Über die relativistische Theorie kräftefreier Teilchen mit beliebigem Spin

Autor(en): **Fierz, Markus**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Helvetica Physica Acta**

Band (Jahr): **12 (1939)**

Heft I

PDF erstellt am: **27.04.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-110930

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

Über die relativistische Theorie kräftefreier Teilchen mit beliebigem Spin*)

von **Markus Fierz.**

(3. IX. 38.)

Zusammenfassung. Im kräftefreien Falle ist es möglich, quantisierte Wellenfelder anzugeben, welche Teilchen mit ganzem oder halb-ganzem Spin grösser als eins beschreiben. Es zeigt sich, dass Teilchen mit ganzem Spin stets Bose-Statistik, Teilchen mit halbganzem Spin stets Fermi-Dirac-Statistik haben müssen. Die Wellenfelder mit Spin kleiner oder gleich eins sind aber schon im kräftefreien Falle dadurch ausgezeichnet, dass für sie allein die Ladungsdichte und Energiedichte eindeutig bestimmte und eichinvariante Grössen sind, während dies für höheren Spin nur für Gesamtladung und Gesamtenergie der Fall ist.

Einleitung.

In vorliegender Arbeit wird die relativistische Theorie von Wellenfeldern untersucht, denen sich durch Quantisierung nach JORDAN und PAULI[1]) Teilchen mit beliebigem, aber konstantem ganz- oder halbzahligem Spin zuordnen lassen. Wir haben uns dabei vorerst auf den kräftefreien Fall beschränkt. Es zeigt sich, dass durch Angabe von Spinwert und Masse der Teilchen das zugehörige Wellenfeld schon eindeutig bestimmt ist, überdies ist durch den Spin die Statistik der Teilchen festgelegt. Aus den sehr allgemeinen Forderungen, dass die Vertauschungsrelationen der Feldgrössen relativistisch invariant und infinitesimal sein sollen, und dass die Energie positiv sein soll, folgt nämlich, dass Teilchen mit ganzzahligem Spin stets Bose-Statistik, Teilchen mit halbzahligem Spin Fermi-Statistik haben müssen.

Während es möglich ist, die Felder, die zu ganzzahligem Spin gehören, durch Tensoren zu beschreiben, wodurch man den VAN DER WAERDEN'schen Spinorkalkül[2]) umgehen kann, war es uns im Falle halbzahligen Spins leider nicht möglich, diesen recht schwerfälligen Kalkül durch etwas Übersichtlicheres zu ersetzen. Diese darstellungstechnische Schwierigkeit hängt aber wohl mit dem physikalischen Umstande zusammen, dass die zu halbzahligem Spin gehörigen Felder wegen des Ausschliessungsprinzips niemals klassischen Feldern korrespondieren können, also auch nie in klassischem Sinne beobachtbar sind, im Gegensatz zu den der Bose-Statistik genügenden Tensorfeldern.

*) An der Abteilung für Mathematik und Physik an der E. T. H., Zürich, eingereichte Habilitationsschrift.

INSTITUT DE PHYSIQUE UNIVERSITÉ NEUCHÂTEL

Die hier betrachteten Wellengleichungen wurden im wesentlichen schon von DIRAC[3]) angegeben. Die physikalische Bedeutung dieser Gleichungen wird jedoch aus DIRAC's Arbeit nicht klar, vielmehr finden sich darin Angaben, die teils zu Missverständnissen Anlass geben können, teils unzutreffend sind. Insbesondere ist der Operator H von DIRAC, den er mit „Hamiltonian" oder „Energy operator" bezeichnet, ganz verschieden von der Feldenergie im gewöhnlichen Sinn. Weiter kann eine Wechselwirkung mit elektrischen Feldern nicht einfach dadurch beschrieben werden, dass man $\vec{p}$ durch $\vec{p} - e/c\,\vec{\Phi}$ ersetzt, wie DIRAC behauptet, da dadurch die Verträglichkeit der Feldgleichungen zerstört wird. Auch die Bemerkung, dass der Spin im allgemeinen durch zwei Zahlen k und l charakterisiert werde, scheint den physikalischen Sachverhalt nicht zu treffen, da es nur auf die Summe $k + l$ ankommt, und die Aufteilung in die Summanden k und l nur rein formal zu sein scheint.

SAKATA und YUKAWA[4]) haben ebenfalls eine Note über diese DIRAC'schen Gleichungen erscheinen lassen, die uns aber ganz missglückt scheint. Die dort als Stromdichte bezeichnete Grösse ist nämlich im allgemeinen gar kein Vektor, sondern ein Teil eines Tensors hoher Stufe. Im Falle des Spin 1 ($k = 1$, $l = \frac{1}{2}$) sind insbesondere diese Grössen die Energie- und Impulsdichte, d. h. die ($k4$)-Komponenten des Energie-Impulstensors, wie man durch Vergleich mit der MAXWELL'schen Theorie sofort erkennt. Weiter untersuchen diese Autoren auch die Spinwerte, die zu den von DIRAC angegebenen Gleichungen gehören. Sie gehen aber, wie uns scheint, hierbei viel zu formal vor, indem einfach die Darstellungen der Drehgruppe, nach denen sich die Feldgrössen transformieren können, betrachtet werden. Dies ist aber nur dann ausreichend, falls man sicher weiss, dass der Bahndrehimpuls null ist, z. B. im Ruhsystem einer ebenen Welle. In diesem Falle zeigt sich, dass wegen der Wellengleichungen die Feldgrössen nicht nur irreduzibel gegen Lorentztransformationen, sondern auch irreduzibel bei Drehungen sind. Im Ruhsystem eines Wellenzahlvektors gibt es gerade $2k + 2l$ linear unabhängige zugehörige ebene Wellen, die sich bei Drehungen nach der Darstellung $\vartheta_{k+l-\frac{1}{2}}$ untereinander transformieren. Da im übrigen alle Gleichungen mit festem $k + l$ mathematisch gleichwertig sind, so geht daraus hervor, dass der Spin den Wert $k + l - \frac{1}{2}$ hat.

Herr JAUCH hat in einer Diplomarbeit zum ersten Male richtige Ausdrücke für Energie-Impulstensoren und Stromvektoren, welche den DIRAC'schen Feldern zugeordnet werden können, an-

gegeben. Der Spezialfall des Spins 1 wurde von verschiedenen Autoren, insbesondere im Hinblick auf Kernkräfte, ausführlich behandelt. Die c-Zahl-Theorie betrachtete zuerst PROCA[5]), vierdimensionale Vertauschungsrelationen für diesen Fall hat STÜCKELBERG[6]) aufgestellt, in etwas anderer Form auch KEMMER[7]).

Obwohl die vorliegende Untersuchung zeigt, dass wenigstens im kräftefreien Fall Felder mit beliebigem halb- oder ganzzahligem Spin möglich sind, so sind doch die kleinen Spinwerte 0, ½, 1 in mancher Beziehung ausgezeichnet. In diesen drei Fällen ist nämlich sowohl Energie wie Ladungsdichte schon im kräftefreien Falle eindeutig bestimmt, und es ist im Falle 0 und 1 die Energiedichte, im Falle ½ die Ladungsdichte der c-Zahl-Theorie positiv definit. Beides ist, falls der Spin grösser wird als 1, nicht mehr der Fall, nur die Gesamtenergie bzw. die Gesamtladung sind dann noch eindeutig und definit. Weiter sind in quantisierten Theorien für Spin grösser als 1 die Ladungsdichten an verschiedenen Orten aber zur selben Zeit nicht mehr vertauschbar, vielmehr bleiben Ableitungen der $D(x)$-Funktion stehen. Es treten weiter beim Versuch, Wechselwirkungen mit andern Feldern einzuführen schon in der c-Zahl-Theorie Komplikationen auf, falls der Spin grösser ist als 1. Dieser letzte Punkt bedarf deshalb noch einer eingehenden Untersuchung.

I. Ganzzahliger Spin.

1. Feldtensoren und Wellengleichungen.

Wir wollen hier kräftefreie, klassische Wellenfelder betrachten, denen man mittelst der relativistischen Feldquantisierung nach JORDAN und PAULI[1]) Teilchen mit der Masse m und dem Spin $\hbar \cdot f$ zuordnen kann. f soll eine ganze, positive Zahl sein. Ein solches Wellenfeld kann im kräftefreien Fall durch einen, im allgemeinen komplexen, symmetrischen Welttensor $A_{ik\ldots l}$ der $f$ten Stufe (f Indices) beschrieben werden, welcher der Wellengleichung genügt:

$$\Box A_{ik\ldots l} = \varkappa^2 A_{ik\ldots l} \tag{1.1}$$

dabei ist

$$\Box \equiv \sum_{i=1}^{4} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}; \quad (x_i) = (x, y, z, ict)$$

$\varkappa$ ist eine Konstante von der Dimension einer reziproken Länge, welche eine für das Feld charakteristische Frequenz definiert. Die dem Felde zugeordneten Feldquanten erhalten die Masse

$$\hbar \varkappa / c = m .$$

Weiter erfüllt $A_{ik\ldots l}$ noch die beiden Nebenbedingungen

$$A_{ii\ldots l} = 0 \tag{1.2}$$

$$\frac{\partial A_{ik\ldots l}}{\partial x_i} = 0\,. \tag{1.3}$$

Die physikalische Bedeutung dieser Gleichungen ist folgende: Die Wellengleichung (1.1), welche vom Typus der Schrödinger-Gordon'schen Gleichung ist, hat zur Folge, dass in der quantisierten Feldtheorie die relativistische Theorie klassischer Massenpunkte der Masse m als Grenzfall enthalten ist.

Die Nebenbedingungen (1.2) und (1.3) sorgen in erster Linie dafür, dass dem Tensorfeld nur Teilchen mit dem Spin f und nicht noch solche kleineren Spins zugeordnet werden können. Aus (1.2) folgt, wegen der Symmetrie von $A_{ik\ldots l}$, dass sämtliche Spuren des Feldtensors verschwinden.

Wie im Anhang gezeigt wird, besitzt deshalb $A_{ik\ldots l}$ $(f+1)^2$ linear unabhängige Komponenten, welche sich bei Lorentztransformationen gemäss der irreduziblen Darstellung $\vartheta_{f/2,\, f/2}$ der Lorentzgruppe untereinander transformieren. Soll das $A_{ik\ldots l}$-Feld zum Spin f gehören, so muss es zu jeder vorgegebenen Wellenzahl und Frequenz k_i, welche die Gleichung $k_i k_i = -\varkappa^2$ erfüllen $2f+1$ linear unabhängige ebene Wellen geben, die sich durch die Orientierung des Spins unterscheiden. Dass dies der Fall ist, sieht man wie folgt ein: Man betrachte die betreffenden ebenen Wellen in deren Ruhsystem, welches immer existiert falls $\varkappa \neq 0$ und wo $k_4 = \pm i\varkappa$. Dort sagt die Nebenbedingung (1.3), dass sämtliche Komponenten von $A_{ik\ldots l}$, bei denen einer der Indices gleich 4 ist, verschwinden; es laufen daher im Ruhsystem die Indices tatsächlich nur von 1 bis 3 und $A_{ik\ldots l}$ hat die Gestalt

$$A_{ik\ldots l} = A^0_{ik\ldots l} \cdot e^{\varkappa x_4}\,.$$

$A^0_{ik\ldots l}$ ist ein symmetrischer, räumlich konstanter Tensor der $f$ten Stufe in $\mathfrak{R}_3$, dessen Spuren verschwinden. Ein solcher Tensor hat $2f+1$ linear unabhängige Komponenten, die sich bei Drehungen des Koordinatensystems nach der irreduziblen Darstellung ϑ_f der Drehgruppe untereinander transformieren. Daraus folgt, dass sich die zugehörigen Teilchenzustände durch die $2f+1$ verschiedenen Orientierungen des Spins unterscheiden. Weiter ermöglicht die Nebenbedingung (1.3) die Aufstellung eines Energie-Impulstensor's für das A-Feld und sorgt dafür, dass die Gesamtenergie positiv bleibt, womit erst eine physikalische Deutung der Theorie möglich wird.

Bei der Diskussion der Nebenbedingungen (1.3) machten wir von der Existenz eines Ruhsystems für jede ebene Welle Gebrauch. Die Existenz des Ruhsystems ist dabei für die ganze Schlussweise wesentlich und der Fall $m = 0$ muss deshalb als ausgearteter Grenzfall betrachtet werden. Wir werden daher den Fall der Ruhmasse null gesondert betrachten. Hier möchten wir nur erwähnen, dass in diesem Fall nur zwei physikalisch wirklich verschiedene ebene Wellen gleicher Wellenzahl und Frequenz existieren, wie dies von den Elektromagnetischen Wellen her bekannt ist, welche $f = 1$ entsprechen.

Man kann nun die Differentialgleichungen des A-Feldes durch ein Gleichungssystem erster Ordnung ersetzen, was für die folgenden Betrachtungen bequem sein wird. Die Gleichungen lauten:

$$B^{(1)}_{[ik]\,r\ldots l} = \frac{\partial A_{k\,r\ldots l}}{\partial x_i} - \frac{\partial A_{i\,r\ldots l}}{\partial x_k} \tag{1.4}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_i} B^{(1)}_{[ik]\,r\ldots l} = \varkappa^2 A_{k\,r\ldots l}. \tag{1.5}$$

Diese Gleichungen sind analog den Maxwell'schen Gleichungen. Als Folge von (1.2), (1.4) und (1.5) genügt $B^{(1)}$ ebenfalls der Wellengleichung zweiter Ordnung, sowie den weiteren Gleichungen

$$B^{(1)}_{[ik]\,k\ldots} = 0,\; B^{(1)}_{[ik]\,r\ldots l} + B^{(1)}_{[ri]\,k\ldots l} + B_{[kr]\,i\ldots l} = 0 \tag{1.6}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_r} B^{(1)}_{[ik]\,r\ldots l} = 0;\; \frac{\partial}{\partial x_m} B^{(1)}_{[ik]\ldots l} + \frac{\partial}{\partial x_k} B^{(1)}_{[mi]\ldots l} + \frac{\partial}{\partial x_i} B^{(1)}_{[km]\ldots l} = 0. \tag{1.7}$$

In den uneingeklammerten Indizes ist $B_{[ik]\,r\ldots l}$ symmetrisch, in dem eingeklammerten Paar schief. Aus den Gleichungen (1.6) folgt unabhängig von der Definition der $B^{(1)}_{[ik]r\ldots l}$, dass $B^{(1)}_{[ik]rr\ldots l} = 0$. Wenn man dies beachtet, so kann man die Komponentenzahl von $B^{(1)}$ abzählen und findet, dass $B^{(1)}$ $2\,f^2 + 4\,f$ linear unabhängige Komponenten hat. Aus den Gleichungen (1.6), (1.7) können alle übrigen Gleichungen gefolgert werden, so dass wir unser Wellenfeld ebensogut durch die Grössen $B^{(1)}_{[ik]\,r\ldots l}$ wie durch die $A_{ik\ldots l}$ beschreiben können. Wir können nun aus $B^{(1)}$ eine weitere Grösse

$$B^{(2)}_{[ik]\,[rl]\ldots t}$$

bilden:

$$B^{(2)}_{[ik]\,[rl]\ldots t} = \frac{\partial}{\partial x_r} B^{(1)}_{[ik]\,l\ldots t} - \frac{\partial}{\partial x_l} B^{(1)}_{[ik]\,r\ldots t}.$$

$B^{(2)}$ ist symmetrisch bei Vertauschung der Indexpaare $[i\,k]$ und $[r\,l]$ sowie in den uneingeklammerten Indizes und genügt analogen Gleichungen wie $B^{(1)}$. Es gilt weiter

$$B^{(2)}_{[k\,l]\,[k\,r]\ldots s} = \varkappa^2 A_{l\,r\ldots s}.$$

Indem wir nun fortgesetzt die Rotation nach einem der uneingeklammerten Indizes bilden, erhalten wir eine Folge von $f+1$ Feldgrössen:

$$A_{i\,k\ldots r},\ B^{(1)}_{[i\,k]\ldots r}\cdots \qquad B^{(f)}_{[i\,k]\,[r\,l]\ldots[s\,t]}$$

$B^{(q)}_{[i\,k]\ldots[r\,l]\,s\ldots t}$ enthält demgemäss (q) Klammern, die untereinander symmetrisch sind und $f-q$ untereinander symmetrische Einzel-Indices. In jedem eingeklammerten Indexpaar ist $B^{(q)}$ schief. Weiter genügt $B^{(q)}$ den folgenden Gleichungen:

$$\Box B^{(q)} = \varkappa^2 B^{(q)} \tag{I}$$

$$B^{(q)}_{\ldots[i\,k]\,k\ldots} = 0 \tag{IIa}$$

$$B^{(q)}_{\ldots[i\,k]\,r\ldots} + B^{(q)}_{\ldots[r\,i]\,k\ldots} + B^{(i)}_{\ldots[k\,r]\,i\ldots} = 0 \tag{IIb}$$

$$B^{(q)}_{[i\,k]\,[r\,s]\ldots} + B^{(q)}_{\ldots[r\,i]\,[k\,s]\ldots} + B^{(q)}_{[k\,r]\,[i\,s]\ldots} = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial x_r} B^{(q)}_{[i\,k]\ldots r} = 0;\ \frac{\partial}{\partial x_r} B^{(q)}_{\ldots[i\,k]\ldots} + \frac{\partial}{\partial x_k} B^{(q)}_{\ldots[r\,i]\ldots} + \frac{\partial}{\partial x_i} B^{(q)}_{\ldots(k\,r)\ldots} = 0. \tag{III}$$

Diese Gleichungen beschreiben das betrachtete Wellenfeld genau so wie die Gleichungen (1.1) bis (1.3).

Es gilt als Folge von I bis III:

$$\frac{\partial}{\partial x_i} B^{(q)}_{\ldots[i\,k]\ldots} = \varkappa^2 B^{(q-1)}_{\ldots k\ldots}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_i} B^{(q-1)}_{k\ldots} - \frac{\partial}{\partial x_k} B^{(q-1)}_{\ldots i\ldots} = B^{(q)}_{\ldots[i\,k]}$$

$$B^{(q)}_{[k\,l]\,[k\,i]\ldots} = \varkappa^2 B^{(q-2)}_{\ldots l\,i\ldots}.$$

2. *Energie-Impulstensor, Stromvektor.*

Um das durch die $B^{(q)}$ beschriebene Tensorfeld physikalisch deuten zu können, muss es möglich sein, mittelst der $B^{(q)}$ und ihren konjugierten einen symmetrischen, „reellen" Tensor 2. Stufe zu bilden, der der Kontinuitätsgleichung genügt. Einen solchen Tensor kann man dann als Energie-Impulstensor des Feldes auf-

fassen. Zuerst müssen wir genauer präzisieren, was wir unter dem konjugierten Tensor C^* eines Tensors C verstehen, woraus sich auch ergeben wird, was ein „reeller" Tensor ist.

Sei die Anzahl der Indizes von C, welche gleich 4 sind n und $\overline{C}$ das konjugiert-komplexe von C, so ist

$$C^* \equiv (-1)^n \, \overline{C} \tag{2.1}$$

der zu C konjugierte Tensor. Ein Tensor ist „reell", falls $C^* = C$. In diesem Sinne sind unsere Koordinaten $(X, Y, Z, i\,c\,t) = (X_i)$ „reelle" Vektoren. Ebenso ist das elektromagnetische Feld $(\mathfrak{H}, i\,\mathfrak{E})$ ein „reelles" Feld. Mittelst der $B^{(q)}$ und der $B^{(q-1)}$ sowie ihrer konjugierten bilden wir nun die Tensoren $T^{(q)}_{k\,l}$:

$$\begin{aligned}
T^{(1)}_{k\,l} &= \frac{\varkappa^2}{2}\left(A^*_{i\,r\ldots k}\,A_{i\,r\ldots l} + A^*_{i\,r\ldots l}\,A_{i\,r\ldots k}\right) + \tfrac{1}{2}\left(B^{(1)\,*}_{i\ldots r\,[t\,k]}\,B^{(1)}_{i\,r\ldots[t\,l]}\right.\\
&\quad \left. + B^{(1)\,*}_{i\ldots[t\,l]}\,B^{(1)}_{i\ldots[t\,k]}\right) - \tfrac{1}{2}\,\delta_{k\,l}\left(A^*_{i\,r\ldots}\,A_{i\,r\ldots}\cdot\varkappa^2 + \tfrac{1}{2}\,B^{(1)\,*}_{i\ldots[t\,r]}\,B^{(1)}_{i\ldots[t\,r]}\right)\\
T^{(q)}_{k\,l} &= \frac{\varkappa^2}{2}\left(B^{*(q-1)}_{[r\,s]\ldots t\,k}\,B^{(q-1)}_{[r\,s]\ldots t\,l} + B^{*\,(q-1)}_{[r\,s]\ldots t\,l}\,B^{(q-1)}_{[r\,s]\ldots t\,k}\right)\\
&\quad + \tfrac{1}{2}\left(B^{(q)*}_{[r\,s]\ldots[t\,k]\ldots m}\cdot B^{(q)}_{[r\,s]\ldots[t\,l]\cdot m}\right.\\
&\quad \left. + B^{(q)*}_{[r\,s]\ldots[t\,l]\ldots m}\,B^{(q)}_{[r\,s]\ldots[t\,k]\ldots m}\right) - \tfrac{1}{2}\,\delta_{k\,l}\left(\varkappa^2\,B^{(q-1)*}_{[r\,s]\ldots t}\,B^{(q-1)}_{[r\,s]\ldots t}\right.\\
&\quad \left. + \tfrac{1}{2}\,B^{(q)*}_{[r\,s]\ldots[t\,m]\ldots n}\,B^{(q)}_{[r\,s]\ldots[t\,m]\ldots n}\right).
\end{aligned}$$

Diese Tensoren genügen auf Grund der Differentialgleichungen für die $B^{(q)}$ der Kontinuitätsgleichung:

$$\frac{\partial\,T^{(q)}_{k\,l}}{\partial x_k} = 0\,.$$

Es ist nun zu fordern, dass die Gesamtenergie des Feldes positiv ist, was bedeutet, dass das Integral $\int T^{(q)}_{4\,4}\,dv$ über den ganzen Raum definit sein muss, da dieses, bis auf das Vorzeichen, die Gesamtenergie des Feldes darstellt. Das ist nun in der Tat der Fall, was wir zuerst für den Tensor $T^{(1)}_{i\,k}$, der aus A und $B^{(1)}$ aufgebaut ist, zeigen werden. Zu diesem Zwecke zerlegen wir $A_{i\,k\ldots}$ in ebene Wellen gemäss

$$A_{i\,k\ldots r}(\vec{x}, t) = \frac{1}{\sqrt{V}}\sum_k A^+_{i\,k\ldots r}(k)\cdot e^{i\,k\,x + i\,\omega(k)\,t} + A^-_{i\,k\ldots r}(k)\,e^{i\,k\,x - i\,\omega(k)\,t}. \tag{2.3}$$

Dabei ist

$$\omega(k) = +\,i\,c\,k_4\,, \quad k_i\,k_i = -\varkappa^2.$$

Weiter erfüllen die A^+ und A^- als Folge der Gleichung (1.3) die Gleichung

$$\sum_{i=1}^{3} k_i A^+_{i\ldots} + k_4 A^+_{4\ldots} = \sum_{i=1}^{3} k_i A^-_{i\ldots} - k_4 A^-_{4\ldots} = 0\,. \tag{2.4}$$

Falls wir dies beachten, die $B^{(1)}$ durch die A^+ und A^- ausdrücken und dies in das Integral $\int T^{(1)}_{44}\, dV$ einsetzen, erhalten wir

$$-\int T^{(1)}_{44}\, dV = \sum_k |k_4|^2 \{A^+_{ir\ldots}(k)\, A^+_{ir\ldots}(k) + A^{-*}_{ir\ldots}(k)\, A^-_{ir\ldots}(k)\} = E. \tag{2.5}$$

Die Energie ist hier als Summe der Energien der einzelnen Fourierkomponenten dargestellt. Es genügt daher zu zeigen, dass der Beitrag jeder einzelnen Komponente positiv definit ist. Es ist also zu zeigen, dass $A^{+*}_{ik\ldots}(k)\, A^+_{ik\ldots}(k)$ positiv definit. Betrachten wir diesen Ausdruck im Ruhsystem von k_i, wo also $(k_i) = (0,0,0,i\,\varkappa)$. Wegen der Gleichung (2.4) sind hier alle Komponenten von $A^+_{ik\ldots}$, bei denen ein Index gleich 4 ist null. Für die anderen gilt gemäss (2.1)

$$A^*_{ik\ldots} = \bar{A}_{ik\ldots}$$

so dass im Ruhsystem die Energie einer ebenen Welle die positiv definite Form

$$\bar{A}_{ik\ldots}\, A_{ik\ldots}$$

annimmt.

Da in einem anderen Bezugssystem sich die Energie mit dem positiven Faktor

$$\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

multipliziert, folgt daraus, dass die Gesamtenergie unseres Feldes positiv definit ist. Auch für die hier diskutierte Frage ist die Existenz eines Ruhsystems für jede ebene Welle wesentlich. Falls $\varkappa$ null gesetzt wird, ist zwar, wie wir weiter unten sehen werden, die Energie niemals negativ, kann jedoch verschwinden, ohne dass die Feldtensoren $A_{ik\ldots}$ null sind.

Auf die gleiche Art, wie beim Tensor $T^{(1)}$, kann man den allgemeineren Tensor $T^{(q)}$ behandeln. Mann findet dann

$$-\int T^{(q)}_{44}\, dV = \sum_k |k_4|^2 \{B^{+(q-1)*}_{[il]\ldots m\ldots} B^{+(q-1)}_{[il]\ldots m\ldots} + B^{-(q-1)*}_{[il]\ldots m\ldots} B^{-(q-1)}_{[il]\ldots m\ldots}\}$$

oder, falls wir die $B^{(q-1)}$ durch die A ausdrücken:

$$-\int T^{(q)}_{44}\, dV = (-2\,\varkappa^2)^{q-1} \sum_k |k_4|^2 \{A^{*+}_{il\ldots} A^+_{il\ldots} + A^{-*}_{il\ldots} A^-_{il\ldots}\}\,.$$

Alle Energie-Impulstensoren ergeben also bis auf den Faktor $(-2\varkappa^2)^{q-1}$ zur gleichen Gesamtenergie Anlass. Die Lokalisierung der Energie im Feld ist jedoch weitgehend unbestimmt, indem sie vom gewählten (q) abhängt. Zudem ist $T_{44}^{(q)}$ nicht positiv definit, falls $f > 1$ ist. Diese Eigenschaften der hier betrachteten Felder scheinen uns jedoch keine hinreichenden Gründe zu sein, um Teilchen mit Spin > 1 auszuschliessen. Im kräftefreien Falle ist also der Energie-Tensor nicht eindeutig bestimmt, es gibt vielmehr f linear unabhängige Möglichkeiten, die Energie zu lokalisieren, wobei aber der Wert der Gesamtenergie ungeändert bleibt. Inwieweit diese Mehrdeutigkeit durch Einführung von Wechselwirkungen mit anderen Feldern eingeschränkt werden kann, oder ob sie in diesem Falle zu ernsteren physikalischen Schwierigkeiten führt, muss einer gesonderten Untersuchung vorbehalten bleiben.

Neben dem Energie-Impulstensor $T_{kl}^{(q)}$ kann aus $B^{(q)}$ und $B^{(q-1)}$ auch ein Vektor gebildet werden, welcher ebenfalls der Kontinuitätsgleichung genügt, und der als Stromvektor des Feldes aufgefasst werden kann:

$$S_v^{(q)} = \frac{1}{2i}\left\{B^{*(q-1)}_{[ik]\ldots ml\ldots} B^{(q)}_{[ik]\ldots[mv]l\ldots} - B^{(q-1)}_{[ik]\ldots ml\ldots} B^{(q)*}_{[ik]\ldots[mv]l\ldots}\right\}.$$

Dieser Vektor ist ebenfalls „reell". Falls die Feldtensoren $B^{(q)}$ „reelle" Grössen sind, verschwindet er identisch. Bei vorgegebenem Feld können Strom und Ladungsdichte wieder auf f verschiedene Arten definiert werden, welche im kräftefreien Falle gleichwertig sind. Die Gesamtladung $\int s_4^{(q)}\, dV$ wird wieder in allen Fällen, bis auf einen Faktor, dieselbe:

$$e = \sum_k |k_4| \left\{A^{+*}_{ik\ldots}(k)\, A^{+}_{ik\ldots}(k) - A^{-*}_{il}(k)\, A^{-}_{il}(k)\right\}.$$

Ob man allerdings die so definierte Strom- und Ladungsdichte als elektrische Strom- und Ladungsdichte interpretieren kann, das kann hier nicht entschieden werden, da dies von der Art, wie das elektrische Feld eingeführt wird, abhängt. Dadurch, dass man in allen Gleichungen $\vec{p}$ durch $\vec{p} - e/c\, \vec{\Phi}$ ersetzt, ist dies im allgemeinen Falle nicht möglich, da man dann mit den algebraischen Relationen, welche die $A_{ik\ldots}$ erfüllen müssen, falls $f > 1$ ist, in Schwierigkeiten gerät. Nur für $f = 1$, wo die Spurbedingung (1.2) wegfällt, gelangt man so zu einer widerspruchsfreien Theorie, welche mit der von Proca diskutierten identisch ist.

3. *Verhältnis der hier entwickelten Theorie zu Dirac's relativistischen Wellengleichungen*[3]).

Dirac hat Differentialgleichungen angegeben, die in Spinoren-Schreibweise folgende Gestalt haben:

$$p^{\dot{\varrho}\varkappa} a^{\dot{\tau}\dot{\nu}\cdots}_{\varkappa\lambda\mu\cdots} = \varkappa b^{\dot{\varrho}\dot{\tau}\dot{\nu}\cdots}_{\lambda\mu\cdots} \tag{3.1}$$

$$p_{\dot{\nu}\varrho} b^{\dot{\nu}\dot{\tau}\dot{\mu}\cdots}_{\lambda\gamma\cdots} = \varkappa a^{\dot{\tau}\dot{\mu}\cdots}_{\varrho\lambda\gamma\cdots}. \tag{3.2}$$

Dabei hat a $2k$ unpunktierte Indizes und $2l-1$ punktierte
b $2l$ punktierte Indizes und $2k-1$ unpunktierte
k und l sind ganze oder halbganze Zahlen.

a und b sind in punktierten und unpunktierten Indizes symmetrisch, daher irreduzibel bei Lorentztransformationen, wo sie sich gemäss der Darstellung $\vartheta_{k,l-\frac{1}{2}}$ bzw. $\vartheta_{k-\frac{1}{2},l}$ untereinander transformieren. Falls $k+l-\frac{1}{2}=f$ ganz ist, so sind diese Gleichungen den Tensorgleichungen, die wir betrachtet haben, gleichwertig. Alle Gleichungen mit vorgegebenem f beschreiben das gleiche Wellenfeld, wobei die Aufteilung von $f+\frac{1}{2}$ in zwei Summanden den verschiedenen, durch den Index (q) charakterisierten Möglichkeiten im Tensorfalle entspricht.

Nimmt man insbesondere für $a^{\dot{\lambda}\dot{\mu}}_{\delta\varrho}$ einen Spinor, der gleichviel punktierte wie unpunktierte Indizes hat, d. h. $k=l-\frac{1}{2}$, so erkennt man, dass diese Grösse a mit dem Tensor $A_{ik\ldots}$ identisch ist. Man kann nämlich mittelst der Paulischen Matrizen $\sigma^k_{\dot{\varrho}\varrho}$ je einen unpunktierten und einen punktierten Index $\dot{\varrho},\varrho$ in einen Vektorindex k verwandeln. Der so entstehende Tensor ist dann symmetrisch in allen Indizes und seine Spuren verschwinden, da nämlich die Spur $\varepsilon^{\mu\nu} a_{\mu\nu} = a^{\mu}{}_{\mu}$ eines symmetrischen Spinors $a_{\mu\nu} = a_{\nu\mu}$ verschwindet. Weiter genügt er auch den Differentialgleichungen (1.1) und (1.3). (1.3) folgt dabei aus der Spinorgleichung

$$p^{\dot{\varrho}\varkappa} a^{\dot{\tau}\cdots}_{\dot{\varrho}\varkappa\lambda\mu\cdots} = 0 \tag{3.3}$$

welche durch Verjüngung aus (3.1) entsteht; dabei muss wieder beachtet werden, dass die Spur des symmetrischen Spinors $b^{\dot{\lambda}\dot{\mu}\cdots}_{\delta\varrho\cdots}$ verschwindet.

Aus $a^{\dot{\varrho}\dot{\mu}\cdots}_{\lambda\varkappa\cdots}$ bilde man nun neue Spinoren $b^{(q)}$ gemäss

$$\varkappa b^{(1)\,\dot{\varrho}\dot{\tau}\dot{\mu}\cdots}_{\lambda\cdots} = p^{\dot{\varrho}\varkappa} a^{\dot{\tau}\dot{\mu}\cdots}_{\varkappa\lambda\cdots}$$

$$\varkappa b^{(-1)\,\dot{\nu}\cdots}_{\mu\varkappa\lambda\cdots} = p_{\mu\dot{\varrho}} a^{\dot{\varrho}\dot{\nu}\cdots}_{\varkappa\lambda\cdots}$$

allgemein

$$\varkappa\, b^{(q+1)\,\dot{\varrho}\,\dot{\mu}\cdots}_{\lambda\ldots} = p^{\dot{\varrho}\,\varkappa}\, b^{(q)\,\dot{\mu}\cdots}_{\varkappa\lambda\ldots}$$

$$\varkappa\, b^{(q-1)\,\dot{\tau}\cdots}_{\mu\varkappa\lambda\ldots} = p_{\mu\,\dot{\varrho}}\, b^{(q)\,\dot{\varrho}\,\dot{\tau}\cdots}_{\varkappa\lambda\ldots} \tag{3.4}$$

(q) ist jeweils gleich der halben Differenz der punktierten und unpunktierten Indizes und läuft daher von $-f$ bis $+f$. $a^{\dot{\lambda}\dot{\mu}\cdots}_{\delta\varrho\ldots}$ hat f punktierte und f unpunktierte Indizes und transformiert sich nach der irreduziblen Darstellung der Lorentzgruppe $\vartheta_{f/2,\,f/2}$. $b^{(q)\,\dot{\lambda}\dot{\mu}\cdots}_{\delta\varrho\ldots}$ hat $f+q$ punktierte und $f-q$ unpunktierte Indizes und transformiert sich bei eigentlichen Lorentztransformationen nach der irreduziblen Darstellung $\vartheta_{\frac{f-q}{2},\,\frac{f+q}{2}}$. Bei Spiegelungen vertauscht sich $b^{(q)}$ mit $b^{(-q)}$. Die $b^{(q)}$ sind also, im Gegensatz zu den $B^{(q)}$ irreduzible Grössen. Sie entsprechen Tensoren mit (q) Indexpaaren, in denen der Tensor schief und selbstdual ist gemäss

$$\varepsilon^{i\,k\,l\,m}\, F^{(q)}_{\ldots\,[l\,m]} = F^{(q)}_{[i\,k]\ldots} \qquad \text{falls } q > 0$$

$$-\varepsilon^{i\,k\,l\,m}\, F^{(q)}_{\ldots[l\,m]\ldots} = F^{(q)}_{\ldots[i\,k]\ldots} \qquad \text{falls } q < 0.$$

Bei Spiegelung vertauscht sich entsprechend $F^{(q)}$ mit $F^{(-q)}$. Mittelst der $b^{(q)}$ können wir ebenso wie mit den $B^{(q)}$ f Energie-Impulstensoren bilden, welche symmetrisch sind und der Kontinuitätsgleichung genügen:

$$t^{(q-1)}_{\dot{\varrho}\,\delta,\,\beta\,\dot{\nu}} = b^{(q)*}_{\dot{\varrho}\,\beta}\, b^{(-q)}_{\dot{\nu}\,\delta} + b^{*(-q)}_{\dot{\varrho}\,\beta}\, b^{[q]}_{\dot{\nu}\,\delta} + b^{(q)*}_{\dot{\nu}\,\delta}\, b^{(-q)}_{\dot{\varrho}\,\beta} + b^{(-q)*}_{\dot{\nu}\,\delta}\, b^{(q)}_{\dot{\varrho}\,\beta}$$

$$+ b^{(q-1)*}_{\dot{\nu}\,\dot{\varrho}}\, b^{(-q-1)}_{\beta\,\delta} + b^{(-q-1)*}_{\dot{\varrho}\,\dot{\nu}}\, b^{(q-1)}_{\beta\,\delta} + b^{(q+1)*}_{\beta\,\delta}\, b^{(-q+1)}_{\dot{\varrho}\,\dot{\nu}} + b^{(-q+1)*}_{\beta\,\delta}\, b^{(q+1)}_{\dot{\varrho}\,\dot{\nu}}\,.$$

Dabei soll über die nicht-angeschriebenen Indizes verjüngt werden gemäss:

$$a^*\, a \equiv a^{*\dot{\varrho}\,\dot{\nu}\cdots}_{\alpha\,\delta\ldots}\, a^{\alpha\,\delta\cdots}_{\dot{\varrho}\,\dot{\nu}\ldots}$$

Auf Grund der Gleichungen (3.4) folgt für $t^{(q-1)}$:

$$p^{\dot{\varrho}\,\delta}\, t^{(q-1)}_{\dot{\varrho}\,\delta,\,\dot{\nu}\,\gamma} = 0\,.$$

Da die Tensorformulierung und die Spinorschreibweise in diesem Fall mathematisch äquivalent sind, folgt daraus, dass alle Tensoren, die wir oben betrachteten, Linearkombinationen entsprechender Spinoren sind. Wir können deshalb auf eine weitere Diskussion der Gleichungen (3.4) verzichten und auf die Tensortheorie verweisen.

4. *Quantisierung der Feldtheorie.*

Um den oben besprochenen Feldtheorien Teilchen zuordnen zu können, müssen wir Lorentzinvariante Vertauschungsrelationen zwischen den Feldgrössen aufstellen. Es genügt, dies für die $A_{ikl\ldots}$ zu tun, da dann diejenigen für die anderen Grössen durch Differenzieren daraus folgen. Da es sich hier um Theorien des kräftefreien Falles handelt, so ist es zweckmässig, die Vertauschungsrelationen in vierdimensionaler Form aufzustellen, analog zu der von Jordan und Pauli beim ladungsfreien elektromagnetischen Felde angegebenen Formulierung. Man hat dann den Vorteil, dass die Lorentzinvarianz von vornherein gesichert ist. Die Vertauschungsrelationen sollen zur Folge haben, dass die Energie einer ebenen Welle ein ganzzahliges Vielfaches von $|k_4| = \sqrt{k^2 + m^2}$ wird und es soll überdies die Gleichung

$$\dot{f} = 1/i\,[\overline{H}, f] \tag{4.1}$$

gelten für alle Grössen, die die Zeit nicht explizite enthalten.

Im Falle $f = 1$ kann die so gestellte Aufgabe dadurch gelöst werden, dass man durch Einführen longitudinaler und transversaler Wellen zu jedem Wellenzahl-Vektor k_i $2f + 1 = 3$ unabhängige Amplituden einführt und nur zwischen diesen Vertauschungsrelationen fordert. Bei höheren Spins scheint uns ein entsprechendes Verfahren jedoch nicht mehr anwendbar, ohne die Symmetrie des Problems völlig zu zerstören, was einerseits wieder die Beurteilung der Invarianz so gewonnener Vertauschungsrelationen verunmöglicht. Man kann jedoch an Stelle solchen Vorgehens Vertauschungsrelationen zwischen den $A_{ik\ldots}$ und den $A^*_{ik\ldots}$ aufstellen, von welchen sämtliche Gleichungen, denen die $A_{ik\ldots}$ genügen, identisch erfüllt werden. Dadurch wird den Nebenbedingungen (1.2) und (1.3) von selber Rechnung getragen, und man erhält so die richtige Zahl unabhängiger Vertauschungsrelationen.

Wir setzen daher als Vertauschungsrelationen für den symmetrischen Tensor $A\,(i_1 \ldots . i_f)$ an:

$$1/i\,[A(i_1 \ldots i_f), A^*(i_1' \ldots i_f')] = K\,\{\Sigma\, P(i_k')\, R(i_1\, i_1') \ldots R\,(i_f\, i_f')$$
$$-\frac{1}{2 + \frac{f(f-1)}{2}} \sum_{l>m}^{f} R(i_l\, i_m)\, \Sigma P(i_k')\, R(i_1\, i_1') \ldots R(i_l'\, i_m') \ldots R(i_f\, i_f')\} \cdot$$
$$\cdot\, D(x)\,. \tag{4.2}$$

Hier ist $A\,(i_k)$ an der Stelle $\xi + x/2$, $A^*\,(i_k')$ an der Stelle $\xi - x/2$ zu

nehmen. Es bedeutet: $\Sigma P(i_k')$ die Summe über alle Permutationen der Indices i_k'. $R(i_k i_l)$ ist der Operator

$$R(i_k i_l) = \delta_{i_k i_l} - \frac{1}{\varkappa^2} \frac{\partial^2}{\partial x_{i_k} x_{i_l}} \tag{4.3}$$

welcher stets auf die invariante D-Funktion von JORDAN und PAULI anzuwenden ist, welche wie folgt definiert ist:

$$D(x) \equiv D(\mathfrak{x}, t) = \tfrac{1}{2} \sum_k \frac{1}{V} \left\{ \frac{e^{i k \mathfrak{x} + i \omega(k) t}}{i \omega(k)} - \frac{e^{i k \mathfrak{x} - i \omega(k) t}}{i \omega(k)} \right\} \tag{4.3b}$$

$D(x)$ genügt der Wellengleichung

$$\Box D = \varkappa^2 D$$

weiter gilt

$$D(\mathfrak{x}, 0) = 0, \quad \left(\frac{\partial D}{\partial t}\right)_{t=0} = \delta(\mathfrak{x}).$$

Da $R(\alpha\beta)$ stets auf $D(x)$ angewendet wird, welches der Wellengleichung genügt, so gelten folgende Relationen:

$$\frac{\partial R(\alpha\beta)}{\partial x_\alpha} = R(\alpha\beta) \frac{\partial}{\partial x_\alpha} = 0, \qquad R(\alpha\beta)\, R(\beta\gamma) = R(\alpha\gamma)$$
$$R(\alpha\alpha) = 3. \tag{4.4}$$

Den konstanten Faktor K in (4.2) hat man so zu wählen, dass die Eigenwerte der Ladung ganze Zahlen werden.

Die Vertauschungsrelationen (4.2) erfüllen nun in der Tat die Gleichungen (1.1) bis (1.3) identisch und sie sind symmetrisch in den gestrichenen und den ungestrichenen Indices, da über sämtliche Permutationen der i_k' summiert wird. Ihre Divergenz ist null wegen (4.4). Um einzusehen, dass auch die Spuren verschwinden, betrachte man zwei Terme aus der Summe $\sum_{l>m}$ in (4.2):

$$\alpha) \quad R(i_r i_k)\, \Sigma P(i_n')\, R(i_1 i_1') \ldots R(i_r' i_k') \ldots R(i_f i_f')$$
$$\beta) \quad R(i_k i_t)\, \Sigma P(i_n')\, R(i_1 i_1') \ldots R(i_k' i_t') \ldots R(i_f i_f')$$

Nun bilde man die Spur über $(i_k i_r)$ und beachte die Gleichungen (4.4). Man erhält so aus

$$\alpha) \quad 3\, \Sigma P(i_n')\, R(i_1 i_1') \ldots R(i_k' i_r') \ldots R(i_f i_f')$$
$$\beta) \quad \Sigma P(i_n')\, R(i_1 i_1') \ldots R(i_t i_r') \ldots R(i'_k i_t') \ldots R(i_f i_f')$$

In beiden Ausdrücken kommen alle i_n' vor; hingegen fehlen i_k

und i_r. Man kann nun die $R(i_n i_l')$ bezüglich der übrigen i_n in beiden Ausdrücken in die gleiche Reihenfolge bringen. Da beidemale sämtliche Permutationen der i_n' vorkommen, ergibt α bis auf den Faktor 3 dasselbe wie β. Bildet man nun in

$$\gamma) \qquad \Sigma\, P(i_k')\, R(i_1 i_1') \ldots R(i_f i_f')$$

die Spur über $(i_k i_r)$ so erhält man, wie man sofort sieht, das gleiche Resultat wie aus β). In der Summe $\sum\limits_{l>m}$ haben wir nun $f\frac{(f-1)}{2}$ Summanden, von denen beim Bilden der Spur einer das Dreifache der anderen ergibt. Deshalb muss zur Erfüllung der Gleichung (1.2) der Faktor

$$\frac{1}{f\frac{(f-1)}{2}+2}$$

vor der Summe $\sum\limits_{l>m}$ stehen.

Wir müssen nun zeigen, dass die Gleichung $\frac{1}{i}\dot{f}=[\overline{H}, f]$ gilt, sowie dass die Energie die richtigen Eigenwerte hat. Zu diesem Zweck zerlegen wir die $A_{ik\ldots}$ wieder in ebene Wellen gemäss (2.3). Aus den Vertauschungsrelationen folgt, dass $A(k)$ mit $A(k')$ vertauschbar ist, falls $k_i \neq k_i'$. Es ist ebenso auch A^+ mit A^- vertauschbar. Für vorgegebenes k_i gibt es nun $2f+1$ linear unabhängige Linearkombinationen der $A^+_{ik\ldots l}(k)$, die wir A_ω heissen. Die Vertauschungsrelationen der A_ω mögen lauten:

$$[A_\omega, A^*_{\omega'}] = f_{\omega\omega'}. \tag{4.5}$$

Wir betrachten jetzt die A_ω wieder in dem zu k_i gehörigen Ruhsystem. Dort transformieren sich die A_ω sowohl wie die A^*_ω, nach der irreduciblen Darstellung ϑ_f der Drehgruppe, spannen also einen Raum R_{2f+1} aus. Da die rechte Seite der Vertauschungsrelationen (4.2) dieselben Relationen wie die A_ω erfüllt, so hat die Matrix $f_{\omega\omega}'$, die Eigenschaft, dass sie die Vektoren X_ω in R_{2f+1} abbildet auf Vektoren $Y_\omega' = X_\omega f_{\omega\omega}'$, welche wieder einen irreduziblen Raum aufspannen, welcher, da nicht alle Y_ω' null sind, wieder $2f+1$ Dimensionen hat. Deshalb hat $f_{\omega\omega}'$ $2f+1$ von null verschiedene Eigenwerte. Jetzt wählen wir die A_ω, $A^{*\prime}_\omega$ so, dass die durch sie vermittelte Darstellung unitär wird.

Da die Vertauschungsrelationen bei Drehungen invariant sind, so haben sie, bei geeigneter Normierung der A_ω die Gestalt

$$[A_\omega, A^*_{\omega'}] = \delta_{\omega\omega'}. \tag{4.6}$$

Die Energie ist ebenfalls drehinvariant und wird deshalb in diesen A_ω geschrieben die invariante Einheitsform

$$E(k_i) = \sum_{\omega=1}^{2f+1} |k_4| \cdot C \cdot A_\omega^* A_\omega . \tag{4.7}$$

Die in den Vertauschungsrelationen (4.2) auftretende Konstante K ist nun so zu bestimmen, dass $C = 1$ wird.

Nun ist nach (4.7)

$$|k_4| A_{ik\ldots}^{+*} A_{ik\ldots}^{+} = \sum_\omega A_\omega^* A_\omega$$

falls $C = 1$. Es muss deshalb auch gelten

$$|k_4| [A_{ik\ldots}^{+}, A_{ik\ldots}^{+*}] = \sum_\omega [A_\omega, A_\omega^*] = 2f + 1 .$$

Daraus folgt durch Vergleich mit (4.2)

$$\sum_{i,k} \delta_{i_k, i_k'} \Big\{ \Sigma P(i_k') R(i_1 i_1') \ldots R(i_f i_f') - \frac{1}{2 + \frac{f(f+1)}{2}} \sum_{l>m} R(i_l i_m) \cdot \Sigma P(i_k') R(i_1 i_1') \ldots \Big\} D(x) = \frac{2f+1}{K} D(x)$$

wodurch die Konstante K bestimmt ist.

Die Vertauschungsrelation haben jetzt in der Tat die Eigenschaft, dass aus ihnen folgt, dass die Eigenwerte der Energie einer ebenen Welle ganzzahlige Vielfache von k_4 sind; denn für die A^- folgt auf genau die gleiche Weise das entsprechende. Diese lassen sich durch $2f + 1$ Grössen B_ω darstellen, die die Vertauschungsrelationen

$$[B_\omega, B_{\omega'}^*] = -\delta_{\omega\omega'} \tag{4.8}$$

erfüllen, wobei das Minuszeichen vom Minuszeichen in der Definition der D-Funktion herrührt. Da nun jede, die Zeit nicht explizite enthaltende Grösse f aus $A_\omega \cdot e^{i\omega t}$ und $B_\omega \cdot e^{-i\omega t}$ linear aufgebaut werden kann, so folgt die Gleichung

$$\frac{1}{i} \dot{f} = [\overline{H}, f]$$

für jedes f, da sie für A_ω und B_ω zutrifft.

Damit ist gezeigt, dass die Vertauschungsrelationen (4.2) die Lösung der zu Anfang gestellten Aufgabe bilden.

Die Vertauschungsrelationen in Spinorform finden sich im zweiten Teile, der den Fall halbzahliger Spins behandelt, wo wir sie mit denjenigen für diesen Fall vergleichen.

II. Halbzahliger Spin.

5. *Feldgrössen und Wellengleichungen.*

Die Felder, welchen sich Teilchen mit halbzahligem Spin f ($f = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2} \ldots$) zuordnen lassen, können natürlich nicht durch Tensoren dargestellt werden, wohl aber durch Spinoren („Halbtensoren"). In Spinor-formulierung sind dann die Theorien von ganz- und halbzahligem Spin in vielem sehr ähnlich, wenn auch charakteristische Unterschiede auftreten, welche insbesondere den Bau der Energietensoren und der Vertauschungsrelationen betreffen. Sonst aber lassen sich die meisten Schlüsse, welche wir beim ganzzahligen Fall machten, auch auf die folgende Theorie übertragen, so dass wir uns hier kürzer fassen können.

Damit die durch ein Spinorfeld beschriebenen Teilchen zu einem halbzahligen Spin gehören, müssen die Spinoren eine ungerade Anzahl von Indices besitzen, während im ganzzahligen Falle die Indexzahl gerade ist.

Wir gehen daher von einem Spinor $a^{\dot\lambda\dot\mu\cdots}_{\delta\varrho\ldots}$ aus, der $2k$ unpunktierte und $2l-1$ punktierte Indices besitzt, wobei $2k+2l-1=2f$ eine ungerade Zahl ist. k und l sind dabei ganz oder halbganz. $a^{\dot\lambda\dot\mu\cdots}_{\delta\varrho\ldots}$ soll der Wellengleichung 2. Ordnung genügen:

$$\Box\, a^{\dot\lambda\dot\mu\cdots}_{\delta\varrho\ldots} = \varkappa^2\, a^{\dot\lambda\dot\mu\cdots}_{\delta\varrho\ldots} \tag{5.1}$$

wo $\varkappa$ wieder eine charakteristische Wellenzahl bedeutet, welche die Masse der Teilchen gemäss $\varkappa = \frac{m\,c}{\hbar}$ bestimmt. Weiter soll $a^{\dot\lambda\dot\mu\cdots}_{\delta\varrho\ldots}$ in punktierten und unpunktierten Indices symmetrisch sein, was auch so formuliert werden kann: es sollen sämtliche Spuren von $a^{\dot\lambda\dot\mu\cdots}_{\delta\varrho\ldots}$ verschwinden:

$$\varepsilon_{\dot\nu\dot\lambda}\, a^{\dot\lambda\dot\nu\cdots}_{\delta\varrho\ldots} = 0\,, \qquad \varepsilon^{\delta\varrho}\, a^{\dot\lambda\dot\mu\cdots}_{\delta\varrho\ldots} = 0 \tag{5.2}$$

wobei $\varepsilon_{\dot\lambda\dot\mu}$ die schiefe Matrix $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ bedeutet. Weiter soll $a^{\dot\lambda\dot\mu\cdots}_{\delta\varrho\ldots}$ den Nebenbedingungen

$$\varepsilon_{\dot\nu\dot\mu}\, p^{\dot\nu\varrho}\, a^{\dot\lambda\dot\mu\cdots}_{\varrho\delta\ldots} = 0 \tag{5.3}$$

genügen. Diese bedeuten, dass die Spinoren $p^{\dot\nu\varrho}\, a^{\dot\lambda\dot\mu\cdots}_{\varrho\delta\ldots}$ und $p_{\dot\nu\tau}\, a^{\dot\nu\dot\mu\cdots}_{\delta\varrho\ldots}$ in punktierten und unpunktierten Indices symmetrisch sind.

Da $a^{\dot\lambda\dot\mu\cdots}_{\gamma\delta\ldots}$ gegeben ist, wenn man weiss, wieviele punktierte und wieviele unpunktierte Indizes gleich eins sind, so hat es $(2k+1)\,2l$ linear unabhängige Komponenten, die sich bei Lorentztransformationen nach der irreduziblen Darstellung $\vartheta_{k,\,l-\frac{1}{2}}$ untereinander transformieren. Es ist nun wieder zu zeigen, dass auf

Grund der Nebenbedingung (5.3) zu jedem Wellenzahlvektor $2f+1$ linear unabhängige ebene Wellen existieren. Zu diesem Zwecke begeben wir uns wieder ins Ruhsystem von k_i. Dort hat $p^{\dot\nu\varrho}$ die Form $k_4 \cdot \delta^{\dot\nu\varrho}$ was sich bei räumlichen Drehungen wie $k_4\,\delta^{\varrho}_{\gamma}$ transformiert. Ebenso transformiert sich $a^{\dot\lambda\dot\mu\cdots}_{\varrho\delta\ldots}$ bei Drehungen wie der Spinor $a'_{\varrho\delta\ldots,\,\lambda\mu\ldots}$*). Die Gleichung (5.3) lautet dann

$$\varepsilon^{\gamma\lambda}\, a'_{\gamma\delta\ldots\lambda\mu\ldots} = 0 \tag{5.3a}$$

und sagt aus, dass der Spinor a' symmetrisch ist in den Indices λ und γ, also in allen Indices. Im Ruhsystem ist daher $a^{\dot\lambda\dot\mu\cdots}_{\varrho\delta\ldots}$ äquivalent einem in allen Indices symmetrischen Spinor $a_{\lambda\mu\ldots\varrho\delta\ldots}$ vom Rang $2k+2l-1=2f$ und hat daher $2k+2l=2f+1$ linear unabhängige Komponenten, die sich bei Drehungen nach der irreduziblen Darstellung ϑ_f der Drehgruppe untereinander transformieren. Damit ist gezeigt, dass der Spin, der dem Wellenfeld zuzuordnen ist, f beträgt. Falls $\varkappa = 0$ ist, existiert kein Ruhsystem, und diese Schlüsse werden wiederum ungültig.

Die Differentialgleichungen (5.1) und (5.3) können nun wieder durch ein Gleichungssystem 1. Ordnung ersetzt werden:

$$\begin{aligned} p^{\dot\nu\varrho}\, a^{\dot\lambda\dot\mu\cdots}_{\varrho\delta\ldots} &= \varkappa\, b^{\dot\nu\dot\lambda\dot\mu\cdots}_{\delta\ldots} \\ p_{\dot\nu\varrho}\, b^{\dot\nu\dot\lambda\dot\mu}_{\delta\ldots} &= \varkappa\, a^{\dot\lambda\dot\mu\cdots}_{\varrho\delta\ldots} \end{aligned} \tag{5.4}$$

wobei aus (5.3) folgt, dass $b^{\dot\nu\dot\lambda\dot\mu\cdots}_{\delta}$ wieder ein symmetrischer Spinor ist, der der Wellengleichung 2. Ordnung und der Nebenbedingung (5.3) genügt. Man kann daher alle Gleichungen mit festem $k+l$ durch Differentiation aufeinander zurückführen, sie beschreiben alle das gleiche Wellenfeld. Sei $a^{(0)\dot\lambda\dot\mu\cdots}_{\varrho\delta}$ derjenige Spinor a, für den $k=l$ ist, der also $2k$ unpunktierte und $2k-1$ punktierte Indices hat. Er genüge den Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} p^{\dot\nu\varrho}\, a^{(0)\dot\lambda\dot\mu\cdots}_{\varrho\delta\ldots} &= \varkappa\, b^{(0)\dot\nu\dot\lambda\dot\mu\cdots}_{\delta\ldots} \\ p_{\dot\nu\varrho}\, b^{(0)\dot\nu\dot\lambda\dot\mu\cdots}_{\delta\ldots} &= \varkappa\, a^{(0)\dot\lambda\dot\mu\cdots}_{\varrho\delta\ldots} \end{aligned}\right\} \tag{5.5}$$

$b^{(0)}$ hat $2k$ punktierte und $2k-1$ unpunktierte Indices. Aus $a^{(0)}$ bilden wir nun den Spinor $a^{(1)}$ gemäss

$$p_{\dot\lambda\tau}\, a^{(0)\dot\lambda\dot\mu\cdots}_{\varrho\delta\ldots} = \varkappa\, a^{(1)\dot\mu\cdots}_{\tau\varrho\delta\ldots}$$

und in gleicher Weise aus $a^{(1)}$ den Spinor $a^{(2)}$. Diese Spinoren sind

*) Siehe hiezu VAN DER WAERDEN[2]), Die gruppentheoret. Methode, S. 81.

wegen der Gleichung (5.3) wiederum symmetrisch. Allgemein soll gelten

$$\left.\begin{aligned} p_{\dot\lambda\tau}\, a^{(q)\,\dot\lambda\dot\mu\ldots}_{\varrho\delta\ldots} &= \varkappa\, a^{(q+1)\,\dot\mu\ldots}_{\tau\varrho\delta\ldots} \\ p^{\dot\lambda\tau}\, a^{(q+1)\,\dot\mu\ldots}_{\tau\varrho\delta\ldots} &= \varkappa\, a^{(q)\,\dot\lambda\dot\mu\ldots}_{\varrho\delta\ldots} \end{aligned}\right\} \tag{5.6}$$

Wir erhalten so die Folge von symmetrischen Spinoren $a^{(0)}$, $a^{(1)}\ldots$ $a^{(f-\frac12)}$, welche alle der Wellengleichung genügen und bis auf $a^{(f-\frac12)}$ auch der Nebenbedingung (5.3) $a^{(q)}$ hat $f+q+\frac12$ unpunktierte und $f-q-\frac12$ punktierte Indices. Ebenso bilden wir die Spinoren $b^{(1)}\ldots b^{(f-\frac12)}$ gemäss

$$\begin{aligned} p^{\dot\lambda\tau}\, b^{(q)\,\dot\mu\dot\nu\ldots}_{\tau\varrho\ldots} &= \varkappa\, b^{(q+1)\,\dot\lambda\dot\mu\dot\nu\ldots}_{\varrho\ldots} \\ p_{\dot\lambda\tau}\, b^{(q+1)\,\dot\lambda\dot\mu\dot\nu\ldots}_{\varrho\ldots} &= \varkappa\, b^{(q)\,\dot\mu\dot\nu\ldots}_{\tau\varrho\ldots} \end{aligned} \tag{5.7}$$

wobei $b^{(q)}$ $f+q+\frac12$ punktierte und $f-q-\frac12$ unpunktierte Indices hat. Bei Spiegelungen wird $b^{(q)}$ mit $a^{(q)}$ vertauscht, so dass (5.6) und (5.7) zusammen spiegelungsinvariant sind. Das Gleichungssystem (5.5) d. i. der Fall $k=l$, ist daher insofern ausgezeichnet, als dieses Gleichungssystem schon für sich allein spiegelungsinvariant ist. Im Gegensatz zum Falle ganzzahligen Spins existiert kein Spinor a, der für sich allein spiegelungsinvariant wäre.

6. *Energie-Impulstensor und Stromvektor.*

Wir können wieder mittelst der $a^{(q)}$ und $b^{(q)}$ Tensoren 2. Stufe und Vektoren bilden, die als Energie-Impulstensoren und Stromvektoren gedeutet werden können. Hierbei zeigt sich jedoch, dass, wie aus dem Falle $f=\frac12$ bekannt, die Energie nicht positiv definit ist, dagegen ist dies für die Gesamtladung der Fall, und zwar wegen der Nebenbedingung (5.3). Wir bilden zuerst den Vektor $s^{(q)}_{\dot\lambda\beta}$

$$\begin{aligned} s^{(0)}_{\dot\lambda\beta} &= a^{(0)*\,\varrho\delta\ldots}_{\dot\lambda\dot\nu\dot\tau}\, a^{(0)\,\dot\nu\dot\tau\ldots}_{\beta\varrho\delta\ldots} + b^{(0)*\,\varrho\delta\ldots}_{\beta\dot\nu\dot\tau\ldots}\, b^{(0)\,\dot\nu\dot\tau\ldots}_{\dot\lambda\varrho\delta\ldots} \\ s^{(q)}_{\dot\lambda\beta} &= \tfrac12\left(a^{(q)*}_{\dot\lambda}\, b^{(q-1)}_{\beta} + a^{(q)}_{\beta}\, b^{(q-1)*}_{\dot\lambda} + a^{(q-1)}_{\dot\lambda}\, b^{(q)*}_{\beta} + a^{(q-1)*}_{\beta}\, b^{(q)}_{\dot\lambda}\right) \end{aligned} \tag{6.1}$$

(über weggelassene Indices verjünge man wie in $s^{(0)}_{\dot\lambda\beta}$). $s^{(q)}_{\dot\lambda\beta}$ genügt der Kontinuitätsgleichung

$$p^{\dot\lambda\beta}\, s^{(q)}_{\dot\lambda\beta} = 0$$

wie man leicht nachrechnet, falls man beachtet, dass $a_\lambda b^\lambda = -a^\lambda b_\lambda$. Es gibt daher $f+\frac12$ verschiedene, im kräftefreien Falle gleichwertige Weisen den Strom zu definieren. Wir wollen nun wieder zeigen, dass alle diese Möglichkeiten zum selben Wert der Gesamtladung $\int (s^{(q)}_{\dot 1 1} + s^{(q)}_{\dot 2 2})\, dV$ führen, welche in diesem Falle definit ist.

Wir betrachten zuerst $\varrho^{(0)}_{\dot\lambda\beta}$: Da $\varrho_{\dot\lambda\beta}$ der Kontinuitätsgleichung genügt, so ist die Gesamtladung zeitlich konstant und das Integral zerfällt in die Summe über die Ladungsbeiträge der einzelnen ebenen Wellen mit vorgegebener Wellenzahl und Frequenz. Wir betrachten daher die Ladungsdichte einer ebenen Welle. Ist diese positiv, so folgt, dass auch die Gesamtladung positiv ist. Die ebene Welle betrachten wir in deren Ruhsystem. Dort sagt die Nebenbedingung (5.3) aus, dass

$$a^{\dot 1\,\dot\nu\cdots}_{2\,\alpha\cdots} = a^{\dot 2\,\dot\nu\cdots}_{1\,\alpha\cdots}, \qquad b^{\dot 1\,\dot\tau\cdots}_{2\,\beta\cdots} = b^{\dot 2\,\dot\tau\cdots}_{1\,\beta\cdots}$$

Es gilt deshalb im Ruhsystem die folgende Gleichung:

$$a^{(0)*\,\varrho\cdots}_{\dot 1\,\dot\mu\cdots}\, a^{(0)\,\dot\mu\cdots}_{1\,\varrho\cdots} = a^{(0)*\,\varrho\cdots}_{\dot 1\,\dot\mu\cdots}\, a^{(0)\,\dot\varrho\cdots}_{1\,\mu\cdots} \tag{6.2}$$

$a^{(0)*\,\varrho\cdots}_{\dot 1\,\dot\nu\cdots}$ ist aber das konjugiert-komplexe von $a^{(0)\,\dot\varrho\cdots}_{1\,\nu\cdots}$, also hat die rechte Seite von (6.2) die positiv definite Gestalt $\Sigma a^* a$. Die Ladungsdichte einer ebenen Welle besteht aber aus Summanden vom Typus (6.2), also ist die Gesamtladung positiv definit.

Um den allgemeineren Fall

$$\int \left(s^{(q)}_{1\dot 1} + s^{(q)}_{2\dot 2}\right) dV$$

zu diskutieren, genügt es wieder, eine bestimmte ebene Welle vorgegebener Wellenzahl und Frequenz in deren Ruhsystem zu betrachten. Wir wollen annehmen, die zeitliche Abhängigkeit der Amplituden $a^{(q)}$, $b^{(q)}$ sei $e^{i\omega t}$; dann ist diejenige von $a^{(q)*}$ $b^{(q)*}$ gleich $e^{-i\omega t}$. $a^{(q)}$ und $b^{(q-1)}$ gehen nun aus $a^{(0)}$ durch q-malige Anwendung des Operators $1/\varkappa\, p^{\dot\lambda\beta}$ hervor. Dieser wird aber im Ruhsystem für $a^{(0)}$ und $b^{(0)}$ gleich $i\,\delta^{\dot\lambda\beta}$, für $a^{(0)*}$ und $b^{(0)*}$ gleich $-i\,\delta^{\dot\lambda\beta}$. Daraus geht sofort hervor, dass die Gleichung gilt:

$$\int \left(s^{(q)}_{1\dot 1} + s^{(q)}_{2\dot 2}\right) dV = \int \left(s^{(0)}_{1\dot 1} + s^{(0)}_{2\dot 2}\right) dV.$$

Damit ist gezeigt, dass sämtliche Vektoren $s^{(q)}_{\alpha\dot\mu}$ zur gleichen Gesamtladung führen. Die Lokalisierung der Ladung hängt jedoch wieder von (q) ab.

Wir können weiter Spinoren bilden, welche Tensoren der 2. Stufe entsprechen, und die der Kontinuitätsgleichung genügen. Diese können wieder als Energie-Impulstensoren unseres Feldes aufgefasst werden. Wir betrachten den Spinor

$$\left.\begin{aligned}
t^{(0)}_{\dot\lambda\beta,\,\gamma\dot\tau} &= \tfrac{1}{2}\left(a^{(0)*}_{\dot\lambda}\, p_{\dot\nu\delta}\, a^{(0)}_{\beta} - a^{(0)}_{\beta}\, p_{\gamma\dot\tau}\, a^{(0)*}_{\dot\lambda} + b^{(0)*}_{\beta}\, p_{\gamma\dot\tau}\, b^{(0)}_{\dot\lambda} - b^{(0)}_{\dot\lambda}\, p_{\gamma\dot\tau}\, b^{(0)*}_{\beta}\right)\\
t^{(q)}_{\dot\lambda\beta,\,\dot\tau\gamma} &= \tfrac{1}{4}\left(a^{(q)*}_{\dot\lambda}\, p_{\gamma\dot\tau}\, b^{(q-1)}_{\beta} - b^{(q-1)}_{\beta}\, p_{\gamma\dot\tau}\, a^{(q)*}_{\dot\lambda} + b^{(q-1)*}_{\dot\lambda}\, p_{\dot\tau\gamma}\, a^{(q)}_{\beta}\right.\\
&\quad - a^{(q)}_{\beta}\, p_{\dot\tau\gamma}\, b^{(q-1)*}_{\dot\lambda} + b^{(q)*}_{\beta}\, p_{\dot\tau\gamma}\, a^{(q-1)}_{\dot\lambda} - a^{(q-1)}_{\dot\lambda}\, p_{\dot\tau\gamma}\, b^{(q)*}_{\beta}\\
&\quad \left. + a^{(q-1)*}_{\beta}\, p_{\dot\tau\gamma}\, b^{(q)}_{\dot\lambda} - b^{(q)}_{\dot\lambda}\, p_{\gamma\dot\tau}\, a^{(q-1)*}_{\beta}\right)
\end{aligned}\right\} \tag{6.3}$$

$t^{(q)}_{\dot\lambda\beta,\,\dot\iota\gamma}$ genügt den Gleichungen

$$p^{\dot\lambda\beta}\, t^{(q)}_{\dot\lambda\beta,\,\dot\iota\gamma} = 0\,, \quad p^{\dot\iota\gamma}\, t^{(q)}_{\dot\lambda\beta,\,\dot\iota\gamma} = 0\,.$$

Man kann deshalb aus $t^{(q)}$ den Spinor $\Theta^{(q)}$ bilden, gemäss

$$\Theta^{(q)}_{\dot\lambda\beta,\,\dot\iota\gamma} = \tfrac{1}{2}\left(t^{(q)}_{\dot\lambda\beta,\,\dot\iota\gamma} + t_{\dot\iota\gamma,\,\dot\lambda\beta}\right).$$

Der $\Theta_{\dot\lambda\beta,\dot\iota\gamma}$ zugeordnete Tensor $T_{k\,l}$

$$T_{kl} = \Theta^{(q)}_{\dot\lambda\beta,\,\dot\iota\gamma}\, \sigma_k^{\dot\lambda\beta}\, \sigma_l^{\dot\iota\gamma}$$

ist symmetrisch in $k\,l$ und genügt der Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial T_{kl}}{\partial x_k} = 0\,.$$

$T_{k\,l}$ kann daher als Energie-Impulstensor des Feldes aufgefasst werden. Man erkennt leicht, unter Zuhilfenahme der Fourier-Zerlegung der Feldgrössen und indem man wieder die Existenz eines Ruhsystems benützt, dass sämtliche $\Theta^{(q)}$ zum gleichen Wert der Gesamtenergie führen, sowie dass der Beitrag zur Energie von ebenen Wellen, die sich mit $e^{+i\omega t}$ ändern, das entgegengesetzte Vorzeichen hat wie der Beitrag der Wellen, die sich mit $e^{-i\omega t}$ ändern. Es gibt also Zustände positiver und negativer Energie, wie das aus der Dirac'schen Theorie des Elektrons bekannt ist. Wir werden deshalb postulieren müssen, dass die dem Wellenfeld zugeordneten Teilchen das Paulische Ausschliessungsprinzip erfüllen, damit mittels einer der Diracschen analogen Löchertheorie die Energie positiv gemacht werden kann.

7. *Die Matrizen* $u_\nu(k)$, $v_\nu(k)$.

Die bis jetzt betrachteten Spinoren waren alle symmetrisch. Sie sind deshalb gegeben, wenn die Anzahl der unpunktierten und der punktierten Indices, die gleich eins sind, bekannt ist. Man kann infolgedessen einen Spinor $a^{\dot\lambda\dot\mu\cdots}_{\dot\delta\dot\varrho\cdots}$ mit $2\,k$ unpunktierten und $2\,l$ punktierten Indices, der in diesen symmetrisch ist, durch eine Grösse $A^{\dot r}_{s}$ ersetzen, deren Indices $\dot r$, s angeben, wieviele der punktierten und unpunktierten Indices eins sind. Es hat dann s $2\,k+1$ Werte, r $2\,l+1$ Werte. Wir haben, um eine Zuordnung zwischen der Grösse A^{r}_{s} und dem symmetrischen Spinor $a^{\dot\lambda\dot\mu\cdots}_{\dot\varrho\dot\delta\cdots}$ zu gewinnen, eine Matrix aufzusuchen, die von den Spinorindices auf die Indices $\dot r$, s überführt. Man kann natürlich auch einem Spinor ohne besondere Symmetrieeigenschaften eine solche Grösse $A^{\dot r}_{s}$ zuordnen, die so erzeugte Abbildung ist jedoch nicht

ein-eindeutig, da $A_s^{\dot{r}}$ nur den symmetrischen Teil des zugeordneten Spinors bestimmt. Da nun ein Spinor ohne Symmetrieeigenschaften sich nach einer Produktdarstellung der Lorentzgruppe transformiert, welche $2k$ mal den Faktor $\vartheta_{\frac{1}{2},0}$ und $2l$ mal den Faktor $\vartheta_{0,\frac{1}{2}}$ enthält, $A_s^{\dot{r}}$ aber irreduzibel ist, so bedeutet die Zuordnung einer solchen Grösse zu einem nicht-symmetrischen Spinor das Herausgreifen eines irreduziblen Teilraumes, und zwar desjenigen mit der grössten Dimensionszahl aus der zum Spinor gehörigen Darstellung. Man kann deshalb eine Abbildung, die von Spinorindices auf einen Index s führt, mittels der Reduktionstheorie von Darstellungen auffinden.

Wir betrachten deshalb die Produktdarstellung der Drehgruppe $\vartheta_{\frac{1}{2}} \times \vartheta_k$. $\vartheta_{\frac{1}{2}}$ und ϑ_k werden durch ihre infinitesimalen Transformationen σ^l und $\alpha^l(k)$ charakterisiert. Die Produktdarstellung kann durch die schon von Dirac betrachtete Matrix

$$A(k) = \sum_{l=1}^{3} \sigma^l \times \alpha^l(k)$$

gekennzeichnet werden. Die Matrix $A(k)$ ist nämlich mit sämtlichen Matrices der Produktdarstellung vertauschbar. Bringt man sie auf Hauptachsen, so zerfällt zugleich die Darstellung $\vartheta_{\frac{1}{2}} \times \vartheta_k$ in irreduzible Bestandteile. Die Reduktion von $\vartheta_{\frac{1}{2}} \times \vartheta_k$ ist damit auf die Hauptachsentransformation von $A(k)$ zurückgeführt*). Eine Matrix, welche $A(k)$ auf Hauptachsen bringt, wurde schon von Dirac angegeben. Wir schreiben sie in der Form

$$U = (2k+1)^{-\frac{1}{2}} \begin{pmatrix} u_1(k+\frac{1}{2}) & u_2(k+\frac{1}{2}) \\ v_1(k) & v_2(k) \end{pmatrix}$$

$$U^{-1} = (2k+1)^{-\frac{1}{2}} \begin{pmatrix} v^1(k+\frac{1}{2}) & u^1(k) \\ v^2(k+\frac{1}{2}) & u^2(k) \end{pmatrix}$$

Dabei haben wir das Dirac'sche $b_\nu = u_\nu(k+\frac{1}{2})$ und $a^\nu = v^\nu(k+\frac{1}{2})$ gesetzt; denn diese Matrizen erfüllen genau die gleichen Relationen, die für $u_\nu(k)$, $v^\nu(k)$ gelten, falls man k durch $k+\frac{1}{2}$ ersetzt. Durchläuft k alle halbganzen Zahlen, so erhält man eine Folge von Matrizen mit den folgenden Eigenschaften:

$u_1(k)$, $u_2(k)$ sind rechteckige Matrices mit $2k+1$ Zeilen und $2k$ Spalten.

$v_1(k)$, $v_2(k)$ sind rechteckige Matrices mit $2k$ Zeilen und $2k+1$ Spalten.

*) Siehe hiezu: H. Casimir und B. L. van der Waerden, Math. Ann. 111 (1935), S. 1.

Im Sinne des Matrixkalküls lassen sich daher die folgenden Produkte bilden:

$v_\nu(k)\, u^\mu(k)$	Quadratische Matrix vom Rang	$2k$
$u_\mu(k)\, v^\nu(k)$	,, ,, ,, ,,	$2k+1$
$v_\nu(k-\frac{1}{2})\, v^\mu(k)$	Rechteckige Matrix mit	$2k+1$ Spalten
	und	$2k-1$ Zeilen
$u^\mu(k)\, u^\nu(k-\frac{1}{2})$	Rechteckige Matrix mit	$2k-1$ Spalten
	und	$2k+1$ Zeilen.

Aus der Tatsache, dass die aus den u^ν und v^μ aufgebaute Matrix U die Matrix $A(k)$ auf Diagonalform bringt, folgen die Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} u^\mu(k)\, v_\nu(k) &= \left(k\,\delta^\mu_\nu - s^\mu_{\cdot\nu}(k)\right)(-1)^{2k+1} \\ v^\mu(k)\, u_\nu(k) &= \left(s^\mu_{\cdot\nu}(k-\tfrac{1}{2}) + (k+\tfrac{1}{2})\,\delta^\mu_\nu\right)(-1)^{2k} \end{aligned}\right\} \tag{7.1}$$

Dabei ist $s^\mu_{\cdot\nu}(k)$ der den infinitesimalen Drehungen $\alpha^i(k)$ zugeordnete Spinor.

Weiter folgt

$$\left.\begin{aligned} &v_\mu(\tfrac{1}{2})\, u^\nu(\tfrac{1}{2}) = \delta^\nu_\mu \\ &v^\mu(k)\, u_\nu(k) + u^\mu(k-\tfrac{1}{2})\, v_\nu(k-\tfrac{1}{2}) = 2k\,\delta^\mu_\nu\cdot(-1)^{2k} \\ &u^\mu(k)\, v_\mu(k) = 2k\,(-1)^{2k+1};\ v_\mu(k)\, u^\mu(k) = (2k+1)\,(-1)^{2k+1} \end{aligned}\right\} \tag{7.2}$$

$$u^\mu(k)\, u_\mu(k-\tfrac{1}{2}) = v^\mu(k-\tfrac{1}{2})\, v_\mu(k) = 0\,. \tag{7.3}$$

Alle diese Gleichungen wurden im wesentlichen schon von Dirac abgeleitet. Es werden aber dort die u_ν, v_ν nicht als Funktion von k betrachtet (Dirac betrachtet speziell $u^\nu(k)$, $v_\nu(k)$ und $u^\nu(k+\frac{1}{2}) = b^\nu$, $v^\nu(k+\frac{1}{2}) = a^\nu$ für festes k).

Für unsere Zwecke sind nun die Gleichungen (6.3) besonders wichtig. Diese sagen nämlich aus, dass die rechteckigen Matrices $u^\mu(k)\, u^\nu(k-\frac{1}{2})$ und $v^\mu(k-\frac{1}{2})\, v^\nu(k)$ in ν und μ symmetrische Spinoren sind. Man bilde nun die Operatoren

$$\left.\begin{aligned} &R^{\mu_1\mu_2\ldots\mu_{2k}}(k) = v^{\mu_1}(\tfrac{1}{2})\, v^{\mu_2}(1)\ldots v^{\mu_{2k}}(k) \\ \text{und}\quad &P^{\nu_1\nu_2\ldots\nu_{2k}}(k) = u^{\nu_1}(k)\, u^{\nu_2}(k-\tfrac{1}{2})\ldots u^{\nu_{2k}}(\tfrac{1}{2}) \end{aligned}\right\} \tag{7.4}$$

$(R_l^{\mu\varrho\ldots\lambda})$ ist wegen (6.3) in allen Spinorindices symmetrisch. Der Index l kann $2k+1$ Werte annehmen und bezüglich dieses Indexes dann $R^{\mu\varrho\ldots\lambda}$ als Matrix mit einer einzigen Zeile aufgefasst werden.

$(P_n^{\delta\varrho\ldots\lambda})$ ist ebenfalls in allen Spinorindices symmetrisch. Der Index n kann $2k+1$ Werte annehmen und $P^{\delta\varrho\ldots\lambda}$ kann bezüglich n als Matrix mit einer einzigen Spalte aufgefasst werden.

Nach (6.2) und (6.4) gilt

$$\left.\begin{array}{l} P_s^{\delta\varrho\ldots\lambda}(k)\, R_{r,\,\delta\varrho\ldots\lambda}(k) = (2\,k)\,!\,\delta_{rs} \\ \text{Mit der Umkehrformel} \\ R_{s,\,\varrho\delta\ldots\lambda}(k)\, P_s^{\gamma\mu\ldots\nu}(k) = \sum \mathrm{Perm}\,(\gamma\,\mu\ldots\nu)\,\delta_\varrho^\gamma\,\delta_\delta^\mu\,\delta_\lambda^\nu \end{array}\right\}. \tag{7.5}$$

Mittelst des Operators $P_s(k)^{\gamma\mu\ldots\nu}$ kann man nun jedem symmetrischen Spinor $a_{\gamma\mu\nu\ldots}$ vom Rang $2\,k$ eine Grösse A_s zuordnen, die nur einen Index hat, der $2\,k+1$ Werte durchläuft. Umgekehrt kann man mittelst $R_s,\,(k)_{\varrho\delta\ldots\lambda}$ jedem A_s einen symmetrischen Spinor zuordnen.

$$\left.\begin{array}{l} P_s^{\gamma\mu\ldots\nu}(k)\, a_{\gamma\mu\ldots\nu} = \sqrt{(2\,k)\,!}\,A_s \\ R_{s,\,\gamma\mu\ldots\nu}(k)\, A_s = \sqrt{(2\,k)\,!}\,a_{\gamma\mu\ldots\nu} \end{array}\right\}. \tag{7.6}$$

Wendet man die Operation $P_s^{\gamma\mu\ldots\nu}$ auf einen nicht symmetrischen Spinor an, so ist diese Operation gemäss (6.5) nicht mehr eindeutig umkehrbar; man erhält vielmehr den symmetrisierten Spinor zurück. Man kann deshalb $P_s^{\gamma\mu\ldots\nu}$ als Symmetrisierungsoperation benützen.

Analoge Operatoren lassen sich auch für die punktierten Indices definieren. Wir heissen sie

$$P_{\dot\tau\dot\mu\ldots\dot\nu}^{\dot s}(l), \qquad R^{\dot s,\,\dot\tau\dot\mu\ldots\dot\nu}(l). \tag{7.7}$$

Sie sind aus den $u^{\dot\nu}$, $v^{\dot\mu}$ aufgebaut und genügen denselben Gleichungen wie die Operatoren mit unpunktierten Indices, falls man in den Formeln (7.1) bis (7.6) jeden Spinor C_μ durch $C^{\dot\mu}$, b^ν durch $b_{\dot\nu}$ ersetzt.

Man kann nun weiter mittelst der Produkte

$$v^\mu(k)\, v^\nu(k+\tfrac{1}{2})\ldots v^\lambda(r)$$

und

$$u^\mu(k)\, u^\nu(k-\tfrac{1}{2})\ldots u^\varrho(l)$$

nur einen Teil der Indices eines Spinors in einen Index S verwandeln, wodurch man eine Grösse erhält, die Indices beider Art besitzt. Umgekehrt kann dann eine solche Grösse wieder in eine Grösse $A_r^{\dot s}$ verwandelt werden. Insbesondere kann man Grössen bilden, die einen Spinorindex enthalten. Auf diese Weise gelangt man zu den von Dirac angegebenen Gleichungen

$$\left.\begin{array}{l} p^{\dot\tau\varrho}\,\psi_\varrho^A = \varkappa\,\psi^{\dot\tau B} \\ p_{\dot\tau\varrho}\,\psi^{\dot\tau B} = \varkappa\,\psi_\varrho^A \end{array}\right\}. \tag{7.8}$$

Dabei ist

$$\psi^{A\,\dot{r}}_{\varrho,\,p} = \sqrt{2\,k}\, v^{s}_{p,\,\varrho}\,(k)\, A^{\dot{r}}_{s}$$

$$\psi^{B,\,\dot{\iota}\,\dot{r}}_{p} = \sqrt{2\,l}\, v^{\dot{r},\,\dot{\iota}}_{\dot{t}}\,(l)\, B^{\dot{t}}_{p}$$

ψ^{A}_{ϱ}, $\psi^{B,\,\dot{\iota}}$ erfüllen die Nebenbedingungen

$$\left.\begin{aligned} v_{\dot{\iota}}\,(l-\tfrac{1}{2})\, p^{\dot{\iota}\,\varrho}\, \psi^{A}_{\varrho} &= 0 \\ v^{\varrho}\,(k-\tfrac{1}{2})\, p_{\dot{\iota}\,\varrho}\, \psi^{B\,\dot{\iota}} &= 0 \end{aligned}\right\} . \tag{7.9}$$

Die A und B genügen deshalb den Gleichungen

$$p^{\dot{\iota}\varrho}\, v_{\varrho}(k)\, A = \sqrt{\frac{2\,l}{2\,k}}\, \varkappa\, v^{\dot{\iota}}(l)\, B$$

$$p_{\dot{\iota}\,\varrho}\, v^{\dot{\iota}}(l)\, B = \sqrt{\frac{2\,k}{2\,l}} \cdot \varkappa\, v_{\varrho}(k)\, A \tag{7.9}$$

sowie den Nebenbedingungen:

$$v_{\dot{\iota}}(l-\tfrac{1}{2})\, p^{\dot{\iota}\,\varrho}\, v_{\varrho}(k)\, A = v^{\varrho}(k-\tfrac{1}{2})\, p_{\dot{\iota}\,\varrho}\, v^{\dot{\iota}}(l)\, B = 0\,. \tag{7.10}$$

8. *Quantisierung der Feldtheorie zu halbzahligem Spin f.*

Wir wollen wieder, wie im Falle ganzzahligen Spins, Vertauschungsrelationen zwischen den Feldgrössen aufstellen, welche sämtliche Gleichungen, denen die Feldgrössen genügen, identisch erfüllen.

Um solche Relationen aufzustellen, gehe man von denen aus, denen der oben definierte Spinor $a^{(m)}_{\alpha\beta\ldots\gamma}$ genügt ($m = f - \frac{1}{2}$), der nur unpunktierte Indices hat. Die Anzahl der Indices ist die ungerade Zahl $2\,m + 1$. $a^{(m)}_{\alpha\beta\ldots\gamma}$ ist symmetrisch in allen Indices, die Nebenbedingung (5.3) fällt jedoch weg, was eine gewisse Vereinfachung mit sich bringt.

Als Vertauschungsrelation zwischen $a^{(m)}$ und $a^{*(m)}$ setzen wir an:

$$\frac{1}{i}\left[a^{(m)}_{\alpha\,\beta\ldots\gamma},\; a^{(m)*}_{\dot{\nu}\,\dot{\varrho}\ldots\dot{\lambda}}\right]^{+} = \frac{1}{\varkappa^{2\,m}\,(2\,m+1)\,!} \sum \mathrm{Perm}\,(\alpha\ldots\gamma)\, p_{\alpha\,\dot{\iota}}\ldots p_{\gamma\,\dot{\nu}}\, D\,(x)\,. \tag{8.1}$$

Es bedeutet $[a, b]^{+} = [ab + ba]$. $D(x)$ ist wieder die nach (4.3b) definierte, invariante Funktion. Auf der rechten Seite von (7.1) steht eine ungerade Anzahl, nämlich $2\,m+1$ Differentiationen $p_{\dot{\varrho}\dot{\delta}}$.

Die Relationen (8.1) haben, falls sie überhaupt erfüllbar sind, zur Folge, dass die so beschriebenen Teilchen das Pauli'sche Ausschliessungsprinzip erfüllen; ein Umstand, der es ermöglicht, durch eine „Löchertheorie" die Energie positiv zu machen. Dass die Relationen erfüllbar sind, zeigen wir wie folgt:

Sei $k_{\dot\lambda\beta}$ der dem Wellenzahlvektor k_i gemäss $k_{\dot\lambda\beta} = k_i\,\sigma^i_{\dot\lambda\beta}$ zugeordnete Spinor. Dann lauten die Vertauschungsrelationen im Impulsraum, falls man die Definition von $D(x)$ beachtet

$$\frac{1}{i}\left[a_{\alpha\beta\ldots}(k), a^*_{\dot\nu\dot\varrho}(k')\right]^+ = \frac{\delta_{kk'}}{2\cdot\varkappa^{2m}\,(2m+1)!}\sum \mathrm{Perm}\,(\alpha\beta\ldots)\,k_{\alpha\dot\nu}\,k_{\beta\dot\varrho}\ldots\frac{1}{k_4}. \tag{8.2}$$

Daraus sieht man, dass Wellen, die zu verschiedenen k_i gehören, die plus-Vertauschung null ergeben. Betrachten wir nun zwei zum gleichen k_i gehörige Wellen und zwar in deren Ruhsystem. Dort ist $k_{\alpha\dot\nu} = k_4\cdot\delta_{\alpha\dot\nu}$. Die rechte Seite von (8.2) ist deshalb nur dann ungleich null, wenn $a_{\alpha\beta\ldots\gamma}$ das konjugiert-komplexe von $a^*_{\dot\nu\dot\varrho\ldots\dot\lambda}$ ist. Die linke Seite ist deshalb niemals negativ, also muss es auch die rechte sein. Die rechte Seite ist nun aber entweder null oder gleich

$$\frac{1}{2\cdot\varkappa^{2m}}\binom{2m+1}{s}^{-1}\left(\frac{k_4}{i}\right)^{2m} = \frac{1}{2}\binom{2m+1}{s}^{-1} \tag{8.3}$$

was positiv ist. (Es bedeutet S die Anzahl der Indices von $a_{\alpha\beta\ldots}(k)$ welche gleich 1 sind.) Die Vertauschungsrelation haben daher die gewünschte Gestalt

$$[a_i, a^*_k] = \delta_{ik}\cdot\text{konst.}$$

Dass die Ladung auf Grund der Vertauschungsrelationen (8.2) die richtigen Eigenwerte hat, folgt sofort, falls man die Ladung einer ebenen Welle im Ruhsystem betrachtet. Sie hat dort die positiv definite Form $\Sigma a a^*$ (nach (6.2), wobei ein jeder Term gerade $2\cdot\binom{2m+1}{s}$ mal vorkommt, welcher Faktor gemäss (8.3) durch unsere Vertauschungsrelationen gerade kompensiert wird.

Falls der Spin ganzzahlig ist, können wir die Vertauschungsrelationen zwischen den im Abschnitt 3 definierten Grössen $a^{(b)}$ im Impulsraum ebenfalls in der Gestalt

$$\frac{1}{i}\left[a^f_{\alpha\beta\ldots\gamma}(k), a^{f*}_{\dot\nu\dot\varrho\ldots\dot\lambda}(k)\right]^- = C\cdot\delta_{kk'}\sum \mathrm{Perm}\,(\dot\nu\dot\varrho\ldots)\,k_{\alpha\dot\nu}\ldots\frac{1}{k_4} \tag{8.4}$$

schreiben. Hier treten aber eine gerade Anzahl von Faktoren $k_{\dot\lambda\delta}$

auf, nämlich $2f$. Deshalb hat im Ruhsystem die rechte Seite von (8.4) die Form

$$C \cdot \left(\frac{k_4}{i}\right)^{2f-1}$$

Dies ist positiv oder negativ, je nachdem $k_4/i = \pm \varkappa$ ist. Man kann deshalb die linke Seite von (8.4) nicht als Vertauschungsrelationen mit Plus-Zeichen schreiben, da dann die linke Seite die positiv-definite Gestalt

$$[a^* a + a a^*]$$

annehmen würde, während die rechte Seite positiv oder negativ sein könnte. Man kann demnach Teilchen mit ganzzahligem Spin nicht nach Ausschliessungsprinzip quantisieren, ohne auf den infinitesimalen Charakter der Vertauschungsrelationen zu verzichten, sondern nur nach Bose-Statistik.*) Teilchen mit halbzahligem Spin kann und muss man dagegen nach Ausschliessungsprinzip quantisieren, damit die Energie positiv wird. Durch obige Betrachtung scheint der schon lange vermutete Zusammenhang zwischen Spin und Statistik auf einfache Weise mathematisch bewiesen. Dabei ist es übrigens unwesentlich, dass die Spinoren irreduzibel sind. Es wird lediglich die Existenz eines Ruhsystems für jede ebene Welle, die Eigenschaften der D-Funktion und die Tatsache, dass die Anzahl der Indices gerade oder ungerade ist, je nach dem der Spin ganz oder halbzahlig ist, benützt. Das Auftreten der D-Funktion bedeutet dabei, dass die Vertauschungsrelationen relativistisch invariant und infinitesimal sein sollen.

Aus den Vertauschungsrelationen (8.1) für die $a^{(m)}_{\alpha\beta\ldots}$ kann man solche für beliebige $a^{(q)}$ und $a^{(q)*}$, welche punktierte und unpunktierte Indices haben, gewinnen, indem man auf (7.1) die Operation $p^{\dot\lambda\beta}/\varkappa$ anwendet gemäss

$$\frac{1}{i}\left[a^{(m-1)\,\dot\nu}{}_{\alpha\beta\ldots\gamma},\, a^{(m-1)*}{}_{\beta\dot\lambda\dot\varrho\ldots\dot\mu}\right]\frac{1}{i\varkappa^2}\left[p^{\dot\nu\delta\,(m)}\, a_{\delta\alpha\ldots\gamma},\, p^{\dot\tau\beta\,(m)*}\, a_{\dot\tau\dot\lambda\ldots\dot\mu}\right]$$

$$= p^{\dot\nu\delta}\, p^{\dot\tau\beta} \cdot \frac{1}{n^{2m+2}\,(2m+1)!}\sum \mathrm{Perm}\,(\alpha\beta\ldots)\, p_{\delta\dot\tau}\, p_{\alpha\dot\lambda}\ldots p_{\gamma\dot\mu}\, D(x).$$

Man erhält auf diese Weise Vertauschungsrelationen für den Spinor $a^{(m-n)\,\dot\nu\ldots}_{\alpha\ldots}$, der $2m+1-n=p$ unpunktierte und n punktierte Indices enthält, mit seinem konjugierten folgendes

$$\frac{1}{i}\left[a^{(m-n)\,\dot\lambda_1\ldots\dot\lambda_n}_{\mu_1\ldots\mu_p},\, a^{(m-n)*\,\dot\lambda_1\ldots\dot\lambda_n}_{\dot\mu_1\ldots\dot\mu_p}\right] = \frac{\varkappa^{-2m}}{(2m+1)!}\sum_{l=0}^{n}\varkappa^{2l}\sum \pi_l$$

$$\cdot\, p_{\mu_1\dot\mu_1}\ldots p_{\mu_{p-l}\dot\mu_{p-l}}\,\delta^{\lambda_1}_{\mu_{p-l+1}}\,\delta^{\dot\lambda_1}_{\dot\mu_{p-l+1}}\ldots\delta^{\dot\lambda_l}_{\dot\mu_p}\, p^{\mu_{l+1}\dot\mu_{l+1}}\ldots p^{\lambda_n\dot\lambda_n}\, D(x) \quad (8.5)$$

*) Siehe hiezu: W. Pauli, Annales Poincaré VI (1936) S. 147 ff.

$\Sigma\pi_l$ bedeutet dabei denjenigen Permutationsoperator der Indices des darauffolgenden Summenterms, der mit möglichst wenig Vertauschungen den Term symmetrisiert. Die Anzahl sämtlicher Summanden ist dann gerade $(2m+1)!$, wie es sein muss, da durch die Differentiation diese Anzahl nicht verändert wird. Wir können mittelst der nach (7.4) bis (7.6) definierten Operatoren P^s unsere Relationen auch in der folgenden Gestalt schreiben:

$$\frac{n!\,p!}{i}\left[A_t^{(m-n)\,\dot{s}},\, A_{\dot{r}}^{(m-n)*\,q}\right]=\frac{\varkappa^{-2m}}{(2m+1)!}\,P^{\dot{s}}_{\lambda_1\ldots\lambda_n}\,P^{*\,q}_{\dot{\lambda}_1\ldots\dot{\lambda}_n}\cdot$$

$$P_t^{\mu_1\ldots\mu_p}\,P_{\dot{r}}^{*\dot{\mu}_1\ldots\dot{\mu}_p}\sum_{l=0}^{p}\frac{1}{l!\,(p-l)!}\,\frac{1}{l!\,(n-l)!}\cdot\varkappa^{2l}\cdot$$

$$\cdot\,p_{\mu_1\dot{\mu}_1}\ldots p_{\mu_{p-l}\dot{\mu}_{p-l}}\,\delta^{\dot{\lambda}_1}_{\dot{\mu}_{p-l+1}}\,\delta^{\dot{\lambda}_1}_{\dot{\mu}_{p-l+1}}\,\delta^{\dot{\lambda}_l}_{\dot{\mu}_p}\ldots p^{\lambda_{l+1}\dot{\lambda}_{l+1}}\ldots p^{\lambda_n\dot{\lambda}_n}\,D(x). \quad (8.6)$$

Auf ähnlich einfache Weise können auch die Vertauschungsrelationen zwischen den Grössen $a^{(q)}$ und $b^{(q)*}$ angegeben werden. (Bei Spiegelung vertauschen sich $a^{(q)}$ und $b^{(q)*}$.) Man findet

$$\frac{1}{i}\left[a^{(q)\,\dot{\lambda}_1\ldots\dot{\lambda}_r}_{\varrho_1\ldots\varrho_s},\, b^{(q)*\,\nu_1\ldots\nu_s}_{\dot{\mu}_1\ldots\dot{\mu}_r}\right]=\frac{1}{(r+s)!}\sum_{k=0}^{r}\pi_k\,\varkappa^{(1-2k)}\,p^{\dot{\lambda}_1\nu_1}\,p^{\dot{\lambda}_2\nu_2}\ldots$$

$$p^{\dot{\lambda}_k\nu_k}\,p_{\dot{\mu}_1\varrho_1}\ldots p_{\dot{\mu}_k\varrho_k}\,\delta^{\nu_{k+1}}_{\varrho_{k+1}}\ldots\delta^{\nu_s}_{\varrho_s}\,\delta^{\dot{\lambda}_{k+1}}_{\dot{\mu}_{k+1}}\ldots\delta^{\dot{\lambda}_r}_{\dot{\mu}_r}\,D(x). \quad (8.7)$$

Dabei bedeutet $\Sigma\pi_k$ den gleichen Permutationsoperator wie $\Sigma\pi_l$ in (8.5).

Anhang.

Bestimmung der Koeffizienten der Formel (8.5).

Wir betrachten einen Ausdruck der folgenden Gestalt

$$p_{\mu_1\dot{\mu}_1}\ldots p_{\mu_r\dot{\mu}_r}\,\delta^{\lambda_1}_{\mu_{r+1}}\,\delta^{\dot{\lambda}_1}_{\dot{\mu}_{r+1}}\ldots\delta^{\lambda_n}_{\mu_{r+n}}\,\delta^{\dot{\lambda}_n}_{\dot{\mu}_{r+n}}\,p^{\lambda_{n+1}\dot{\lambda}_{n+1}}\ldots p^{\lambda_{k+n}\dot{\lambda}_{k+n}} \quad (1)$$

dabei ist

$$r+n=p$$
$$k+n=q \qquad \text{sowie } p+q=L.$$

(1) ist nun in den $\mu_i, \dot{\mu}_i, \lambda_k, \dot{\lambda}_k$ zu symmetrisieren. Wir haben also eine Summe von Termen der Form (1) zu bilden, wobei die $\mu_i, \lambda_i\ldots$ geeignet permutiert werden. Wieviele Terme muss die Summe mindestens enthalten, damit sie in den Indizes $\mu_i, \lambda_i\ldots$ symmetrisch ist?

Wir gehen um dies zu entscheiden so vor: Wir symmetrisieren zuerst in den μ_1 bis μ_r. Was entsteht, ist dann in den $\dot{\mu}_1$ bis $\dot{\mu}_r$ von selbst symmetrisch. Ebenso symmetrisieren wir die λ_{n+1} bis λ_q. So erhalten wir $k!\,r!$ Terme. Nun symmetrisieren wir die λ_1 bis λ_n sowie die $\dot{\lambda}_1$ bis $\dot{\lambda}_n$, wodurch die μ_{r+1} bis μ_{r+n} sowie die $\dot{\mu}_{r+1}$, bis $\dot{\mu}_p$ auch symmetrisiert werden. Dies gibt

$$(n!)^2\cdot k!\,r! \quad \text{Terme.}$$

Nun kann man die λ_1 bis λ_q auf $\binom{q}{n}$ Arten in zwei Gruppen mit k und n Indices einteilen. Dasselbe gilt für die punktierten $\dot{\lambda}_1$ sowie für die μ bezüglich r und n. Wir erhalten infolgedessen

$$(n!)^2\, r!\, k!\, \binom{p}{n}^2 \binom{q}{n}^2 = p!\, q!\, \binom{p}{n} \binom{q}{n} \text{ Terme.} \tag{2}$$

Dann ist die so entstehende Summe völlig symmetrisiert. Wir heissen diese Summe S_n. Die Symmetrisierungsoperation, die aus (1) S_n erzeugt, heissen wir π_n. Geht man aus von der Summe:

$$\Sigma \operatorname{Perm}(\delta_i)\, p_{\mu_1 \dot{\mu}_1} \cdots p_{\mu_2 \dot{\mu}_2}, \tag{3}$$

welche $L!$ Terme enthält und wendet darauf die Operation

$$\frac{1}{p^2}\, p^{\lambda_k \dot{\mu}_i}\, p^{\dot{\lambda}_k \mu_i} \tag{4}$$

q mal an, so gelangt man zu einer in den μ_i, $\dot{\mu}_i$ und λ_k, $\dot{\lambda}_k$ symmetrischen Summe, von der Gestalt

$$\sum_n S_n \cdot C_n. \tag{5}$$

Man überlegt sich leicht, dass wegen der Entstehung von (5) alle C_n von null verschiedene, natürliche Zahlen sein müssen. Wir zeigen nun, dass sie alle gleich eins sind. Die Summe (3) enthält nämlich $L!$ Terme, die alle mit dem Faktor eins multipliziert sind. Die Operation (4) ändert diese Anzahl nicht, und kann auch zu keinen Zahlfaktoren Anlass geben. Infolgedessen muss die Summe (5) auch $L!$ Summanden enthalten. Da S_n $p!\, q!\, \binom{p}{n} \binom{q}{n}$ Summanden enthält, so muss

$$\sum_n C_n\, p!\, q!\, \binom{p}{n} \binom{q}{n} = L!$$

sein. Nun ist $\Sigma\, (p_n)\, (q_n)$ der konstante Term von

$$(1+x)^p\, (1+1/x)^q = \frac{(1+x)^L}{x^q}.$$

Dieser ist aber $\binom{L}{q}$, woraus folgt $\sum_n p!\, q!\, \binom{p}{n} \binom{q}{n} = L!$ also sind alle $C_n = 1$. Symmetrisiert man einen Ausdruck der Form (1) mittelst der u_ν, $u_{\dot{\nu}}$, so bedeutet dies, dass man über alle Permutationen der μ_i, $\dot{\mu}_i \ldots$ und der λ_i, $\dot{\lambda}_i$ summiert. Dann erhält man $(p!)^2 (q!)^2$ Summanden und das Resultat ist

$$(u!)^2 (q-n)!^2 \quad (p-n)!^2 \quad S_n$$

weshalb bei Symmetrisieren mittelst der u_ν, $u_{\dot{\nu}}$ der Faktor $\frac{1}{(n!)^2\, (q-n)!\, (p-n)!}$ vor jeden Summanden der Form (1) zu setzen ist.

Zahl der unabhängigen Komponenten von Tensoren.

Ein in allen Indices symmetrischer Tensor der Stufe f im k-dimensionalen Raume hat

$$\binom{f+k-1}{k-1} \text{ Komponenten.}$$

Unser Tensor $A_{ik\ldots l}$ der Stufe f ist symmetrisch in allen Indices und genügt den Gleichungen

$$A_{ii\ldots k} = 0\,.$$

Diese sagen aus, dass ein symmetrischer Tensor der Stufe $f-2$ verschwinden soll, d. h. es sind soviele Gleichungen als ein solcher Tensor Komponenten hat. In unserem Falle hat der Raum 4 Dimensionen. $A_{ik\ldots l}$ hat daher $\binom{f+3}{3}$ Komponenten zwischen denen noch $\binom{f+3}{3}$ Gleichungen bestehen.

Daher hat $A_{ik\ldots l}$

$$\binom{f+3}{3} - \binom{f+1}{3} = (f+1)^2$$

linear unabhängige Komponenten.

Wegen der Differentialgleichung

$$\frac{\partial A_{ik\ldots l}}{\partial x_i} = 0$$

sind für ebene Wellen in deren Ruhsystem die Amplituden null, falls $i, k\ldots = 4$. Die Dimensionszahl k reduziert sich deshalb in diesem Falle auf 3. Daher existieren zu vorgegebenen Wellenzahlvektor k_i

$$\binom{f+2}{2} - \binom{f}{2} = 2f+1$$

linear unabhängige ebene Wellen.

Wir wollen nun noch die Komponentenzahl des Tensors $B^{(1)}_{\underline{a}\,k\,(m\,l)}$ bestimmen ($\underline{a}$ bedeutet die Gesamtheit von $f-2$ Indices. In den Indices $(\underline{a}\,k)$ ist $B^{(1)}$ symmetrisch, in $[m\,l]$ schief. $B^{(1)}$ genügt den Gleichungen

$$B^{(1)}_{\underline{a}\,k\,[k\,l]} = 0\,. \tag{1}$$

$$B^{(1)}_{\underline{a}\,k\,[l\,m]} + B^{(1)}_{\underline{a}\,m\,[k\,l]} + B^{(1)}_{\underline{a}\,l\,[m\,k]} = 0\,. \tag{2}$$

Es sind nun die unabhängigen von diesen Gleichungen zu be-

stimmen. Dazu schreiben wir die Gleichungen in abgekürzter Form aus, indem wir nur die Indices anschreiben. Weiter setzen wir

$$\begin{array}{ll} [23] = [1] & [14] = [4] \\ [31] = [2] & [24] = [5] \\ [12] = [3] & [34] = [6]. \end{array}$$

Damit erhalten wir

$$\left.\begin{array}{l} \underline{a}\ 2\ [3] - \underline{a}\ 3\ [2] - \underline{a}\ 4\ [4] = 0 \\ \underline{a}\ 1\ [3] - \underline{a}\ 3\ [1] - \underline{a}\ 4\ [5] = 0 \\ \underline{a}\ 2\ [1] - \underline{a}\ 1\ [2] - \underline{a}\ 4\ [6] = 0 \\ \underline{a}\ 1\ [4] + \underline{a}\ 2\ [5] + \underline{a}\ 3\ [6] = 0\ (+) \end{array}\right\} \quad (1)$$

$$\left.\begin{array}{l} \underline{a}\ 3\ [5] - \underline{a}\ 2\ [6] - \underline{a}\ 4\ [1] = 0 \\ \underline{a}\ 1\ [6] - \underline{a}\ 3\ [4] - \underline{a}\ 4\ [2] = 0 \\ \underline{a}\ 2\ [4] - \underline{a}\ 1\ [5] - \underline{a}\ 4\ [3] = 0 \\ \underline{a}\ 1\ [1] + \underline{a}\ 2\ [2] + \underline{a}\ 3\ [3] = 0\ (+) \end{array}\right\} \quad (2)$$

Die beiden letzten Gleichungen in (1) und (2) die mit (+) bezeichnet sind, können, falls ein Index unter den Indices $\underline{a}$ gleich 4 ist, aus den drei anderen durch Addition gefolgert werden. Weiter folgen aus (1) und (2), indem man in jeder Gleichung für $\underline{a}$ geeignete Werte einsetzt durch Addition die Gleichungen

$$B_{i i \underline{a} [m l]} = 0$$

welche daher nichts Neues bedeuten. Sonst sind (1) und (2) unabhängige Gleichungen.

$B^{(1)}_{i k \ldots [m l]}$ ist nun in $f-1$ Indices symmetrisch und in zweien schief, hat daher $6 \cdot \binom{f+2}{3}$ Komponenten. Weiter genügt es (1) und (2). In sechs dieser Gleichungen laufen die $(f-2)$ Indices $\underline{a}$ von 1 bis 4. Diese Gleichungen bedeuten daher, dass ein symmetrischer Tensor der Stufe $f-2$ in 4 Dimensionen null sein soll. Die Gleichungen ergeben deshalb $6 \cdot \binom{f+1}{3}$ Nebenbedingungen. In den beiden letzten Gleichungen die mit (+) bezeichnet sind, laufen die Indices a jedoch nur von 1 bis 3, falls man nur unabhängige Gleichungen betrachtet. Wir erhalten daher $2\binom{f}{2}$ weitere Bedingungen. Darnach hat $B^{(1)}$

$$6\binom{f+2}{3} - 6\binom{f+1}{3} - 2\binom{f}{2} = 2f^2 + 4f$$

linear unabhängige Komponenten.

Felder mit Ruhmasse null.

Um den Fall der Ruhmasse null zu betrachten, gehen wir von den folgenden Gleichungen aus:

Im Falle ganzen Spins:

$$\left.\begin{aligned} \Box A_{ik\ldots l} &= 0 \\ \frac{\partial A_{ik\ldots l}}{\partial x_i} &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

Daraus folgt:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial A_{ik\ldots l}}{\partial x_m} - \frac{\partial A_{mk\ldots l}}{\partial x_i} &= B^{(1)}_{[mi]k\ldots l} \\ \frac{\partial B_{[mi]k\ldots l}}{\partial x_m} &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Im Falle halben Spins:

$$\left.\begin{aligned} p^{\dot\nu\varrho}\, a^{(0)\,\dot\lambda\cdots}_{\varrho\,\delta\ldots} &= 0 \\ p_{\dot\lambda\lambda}\, b^{\dot\lambda\dot\mu\cdots}_{\varrho\ldots} &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Aus diesen Gleichungen folgt

$$\left.\begin{aligned} \Box a^{(0)\,\dot\lambda\cdots}_{\varrho\,\delta\ldots} &= 0 \\ \Box b^{(0)\,\dot\lambda\dot\tau\cdots}_{\varrho} &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Diese Gleichungen entstehen aus denen, die wir oben angegeben haben durch Nullsetzen von $\varkappa$. Die $A_{ik\ldots l}$, $a^{(0)\,\dot\lambda\cdots}_{\varrho\,\delta\ldots}$, $b^{(0)\,\dot\lambda\dot\mu\cdots}_{\varrho\ldots}$ sollen sonst die gleichen algebraischen Eigenschaften haben, wie im Falle $\varkappa \neq 0$. Mittelst dieser so definierten Feldgrössen können wir nun wieder einen Energie-Impulstensor und einen Stromvektor aufbauen. Der Energie-Tensor im ganzzahligen Falle ist

$$\begin{aligned} T_{kl} = \tfrac{1}{2}\{B^{*\,(1)}_{[ik]m\ldots}\, B^{(1)}_{[il]m\ldots} + B^{(1)*}_{[il]m\ldots}\, B^{(1)}_{[ik]m\ldots}\} \\ - \tfrac{1}{4}\,\delta_{kl}\, B^{(1)*}_{[ri]m\ldots}\, B^{(1)}_{[ri]m\ldots} \end{aligned} \tag{5}$$

Die Energie

$$-\int T_{44}\, dN = \sum_k |k_4|^2 \{A^{*+}_{ir\ldots}(k)\, A^{+}_{ir}(k) + A^{-*}_{ir}(k)\, A^{-}_{ir}(k).\} \tag{6}$$

Im halbzahligen Falle ist der Stromvektor

$$s_{\dot\lambda\beta} = a^{(0)*\,\varrho\cdots}_{\dot\lambda\dot\nu}\, a^{(0)\,\dot\nu\cdots}_{\beta\,\varrho\ldots} + b^{(0)*\,\varrho\cdots}_{\beta\,\dot\mu\ldots}\, b^{(0)\,\dot\mu\cdots}_{\dot\lambda\,\varrho\ldots}. \tag{7}$$

Mit der Gesamtladung

$$\varrho = \int (s_{1\dot1} + s_{2\dot2})\, dV. \tag{8}$$

Die Ausdrücke (6) und (8) können für gewisse Zustände verschwinden, ohne dass die Feldgrössen null sind. Im Falle des ganzzahligen Spins ist die Energie immer dann null, wenn der Tensor $A_{ik\ldots l} \equiv N_{ik\ldots l}$ wie folgt dargestellt werden kann:

$$N_{ik\ldots lm} = \frac{\partial C_{k\ldots lm}}{\partial x_i} + \frac{\partial C_{i\ldots lm}}{\partial x_k} \cdots + \frac{\partial C_{ik\ldots l}}{\partial x_m} \tag{9}$$

wobei $C_{k\ldots lm}$ die folgenden Gleichungen erfüllt:

$$\Box C_{k\ldots l} = 0, \quad \frac{d C_{k\ldots l}}{\partial x_k} = 0, \quad C_{kk\ldots l} = 0$$

und in allen Indices symmetrisch ist. Dass die Energie dann null ist, zeigt man am einfachsten dadurch, dass man $C_{k\ldots l}$ in ebene Wellen zerlegt und in den Ausdruck für die Energie einsetzt.

Ebenso kann man, ohne die Energie zu ändern, zu jedem Felde $A_{ik\ldots l}$ noch ein Feld $N_{ik\ldots l}$ von der durch (9) definierten Gestalt hinzuaddieren. In Analogie zur Elektrodynamik heissen wir die Transformation

$$A'_{ik\ldots l} = A_{ik\ldots l} + N_{ik\ldots l}$$

„Eichtransformation". $N_{ik\ldots l}$ ist dabei durch (9) definiert.

Hat $A_{ik\ldots l}$ f Indices, so gibt es zu jedem Wellenzahlvektor $2f+1$ linear unabhängige ebene Wellen $A_{ik\ldots l}$. Der Tensor $C_{ik\ldots l}$ hat $f-1$ Indices, demgemäss gibt es zu jedem Wellenzahlvektor $2f-1$ linear unabhängige ebene Wellen $N_{ik\ldots l}$. Betrachtet man Zustände als gleichwertig, die durch „Eichtransformation" auseinander hervorgehen, so gibt es demnach bei Ruhmasse null und $f \geqslant 1$ nur zwei linear unabhängige, wirklich verschiedene ebene Wellen vorgegebener Wellenzahl und Frequenz.

In der gleichen Weise kann man zu den Feldern $a^{(0)\dot{\lambda}\cdots}_{\beta\ldots}$, $b^{(0)\dot{\nu}\cdots}_{\delta\ldots}$ Spinorfelder $n^{\dot{\lambda}\cdots}_{\beta\ldots}$, $m^{\dot{\nu}\cdots}_{\delta}$ hinzuaddieren, ohne die Energie und die Ladung zu ändern. Dabei sind $n^{\dot{\lambda}\cdots}_{\beta\ldots}$, $m^{\dot{\nu}\cdots}_{\delta\ldots}$ von der Gestalt

$$n^{\dot{\lambda}\dot{\tau}\cdots}_{\gamma\delta\ldots} = p^{\dot{\lambda}}_{\gamma}\, c^{\dot{\tau}\cdots}_{\delta\ldots} + p^{\dot{\tau}}_{\gamma}\, c^{\dot{\lambda}}_{\delta} + \cdots + p^{\dot{\lambda}}_{\delta}\, c^{\dot{\tau}}_{\gamma} + \cdots$$
$$m^{\dot{\lambda}\dot{\tau}\cdots}_{\gamma\delta\ldots} = p^{\dot{\lambda}}_{\delta}\, d^{\dot{\tau}\cdots}_{\delta\ldots} + p^{\dot{\tau}}_{\gamma}\, d^{\dot{\tau}}_{\delta} + \cdots + p^{\dot{\lambda}}_{\delta}\, d^{\dot{\tau}}_{\gamma} + \cdots$$

$C^{\dot{\tau}}_{\delta}$ hat dabei je einen punktierten und einen unpunktierten Index weniger als $a^{(0)}$, $\alpha^{\dot{\nu}}_{\delta}$ je einen punktierten und einen unpunktierten Index weniger als $b^{(0)}$. Beide sind symmetrisch und genügen den gleichen Gleichungen wie $a^{(0)}$ bzw. $b^{(0)}$. Daraus folgt, in gleicher

Weise wie im Falle ganzzahligen Spins, dass, falls man zwischen Zuständen, welche durch die „Eichtransformation"

$$a^{(0)\,\dot{\lambda}\cdots}_{\gamma\ldots} + n^{\dot{\lambda}\cdots}_{\gamma\ldots} = a^{(0)'\,\dot{\lambda}\cdots}_{\gamma\ldots}$$
$$b^{(0)\,\dot{\lambda}\cdots}_{\gamma\ldots} + m^{\dot{\lambda}\cdots}_{\gamma\ldots} = b^{(0)'\,\dot{\lambda}\cdots}_{\gamma\ldots}$$

auseinander hervorgehen, welche also zur gleichen Energie und Ladung gehören, nicht unterscheidet, nur zwei wirklich verschiedene ebene Wellen vorgegebener Wellenzahl und Frequenz existieren. (Im Falle des Spin $\frac{1}{2}$ fällt natürlich die Eichtransformation weg.)

Aus den $B^{(1)}$ und den $a^{(0)}$, $b^{(0)}$ kann man nun wiederum neue Grössen $B^{(q)}$, $a^{(q)}$, $b^{(q)}$ bilden. Mit diesen können jedoch keine physikalisch brauchbaren Energie-Tensoren aufgebaut werden, weil die zugehörige Energie zufolge der Wellengleichungen identisch verschwindet. Interessant sind hingegen diejenigen Spinoren, welche nur eine einzige Indexsorte besitzen und durch Differentiation aus dem $A_{ik\ldots l}$ zugeordneten Spinor bzw. aus $a^{(0)}$, $b^{(0)}$ durch Differentiation gewonnen werden gemäss

$$a_{\alpha\beta\ldots\gamma\varrho} = p_{\gamma\dot{\mu}}\, p_{\varrho\dot{\nu}\ldots}\, a^{(0)\,\dot{\mu}\,\dot{\nu}\cdots}_{\alpha\beta\ldots}\,. \tag{10}$$

Diese Grössen sind „eichinvariant" und verschwinden, wenn Ladung und Energie verschwinden. Man kann deshalb die Theorie mit Ruhmasse null dadurch quantisieren, dass man nur zwischen diesen eichinvarianten Feldgrössen die folgenden Vertauschungsrelationen fordert

$$\frac{1}{i}\,[a^{*}_{\alpha_1\ldots\alpha_k},\, a_{\dot{\iota}_1\ldots\dot{\iota}_k}]^{\pm} = \frac{1}{k!}\sum \mathrm{Perm}\,(a_i)\; p_{\alpha_1\dot{\iota}_1\ldots}\; p_{\alpha_k\dot{\iota}_k}\, D(x) \tag{11}$$

dabei ist das + oder — Zeichen zu nehmen, je nachdem k ungerade oder gerade ist. Da die Theorie drehinvariant ist, und alle Fourierkomponenten vertauschbar bzw. antivertauschbar sind, so kann die Widerspruchslosigkeit der Vertauschungsrelationen leicht eingesehen werden, indem man eine ebene Welle in der z-Richtung betrachtet. Wir wollen hier aber auf die sehr einfachen Beweise verzichten. Aus den „eichinvarianten" Feldgrössen können nun gemäss (10) wieder alle anderen Feldgrössen, bis auf eine Eichtransformation, durch Integration zurückgewonnen werden, insbesondere die den Energie-Tensor bildenden Grössen $a^{(0)}$, $b^{(0)}$ und der dem Tensor $A_{ik\ldots l}$ entsprechende Spinor. Da die Gesamtenergie und die Gesamtladung eichinvariant sind, so genügen deshalb die Vertauschungsrelationen (10) um die Eigenwerte dieser Grössen zu bestimmen.

Da die Energie- und Ladungsdichte aus den $a^{(0)}$, $b^{(0)}$ bzw. aus $B^{(1)}_{[ik]l\ldots}$ aufgebaut sind, so folgt daraus, dass diese Grössen ausser im Falle des Spins 0, $\frac{1}{2}$ und 1 nicht eichinvariant sein können, wodurch also die kleinen Spinwerte ausgezeichnet sind.

Spezialfälle als Beispiele.

Es sollen hier kurz einige Formeln der hier entwickelten Theorie zusammengestellt werden, welche sich auf die Spezialfälle $f = {}^3/_2$ und $f = 2$ beziehen. Für den Fall $f = 1$ verweisen wir auf die angeführte Literatur.

$f = {}^3/_2$. Hier lauten die Gleichungen in Spinorform

$$p^{\dot\lambda\mu} a^{\dot\tau}_{\mu\lambda} = \varkappa\, b^{\dot\lambda\dot\tau}_{\lambda}; \quad \varepsilon_{\dot\lambda\dot\tau} p^{\dot\tau\varrho} a^{\dot\lambda}_{\varrho\lambda} = 0$$

$$p_{\mu\dot\lambda} b^{\dot\lambda\dot\tau}_{\lambda} = \varkappa\, a^{\dot\tau}_{\mu\lambda}; \quad \varepsilon^{\mu\lambda} p_{\mu\dot\lambda} b^{\dot\lambda\dot\tau}_{\lambda} = 0\,.$$

Die Vertauschungsrelationen nehmen die Gestalt an

$$\frac{1}{i}\left[a^{*\mu}_{\dot\lambda\dot\tau}, a^{\dot\mu}_{\alpha\beta}\right]^{+} = \frac{1}{6}\Big[p_{\dot\lambda\alpha}\,\delta^{\dot\mu}_{\dot\tau}\,\delta^{\mu}_{\beta} + p_{\dot\tau\alpha}\,\delta^{\dot\mu}_{\dot\lambda}\,{}^{\mu}_{\beta} + p_{\dot\tau\beta}\,\delta^{\dot\mu}_{\dot\lambda}\,\delta^{\mu}_{\alpha} + p_{\dot\lambda\beta}\,\delta^{\dot\mu}_{\dot\tau}\,\delta^{\mu}_{\alpha}$$

$$+ \frac{1}{\varkappa^2}\left\{p_{\dot\lambda\alpha}\,p_{\dot\tau\beta}\,p^{\dot\mu\mu} + p_{\dot\lambda\beta}\,p_{\dot\tau\alpha}\,p^{\dot\mu\mu}\right\}\Big]\,D(x)\,.$$

Betrachtet man ebene Wellen, die sich in Raum und Zeit wie $e^{ikz+i\omega t}$ ändern, so bedeuten die Feldgleichungen das Bestehen der Relationen

$$k^2 - \omega^2 + \varkappa^2 = 0$$

$$a^{\dot 1}_{21} = a^{\dot 2}_{11}\,\frac{\omega + k}{\omega - k}\,; \quad a^{\dot 2}_{12} = a^{\dot 1}_{22}\,\frac{\omega - k}{\omega + k}$$

$a^{\dot 1}_{22}$, $a^{\dot 1}_{11}$, $a^{\dot 2}_{22}$, $a^{\dot 2}_{11}$ können dann als die vier unabhängigen Amplituden betrachtet werden, welche die vier Polarisationen bezeichnen.

$f = 2$. Hier möchten wir nur die Vertauschungsrelationen zwischen den A_{ik} angeben:

$$i\,[A_{ik}, A^{*}_{i'k'}] = \tfrac{1}{2}\,(R_{ii}, R_{kk'} + R_{ik'}\,R_{ki'} - \tfrac{2}{3}\,R_{ik}\,R_{i'k'})\,D(x)\,.$$

Der Faktor $\frac{1}{2}$ der rechten Seite ist so gewählt, dass die Spur über $i\,i'$, $k\,k'$ auf der rechten Seite gleich $(2f+1)\,D = 5 \cdot D$ wird. (Man beachte, dass $R_{ik}\,R_{kl} = R_{il}$; $R_{kk} = 3$).

Spezielle Darstellung der u^ν und v^ν.

Sei α ein Index, der angibt, wieviele Indices eines Spinors eins sind und der von null bis $2k-1$ läuft, β ein ebensolcher Index, der von null bis $2k$ läuft. Falls nun k eine ganze Zahl ist, setze man

$$u_1(k)_{\beta\alpha} = \sqrt{\beta}\,\delta_{\beta-1,\alpha}, \qquad v^1_{\alpha\beta}(k) = \sqrt{\alpha+1}\,\delta_{\alpha+1,\beta}$$
$$u_2(k)_{\beta\alpha} = \sqrt{2k-\beta}\,\delta_{\beta\alpha}, \quad v^2_{\alpha\beta}(k) = \sqrt{2k-\alpha}\,\delta_{\alpha\beta}$$

falls k halbganz, setze man

$$u^1_{\beta\alpha}(k) = \sqrt{\beta}\,\delta_{\beta-1,\alpha} \qquad v_{1,\alpha\beta}(k) = \sqrt{\alpha+1}\,\delta_{\alpha+1,\beta}$$
$$u^2_{\beta\alpha}(k) = \sqrt{2k-\beta}\,\delta_{\beta\alpha} \qquad v_{2,\alpha\beta}(k) = \sqrt{2k-\alpha}\,\delta_{\alpha\beta}.$$

Die mit Hilfe dieser Darstellung sich gemäss

$$\mu^\mu(k)\,v_\nu(k) = \left(k\,\delta^\mu_\nu - s^\mu_\nu(k)\right)(-1)^{2k+1}$$

ergebende Darstellung der Lorentzgruppe ist mit derjenigen bei VAN DER WAERDEN identisch.

Dabei ist in der Bezeichnung von VAN DER WAERDEN

$$A_p = s^{11},\ A_q = s^{22},\ A_2 = s^{12}$$

und

$$J = k,\ J + M = \beta.$$

Diese Arbeit wurde unter der Leitung von Prof. W. PAULI ausgeführt; ich möchte ihm für viele wertvolle Anregungen meinen besten Dank aussprechen.

Zürich, Physikalisches Institut der E.T.H.

Literatur.

[1]) P. JORDAN und W. PAULI, Z. S. f. Ph. **47** (1928), S. 151.

[2]) VAN DER WAERDEN, Die Gruppentheoret. Methode in der Quantenmechanik, Springer, Berlin 1932. III. Kapitel, § 20.

[3]) P. A. M. DIRAC, Proc. Roy. Soc. **A 155** (1936), S. 447.

[4]) S. SAKATA und H. YUKAWA, Proc. Phys.-Nath. Soc. Japan **19** (1937), S. 91.

[5]) PROCA, C. R. **202** (1936), S. 1490.

[6]) E. C. G. STUECKELBERG, Helv. Ph. Acta XI. (1938), S. 299.

[7]) N. KEMMER, Proc. Roy. Soc. A. **166** (1938), S. 127. Hier finden sich auch Anwendungen dieser Theorie auf die Kernkräfte sowie auf die Theorie der harten Komponente der Höhenstrahlung.