespondenzmässige Übereinstimmung mit der quantentheoretischen Formulierung des Problems und ermöglicht überdies die Strahlungsdämpfung zu berücksichtigen. In höheren Näherungen wird man allerdings keine derartige Korrespondenz mehr erwarten; hier wird jedoch die Quantentheorie problematisch. Die Untersuchung lässt jedoch erkennen, dass die zu grossen theoretischen Wirkungsquerschnitte im Falle I nicht auf der Vernachlässigung der Dämpfung beruhen, wie dies die Diskussion von  $\Phi_I$  gezeigt hat.

Basel, Physikal. Anstalt der Universität  
und Mathem. Physikal. Seminar.

#### Literatur.

- 1) H. J. BHABHA, Proc. Ind. Acad. Sci. XI, 347 (1940).
- 2) H. J. BHABHA, Proc. Ind. Acad. Sci. XI, 247 (1940).
- 3) P. A. M. DIRAC, Proc. Roy. Soc. (A) **167**, 148 (1938).
- 4) H. FRÖHLICH, W. HEITLER, N. KEMMER, Proc. Roy. Soc. (A) **166**, 154 (1938).
- 5) H. YUKAWA, S. SAKATA, M. TAKETANI, Proc. Phys. Math. Soc. Japan **20**, 319 (1938).
- 6) W. HEITLER, Nature **145**, 29 (1940).
- 7) G. WENTZEL, H. P. A. **14**, 3 (1941).
- 8) W. HEITLER, Proc. Roy. Soc. (A) **166**, 529 (1938).